4G 14/2/2000 Potenze in $\Re$

1. Si consideri la potenza $a^{m/n}$ con $a \in \Re^+$ e m/n frazione assoluta ridotta ai minimi termini. a) cosa si intende con $a^{m/n}$? b) Perché si richiede $a \in \Re^+$ c) In quali casi la potenza ha senso con $a \in \Re^-$? d) quale criterio guida si segue nel dare la definizione? e) come si generalizza la definizione al caso di potenza con esponente irrazionale?

2. Indicare le 4 proprietà standard delle potenze a^α con $a \in \Re^+$ e $\alpha \in \Re$

3. Disegnare in uno stesso sistema d'assi le curve $y = x^\alpha$ con $x \in \Re^+$ per i seguenti valori di α: $\alpha_1 = 0$ | $\alpha_2 = 1$ | $\alpha_3 > 1$ | $\beta = \frac{1}{\alpha_3}$ | $\alpha_4 = -1$ | $\alpha_5 < -1$ | $\gamma = \frac{1}{\alpha_5}$

4. Tratteggiare nel primo quadrante le zone in cui è compreso il diagramma di $y = x^\alpha$ con $\alpha \in]0,1[$

5. 5.1) $y = a^x = b^? \Rightarrow ? =$ ______________ 5.2) Il dominio di $y = \log_{f(x)} g(x)$ è dato da __________________

5.3) Il codominio di $y = \log_{1/3}(1 + x^2)$ è ______________ 5.4) $\log_a b = \log_{1/a} ? \Rightarrow ? =$ ______________

5.5) Le due funzioni $f(x) = x^{1/3}$ e $g(x) = x^{2/6}$ sono diverse perché ______________________________________

6. Dimostrare che $\log_a b^c = c \log_a b$

7. Posto $y = a^x$ con la condizione $a>0$ dare la definizione della funzione logaritmo.

1 ⇒ 3.5	2 ⇒ 1	3 ⇒ 2.5	4 ⇒ 1	5 ⇒ 3.5	6 ⇒ 2.5	7 ⇒ 1	totale 15

4G 1/3/2000 Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

Quando nelle soluzioni compaiono dei valori complessi essi vanno indicati simbolicamente dopo aver calcolato a parte il loro valore approssimato.

1. Stabilire il numero e la posizione approssimativa delle soluzioni dell'equazione $e^{|x-1|} - 2x - 1 = 0$. Dopo aver indicato simbolicamente le soluzioni usare il risultato e il metodo utilizzato per risolvere la disequazione $e^{|x-1|} - 2x - 1 \geq 0$

2. Data la funzione $y = f(x) = 2\log_2(x-1) - \log_2(2x-5)^2 - 1$ determinarne il dominio D e quindi trovare le soluzioni della disequazione $f(x) \geq 0$

3. Risolvere l'equazione $\sqrt{\ln(-x)} - 1 + \ln(-x)$

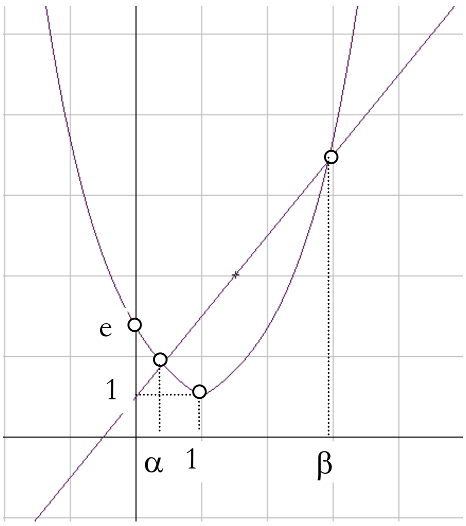
4. Risolvere l'equazione: $\sqrt{2e^2 - 3e^x} - 2e^x = 0$

5. Risolvere l'equazione esponenziale $k^{x-2} h^{x+1} = m$ dove k, h e m sono numeri positivi.

6. Risolvere l'equazione esponenziale $4^{x - \sqrt{x^2-5}} - 12\cdot 2^{x - 1 - \sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$

1⇒ 3+1+1	2⇒ 3	3 ⇒ 2.5	4 ⇒ 2.5	5 ⇒ 2.5	6 ⇒ 3.5	tot ⇒ 19

1. Si tratta di rappresentare le due funzioni $f(x) = e^{|x-1|}$ e $g(x) = 2x + 1$. La prima è una porzione di esponenziale traslata e



simmetrica rispetto alla retta x = 1. La seconda è una retta. Le soluzioni della equazione sono le ascisse α e β dei due punti di intersezione che portano ai valori approssimati $\alpha \approx 0.4$ e $\beta \approx 2.9$
La disequazione ha come soluzione i valori di cx corrispondenti alle zone in cui il diagramma di f(x) si trova sopra quello di g(x) si ha pertanto:
$x \leq \alpha \vee x \geq \beta$

2. Il dominio è dato da $x - 1 > 0 \wedge (2x-5)^2 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \wedge x \neq 5/2$
Nell'ambito del dominio si possono applicare le proprietà dei logaritmi e si ottiene:
$\log_2\frac{(x-1)^2}{(2x-5)^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{(2x-5)^2} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{-7x^2+38x-49}{(2x-5)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 7x^2-38x+49 \leq 0$

$\Delta/4 = 19^2 - 49\cdot 7 = 18$ $x = \frac{19 \pm 3\sqrt{2}}{7}$ $\alpha = \frac{19-3\sqrt{2}}{7} \approx 2.1$ $\beta = \frac{19+3\sqrt{2}}{7} \approx 3.3$e la disequazione è verificata entro l'intervallo α, β. Tenendo conto del dominio si ha pertanto: $\alpha \leq x < 5/2 \vee 5/2 < x \leq \beta$

3. Dopo aver posto $z = \sqrt{\ln(-x)}$ con la condizione $z \geq 0$ si ha $z^2 + z - 1 = 0$ che porta a $z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Solo la radice positiva è accettabile e si ha $\sqrt{\ln(-x)} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \ln(-x) = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow -x = \exp(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}) \Leftrightarrow x = -\exp(\frac{3-\sqrt{5}}{2}) \approx -1.465$

4. Non è necessaria la discussione preventiva del campo di esistenza che diviene implicito dopo l'elevamento al quadrato (lecito perché i due membri sono entrambi positivi). $\sqrt{2e^2 - 3e^x} = 2e^x \Leftrightarrow 2e^2 - 3e^x = 4e^{2x} \Leftrightarrow 4e^{2x} + 3e^x - 2e^2 = 0$ $\Delta = 9 + 32e^2 > 0$ da cui $e^x = \frac{-3 \pm \sqrt{\Delta}}{8}$. Solo la soluzione positiva è accettabile e si ha $x = \ln\frac{-3+\sqrt{\Delta}}{8} \approx 0.46$

5. $k^{x-2} h^{x+1} = m \Leftrightarrow k^x/k^2\, h^x h = m \Leftrightarrow (kh)^x = \frac{mk^2}{h} \Leftrightarrow x = \log_{kh}(\frac{mk^2}{h})$

6. $4^{x - \sqrt{x^2-5}} - 12\cdot 2^{x - 1 - \sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$ L'equazione presenta un esponente comune $x - \sqrt{x^2-5}$ che indichiamo con z; si ha così $4^z - 12\cdot 2^z/2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 2^{2z} - 6\, 2^z + 8 = 0$ $\Delta/4 = 9 - 8 = 1$ da cui si ha $2^z = 3 \pm 1$
Si hanno pertanto le due soluzioni: $z = \log_2 2 = 1$ e $z = \log_2 4 = 2$
Abbiamo così due equazioni irrazionali il cui campo di esistenza è $x^2 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{5} \vee x \geq \sqrt{5}$
$x - \sqrt{x^2-5} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-5} = (x-1) \Leftrightarrow x^2 - 5 = x^2 - 2x + 1 \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$ sol. acc.

$x - \sqrt{x^2 - 5} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5} = (x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 5 = x^2 - 4x + 4 \wedge x \geq 2 \Leftrightarrow 4x = 9 \Leftrightarrow x = 9/4 = 2.25 > \sqrt{5} \approx 2.24$ sol. acc.

4G 18/3/2000 recupero equazioni esponenziali e logaritmiche

Svolgere in maniera completa 4 dei seguenti 5 esercizi

1. Due delle seguenti quattro eguaglianze una sola è falsa in qualche contesto; identificarla e specificare perché è falsa

$\log_2\sqrt{|x|} = \frac{1}{2}\log_2|x|$ $\log_{1/2}x^5 - \log_{1/2}x^2 = \log_{1/2}x^3$ $2^{\log_2(2|xx+1|)} = 2x^2+2$ $\log_2 x^5 - \log_2 x = \log_2 x^4$

2. Risolvere per via grafica la seguente equazione: $\frac{1}{3^x} - 1 = |x^2 - 4|$

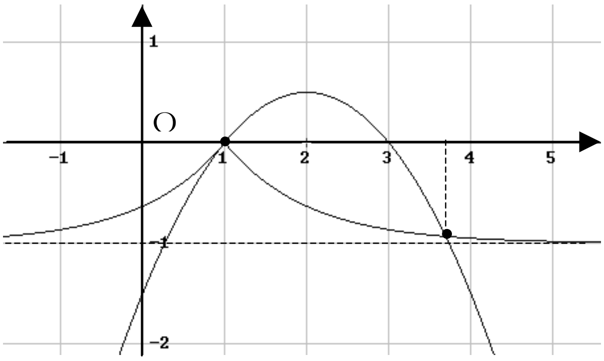
3. Risolvere la disequazione $\ln(x^2 - 5x + 4) \leq 0$

4. Determinare il dominio della funzione $y = f(x) = \sqrt{\sqrt{2^x - 3} - \sqrt{4 - 2^x}}$

5. Risolvere la disequazione $\frac{\ln(2x + 1)}{\sqrt{2 - 3\ln(2x + 1)}} < 1$

4G 29/4/2000 funzioni trascendenti

Tracciare il diagramma della funzione $\gamma : y = f(x) = e^{-|x - 1|} - 1$ caratterizzandone le simmetrie il punto di massimo e l'asintoto orizzontale. Utilizzare il diagramma per determinare il numero delle soluzioni e la posizione delle soluzioni dell'equazione $e^{-|x - 1|} - 1 = -1/2\, x^2 + 2x - 3/2$



Il diagramma di $\gamma : y = f(x) = e^{-|x - 1|} - 1$ si ottiene dopo aver effettuato la traslazione $x-1 = X$ e $y + 1 = Y$ e presenta una simmetria rispetto all'asse $x = 1$ e un asintoto orizzontale di equazione $y = -1$.

Il punto (1,0) è il massimo della funzione che presenta in esso (per effetto del modulo) un punto angoloso.

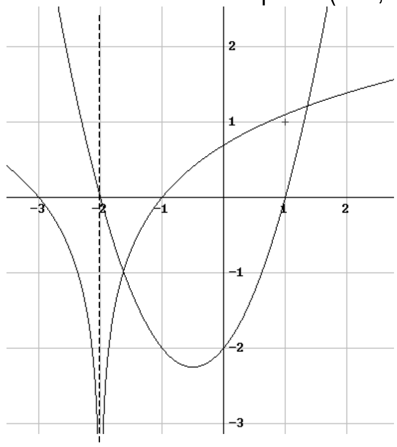
La seconda curva rappresenta una parabola con la concavità verso il basso che taglia l'asse x in 1 e 3.

Le soluzioni dell'equazione sono 2 la prima si ha per $x = 1$ e corrisponde ad una tangenza, la seconda per $x \approx 3.7$

4G 6/5/2000 funzioni trascendenti

Determinare per via grafica il numero e il valore delle soluzioni dell'equazione $\ln|x+2| - x^2 - x + 2 = 0$

Si tratta di studiare la funzione $y = \ln|x+2|$ che è una funzione logaritmica con asintoto verticale $x+2 = 0$ e simmetrica rispetto a tale asintoto e la parabola $y = x^2 + x - 2$ che ha concavità verso l'alto, taglia l'asse x in -2 e in 1 e che ha vertice nel punto (-1/2,-9/4)



In figura sono rappresentate le due curve con precisione e come si nota si hanno due soli punti di intersezione le cui ascisse sono le soluzioni dell'equazione.

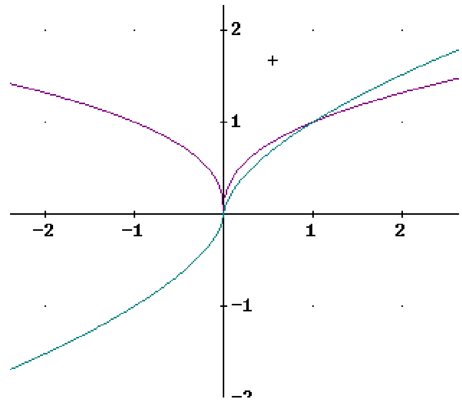
Con buona approssimazione si ha $x_1 \approx -1.6$ e $x_2 \approx 1.4$

4G 1/2/2001 Potenze in $\Re$

1) La funzione $y = x^x$ non corrisponde né ad una funzione potenza né ad un esponenziale ma può essere ridotta ad un esponenziale il cui esponente è una nuova funzione attraverso una opportuna trasformazione relativa al cambio di base.

In effetti $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$

2) Tracciare in due colori diversi in uno stesso sistema d'assi i diagrammi delle funzioni $y = x^{2/5}$ e $y = x^{3/5}$ e descriverne le principali caratteristiche



La funzione $x^{3/5}$ (in verde) è simmetrica rispetto all'origine mentre $x^{2/5}$ è simmetrica rispetto all'asse y. Le due curve hanno tangente verticale nell'origine e la seconda va all'infinito più lentamente.

3) Spiegare perché le due curve $\gamma : y = x^{m/n}$ e $\gamma' : y = {}^{n/m}$ sono simmetriche rispetto alla bisettrice del primo quadrante e perché quando si opera con una generica frazione come esponente si pone $x \in R^+$

γ: $y = x^{m/n} \Leftrightarrow y^{n/m} = x$

γ': $y = x^{n/m}$ dunque γ e γ' hanno lo stesso diagramma a meno di uno scambio delle ascisse e delle ordinate, ma quando si fa ciò per un punto si ottiene il simmetrico rispetto alla bisettrice del I quadrante.

La seconda domanda è legata al fatto che, ridotta la frazione ai minimi termini, quando il denominatore è pari la potenza viene a corrispondere ad una radice di indice pari e, come è noto, esse non esistono per i numeri negativi.

4) Spiegare perché le due funzioni $y = \log x$ e $y = \ln x$ hanno lo stesso andamento a meno di un cambiamento di scala lungo l'asse y.

Applicando il teorema sul cambio di base si ha: $y = \log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} = k \ln x$ e dunque i due diagrammi coincidono salvo un cambiamento di scala.

5) Dimostrare la seguente proprietà dei radicali $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$ e quindi precisare a quale proprietà delle potenze essa viene a corrispondere.

Posto $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = y$ si ha $\sqrt[m]{x} = y^n \Leftrightarrow x = (y^n)^m = (y)^{nm} \Leftrightarrow \sqrt[nm]{x} = y$ come volevasi dimostrare. La proprietà consente di affermare che $(x^{1/m})^{1/n} = x^{1/(m\,n)} = x^{1/m\ 1/n}$ e cioè che la potenza di potenza corrisponde al prodotto degli esponenti anche per le potenze ad esponente frazionario

6) Spiegare perché non esistono i logaritmi in base 1

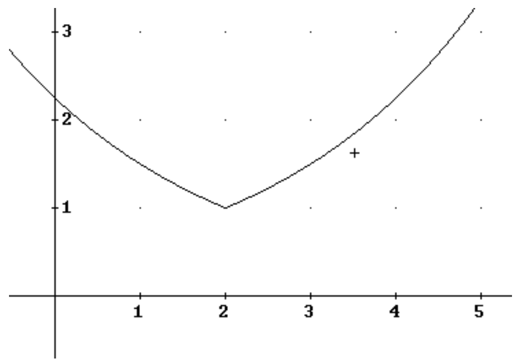
Perché la funzione esponenziale 1^x è una retta orizzontale e dunque non è invertibile

7) Scrivere simbolicamente le condizioni che portano a determinare il dominio della seguente funzione supponendo che f(x) e g(x) abbiano come dominio R. $y = \ln \sqrt{\dfrac{f(x)-g(x)}{|f(x)|}}$. Cosa bisogna fare se il dominio di f(x) è $\mathcal{D}_f$ e quello di g(x) è $\mathcal{D}_g$

Deve essere $\sqrt{\dfrac{f(x)-g(x)}{|f(x)|}} > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x) \wedge f(x) \neq 0$

Se si indica con $\mathcal{S}$ la soluzione della disequazione precedente il dominio $\mathcal{D} = \mathcal{S} \cap \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_f$

8) Tracciare il diagramma di $y = a^{|x-b|}$ sapendo che $a > 1$ e $b > 0$



Si tratta di una funzione esponenziale simmetrica rispetto all'asse $x = b$ che, per $x > b$ si comporta come e^z con $z > 0$ e dunque la funzione presenta un *punto angoloso* in (b,1). In figura è stata rappresentata come esempio la curva corrispondente ad $a = 1.5$ e $b = 2$

4G 3/2/2001 Funzioni esponenziali e logaritmiche

Svolgere i 5 esercizi proposti

1) Determinare il dominio della funzione γ: $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{e^{6x-2} - 2e^{3x-1} - 3}{2 - e^{3x-1}}}$

Osservato che $e^{6x-2} = (e^{3x-1})^2$ conviene utilizzare la sostituzione $e^{3x-1} = z$ con $z > 0$ e per lo studio della positività dell'argomento della radice dovrà essere:

$N \geq 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta/4 = 1 + 3 = 4 = 2^2$ valori esterni all'intervallo [-1,3] che porta a $z \geq 3$

$D > 0 \Leftrightarrow z < 2$

Attraverso il solito confronto grafico si arriva a $2<z\leq3 \Leftrightarrow 2 < e^{3x-1} \leq 3 \Leftrightarrow \ln 2 < 3x - 1 \leq \ln 3 \Leftrightarrow 1/3 (\ln 2 + 1) < x \leq 1/3(\ln 3 + 1)$

2) Determinare il dominio della funzione γ: $y = f(x) = \ln\left(\sqrt{2 - x} - \sqrt{x - 1}\right)$

Deve essere $\left(\sqrt{2 - x} - \sqrt{x - 1}\right) > 0 \Leftrightarrow 2 - x \geq 0 \wedge x - 1 \geq 0 \wedge 2 - x > x - 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \wedge 2x < 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3/2$

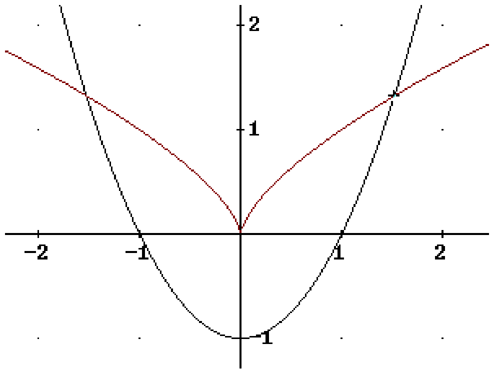
3) Determinare il dominio della funzione γ: $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln 3x^2 - \ln 2x}}{\sqrt{|4^x - 2^x| - 6}}$ (conviene ricordare che $|z| > k > 0 \Leftrightarrow z > k \vee z < -k$)

Dovrà essere $3x^2 > 0$ e $2x > 0$ per l'esistenza dei logaritmi il che ci porta a $x > 0$ e ci consente di applicare la proprietà del logaritmo della differenza; dovrà dunque essere:

$\ln(3/2\, x) \geq 0 \wedge |4^x - 2^x| - 6 > 0 \Leftrightarrow 3/2\, x \geq 1 \wedge |2^{2x} - 2^x| > 6 \Leftrightarrow x \geq 2/3 \wedge [2^{2x} - 2^x > 6 \vee 2^{2x} - 2^x < -6] \Leftrightarrow x \geq 2/3 \wedge [2^{2x} - 2^x - 6 > 0 \vee 2^{2x} - 2^x + 6 < 0] \Leftrightarrow x \geq 2/3 \wedge [\Delta = 1 + 24 = 5^2$ valori esterni a $[-2, 3] \vee \Delta\ 1 - 24 < 0\ x \in \varnothing] \Leftrightarrow x \geq 2/3 \wedge [2^x < -2 \vee 2^x > 3] \Leftrightarrow x \geq 2/3 \wedge x \geq \log_2 3 \approx 1.585 \Leftrightarrow x \geq \ln 3 / \ln 2$

4) Risolvere per via grafica la disequazione $x^{2/3} > x^2 - 1$ determinando gli estremi degli intervalli coinvolti con precisione di almeno 2 cifre significative.

Si tratta di confrontare la funzione potenza $y = x^{2/3}$ con la parabola $y = x^2 - 1$ come nella figura qui a lato (la parabola ha vertice (0,-1) ed è simmetrica rispetto all'asse y). La disequazione risulta verificata per $-\alpha \leq x \leq \alpha$ e dal disegno si può effettuare una prima stima di $\alpha \approx 1.5$ se poi si sostituiscono valori prossimi si ha:



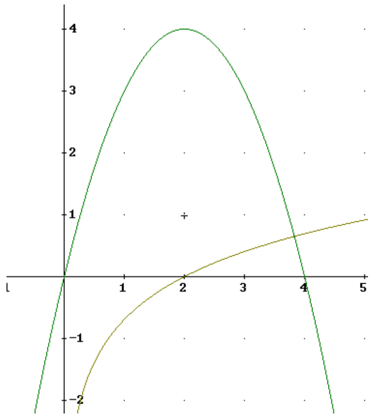
x	$x^{2/3}$	$x^2 - 1$
1.5	1.310	1.25
1.6	1.368	1.56
1.55	1.339	1.402

e si può pertanto optare per $\alpha \approx 1.55$

5) Risolvere per via grafica la disequazione $\ln x^2 - \ln x - \ln 2 > -x^2 + 4x$ determinando gli estremi degli intervalli coinvolti con precisione di almeno 2 cifre significative.

Precisato che per ragioni di dominio deve essere x>0 la funzione di sinistra si può scrivere $y = \ln \dfrac{x^2}{2x} = \ln (x/2)$ e si tratta pertanto di confrontare una funzione logaritmica con la ennesima parabola. Della funzione logaritmica bisogna evidenziare la intersezione in x = 2 e la crescita lenta calcolando un paio di punti approssimati

La soluzione della disequazione si ha per $x>\alpha$ con $\alpha \approx 3.5$. Anche questa volta confrontiamo le due funzioni nelle vicinanze di 3.5.



x	$\ln(x/2)$	$-x^2 + 4x$
3.5	0.5596	1.75
3.6	0.588	1.44
3.7	0.615	1.11
3.8	0.642	0.76
3.85	0.655	0.577

Si può assumere $\alpha \approx 3.8$

ex 4G recupero debito 11/5/2001

1. Dimostrare che se $\alpha > 0$, $\beta>0$ e $a>0$ si ha sempre $\log_a\alpha + \log_a\beta = \log_a(\alpha\beta)$. Quindi spiegare perché, in generale non è detto che le due funzioni $y = h(x) = \ln f(x) + \ln g(x)$ e $y = m(x) = \ln [f(x) \cdot g(x)]$ non coincidono
2. Tracciare il diagramma della funzione $y = e^{|x-1|} - 1$ (il diagramma, almeno nella versione definitiva deve essere in scala e con gli elementi caratteristici ben visibili). Quindi utilizzare tale diagramma per risolvere l'equazione $e^{|x-1|} - \frac{1}{x} - 1 = 0$. La/e soluzione/i vanno indicate simbolicamente e determinate con una precisione di 2 cifre significative usando la calcolatrice dopo che sono state individuate in numero e posizione sul diagramma.

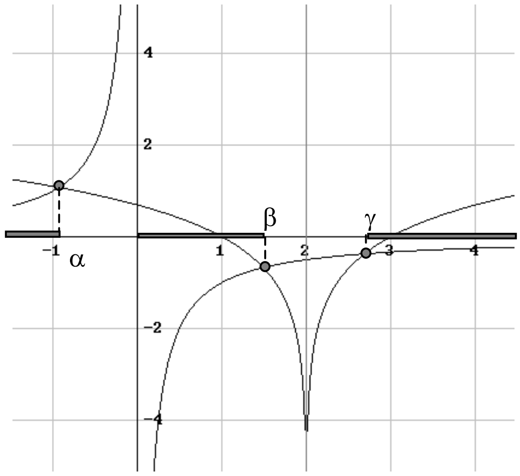
Liceo Zucchi II A ottobre 96 funzioni esponenziali

esercizi obbligatori: uno a scelta dei primi tre e il quarto

1	Risolvere la seguente disequazione per la quale sia consiglia la sostituzione $3^x = y$ $3^{x+2} + 3^{2-x} > 82$	⇒ 3
2	Risolvere la seguente disequazione $\log_{1/2}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} > 2$	⇒ 5
3	Risolvere la seguente equazione esponenziale: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$	⇒ 4
4	Si consideri la funzione $\gamma : y = f(x) = 3e^{x+2} - 4$. Attraverso traslazioni se ne rappresenti il diagramma indicando le coordinate delle intersezioni con gli assi e dell'asintoto orizzontale	⇒ 4
5	Si utilizzino i risultati dell'esercizio precedente per risolvere graficamente l'equazione $\mid 3e^{x+2} - 4 \mid + \frac{1}{4} x = 0$ identificando il numero e la posizione approssimativa delle soluzioni. Si determini poi la posizione della soluzione minore con una precisione di almeno 0.5	⇒ 5

4F PNI 31/10/2003 Esponenziali e logaritmi

1) Risolvere per via grafica la disequazione $\ln|x - 2| + \frac{1}{x} > 0$. La radice più a sinistra di quelle che caratterizzano le soluzioni va determinata con 3 cifre significative. Le altre possono essere caratterizzate solo dalla lettura del diagramma.



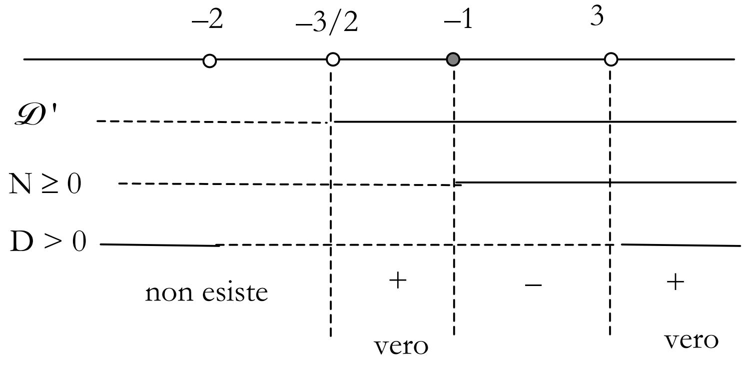
La disequazione equivale a $\ln|x - 2| > -\frac{1}{x}$ e ciò richiede il confronto tra una curva logaritmica e una iperbole equilatera.
γ_1 : $y = \ln|x - 2|$ è simmetrica rispetto a $x = 2$ dove presenta un asintoto verticale; taglia l'asse x in $x = 1$ e $x = 3$ mentre $f(0) = \ln 2 \approx 0.693$
γ_2 : $y = -\frac{1}{x}$ è simmetrica rispetto all'origine e rispetto a $y = -x$. Presenta i vertici in $(-1,1)$ e $(1,-1)$.
Tracciamo il diagramma prestando attenzione ad un buon rispetto dell'andamento perché dovremo da esso determinare gli estremi degli intervalli che caratterizzano le soluzioni.
Esse sono indicate in figura e corrispondono a:
$x < \alpha \vee 0 < x < \beta \vee x > \gamma$ con $\alpha \approx -0.9$; $\beta \approx 1.5$; $\gamma \approx 2.8$
Per determinare il valore di α con la precisione richiesta si costruisce una tabella adottando come seme il valore dedotto dal grafico e procedendo poi ad aggiustamenti successivi (metodo di dicotomia) sino alla precisione voluta riscontrabile dalla valutazione di Δy

x	$y_{\gamma 1}$	$y_{\gamma 2}$	$y_{\gamma 1} - y_{\gamma 2}$
–1	1.099	1.000	0.99
–0.9	1.065	1.111	–0.046
–0.95	1.082	1.053	0.029
-0.925	1.073	1.081	-0.008
–0.930	1.075	1.075	0

Dunque α, calcolato con una precisione migliore risulta $\alpha \approx -0.930$
Nota di correzione: ho riscontrato difficoltà nel tracciare con una precisione accettabile il diagramma; in particolare, dopo aver tracciato il logaritmo con qualche punto significativo bisognava essere altrettanto precisi per l'iperbole. Molti hanno dimenticato di scrivere le soluzioni (era una disequazione): è bene indicarle anche nel diagramma. La determinazione di β e γ doveva avere un errore non più alto del 10% (due cifre significative). La determinazione di γ richiede un metodo iterativo che deve risultare da una tabella razionale. Se improvvisamente compare –0.930 vuol dire che c'è stata una soffiata e non è stato fatto quanto richiesto.

2) Determinare il dominio della seguente funzione: $y = f(x) = \sqrt{\frac{\ln(2x + 3)}{x^2 - x - 6}}$

La richiesta corrisponde a risolvere la disequazione $\frac{\ln(2x + 3)}{x^2 - x - 6} \geq 0$ e ciò richiede di confrontare uno studio del segno con il dominio della funzione logaritmo.
$\mathscr{D}'$: $2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$
$N(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 3 > 1 \Leftrightarrow x > -1$



$D(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 > 0$ Δ $1 + 24 = 5^2$ valori esterni a $x_{12} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{array}{l} / -2 \\ \backslash +3 \end{array}$
Si ottiene dunque il seguente schema (intersezione tra segno positivo e dominio).
Il dominio della funzione data (soluzione della disequazione) è dunque:
$\mathscr{D}$: $-3/2 < x \leq -1 \vee x > 3$
Note di correzione: bisogna scrivere a cosa corrisponde la richiesta; bisogna distinguere bene lo studio del segno dal dominio della disequazione; bisogna stendere uno schema che distingua bene dominio e segno; bisogna evitare gli errori formali nell'uso degli intervalli e dei simboli logici; non è vietato lavorare con + e –

(come avete appreso nel biennio) ma in tal caso bisogna usare una simbologia diversa per il dominio. Ricordo che il tratto continuo vuol dire vero (vero quello che si è scritto a fianco).

3) Risolvere la disequazione $3\cdot2^{x-2} + 4^{x+1} - 5 > 0$ (gli estremi delle soluzioni vanno espressi in forma simbolica e poi calcolati in modo approssimato con la calcolatrice con 3 cifre significative).

Si tratta di una disequazione tutta esprimibile nella variabile $2^x = z$

$\frac{3}{4}2^x + (2^2)^{(x+1)} - 5 > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}2^x + 4\cdot2^{2x} - 5 > 0 \Leftrightarrow$ $16z^2 + 3z - 20 > 0$ $\Delta = 9 + 80\cdot16 = 1289$ valori esterni all'intervallo delle radici $z = \frac{-3 \pm \sqrt{1289}}{32} = \begin{cases} \alpha < 0 \\ \beta \approx 1.028 \end{cases}$

$2^x < \alpha \vee 2^x > \beta \Leftrightarrow x \in \varnothing \vee x > \log_2\beta = \frac{\ln\beta}{\ln 2} \approx 0.0401$

Nota di correzione: quando si arriva ad α e β non ha senso scrivere soluzione accettabile perché stiamo risolvendo una disequazione (se fossero venute due soluzioni negative cosa avreste scritto?). La soluzione finale va scritta in forma simbolica (compreso il cambio di base che consente la quantificazione).

4) Risolvere la disequazione $2^{3x-2} > e^{x+1}$ (gli estremi delle soluzioni vanno espressi in forma simbolica e poi calcolati in modo approssimato con la calcolatrice con 3 cifre significative).

La disequazione si può risolvere o con un cambio di base o passando ai logaritmi (e in tal caso si passa in base e visto che posi si dovrà svolgere il calcolo approssimato).

$e^{\ln2\cdot(3x-2)} > e^{x+1} \Leftrightarrow \ln2\cdot(3x-2) > x+1 \Leftrightarrow x(3\ln2 - 1) > 1 + 2\ln 2$ osservato che $3\ln 2 - 1 > 0$ si può dividere conservando l'ordinamento e si ha:

$x > \frac{1 + 2\ln 2}{3\ln 2 - 1} \approx 2.21$

Nota di correzione: si sono visti errori indegni relativi alla incapacità di risolvere una equazione di I grado quando i fattori sono *strani*.

18 ottobre 2004 4F PNI esponenziali e logaritmi

Svolgere uno a scelta tra i seguenti gruppi di esercizi: 1 o 2; 3 o 4; 5 o 6; 7 o 8. Non saranno valutati altri elementi come si nota dalla griglia di correzione

1. Dimostrare che: a) $e^{\log_{10}\pi} = \pi^{\log_{10}e}$ b) se z è un numero complesso e si usa la identità di Eulero $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ lo si può sempre scrivere come un esponenziale complesso (scrivere il risultato ricordando che un numero complesso si può sempre scrivere in forma trigonometrica)
   a) $e^{\log_{10}\pi} = 10^{\log_{10}e \cdot \log_{10}\pi} = (10^{\log_{10}\pi})^{\log_{10}e} = \pi^{\log_{10}e}$
   b) $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{\ln\rho}\, e^{i\theta} = e^{\ln\rho + i\theta}$
   Nota di correzione: non l'ha fatto nessuno
2. Scegliere la risposta corretta tra le seguenti questioni

4.1) $\ln x^2 =$	a) $2\ln x$	b) $\ln x \cdot \ln x$	c) $\ln^2 x$	d) $2\ln\lvert x\rvert$
4.2) $\log_a b =$	a) $\log_b a$	b) $\log_{(a^2)} b^2$	c) $\dfrac{1}{\log_b a}$	d) $-\log_b a$
4.3) $\log_a \dfrac{1}{a} =$	a) non esiste	b) -1	c) e^{-1}	d) a^{-1}
4.4) $e^{z^2} =$	a) $(e^z)^2$	b) e^{2z}	c) $(e^z)^z$	d) $(e^z)^{\ln 2}$
4.5) $\log_{2a} a =$	a) $\log_2 1$	b) $2\log_2 1$	c) $1 - \log_{2a} 2$	d) non si può eliminare a dall'argomento

Le risposte corrette sono d, c, b, c, c e si ottengono applicando le ben note proprietà

Nota di correzione: qualcuno ha fatto osservare che la scrittura e^{z^2} è ambigua; osservare che il testo è stato scritto con corpo via via decrescente e dunque Z è esponente di e mentre 2 lo è di z e pertanto la scrittura e^{z^2} significa $e^{(z^2)}$

$\log_{2a} a = \log_{2a}(2a/2) = \log_{2a} 2a - \log_{2a} 2 = 1 - \log_{2a} 2$

3. Determinare il dominio $\mathscr{D}$ della funzione $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{\ln(x+10) - 3}{x^2 - 6x - 7}}$

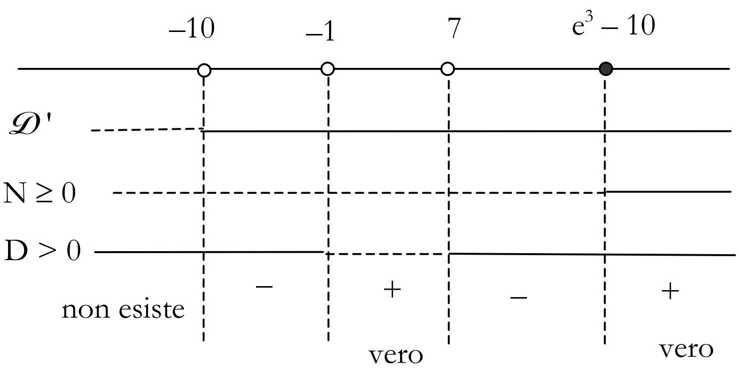
Il dominio $\mathscr{D}$ risulta dalla condizione $\dfrac{\ln(x+10) - 3}{x^2 - 6x - 7} \geq 0$ e ciò richiede la discussione separata del segno di numeratore e denominatore (attenzione al dominio del logaritmo $x > -10$)

$N \geq 0 \Leftrightarrow x + 10 \geq e^3 \Leftrightarrow x \geq e^3 - 10 \approx 10.1$

$D > 0 \Leftrightarrow \Delta/4 = 4^2$ valori esterni all'intervallo delle radici -1 e 7

Si traccia lo schema di discussione del segno e si ottiene che:

$\mathscr{D}: -1 < x < 7 \vee x \geq e^3 - 10$



Nota di correzione: ho riscontrato la presenza di numerose scritture improprie in sede di impostazione o la solita confusione tra studio del segno e studio di positività di numeratore e denominatore; normalmente l'esercizio è stato svolto correttamente

4. Trovare le soluzioni $\mathscr{S}$ della disequazione: $\ln(x-2) + 1 - \dfrac{1}{\ln\sqrt[20]{(x-2)}} \geq 0$

Dove il logaritmo esiste si ha: $\ln(x-2) + 1 - \dfrac{20}{\ln(x-2)} \geq 0$ o anche: $\dfrac{\ln^2(x-2) + \ln(x-2) - 20}{\ln(x-2)} \geq 0$

Studiamo separatamente il segno ed osserviamo che la condizione di esistenza del logaritmo è già implicita nella scrittura e sarà verificata automaticamente al termine dei conti

$N \geq 0 \Leftrightarrow \Delta = 81$ valori esterni all'intervallo delle radici $[-5,4]$

$D > 0 \Leftrightarrow \ln(x-2) > 0$

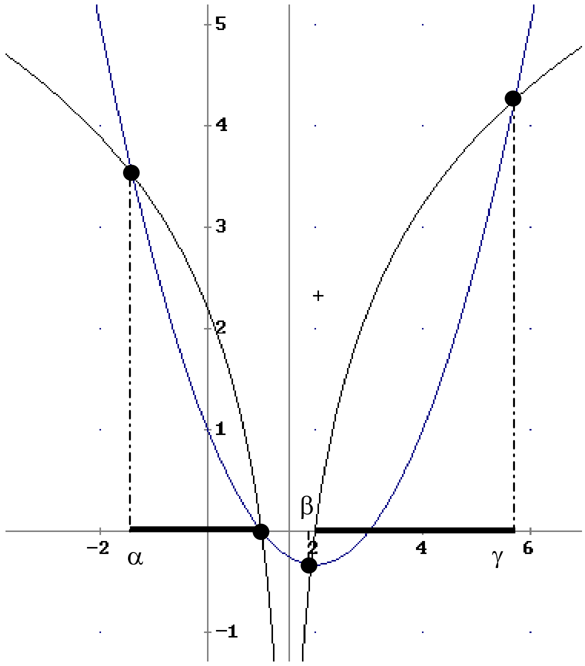
Disegnato lo schema si osserva che la frazione è positiva o nulla per $-5 \leq x < 0 \vee x \geq 4$ e tenuto conto che la funzione logaritmica è crescente ciò porta a:

$e^{-5} \leq x - 2 < 1 \vee x - 2 \geq e^4$ e infine $2 + e^{-5} \leq x < 3 \vee x \geq 2 + e^4$

Nota di correzione: l'esercizio non è risultato gradito sul piano delle scelte di svolgimento e pertanto merita di essere studiato a posteriori.

5. Risolvere graficamente la disequazione $2 \ln|2x - 3| > \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)$ determinando i valori approssimati degli estremi degli intervalli con una precisione alla prima cifra decimale.

Si tratta di discutere le intersezioni tra una curva logaritmica simmetrica e una parabola.



La curva logaritmica ha asintoto verticale in x = 3/2, taglia l'asse y in y = 2 ln 3 ≈ 2.18, taglia l'asse x in 2x – 3 = ± 1 e cioè in x = 1 e x = 2

La parabola taglia l'asse x in x = 1 e x = 3, ha il vertice in x = 2 e y = –1/3 e taglia l'asse y in y = 1

Si tracciano le due curve e si ottengono i due diagrammi che presentano oltre alla radice esatta x = 1 anche una radice negativa α compresa tra – 1 e – 2, una β immediatamente prima di – 2

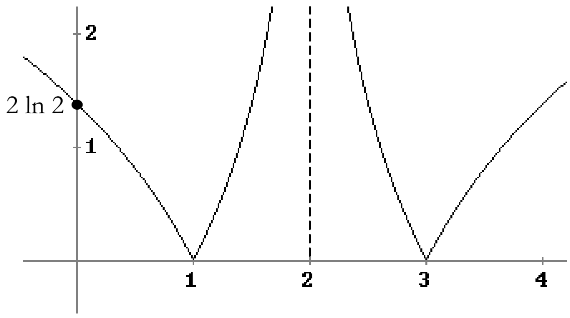
Le soluzioni si hanno per α < x < 1 oppure β < x < γ

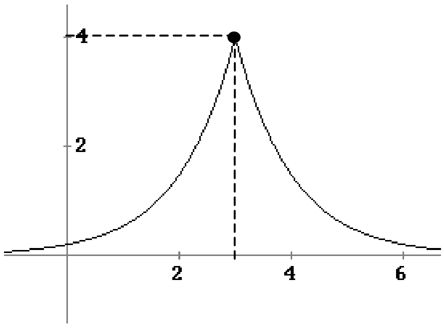
I valori approssimati si possono trovare tabulando con il metodo della dicotomia e risultano pari a α ≈ – 1.4, β ≈ 1.9, γ ≈ 5.7

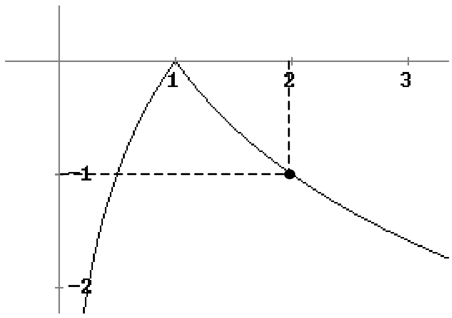
Nota di correzione: nessuno lo ha completato correttamente anche se molti si sono cimentati in esso. Segnalo i numerosi errori riscontrati: cattiva individuazione della simmetria, errore nel tracciamento della funzione logaritmica, errori nella caratterizzazione della parabola, mancata osservazione della esistenza di una radice esatta, mancata individuazione della soluzione della disequazione (gli intervalli), cattiva caratterizzazione delle soluzioni approssimate.

6. Le curve rappresentate in figura sono costituite da rami di esponenziali, logaritmi, logaritmi. Sulla base dei dati indicati nel diagramma precisare la corrispondente equazione dando una breve descrizione del ragionamento seguito.

La prima curva contiene come argomento |x – 2|. Ha l'andamento del logaritmo preso sempre positivo. Si tratta pertanto di k |ln|x – 2||; il valore di k si trova osservando che per x = 0 deve essere y = 2 ln 2 e si ricava pertanto k = 2







La seconda curva presenta l'asse di simmetria x = 3 e ha come andamento quello di un esponenziale decrescente. Si tratta pertanto di k $a^{-|x-3|}$ con a>1. Poiché per x = 3 si ha y = 4 deve essere k = 4. I dati a disposizione non consentono di precisare il valore di a per avere il quale servirebbe un altro punto (per esempio la intersezione con l'asse y).

La terza curva è del tipo –k |ln x| e dovendo essere y = –1 per x = 2 dovrà essere –k ln 2 = – 1 e cioè k = 1/ln 2

Nota di correzione: come abbiamo visto in classe il tracciamento e il riconoscimento rapido di funzioni richiedono più applicazione ed una maggiore abitudine a farsi aiutare nei compiti a casa da Derive. Dopo le ultime interrogazioni e chiarimenti spero che il quadro sia migliorato.

7. Il tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ del Ra^{226} vale 1622 anni. Determinare dopo quanto tempo la sua attività radioattiva si riduce del 10%

Se la attività si riduce del 10% si ha $A/A_0 = 0.9 = e^{-t/\tau}$ e dunque $t/\tau = -\ln 0.9 \approx 0.1054$

D'altra parte $\tau = T/\ln 2$ e pertanto $t = -\ln 0.9 \cdot 1622/\ln 2 \approx 246$ anni

8. In regime di capitalizzazione continua, indicato con k il tasso di interesse annuo, si ha $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0 = e^{kt}$ invece nel caso di capitalizzazione periodica, indicato con n il numero di periodi nell'anno in cui viene calcolato l'interesse k/n si ha $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0 = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{n\,t}$.

   a) Supponendo che k = 0.04 e n = 3 quanto è la quota persa dall'investitore in 10 anni?
   b) In regime di capitalizzazione continua quanto tempo occorre per raddoppiare il capitale?
   c) In regime di capitalizzazione trimestrale quanto occorre per raddoppiare il capitale?

a) per capitalizzazione continua $\mathcal{C}\mathcal{C}_0 = e^{0.04 \cdot 10} = 1.4918$ mentre la rivalutazione in caso di interessi quadrimestrali è pari a $\mathcal{C}\mathcal{C}_0 = \left(1 + \frac{0.04}{3}\right)^{3 \cdot 10} = 1.4879$ e dunque si ha una perdita relativa di 0.0039

b) $2 = e^{0.04t}$ da cui $t = \frac{\ln 2}{0.04} = 17.3$ anni

c) $2 = \left(1 + \frac{0.04}{4}\right)^{4 \cdot t}$ da cui $4t = \log_{1.01} 2 = \frac{\log 2}{\log 1.01} = 69.6$ anni

Nota di correzione: esercizio poco gradito anche se semplice; continua a farsi strada nella classe una eccessiva inerzia verso il mettersi alla prova di fronte ad esercizi inattesi. Brutto segno.

1	2	3	4	5	6	7	8				
3	3	3	3	4	4	1.5	3				