

II.2. La meccanica nei sistemi di riferimento non inerziali

- ⌘ I fenomeni visti da un sistema di riferimento accelerato
- ⌘ Le forze inerziali o *forze apparenti*
- ⌘ Le forze apparenti legate alle rotazioni
- ⌘ Gli effetti della forza di Coriolis



in curva nessuno ci spinge eppure ci sentiamo proiettati all'esterno rispetto al centro di curvatura

2.1 I fenomeni visti da un sistema di riferimento accelerato

2.1.1 ESISTONO SISTEMI DI RIFERIMENTO RISPETTO AI QUALI SUCCEDONO DELLE COSE STRANE

Nella prima parte del testo abbiamo ristretto la nostra indagine a dei particolari osservatori (o sistemi di riferimento), i cosiddetti *sistemi di riferimento inerziali*.

La ragione della scelta è piuttosto semplice: in un sistema di riferimento inerziale, un corpo in quiete e non soggetto a forze rimane in quiete; per converso, se si osservano delle accelerazioni (cambiamenti di velocità intesi in senso vettoriale) si può star certi che ci sono di mezzo delle forze.

Ciò significa che abbiamo privilegiato un punto di vista che ci consente di cogliere alcuni aspetti di *regolarità* e di *semplicità* della natura: regolarità nel senso che tutti gli osservatori inerziali sperimentano le stesse leggi generali, semplicità nel senso che i fenomeni vengono descritti da leggi semplici (ad ogni forza corrisponde una accelerazione ad essa proporzionale e viceversa se c'è una accelerazione possiamo metterci alla ricerca di una forza).

Ma le cose non vanno sempre così: basta mettersi di fianco ad un automobilista dalla guida un po' spericolata e si vedrà che all'interno dell'abitacolo *accadono delle cose strane*: nessuno ci spinge e ci sentiamo sbalottati di qua e di là e se non fosse per le cinture di sicurezza ci potrebbe capitare di sbattere violentemente la testa contro il parabrezza.

I nostri sensi ci aiutano a collegare le sensazioni con dei *dati osservativi*: quando il guidatore frena qualcosa ci spinge in avanti; quando accelera qualcos'altro ci preme contro lo schienale; quando l'autista curva a sinistra ci sentiamo spinti verso destra. Si è scritto *qualcosa ci spinge* o *ci preme*, ma questo qualcosa è *immateriale* perché non riusciamo ad identificare una causa (un agente) di queste sensazioni.

Qualcosa di analogo è già stato descritto nei capitoli 2, 6 e 7 della prima parte; in particolare in tale capitolo si è trattato della assenza di peso e della variabilità del peso in determinate circostanze.

2.1.2 COME SPIEGARE LE COSE STRANE

Se invece che in una automobile ci trovassimo in una grande stanza dalla pareti opache e questa stanza fosse montata su ruote sperimenteremmo le stesse cose descritte nel caso della automobile, ma con una differenza. Questa volta i sensi non ci potrebbero aiutare ad associare ciò che ci accade con ciò che avviene all'esterno. Potrebbe accadere che un filo con attaccato un peso si sposti dalla verticale o che noi stessi ci troviamo in difficoltà nel rimanere in piedi.

Si tratta di esperienze facilmente realizzabili sia in aereo, sia in treno durante le fasi di accelerazione e decelerazione. In aereo gli esperimenti vengono meglio perché si riescono a sperimentare accelerazioni costanti per durate temporali abbastanza lunghe.

Si potrebbe continuare con altri esempi tratti dalla esperienza comune, ma ciò che caratterizza questo mondo *irrazionale* è il fatto di essere sempre sperimentato da soggetti che si trovano in moto accelerato rispetto a sistemi di riferimento inerziali.

Prendiamo il caso dell'autobus carico di studenti in piedi nel quale l'autista frena bruscamente. Ci si sente spinti in avanti, non si tiene la verticale e se non si è ben saldi si rischia di finire contro il parabrezza anteriore. *Esistono i fantasmi?*

Vediamo cosa vede un osservatore inerziale. Per un pedone che guarda la scena dal marciapiede, l'autobus andava a velocità costante e decelera bruscamente per effetto delle forze d'attrito applicate dal manto stradale alle ruote. I passeggeri, ai quali tali forze non sono state applicate, continuano a muoversi con la stessa velocità e pertanto finiscono contro il parabrezza che, invece, ha diminuito la sua velocità.: *elementare Watson*, direbbe Sherlock Holmes.



i fenomeni visti da un sistema di riferimento non inerziale ci costringono ad ammettere l'esistenza dei fantasmi ovvero ad ammettere l'esistenza delle forze apparenti, mentre il quadro appare del tutto razionale in un sistema inerziale

2.1.3 NEI SISTEMI ROTANTI I CORPI LIBERI VIAGGIANO SU TRAIETTORIE CURVE

Se poi ci sono di mezzo *sistemi rotanti* possono accadere delle cose ancora più strane.

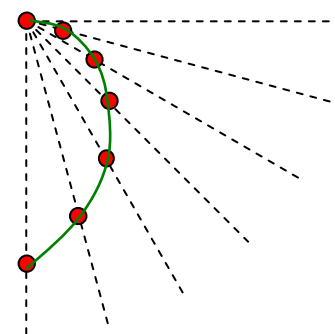
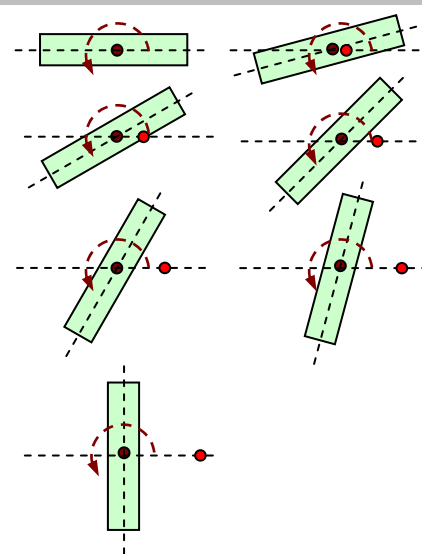
Immaginiamo una grande piattaforma rotante nella quale manchino dei punti di riferimento esterni e supponiamo che un osservatore posto al centro di essa su di essa lanci una sfera in avanti. Ci si aspetterebbe di vederla allontanarsi in linea retta e ciò è effettivamente quello che vede un osservatore che non sta sulla piattaforma. Invece chi sta sulla piattaforma osserverà una traiettoria curvilinea ad anello e gli potrebbe anche accadere di vedere la sfera che ritorna da lui (come se si trattasse di un boomerang) se la velocità impressa alla sfera, la sua posizione iniziale e la velocità angolare della piattaforma sono quelle opportune.

Per illustrare quanto detto si osservi la seconda parte della Figura nella quale viene rappresentato il movimento della sfera visto dalla piattaforma. Mentre la sfera si muove in linea retta, la retta ruota intorno al punto di partenza con una velocità angolare costante che, osservata dall'alto, risulta essere antioraria. Ne risulta la traiettoria curvilinea illustrata in figura che corrisponde a quanto vedrebbe un osservatore posto al centro di una piattaforma (rotante in senso antiorario) che dovesse lanciare una sfera in direzione radiale.

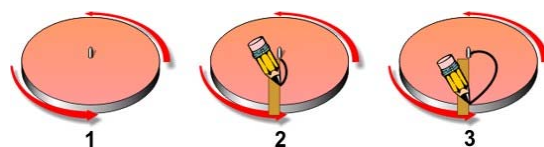
Se la nostra piattaforma rotante fosse coperta con una polvere sottile e la sferetta rotolando su di essa asportasse questa polvere, dopo aver arrestato la piattaforma, si vedrebbe una traiettoria data dalla interpolazione dei cerchietti e indicata in verde.

Riassumendo: *nel caso di rotazione antioraria con moto di allontanamento rettilineo uniforme dal centro di rotazione il corpo subisce una deflessione verso destra.*

La deviazione risulta invece verso sinistra nel caso di rotazione oraria o di movimento di avvicinamento al centro di rotazione. Questo effetto è responsabile di numerosi fenomeni macroscopici osservabili sulla Terra che, essendo in rotazione intorno all'asse passante per i poli, è un sistema di riferimento non inerziale simile alla piattaforma che abbiamo descritto.



la sfera rossa si muove di moto inerziale mentre la piattaforma ruota; visto dalla piattaforma il moto appare di tipo curvilineo e all'indietro rispetto al verso di rotazione della piattaforma



2.2 Le forze inerziali o forze apparenti

2.2.1 UN ESPERIMENTO SEMPLICE CHE CI AIUTA A MATEMATIZZARE L'ESPERIENZA

Studiamo ora il comportamento dei corpi in un sistema che si muova di moto accelerato rispetto ad un sistema inerziale. Per semplificare le cose riferiamoci al caso in cui il sistema di riferimento non inerziale si muova, rispetto a quello inerziale, *in linea retta, con una accelerazione costante e con velocità non relativistiche.*

Nonostante ci si restringa ad un caso particolare si otterranno, con metodi elementari, tutti i risultati significativi.

Supponiamo di disporre di un carro ferroviario sufficientemente lungo e con una sbarra orizzontale fissata su di esso. Lungo la sbarra può scorrere senza attrito una sfera pesante e si suppone che il sistema di riferimento xyz fissato alla terra sia, in prima approssimazione, inerziale. Vediamo come i fenomeni fisici vengono visti nel sistema di riferimento $x'y'z'$ solidale con il carro ferroviario.

Dal sistema inerziale xyz si vede il carro muoversi di moto accelerato, la sfera muoversi di moto uniforme (o rimanere in quiete) e il passeggero aggrapparsi al sostegno per potersi muovere di moto accelerato insieme al carro.

Dal sistema accelerato $x'y'z'$ si osserva la sfera muoversi all'indietro con accelerazione a' senza che su di essa agisca alcuna forza e il passeggero che si sente spinto all'indietro è costretto ad esercitare una forza sul sostegno per rimanere fermo. Il sistema $x'y'z'$ che non rispetta la legge di inerzia è detto *sistema non inerziale.*

Se attaccassimo alla sfera un dinamometro solidale al carro osserveremo la comparsa di una forza che, dal punto di vista del sistema non inerziale, è inspiegabile: serve infatti a mantenere ferma la sfera entro il carro. Tale forza è invece logica e razionale dal punto di vista dell'osservatore sulle rotaie: per lui la sfera si muove di moto accelerato insieme al carro e la forza misurata è quella prevista dalla II legge della dinamica.

È possibile aggirare l'ostacolo della non validità delle leggi della dinamica con un artificio matematico. Ritorniamo ad analizzare i fenomeni che accadono nel vagone ferroviario in moto con accelerazione \vec{a} .

Nel primo esperimento, quando la sfera è libera rispetto alla rotaia si muove con accelerazione $\vec{a}' = -\vec{a}$. Pertanto in base alla II legge la sfera si comporta come se subisse l'azione di una forza:

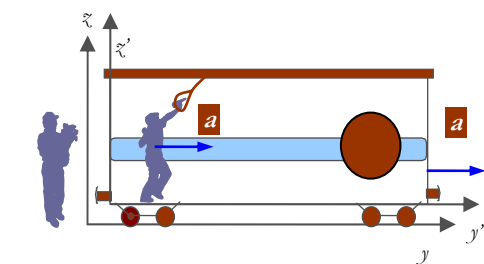
$$\vec{F}_i = m\vec{a}' \text{ con } \vec{a}' = -\vec{a}$$

Nel secondo esperimento la molla deformata agisce sulla sfera con una forza $F = kx$, ma questa forza non determina alcuna accelerazione della sfera rispetto al vagone. È come se esistesse una forza

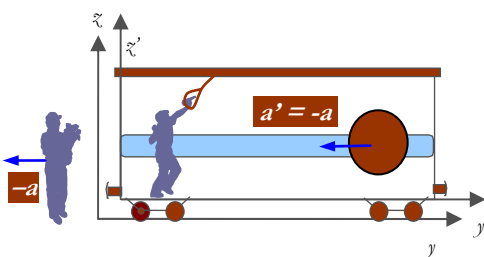
$$\vec{F}_i = m\vec{a}' = -m\vec{a}$$

applicata alla sfera e che bilanci la forza \vec{F} .

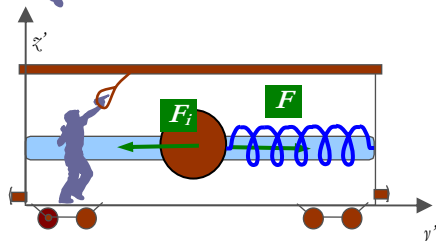
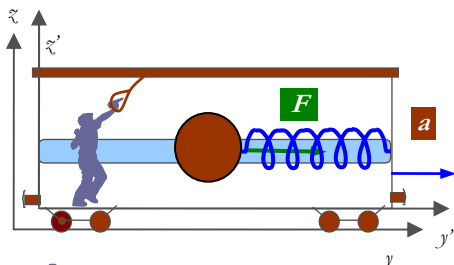
La quantità



osservatore inerziale: il vagone accelera, il passeggero accelera, la sfera non accelera e perciò il passeggero urterà la sfera



osservatore non inerziale: qualcuno mi spinge indietro e mi aggrappo per non cadere; la sfera si mette in moto da sola e mi viene addosso con accelerazione a'



le forze inerziali o apparenti vengono introdotte per rendere validi i principi della dinamica in un sistema di riferimento non inerziale. Nella prima immagine (per l'osservatore inerziale) il dinamometro misura la forza esercitata dal vagone per far muovere la sfera. Nella seconda immagine (osservatore all'interno) il dinamometro trasmette la forza del vagone che serve ad opporsi alla forza apparente

$$\vec{F}_i = -m \vec{a}$$

è chiama *forza inerziale* o *apparente* (la quantità \vec{a} rappresenta la accelerazione del sistema di riferimento non inerziale rispetto a quelli inerziali).

2.2.2 I SISTEMI NON INERZIALI DIVENTANO INERZIALI SE SI AGGIUNGONO LE FORZE APPARENTI

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale ed indichiamo con \vec{a} la accelerazione cui è soggetto un corpo di massa m soggetto all'azione di forze con risultante \vec{R} . Per la II legge della dinamica sarà:

$$\vec{R} = m \vec{a}$$

Se guardiamo le cose dal punto di vista di un sistema di riferimento accelerato rispetto al precedente sistema la accelerazione \vec{a}' del corpo sarà diversa da \vec{a} .

La determinazione del legame tra \vec{a} e \vec{a}' non è semplice perché coinvolge calcoli di analisi vettoriale in cui compaiono la accelerazione tra le origini dei due sistemi di riferimento, il vettore velocità angolare con cui il secondo riferimento ruota rispetto al primo (supposta costante), la posizione del corpo rispetto all'asse di rotazione, la velocità \vec{v}' .

Il risultato finale è il seguente:

$$\vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_t + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}' - \omega^2 \vec{\rho} \tag{II.2.1}$$

dove \vec{a}_t è la accelerazione della origine O' rispetto ad O (detta *accelerazione di trascinamento*), $\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare (supposto costante) che descrive le rotazioni del *sistema non inerziale* rispetto a quello inerziale, \vec{v}' è la velocità del corpo nel sistema non inerziale, $\vec{\rho}$ è il vettore ortogonale all'asse di rotazione e che va dall'asse al corpo.

Se si scrive la II legge della dinamica *il risultato è disastroso*:

$$\vec{R} = m (\vec{a}' + \vec{a}_t + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}' - \omega^2 \vec{\rho})$$

la risultante non corrisponde più al prodotto massa per accelerazione, ma la situazione si semplifica se con un artificio matematico spostiamo a sinistra tutti i termini che ci disturbano e decidiamo che ciascuno di essi corrisponda ad una forza:

$$\vec{R} + (-m \vec{a}_t) + (-m 2 \vec{\omega} \times \vec{v}') + (m \omega^2 \vec{\rho}) = m \vec{a}' \tag{II.2.2}$$

Poniamo per definizione:

$$\vec{F}_t = -m \vec{a}_t \tag{II.2.3}$$

$$\vec{F}_c = m \omega^2 \vec{\rho} \tag{II.2.4}$$

$$\vec{F}_e = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}' = 2m \vec{v}' \times \vec{\omega} \tag{II.2.5}$$



¹ Si ricordi che il prodotto vettoriale è anticommutativo

Se accettiamo di chiamare forze *inerziali* le quantità vettoriali appena definite e di indicare con \vec{R}_i la loro risultante i conti tornano nuovamente perché:

$$\vec{R} + \vec{R}_i = m \vec{a} \quad (\text{II.2.6})$$

dove \vec{R} è la risultante di tutte le forze di interazione, \vec{R}_i è la *forza inerziale* e \vec{a} è l'accelerazione del corpo rispetto al sistema di riferimento non inerziale.

L'espressione (II.2.6) comprende 3 tipi di forze inerziali:

- la prima, che abbiamo già studiato, si chiama *forza di trascinamento* ed è la responsabile delle stranezze che avvengono durante le frenate o le brusche accelerazioni ben note ai piloti di formula 1 e d'aereo.
- La seconda è detta *forza centrifuga* ed il nome gli deriva dal fatto di essere il vettore opposto della forza centripeta. Si tratta della forza che ci spinge all'esterno quando, in automobile, affrontiamo una curva. Come si vede dalla definizione dipende dalla velocità angolare e dalla distanza dall'asse di rotazione.
- La terza è detta *forza di Coriolis* ed è la responsabile di quella curvatura all'indietro che abbiamo descritto nel primo paragrafo. Si tratta di una forza ortogonale al piano formato dai due vettori velocità e velocità angolare, dipende dal loro prodotto ma anche dall'angolo (massima in condizione di ortogonalità).

Le *forze inerziali* derivano il loro nome dal fatto di essere, per definizione, proporzionali alla massa inerziale del corpo su cui agiscono. Esse hanno alcune caratteristiche che le distinguono da ogni altra forza di interazione.

Le più importanti differenze sono:



- una *forza inerziale* è il risultato del moto accelerato di un sistema di riferimento e non della interazione con altri corpi. Per questa ragione, per le forze inerziali, non vale la III legge della dinamica.
- la *forza inerziale* è presente solo nei sistemi non inerziali e non ne resta traccia in quelli inerziali
- la *forza inerziale* è sempre una forza esterna per qualsiasi sistema di corpi presenti nel sistema di riferimento non inerziale. Pertanto, in questi riferimenti non esistono sistemi chiusi, e di conseguenza non valgono in essi le leggi di conservazione.
- la *forza inerziale* è, per definizione, proporzionali alla massa inerziale e deriva il suo nome da questo fatto. Pertanto, in un qualunque campo di forza inerziale, così come accade nel *campo gravitazionale*, tutti i corpi si muovono con la stessa accelerazione indipendentemente dalla massa
- la *forza inerziale* non esiste nei sistemi di riferimento inerziali e pertanto è un grave errore introdurre in quei contesti. Nei sistemi inerziali la parola *forza* è usata solo in *senso newtoniano* cioè come effetto della interazione tra corpi. Tuttavia, nei sistemi non inerziali, le forze inerziali si comportano esattamente come quelle di interazione, e se la forza inerziale vi spinge improvvisamente in avanti quando il vagone

La II legge della dinamica in un sistema di riferimento non inerziale richiede di mettere nel conto anche le forze inerziali o apparenti definite moltiplicando la massa del corpo per opportuni fattori di accelerazione

frena, ne sentirete l'effetto esattamente nello stesso modo in cui percepite la forza di gravità. Allo stesso modo un astronauta sente la forza inerziale che lo schiaccia contro il suo sedile al momento del decollo del missile.

- la *forza inerziale* è anche detta *forza apparente*. L'aggettivo non deve ingannare; non si tratta di illusioni; le forze apparenti sono misurabili entro il sistema non inerziale e producono effetti osservabili anche di tipo permanente, come si vedrà a proposito delle forze di Coriolis. L'aggettivo *apparente* ha un doppio significato: si riferisce alla impossibilità di determinare l'origine della forza in termini di interazione con un altro corpo e al fatto che tale forza non esiste dal punto di vista di un osservatore inerziale.



2.3 Le forze apparenti legate alle rotazioni

2.3.1 LA FORZA APPARENTE CENTRIFUGA

Consideriamo un corpo di massa m in moto rotatorio con velocità angolare ω ad una distanza \vec{r} dall'asse di rotazione in un sistema di riferimento inerziale.

In base alla II legge della dinamica esso risulta soggetto ad una forza centripeta di modulo

$$\vec{F}_{cp} = -m \omega^2 \vec{r}$$

Se si esamina lo stesso fenomeno rispetto ad un sistema di riferimento solidale con il corpo esso appare in equilibrio e tale equilibrio si realizza grazie alla azione di una forza apparente (detta *forza centrifuga*) uguale ed opposta alla forza centripeta.

$$\vec{F}_{cf} = m \omega^2 \vec{r}$$

L'equazione scritta in forma vettoriale ci indica il fatto che la forza centrifuga ha il verso di \vec{r} cioè è diretta verso l'esterno. Le forze centrifughe vanno messe in conto tutte le volte che un corpo viene analizzato in un sistema di riferimento non inerziale: si tratta di forze radiali orientate verso l'esterno direttamente proporzionali al quadrato della velocità angolare e alla distanza dall'asse di rotazione.

La forza centrifuga è la forza che si sperimenta quando l'automobile su cui stiamo seduti fa una curva e ci si sente spinti verso l'esterno del centro di curvatura. È questa la forza che fa assumere ad una massa d'acqua in rotazione la caratteristica *forma a paraboloidale* ed è ancora la forza su cui si basa il funzionamento delle centrifughe utilizzate sia in ambito domestico sia nelle applicazioni di tipo biomedico ed agro alimentare.

La presenza della forza centrifuga equivale alla comparsa di un *campo gravitazionale* di tipo radiale che si compone con la accelerazione di gravità e se $\omega^2 r \gg g$ (cosa che accade nelle centrifughe a causa dei valori elevati di ω) è possibile trascurare l'azione gravitazionale e considerare l'azione del solo campo centrifugo.

Qualunque miscuglio di particelle immerse in un liquido tende a separarsi e le particelle più dense vanno a fondo più rapidamente di quelle meno dense. La presenza del campo radiale molto elevato permette alla centrifuga di far separare gli elementi di un miscuglio molto più rapidamente di quanto non accada nel campo gravitazionale come si può vedere nell'esempio riportato più avanti.

2.3.2 ESEMPI DI FENOMENI IN CUI COMPARE LA FORZA CENTRIFUGA

Esercizio: Perché la superficie di un liquido in rotazione assume la forma di una parabola?



Bisogna ricordare in via preliminare una proprietà fondamentale della parabola tipica di essa e solo di essa: *data una parabola di equazione $y = a x^2$ la retta tangente in un suo punto di ascissa \tilde{x} ha coefficiente angolare $m = 2 a \tilde{x}$*

la forza centrifuga è perpendicolare all'asse di rotazione e diretta verso l'esterno



Consideriamo dunque una particella posta alla superficie del liquido ed analizziamone la condizione di equilibrio. Essa si trova soggetta all'azione di 3 forze: la *forza peso* F_p , la *forza centrifuga* F_c e la *reazione vincolare* N esercitata dal liquido e che corrisponde all'azione delle molecole circostanti (forze di coesione che determinano la incomprimibilità).

La reazione vincolare è perpendicolare alla superficie del liquido e dunque forma con la verticale lo stesso angolo formato dalla retta tangente con l'orizzontale.

In condizione di equilibrio si ha

$$\vec{F}_p + \vec{F}_{cf} + \vec{N} = 0$$

Ma se un vettore si annulla, si annullano anche le componenti lungo qualsiasi direzione e in particolare quella lungo la retta tangente (il che consente di eliminare dai conti il valore di N che non conosciamo).

Si ha dunque (indicando con il pedice t la componente lungo t)

$$F_{pt} + F_{cft} = 0 \Leftrightarrow F_p \sin \alpha = F_c \cos \alpha \Leftrightarrow mg \sin \alpha = m \omega^2 \tilde{x} \cos \alpha$$

$$\text{dunque } \tan \alpha = \frac{\omega^2 \tilde{x}}{g}$$

ma $\tan \alpha$ è il coefficiente angolare della retta tangente e pertanto:

$$m = \frac{\omega^2 \tilde{x}}{g}$$

Come si è detto la curva per la quale m è proporzionale alla ascissa del punto è la parabola ad asse verticale con vertice nella origine del sistema di riferimento e dunque la superficie assume la forma di una parabola $y = a x^2$ con a tale che

$$2 a \tilde{x} = \frac{\omega^2 \tilde{x}}{g} \text{ ovvero } a = \frac{\omega^2}{2g}$$

Ricordiamo che la apertura di una parabola decresce al crescere di a che a sua volta è proporzionale a ω^2 ; possiamo pertanto affermare che in una centrifuga dove ω prende valori molto elevati il menisco diventi pressoché verticale.



Stima dei parametri che influenzano le caratteristiche di una centrifuga.

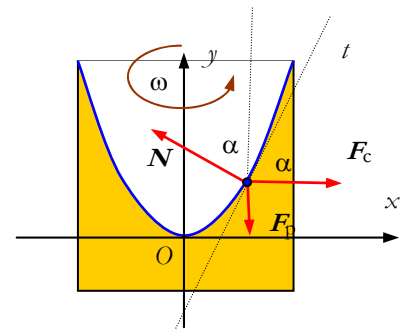
Esercizio: Il latte è una emulsione contenente tra l'altro, goccioline di grasso di raggio r . Supponendo che siano note la viscosità η del siero, la densità δ_l del latte e quella δ_g del grasso stimare il tempo impiegato perché si determini l'affioramento della panna in un recipiente di profondità h e di raggio R che ruota con frequenza ν .

Confrontare il tempo impiegato per effetto del processo di affioramento spontaneo sotto l'azione della resistenza viscosa con quello dovuto alla azione della centrifuga.

Dati: $r = 1.00 \cdot 10^{-5}$ m, $\eta = 2.1 \cdot 10^{-3}$ Pa s, $\delta_l = 1.03$ kg/dm³, $\delta_g = 0.92$ kg/dm³, $h = 0.35$ m, $R = 1.00$ m, $\nu = 15$ giri/s.



Osserviamo in via preliminare che il parametro che si utilizza per questi conti è la *velocità limite* con cui un oggetto di piccole dimensioni cade sotto l'azione simultanea del campo di forze (gravitazionale o centrifugo) e della *forza di tipo viscoso*.



Quando il corpo considerato ha una densità maggiore di quella del liquido esso si porta sul fondo e in caso contrario affiora.

Nel capitolo dedicato alla forza d'attrito si è visto che la velocità limite sotto l'azione del campo gravitazionale vale $v_l = \frac{2r^2 g \rho'}{9\eta}$ dove con ρ' si intende la differenza tra le due densità coinvolte (introdotta per tener conto del ruolo svolto dalla *spinta di Archimede*) al galleggiamento.

In presenza di una accelerazione centrifuga elevata la accelerazione di gravità viene sostituita dalla accelerazione centrifuga $\omega^2 R$.

Possiamo assumere come tempo di affioramento il rapporto tra la profondità del recipiente e la *velocità limite* e poiché la velocità limite è, a parità di condizioni, proporzionale alla accelerazione, ciò ci consente di affermare che il rapporto tra i due tempi corrisponde a quello inverso tra le due accelerazioni e cioè:

$$\frac{t_g}{t_c} = \frac{a_c}{g} = \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{4\pi^2 v^2 R}{g} = \frac{4\pi^2 \cdot 15^2 \cdot 1.00}{9.81} = 905$$

ovvero la centrifuga consente di ridurre il tempo di affioramento di 900 volte.

Calcoliamo ora il tempo di affioramento in condizioni naturali:

$$v_g = \frac{2r^2 g \rho'}{9\eta} = \frac{2 \cdot (1.00 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 9.81 \cdot (1.03 - 0.92) \cdot 10^3}{9 \cdot 2.1 \cdot 10^{-3}} = 1.14 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$t_g = \frac{h}{v_g} = 3.07 \cdot 10^4 \text{ s}$$

mentre

$$t_c = t_g / 905 = 34 \text{ s}$$



2.3.3 LA FORZA APPARENTE DI CORIOLIS ⁽²⁾

Come abbiamo visto la *forza di Coriolis* compare quando si è in presenza di sistemi di riferimento rotanti entro i quali il corpo di nostro interesse si trovi in movimento secondo l'equazione:

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$$

- la forza agisce in una direzione perpendicolare al piano individuato dall'asse di rotazione e dal vettore velocità
- la sua intensità è data da:

$$F_c = 2 \omega v_{\perp} m \tag{II.2.3}$$

(dove v_{\perp} rappresenta la componente del vettore velocità perpendicolare all'asse di rotazione) e pertanto è nulla quando il corpo si muove parallelamente all'asse e massima quando si muove perpendicolarmente ad esso



² Gaspard Gustave de Coriolis (1792-1843) fu il primo ad introdurre il termine *lavoro* per indicare gli effetti combinati di forza e spostamento nel suo *traité de mécanique*, Parigi 1829. Nello stesso testo si parla per la prima volta di *energia cinetica*. Lo studio delle forze che portano il suo nome compare nel *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps* (1835).

- il verso è un po' più complicato da descrivere: si assegna alla velocità angolare la direzione dell'asse di rotazione con verso di avvvitamento di una vite destrorsa; si considera una terna cartesiana xyz con gli assi x e y orientati come la velocità angolare e la velocità del corpo; fatto ciò, la direzione e il verso della *forza di Coriolis* sono quelli opposti all'asse z .³

³ Dati due vettori \vec{a} e \vec{b} si scrive $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ (si legge a vettore b uguale c) per intendere che il vettore \vec{c} ha direzione ortogonale al piano \vec{a}, \vec{b} ha modulo $ab|\sin\gamma|$ e verso orientato come una terna antioraria $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Per chi conosce il calcolo vettoriale si ricorda che esso può essere espresso attraverso le componenti in un modo particolarmente semplice da ricordare e maneggiare come:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

2.4 Gli effetti della forza di Coriolis

2.4.1 EFFETTI DELLA FORZA DI CORIOLIS SULLA CADUTA DEI GRAVI: LA DEVIAZIONE VERSO ORIENTE

Il fenomeno della *caduta dei gravi verso oriente* fu scoperto da Galilei e avviene con la stessa modalità in entrambi gli emisferi: i corpi in caduta libera deviano dalla traiettoria verticale sia per effetto della *forza centrifuga*, sia per effetto delle *forza di Coriolis*.

Ma mentre la forza centrifuga sommandosi vettorialmente a quella di gravitazione determina una risultante verso sud nell'emisfero nord e verso nord nell'emisfero sud, la forza di Coriolis devia sempre i corpi verso est.

In effetti se consideriamo la caduta di un grave all'equatore ed osserviamo il fenomeno dal polo nord vedremo una situazione del tipo illustrato in figura in cui la rotazione terrestre appare antioraria (da ovest verso est). La velocità angolare risulta allora uscente dal piano della pagina e in base alle proprietà del prodotto vettore la forza di Coriolis punterà verso est come in figura.

A latitudini diverse il fenomeno è meno intenso perché l'asse di rotazione e la verticale non sono più ortogonali ma conserva la stessa orientazione. Si tratta di quanto già dedotto cinematicamente a inizio capitolo: in avvicinamento si ha una deviazione nel verso di rotazione e viceversa in caso contrario. Nulla muta guardando le cose da sud.

Esercizio: Supponendo che un corpo cada dall'altezza di 100 m partendo dalla quiete di quanto devierà dalla verticale? Eseguire il calcolo all'equatore.



Eseguendo il calcolo all'equatore si ha il vantaggio che la velocità di caduta è perpendicolare all'asse di rotazione, inoltre la forza centrifuga agisce lungo la verticale e non determina deviazioni di traiettoria.

Il moto del grave è dato dalla sovrapposizione di un moto uniformemente accelerato lungo la verticale e di un moto accelerato (con accelerazione variabile al crescere della velocità) lungo la orizzontale. Eseguiremo la semplificazione di utilizzare la velocità media come dato per determinare la accelerazione di Coriolis supposta costante.

La velocità finale di caduta è determinabile sia dalle leggi del m.u.a. sia dal teorema di conservazione dell'energia e vale:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 100} \approx 44 \text{ m/s}$$

e possiamo pertanto ipotizzare una velocità media pari alla metà: $\langle v \rangle \approx 22 \text{ m/s}$.

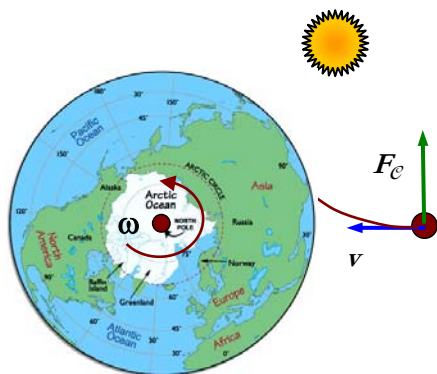
Il tempo di caduta Δt è pari a:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 100}{9.81}} \approx 4.5 \text{ s}$$

La velocità angolare della terra si determina dalla conoscenza del periodo e vale:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{24 \times 3600} \approx 7 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

Pertanto la accelerazione di Coriolis risulta pari a:



caduta dei gravi verso oriente all'equatore vista dal polo nord; a latitudini diverse il fenomeno è meno intenso ma il verso è lo stesso



$$a_c = 2 \langle v \rangle \omega \approx 3.1 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Questa accelerazione agendo per il tempo Δt determina uno spostamento verso est

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_c \Delta t^2 = \frac{1}{2} \times 3.1 \times 10^{-3} \times 4.5^2 \approx 0.03 \text{ m}$$

Come si vede si tratta di un valore osservabile sperimentalmente con una certa facilità.



2.4.2 EFFETTI DELLA FORZA DI CORIOLIS SUI MOTI ORIZZONTALI: LE ROTAZIONI NEI DUE EMISFERI TERRESTRI

I *movimenti orizzontali* lungo la superficie terrestre o in direzioni parallele ad essa sono sempre influenzati dalla *forza di Coriolis* tranne che all'*equatore* perché in questo caso la velocità è parallela all'asse di rotazione. Il fenomeno ha la sua massima rilevanza ai *poli* e decresce via via che ci si sposta verso l'equatore.

In Figura viene rappresentata la situazione al polo nord e come si osserva tale forza darà luogo a delle rotazioni in senso orario (deviazioni verso destra). Se ci si sposta al polo sud si osserva una inversione nel verso della velocità angolare (perché cambia il verso della verticale) e una conseguente inversione della forza e del verso delle deviazioni che risultano antiorarie (deviazioni verso sinistra).

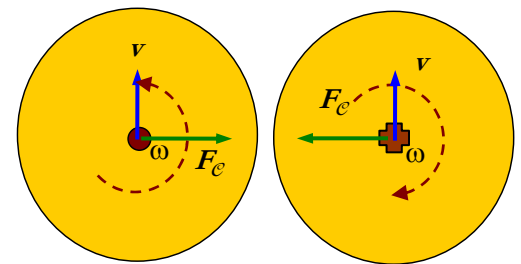
Questo effetto determina comportamenti che hanno a che fare con la esperienza comune: le *perturbazioni atmosferiche* ruotano in versi opposti nei due emisferi; le *rotatorie* delle linee ferroviarie si consumano all'interno in maniera diversa per effetto della *forza di Coriolis*; i *piloti d'aereo* devono operare una correzione di rotta per tener conto degli spostamenti dovuti alla forza di Coriolis; il movimento di lungo periodo dei fiumi fa sì che essi, quando si cercano una strada di fronte ad un ostacolo lo aggirino sempre dalla stessa parte in ciascuno dei due emisferi (sul lato destro nell'emisfero settentrionale).

La accelerazione e la forza di Coriolis presentano valori piuttosto bassi a causa del basso valore della velocità angolare terrestre e i loro effetti risultano significativi e ben osservabili quando tale azione ha modo di esplicarsi su lunghi periodi di tempo.

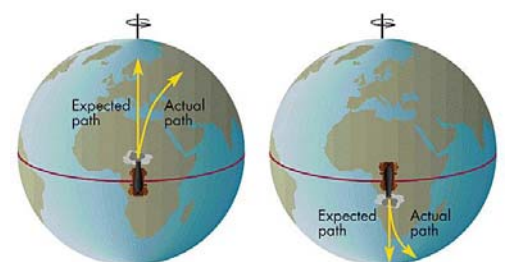
Per questa ragione sono sbagliate tanto le previsioni quanto le spiegazioni circa il *verso di rotazione del gorgo* nei lavandini presenti in molti testi. La *forza di Coriolis* è troppo bassa e dura troppo poco per dar luogo al gorgo che è invece dovuto, quasi sempre, a rotazioni già presenti o a forme asimmetriche del lavandino.

Su Internet si trova una proposta di esperimento effettuabile ma che richiede vasche molto grandi, fori molto piccoli e tempi di osservazione di ore per osservare l'azione della forza di Coriolis. Per quanto riguarda il filone delle *leggende metropolitane* in ambito scientifico la Università di Stato della Pennsylvania ha messo in linea un sito interessante all'indirizzo <http://www.ems.psu.edu/~fraser/BadScience.html>.

2.4.3 IL MOTO DEGLI ALISEI SOTTO L'AZIONE DELLA FORZA DI CORIOLIS



l'effetto della forza di Coriolis sui moti paralleli alla superficie è di produrre deviazioni verso destra a nord e verso sinistra a sud



A Projectile fired northward

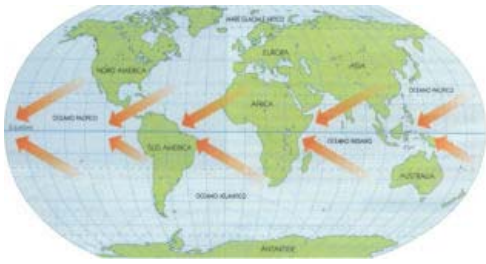
B Projectile fired southward



Se la terra non fosse in rotazione, per effetto delle differenze di temperatura tra i poli e l'equatore dovrebbero determinarsi dei movimenti atmosferici lungo i meridiani.

Le masse d'aria calda all'equatore hanno una minore densità e salgono verso l'alto creando una zona di bassa pressione che attira, come uno spazio vuoto, le masse di aria fredda dalle zone circostanti. Questo fenomeno crea lo spostamento delle masse d'aria fredda situate sui poli in direzione dell'equatore.

Ma i venti che soffiano dai poli (*alisei*) non si spostano in linea retta bensì deviano verso destra nell'emisfero boreale e verso sinistra nell'emisfero australe. Per questa ragione gli alisei soffiano da nord-est verso sud-ovest nell'emisfero boreale e da sud-est verso nord-ovest nell'emisfero australe.



2.5 Esempi ed applicazioni

2.5.1 RICHIAMIAMO LE DEFINIZIONI

Esercizio: Un disco orizzontale sta ruotando con velocità angolare ω e su di esso giace in quiete un corpo di massa m a distanza r dall'asse di rotazione.



- Indicare le forze che agiscono su m in un SRI
- Indicare un SRNI in cui compaia la forza centrifuga
- Indicare un SRNI in cui compaia la forza di Coriolis

⊗

- Su m agiscono la forza peso mg , la reazione vincolare antiparallela al peso e la forza d'attrito con funzione di forza centripeta pari a $m\omega^2 r$
- Un sistema di riferimento con l'asse z collocato lungo l'asse di rotazione e che ruoti insieme al disco con la stessa velocità angolare.
- Un sistema di riferimento come il precedente ma per il quale sia diverso il modulo della velocità angolare perché ciò fa comparire una velocità del corpo rispetto al sistema di riferimento.

⊙

2.5.2 IL LAVORO DELLE FORZE APPARENTI

Esercizio: Un corpo di massa $m = 2.50$ kg si trova a distanza $R_1 = 2.00$ m dall'asse di rotazione di un SRNI che ruota con $\omega = \pi$ r/s. Il corpo viene spostato sino a $R_2 = 4.00$ m. Determinare il lavoro compiuto dalle forze apparenti che compaiono nel SRNI.



⊗

Le forze apparenti da considerare sono quella centrifuga e quella di Coriolis. La seconda non compie mai lavoro perché è sempre ortogonale alla velocità e ci soffermiamo pertanto sulla sola *forza centrifuga*.

Essa è diretta radialmente e vale $m \omega^2 R$; durante l'allontanamento compie lavori elementari positivi $\delta \mathcal{L} = m \omega^2 R \delta R$ e il lavoro complessivo viene a corrispondere all'area sottesa tra R_1 e R_2 dalla retta di equazione $m \omega^2 R$.

Si tratta dunque di valutare l'area di un trapezio

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \omega^2 (R_1 + R_2)(R_2 - R_1) = \frac{1}{2} m \omega^2 (R_2^2 - R_1^2) = \frac{1}{2} \cdot 2.50 \cdot \pi^2 \cdot (4.00^2 - 2.00^2) = 148 \text{ J}$$

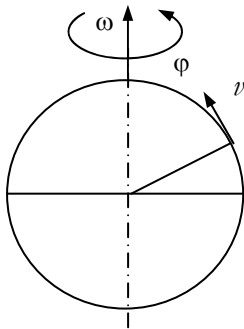
N.B. Non è stato specificato il percorso; la cosa non ha importanza perché anche se gli spostamenti non fossero radiali nella determinazione degli stessi conterebbero solo le componenti radiali (in base alla definizione di lavoro).

⊙

2.5.3 DEVIAZIONE DEL MOTO DEI PROIETTILI

Esercizio: In un poligono di tiro posto a latitudine $\varphi = 38.0^\circ$ nord la direzione di tiro è quella del meridiano terrestre e la distanza del bersaglio $d = 150.0$ m mentre la velocità del proiettile $v = 750$ m/s. Determinare lo scostamento laterale rispetto al bersaglio dovuto all'azione della forza di Coriolis. Precisare se, supponendo di sparare verso nord, la direzione della deviazione è verso est o verso ovest.





⊗

La deviazione è dovuta all'azione della *forza di Coriolis* che agisce lungo la direzione del parallelo verso est (la mano sinistra con il medio orizzontale verso nord (v) l'indice verso l'alto (ω) fa sì che il pollice si rivolga ad est (F_c)). L'asse di rotazione e il vettore velocità formano l'angolo φ

e dunque $F_c = 2m v \omega \sin\varphi$ e $a_c = 2v \omega \sin\varphi$.

Sotto l'azione della forza di Coriolis si determina uno spostamento laterale $\Delta x = \frac{1}{2} a_c \Delta t^2$ dove Δt rappresenta il tempo di volo che vale d/v . Pertanto:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{1}{2} a_c \Delta t^2 = \frac{1}{2} 2v \omega \sin\varphi \frac{d^2}{v^2} = \omega \sin\varphi \frac{d^2}{v} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3'600} \sin 38.0 \frac{150^2}{750} \\ &= 2.18 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

2.6 Indice analitico

accelerazione di trascinamento - 4

alisei - 13

caduta dei gravi verso oriente - 11

campo: gravitazionale - 5

campo gravitazionale - 9; radiale - 7

Coriolis: Gustave Gaspard - 9

equatore - 12

Esercizio: caduta verso oriente - 11; deviazione del moto dei proiettili - 14; il lavoro delle forze apparenti - 14; le definizioni - 14; menisco parabolico - 7; parametri di una centrifuga - 8

forma a paraboloidi - 7

forza: apparente - 6; centrifuga - 5, 7, 8, 11; di Coriolis - 1, 5, 9, 10, 11, 12, 14, 15; di tipo viscoso - 9; di trascinamento - 5; in senso newtoniano - 5; inerziale - 5, 6; inerziale o apparente - 4; peso - 8; reazione vincolare - 8; spinta di Archimede - 9

gorgo: verso di rotazione del - 12

movimenti orizzontali - 12

parabola - 7

perturbazioni atmosferiche - 12

piloti d'aereo - 12

poli - 12

regolarità - 1

rotaie - 12

rotazione antioraria: allontanamento, deflessione verso destra - 2

semplicità - 1

sistema: non inerziale - 3, 4

sistemi di riferimento: inerziali - 1, 2, 5; rotanti - 9

sistemi rotanti - 2

velocità limite - 8, 9

