

V.5. Generatori e circuiti elettrici

- ⌘ Differenze di potenziale da contatto
- ⌘ Pile ed accumulatori
- ⌘ Il collegamento delle resistenze
- ⌘ La legge di Ohm per tratti di circuito con generatori
- ⌘ La potenza elettrica
- ⌘ Voltmetro ed amperometro
- ⌘ Carica e scarica nei condensatori
- ⌘ La sicurezza negli impianti elettrici

5.1 Differenze di potenziale da contatto

5.1.1 L'EFFETTO VOLTA

Quando si mettono in contatto due metalli diversi si riscontra tra essi una d.d.p. dipendente dai due metalli. Il fenomeno venne osservato inizialmente da Alessandro Volta (1745-1827) nel 1797 attraverso l'utilizzo di apparecchiature elettrostatiche da lui progettate.

Per osservare la d.d.p. di contatto servono apparecchi basati sulla elettrostatica perché quando un circuito basato sul contatto tra due conduttori diversi viene chiuso la d.d.p. sulle due giunzioni che si vengono a creare si annullano reciprocamente e non si ha passaggio di corrente. La d.d.p. può essere osservata solo con apparecchiature che non abbiano bisogno, per funzionare, di un movimento di carica. Bisogna pertanto usare una giunzione aperta e misurare la d.d.p. attraverso un *elettrometro*. Allo scopo Volta fece inventò l'*elettroscopio condensatore* di cui vediamo un modello nella immagine qui a fianco.

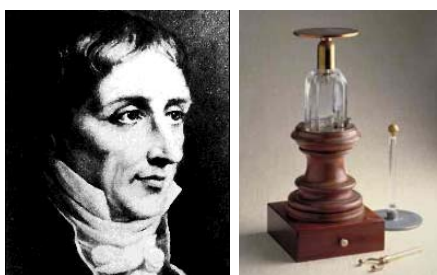
Si tratta di un particolare elettroscopio di capacità costante; le misure di carica indotta vengono pertanto trasformate in misure di potenziale senza dover mettere a contatto con lo strumento il conduttore di cui si vuole misurare il potenziale.

Il motivo per cui il semplice contatto bimetallico non può generare correnti elettriche è legato alla conservazione dell'energia. Se, con la chiusura della giunzione, la d.d.p. non si annullasse si avrebbe la generazione di energia (connessa al passaggio di corrente) dal nulla.

Nelle pile elettrochimiche il problema è superato attraverso la interposizione di una soluzione elettrolitica che, dando luogo a reazioni chimiche con gli elettrodi metallici, fornisce la energia elettrica a spese della energia interna del sistema.

Volta fornisce la prima scala dei materiali sottoposti ad esame secondo il *diverso potere di spingere il fluido elettrico*; noi oggi diciamo che li dispone in ordine di potenziale decrescente e il suo ordine è il seguente: *zinco, fogli stagnati detti impropriamente carta d'argento, piombo, mercurio, stagno in lastre o in verghe, alcune qualità di ferro, bismuto, altre qualità di ferro, bronzi vari, ottone, rame, cobalto, ferro piritoso, pirite di piombo, platino, pirite di ferro, pirite arsenicale, oro, argento, manganese* ⁽¹⁾.

Consideriamo due metalli con diversa concentrazione di elettroni liberi ($n_1 > n_2$). Se i due metalli si trovano alla stessa temperatura anche gli elettroni nel punto di contatto hanno la stessa velocità media. Alla superficie di separazione si verificherà un processo di diffusione in entrambe le direzioni caratterizzata però da un bilancio positivo nei passaggi dal lato a concentrazione maggiore verso quello a concentrazione minore. All'inizio saranno più numerosi gli elettroni che vanno per diffusione dal lato 1 al lato 2; poi, man mano che si accumulano elettroni nel lato 2 nasce un campo elettrico, dovuto al fatto che il lato 2 si è caricato negati-



Alessandro Volta e l'elettroscopio condensatore



¹ Opere di Alessandro Volta, ed. Utet, pag. 454

vamente e la situazione si stabilizza (il numero di elettroni che attraversano la giunzione diventa uguale in entrambi i versi).

Dunque, per effetto della diffusione, un metallo si carica positivamente e l'altro negativamente. Ciò determina la comparsa di un campo elettrico che si oppone alla continuazione del processo. Il flusso di elettroni da un metallo all'altro si interrompe quando si stabilisce una d.d.p. che controbilancia la f.e.m del campo estraneo connesso alla diffusione.

L'origine della d.d.p. da contatto è spiegata solo qualitativamente dalla teoria a gas di elettroni. La determinazione degli aspetti quantitativi richiede invece l'utilizzo di considerazioni statistiche connesse alla meccanica quantistica elaborate negli anni 30 del 900 (statistica di Fermi-Dirac).²

Applicando il modello a gas di elettroni, il teorema di equipartizione della energia e la legge di Ohm nella zona di contatto si ricavano previsioni che, pur evidenziando correttamente le grandezze che governano il fenomeno, portano a risultati sperimentali errati per un ordine di grandezza. La relazione che si ottiene è la seguente:

$$V_{12} = \frac{k T}{e} \left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right) \tag{V.5.1}$$

dove con n si indica la concentrazione di elettroni liberi dei due metalli.

I parametri significativi sono la temperatura e le due concentrazioni elettroniche. Dalla relazione si osserva immediatamente che $V_{21} = -V_{12}$ in accordo con quanto già osservato sulla impossibilità di produrre correnti elettriche con una doppia giunzione bimetallica; la situazione non cambia nemmeno se si introducono altri metalli intermedi. Si ha invece $V_{21} + V_{12} \neq 0$ se sono diverse le temperature delle due giunzioni.

5.1.2 UN MODELLO PER L'EFFETTO VOLTA

Se consideriamo uno strato di spessore λ pari al libero cammino medio degli elettroni in corrispondenza della giunzione esso avrà una resistenza

$$R = \rho_1 \frac{\lambda}{S} + \rho_2 \frac{\lambda}{S}.$$

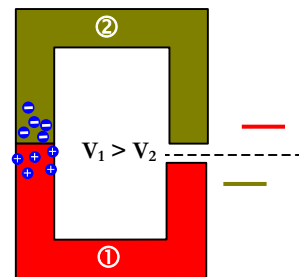
Il valore di ρ può essere correlato ai parametri microscopici dalla relazione $\rho = \frac{2 m}{e^2 n \tau}$.

Infatti, sotto l'azione di un campo E l'elettrone risulterà soggetto ad una forza $F = eE$ e si muoverà con accelerazione $a = F/m = eE/m$ fino a collidere con uno ione. Se indichiamo con τ il tempo medio tra due col-

lisioni la sua velocità media sarà $\overline{v} = \frac{a \tau}{2}$

Poiché $a = eE/m$ si ottiene: $\overline{v} = \frac{e \tau E}{2m}$ o anche $\tau = \frac{2 m \overline{v}}{e E}$

e ciò ci permette di arrivare alla relazione tra τ e ρ se teniamo conto che $E = J \rho$ e che $j = e n \overline{v}$.



effetto Volta: la d.d.p. da contatto è generata dalla diffusione di elettroni alla superficie di contatto tra due metalli diversi; non può generare correnti elettriche perché la chiusura del circuito presenta lo stesso effetto rovesciato

² Si vedano i capitoli della parte VII.

Si ha infatti:

$$\tau = \frac{2 m \bar{v}}{e E} = \frac{2 m \bar{v}}{e j \rho} = \frac{2 m \bar{v}}{e e n \bar{v} \rho} \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \frac{2 m}{e^2 n \tau}$$

Quando lo strato viene attraversato dalla corrente di diffusione i si ha la comparsa di una d.d.p. $\Delta V = R i$.

La corrente di diffusione può essere valutata tramite il seguente modello:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e (N_1 - N_2)}{\tau} \quad \text{dove } N \text{ indica il numero di elettroni che si muovono}$$

nei due versi tramite la giunzione nel tempo medio τ tra una interazione e l'altra.

Se si indica con n la concentrazione di elettroni liberi sarà $N = 1/6 n S \lambda$. Il coefficiente $1/6$ rappresenta la frazione di gradi di libertà dell'elettrone libero che ha a disposizione 3 direzioni e 2 versi per ciascuna. Potremo dire che in un dato volume contenente una concentrazione n , in media $1/6 n$ si muoverà in una data direzione secondo un determinato verso.

Dunque:

$$i = \frac{e (N_1 - N_2)}{\tau} = \frac{e S (n_1 - n_2) \lambda}{6 \tau} = \frac{e S (n_1 - n_2) \bar{v}}{6}$$

Possiamo ora valutare $\Delta V = (\rho_1 \frac{\lambda}{S} + \rho_2 \frac{\lambda}{S})$

$$\Delta V = \frac{e S (n_1 - n_2) \bar{v}}{6} = \lambda (\rho_1 + \rho_2) \frac{e (n_1 - n_2) \bar{v}}{6} =$$

$$= \lambda \frac{2 m}{e^2 \tau} \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right) \frac{e (n_1 - n_2) \bar{v}}{6} = \frac{1}{3 e} m \bar{v}^2 \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right) (n_1 - n_2).$$

Ma $m \bar{v}^2 = 3 k_B T e \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right) (n_1 - n_2) = \left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right)$ pertanto:

$$\Delta V = \frac{k_B T}{e} \left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{n_2}{n_1} \right)$$

5.1.3 TERMOELETTICITÀ: L'EFFETTO SEEBECK

Nella relazione che abbiamo appena dimostrato è presente il nocciolo dei fenomeni termoelettrici. La d.d.p. di una coppia bimetallica dipende dalla temperatura della giunzione.

Sotto il nome di termoelettricità si considerano due tipi di effetti strettamente correlati: la capacità di una coppia di giunzioni metalliche tenute a temperature diverse di produrre correnti elettriche e la capacità di correnti elettriche che attraversano una coppia di giunzioni bimetalliche di produrre uno squilibrio termico.

Il primo effetto è noto come *effetto Seebeck*⁽³⁾. Poiché la d.d.p. di contatto dipende dalla temperatura, quando le due giunzioni vengono poste a temperature diverse la f.e.m. del circuito non è più nulla perché $\Delta V_{12} \neq \Delta V_{21}$ e pertanto nel circuito passa una corrente.

Tale fenomeno può essere utilizzato sia per misurare delle differenze di temperatura, sia per produrre correnti elettriche sfruttando il salto termico come fece Ohm nel corso delle sue ricerche.

- Le termocoppie sono normalmente utilizzate come *termometri* specialmente quando sia impossibile l'uso di termometri a liquido, come quello a mercurio. Il grande pregio dei termometri a termocoppia sta nella loro sensibilità elevata, nella possibilità di collegarli a strumenti di registrazione per ottenere l'andamento della temperatura nel tempo, nelle piccole dimensioni, nella conseguente bassa capacità termica e, infine, nell'ampio intervallo di utilizzabilità (da -200°C a $+2000^{\circ}\text{C}$).
- La utilizzazione delle termocoppie come *generatori di energia elettrica* è ristretta a casi molto particolari a causa del rendimento non elevato. In questo caso si utilizzano giunzioni tra semiconduttori perché in questi materiali la concentrazione di conduttori liberi dipende molto fortemente dalla temperatura e dunque l'effetto di termoelettricità risulta piuttosto forte.

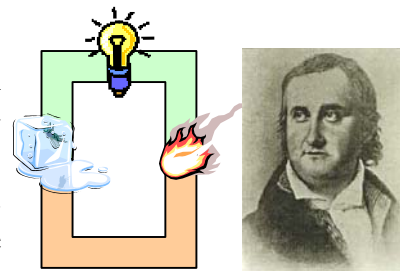
Dal punto di vista termodinamico la termocoppia è l'analogo di un motore termico. Abbiamo due corpi a temperatura diversa, uno serve da sorgente di calore e l'altro da refrigerante, mentre il fluido operativo è il gas di elettroni. L'unica differenza è che, mentre nel motore termico una parte dell'energia interna del corpo caldo viene convertita in energia meccanica, nella termocoppia la conversione è effettuata direttamente in energia elettrica.

Per fornire una idea quantitativa del fenomeno diamo a puro titolo indicativo il coefficiente per una coppia bimetallica rame alluminio per temperature intorno ai valori ambiente: esso vale $3.4 \mu\text{V}/\text{K}$

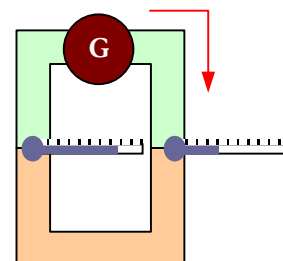
Nelle ex URSS è stato prodotto anche un piccolo reattore nucleare in grado di generare energia elettrica per termoelettricità. Si chiama *Roman-shka* ed è stato realizzato per funzionare con soli 49 kg di uranio. La temperatura nella zona utile raggiunge i 1770°C e le sue pareti sono appoggiate a migliaia di giunzioni silicio-germanio che funzionano da termocoppie e formano una termopila. La f.e.m. termoelettrica si origina dalla differenza di temperatura tra l'interno del reattore e l'ambiente esterno.

5.1.4 TERMOELETTICITÀ: L'EFFETTO PELTIER

Il secondo effetto termoelettrico è noto come *effetto Peltier*⁽⁴⁾ e fu osservato nel 1834 come anomalia nella distribuzione di temperatura alla superficie di separazione di due conduttori percorsi da corrente. Fu quindi studiato più a fondo da Lenz nel 1838. Egli riuscì ad osservare che una goccia d'acqua collocata alla superficie di separazione di bismuto e anti-



effetto Seebeck: un doppio contatto bimetallico caratterizzato da temperature diverse diviene un generatore di corrente elettrica



effetto Peltier: il passaggio di corrente tra due giunzioni è in grado di determinare tra esse uno squilibrio termico

³ Thomas Johann Seebeck (1770-1831), fisico tedesco scoprì questo effetto nel 1821 dandone una interpretazione erronea legata al magnetismo

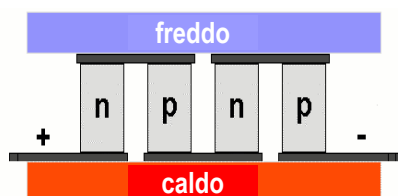
⁴ Jean Charles Athanase Peltier (1785-1845)

monio congelava o fondeva a seconda del verso di percorrenza della corrente attraverso le due giunzioni. Il passaggio di corrente assorbe o cede energia oltre quella già ceduta per effetto della resistenza.

È ben noto che se si fornisce energia ad un motore termico si ottiene una pompa di calore o un frigorifero. Per analogia ci aspettiamo che, facendo passare corrente, attraverso una termocoppia alimentata da un generatore, si crei una differenza di temperatura tra le due giunzioni.

Anche in questo caso per ottenere differenze di temperatura significative si utilizzano termocoppie a semiconduttore in modo di sfruttare la grande differenza nel numero di elettroni di conduzione disponibili a seconda del drogaggio.

Si uniscono materiali drogati di tipo p e di tipo n attraverso una superficie conduttrice e si forza la corrente a circolare nel verso indicato in figura.



Gli elettroni che si muovono dal materiale carente di elettroni (p) verso quello ricco (n) (che si muovono in senso contrario ai processi di diffusione) assorbono energia dal connettore mentre accade il contrario (cessione di energia) a quelli che si muovono dalla zona n alla zona p (che si muovono nel verso del ristabilimento dell'equilibrio elettronico). Con questo meccanismo si può rendere sempre più caldo o sempre più freddo l'uno o l'altro dei due lati a seconda del verso in cui si fa circolare la corrente.

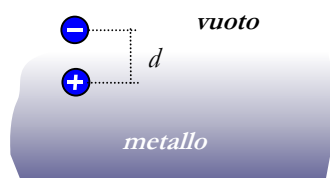


Frigoriferi termoelettrici che sfruttano l'effetto Peltier sono stati sviluppati a livello puramente sperimentale mentre sono ormai in commercio dispositivi basati sull'effetto Peltier per il raffreddamento delle CPU dei computer come si vede nella immagine qui a lato.

Il grande vantaggio di queste pompe di calore a semiconduttore è legato alla mancanza di parti in movimento. Ciò consente di costruire dispositivi particolarmente efficienti, della forma e dimensioni volute ed esenti da ogni necessità di manutenzione successiva.

5.1.5 IL LAVORO DI ESTRAZIONE E LA BARRIERA SUPERFICIALE

Sul piano microscopico il concetto di confine di separazione tra un corpo e l'ambiente cui siamo abituati ha poco significato; gli elettroni che si muovono all'interno di un metallo possono anche uscire e rientrare dal metallo stesso formando una *nube elettronica* al di sopra della superficie. Parte degli elettroni ritorna sul metallo, mentre altri elettroni lo abbandonano.



Il fenomeno è simile al processo di evaporazione dei liquidi. La superficie del metallo e la nube elettronica formano un doppio strato elettricamente carico (detto *barriera superficiale*) simile alle piastre di un condensatore piano. Questo strato ha lo spessore di qualche distanza interatomica ($10^{-10} \div 10^{-9}$ m) e la d.d.p. che gli corrisponde è detta *barriera di potenziale alla superficie tra metallo e vuoto*, o anche *d.d.p. di contatto tra metallo e vuoto*.

la superficie di separazione è un concetto sfumato caratterizzato da una nube elettronica alla superficie che determina una d.d.p. tra metallo e vuoto

È possibile stimare questa differenza di potenziale attraverso il seguente modello semplificato. Se un elettrone viene emesso dal metallo si determina la comparsa di una carica positiva identica detta immagine elettrostatica dell'elettrone. Se restringiamo la nostra analisi alla sola interazione tra l'elettrone e la sua immagine saremo in grado di valutare la d.d.p. corrispondente.

La energia potenziale della coppia di cariche vale $U = k \frac{e^2}{d}$ e pertanto la d.d.p., che si ottiene dividendo per la carica, risulta (assumendo $d \approx 10^{-10}$ m)

$$\Delta V \approx k \frac{e}{d} \approx \frac{9 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19}}{10^{-10}} \approx 1.4 \text{ V}$$

Affinché un elettrone possa sfuggire dalla superficie del metallo bisogna compiere un lavoro contro le forze attrattive della sua immagine e contro quelle repulsive della nube elettronica; tale lavoro viene detto *lavoro di estrazione* \mathcal{L}_0 e corrisponde alla energia che bisogna fornire ad un elettrone per farlo distaccare dal metallo nel vuoto.

Nella tabella V.5.1 sono riportati i valori del lavoro di estrazione riferiti ad alcuni metalli. Tali valori si possono determinare sperimentalmente utilizzando l'effetto fotoelettrico cioè la capacità di fotoni di energia nota di estrarre elettroni dal metallo. La tabella è espressa in eV e pertanto gli stessi numeri corrispondono anche al valore in V delle corrispondenti barriere di potenziale.

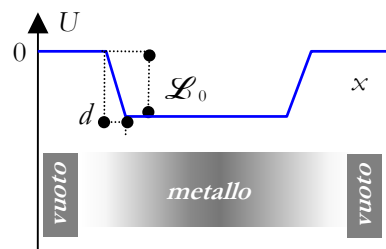
Dal loro esame vediamo che gli ordini di grandezza sono sostanzialmente corretti rispetto alla nostra previsione quantitativa e ciò consente di sostenere che la barriere di potenziale ha proprio le dimensioni di qualche strato atomico.

L'energia potenziale di un elettrone di conduzione in un metallo è minore della energia potenziale di un elettrone libero. Se prendiamo come valore 0 della energia potenziale quella dell'elettrone libero, allora l'energia nel metallo vale $U = -\mathcal{L}_0 = -e \Delta V$. Tale energia può essere rappresentata graficamente mettendo sull'asse delle ascisse la coordinata dell'elettrone e su quello delle ordinate l'energia potenziale.

In figura si è volutamente esagerata la dimensione d della nube elettronica. Il diagramma ha la forma di un canale e viene chiamato *buca di potenziale*.

Affinché un elettrone di conduzione possa sfuggire da un metallo la sua energia cinetica deve essere maggiore o eguale al lavoro di estrazione. L'elettrone può acquistare tale energia in modi diversi.

- In primo luogo può riceverla tramite onde luminose. Se dopo che è stato colpito dalla luce, l'elettrone ha una energia maggiore o eguale al lavoro di estrazione può sfuggire al metallo. Questo fenomeno, detto di *emissione fotoelettrica*, è stato storicamente molto importante perché la sua analisi ha consentito ad Einstein di sostenere che la luce viaggia attraverso pacchetti quantizzati di energia detti *fotoni*.
- Un secondo metodo consiste nel bombardare la superficie del metallo con particelle di energia di qualche centinaio di elettronvolt. In questo caso ha luogo direttamente una interazione per urto con diffusione di elettroni (*scattering*).
- Il terzo metodo è quello di scaldare il metallo. La emissione di elettroni da parte di metalli riscaldati è detta *emissione termoionica* ed è il metodo correntemente usato per produrre quantità significative di elettroni liberi in maniera semplice. La emissione avviene quando la energia di vibrazione del reticolo cristallino (legata alla temperatura) acquista valori comparabili con il lavoro di estrazione.



il lavoro di estrazione è il lavoro che un elettrone deve compiere per vincere le forze che lo tengono nella buca di potenziale

Metallo	\mathcal{L}_0 , eV
Litio, Sodio, Potassio	2.3
Zinco	4.2
Tungsteno	4.5
Platino	5.3
Bario	2.5
Calcio	2.7
Cesio	1.9
Bario su tungsteno	1.1
Cesio su tungsteno	1.4
Tabella V.5.1	

5.2 Pile ed accumulatori

5.2.1 COME FUNZIONA UNA PILA

Sappiamo dall'esperienza che immergendo una piastra metallica in un elettrolito si stabilisce una d.d.p. tra la piastra e elettrolito. Il fenomeno, per quanto riguarda le cause che lo determinano, è simile a quello della d.d.p. tra metalli con la differenza che nel caso dell'elettrolito è dovuto alla diffusione ionica e non a spostamento di elettroni.

In generale il metallo, per effetto della perdita di ioni positivi, che vanno in soluzione si porta ad un potenziale inferiore a quello dell'elettrolito, ma tale potenziale ha valori diversi per i diversi metalli perché, cambiando il metallo, cambia il numero di ioni che passano in soluzione.

Il processo di dissoluzione è esotermico, corrisponde cioè al raggiungimento di uno stato di energia inferiore e alla liberazione di una quota della energia interna del metallo stesso. Tale energia è alla base della produzione di energia elettrica di origine chimica (pile ed accumulatori).

Il termine *pila* ha ormai perduto il significato originario ma in Alessandro Volta, lo scopritore della possibilità di generare elettricità per via chimica, stava solo ad indicare una successione (pila) di dischi metallici posti l'uno sopra l'altro e separati da uno straccio imbevuto di una soluzione acida.

Una pila è costituita da due elettrodi conduttori di materiale diverso immersi in una soluzione ionica (solitamente acida). I due elettrodi vanno in soluzione e si crea tra essi una d.d.p. dovuta alla diversità di potenziale che ciascuno di essi assume rispetto all'elettrolito.

Consideriamo per esempio due elettrodi in rame e zinco immersi in una soluzione acquosa di acido solforico. Entrambi i metalli reagiscono al bagno elettrolitico mandando in soluzione degli ioni e il processo prosegue fino alla creazione di un equilibrio dinamico in corrispondenza del quale la solubilizzazione si arresta per la presenza di un *controcampo* dovuto alla presenza degli ioni passati nel bagno e degli elettroni rimasti sull'elettrodo.

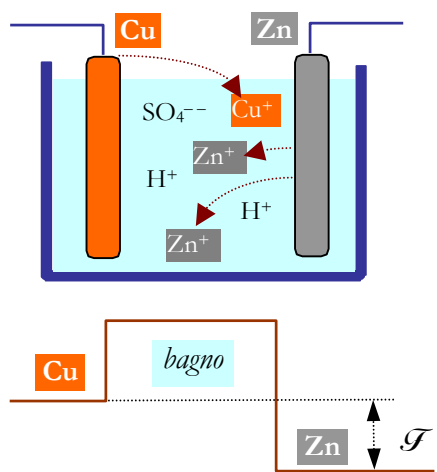
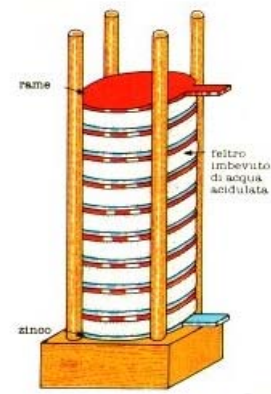
L'elettrodo di zinco che manda in soluzione molti più ioni del rame si porta ad un potenziale inferiore rispetto a quello del rame e si dice pertanto che i due elettrodi acquistano rispettivamente una polarità positiva (il rame) e una polarità negativa (lo zinco).

Questa d.d.p. ha una origine in un campo estraneo dovuto alla diversa solubilità degli elettrodi e permane anche quando si chiude il circuito a differenza di quanto accade nei contatti diretti tra metalli.

Quando si chiude il circuito gli elettroni in eccesso presenti sull'elettrodo di zinco migrano verso l'elettrodo di rame che si trova ad un potenziale più alto (attraverso il circuito esterno) e lo zinco che risulta essere meno negativo manda in soluzione altri ioni per ripristinare la situazione.

Gli elettroni che sono giunti all'elettrodo di rame richiamano dalla soluzione gli ioni Cu^{++} li saturano e si ha il deposito all'anodo di rame metallico. La energia elettrica che si dissipa nel circuito esterno proviene dal bilancio energetico connesso alle reazioni chimiche che hanno luogo. Lo scioglimento del catodo di zinco produce più energia di quanta ne serve

I metalli immersi in una soluzione ionica perdono ioni positivi e si portano ad un potenziale inferiore a quello dell'elettrolito



La f.e.m. della pila si origina dalla diversa solubilità degli elettrodi metallici rispetto all'elettrolito; il metallo che passa maggiormente in soluzione si porta ad un potenziale inferiore rispetto all'altro.

Quando si chiude il circuito gli elettroni in eccesso sullo zinco migrano verso il rame richiamando gli ioni rame dalla soluzione mentre una nuova quantità di zinco passa in soluzione per ripristinare la situazione; lo zinco si consuma e il rame cresce

per il deposito dello ione di rame e questa differenza si traduce in energia elettrica.

5.2.2 IL BILANCIO ENERGETICO

La diffusione di ioni è accompagnata da reazioni chimiche tra metallo ed elettrolito e ciò determina cambiamenti di energia interna dei reagenti. Questi cambiamenti sono proporzionali al numero di atomi reagenti del metallo o, detto altrimenti, alla massa di metallo che si scioglie nell'elettrolito. Si ha:

$$\Delta U = \lambda \Delta m \tag{V.5.2}$$

dove U è l'energia interna dell'elettrodo
 λ è l'energia relativa alla reazione chimica per unità di massa
 m è la massa di sostanza disciolta

Metallo a 25 gradi C	\mathcal{E} (V)
Litio	- 3.03
Potassio	- 2.92
Sodio	- 2.48
Alluminio	- 1.66
Zinco	- 0.76
Ferro	- 0.44
Pb + SO ₄ ⁻	- 0.36
Nichel	- 0.250
Stagno	- 0.14
Rame	+ 0.34
Mercurio	+ 0.79
Argento	+ 0.80
Platino	+ 1.2
Oro	+ 1.3
PbSO ₄ + 2H ₂ O	+ 1.69
Tabella V.5.2	

La reazione chimica, dopo il raggiungimento dell'equilibrio iniziale, si sviluppa solo a circuito chiuso ed è accompagnata da passaggio di corrente. L'energia coinvolta nella reazione chimica si trasforma così in energia elettrica associata al passaggio di corrente.

Le considerazioni precedenti ci consentono di associare una f.e.m. alla cella galvanica, o voltaica. Dalla legge di conservazione dell'energia segue che la somma delle energie delle reazioni chimiche che hanno luogo all'anodo e al catodo è uguale al lavoro svolto dalle forze estranee nel muovere le cariche lungo il circuito:

$$\Delta U_{an} + \Delta U_{cat} = \mathcal{L}_{estr} = \Delta q \mathcal{E}$$

Normalmente si usa come catodo di una cella galvanica lo zinco e, quando esso va in soluzione nell'elettrolito, si libera energia, pertanto $\Delta U_{cat} > 0$. La reazione di riduzione all'anodo è invece accompagnata da assorbimento di energia, $\Delta U_{an} < 0$.

La f.e.m. che si ottiene corrisponde ad un bilancio energetico tra anodo e catodo e viene solitamente riportata in tabelle che fanno convenzionalmente riferimento ad un valore 0 riferito all'idrogeno a 25°C.

Si ottiene così una tabella come la (V.5.2) che consente di ottenere per differenza la f.e.m. di una pila a due elettrodi. I valori tipici per le pile sono intorno al volt.

5.2.3 LA POLARIZZAZIONE

Se si attacca un carico ad una pila, cioè se la si utilizza per generare una corrente elettrica, si osserva che il meccanismo descritto ai punti precedenti si interrompe molto presto a causa dell'esaurirsi degli ioni di rame in soluzione e alla comparsa di reazioni secondarie agli elettrodi.

Per esempio, nel caso considerato, gli ioni H⁺ provenienti dalla dissociazione dell'acido solforico iniziano a dirigersi verso l'elettrodo di rame si neutralizzano e lo ricoprono di bolle di idrogeno che ben presto portano ad una riduzione, se non all'annullamento della d.d.p. Contestualmente al catodo si verifica una seconda reazione che coinvolge l'acqua e gli ioni SO₄ con formazione di acido solforico che ritorna in soluzione (ricreando lo ione idrogeno) e liberazione di ossigeno.

Durante questa reazione vengono ceduti al catodo i due elettroni e così anche lo zinco cessa di passare in soluzione. Quando ciò accade si dice che la pila si è polarizzata.

La polarizzazione è dovuta alle reazioni secondarie che si sviluppano agli elettrodi; il suo effetto è di bloccare il funzionamento della pila

Quello che abbiamo descritto era il grande problema delle prime pile di Volta. Si ottenevano delle correnti elettriche maggiori e più stabili di quanto si riuscisse a fare con le macchine elettrostatiche, ma ben presto la pila si polarizzava portando alla perdita di ogni capacità di generare correnti elettriche. Per evitare il meccanismo della polarizzazione si costruiscono pile nelle quali le reazioni secondarie non *sporcano gli elettrodi*.

Si può operare in due modi: per via meccanica, ripulendo regolarmente gli elettrodi, o per via chimica.

Per esempio, nella comune pila zinco-carbone utilizzata in tutto il mondo (pila a secco Leclanché ⁵) si usa come elettrolito una soluzione di cloruro di ammonio (NH₄Cl) e come catodo ed anodo, rispettivamente, un recipiente di zinco ed una barretta di carbone. La sbarretta di carbone è circondata da una pasta di biossido di manganese che è in grado di reagire con l'idrogeno producendo ossido di manganese ed acqua. Quando l'idrogeno prodotto dalle reazioni secondarie si deposita all'anodo viene eliminato dalla reazione di depolarizzazione ed in questo modo si continua a disporre della f.e.m. zinco carbone.

5.2.4 LA PILA DANIELL

La prima pila in grado di resistere alla polarizzazione fu realizzata subito dopo le ricerche di Faraday da John Frederick Daniell (1790-1845) e consentì di disporre finalmente di generatori di corrente continua in grado di erogare elettricità con intensità e per tempi significativi.

Poiché si tratta di uno strumento disponibile in quasi tutti i laboratori di fisica la descriviamo brevemente. L'analisi del suo funzionamento consente inoltre di comprendere, sia qualitativamente, sia quantitativamente, il meccanismo di conversione di energia chimica in energia elettrica.

Si tratta di un bagno elettrolitico con due elettrodi uno in rame (destinato a crescere) ed un secondo in zinco (destinato a consumarsi). I due elettrodi sono immersi in una soluzione del proprio solfato e sono separati da una parete di ceramica porosa in grado di consentire il movimento degli ioni SO₄ al suo interno. La soluzione di solfato di rame è sovrassatura, cioè, sul fondo del recipiente sono presenti cristalli di solfato di rame.

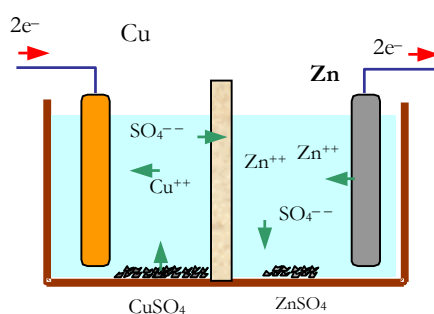
La situazione iniziale è simile a quella della pila di Volta: gli elettroni attraverso il circuito esterno andando dallo zinco al rame e ciò rende lo zinco meno negativo determinando il processo di solubilizzazione di altri ioni Zn⁺⁺ mentre dal bagno elettrolitico gli ioni Cu⁺⁺ si dirigono verso l'elettrodo a neutralizzare gli elettroni in arrivo.

La concentrazione di ioni Cu⁺⁺ diminuisce e i cristalli di solfato di rame passano in soluzione mentre gli ioni SO₄⁻ che nascono dalla dissociazione del solfato di rame attraversano il setto poroso richiamati elettricamente dagli ioni Zn⁺⁺ presenti in eccesso; poiché la soluzione si satura essi precipitano come cristalli di solfato di zinco.

Dunque, durante il funzionamento, si depositano a destra cristalli di solfato di zinco (mentre l'elettrodo di zinco si consuma) e a sinistra cresce l'elettrodo di rame (a spese dei cristalli di solfato di rame).

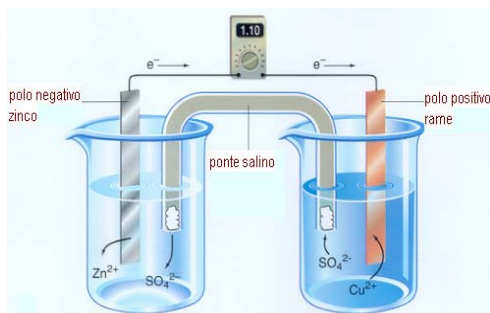


La pila Daniell con visibili gli elettrodi di zinco, di rame e il vaso poroso; nella immagine sotto lo schema di funzionamento: l'elettrodo di zinco si consuma insieme al solfato di rame; l'elettrodo di rame cresce e il solfato di zinco precipita



⁵ Georges Leclanché (1839-1832)

La reazione di formazione del solfato di zinco a partire dallo zinco metallico è esotermica e produce 4.4×10^5 J per grammo-atomo (65.4 g). La reazione di formazione del rame a partire dal solfato di rame è endotermica e richiede 2.34×10^5 J per grammo-atomo di rame. ⁽⁶⁾



Invece del vaso poroso si può utilizzare un ponte riempito di una sostanza salina in grado di sostituire il vaso poroso

Dunque quando si dissolve un grammo-atomo di zinco e si deposita un grammo-atomo di rame si libera una quantità di energia pari alla somma algebrica (differenza) delle due energie coinvolte e cioè 2.06×10^5 J (questa energia viene assimilata al lavoro di un campo estraneo).

Poiché sia il rame sia lo zinco sono bivalenti, se teniamo conto della costante di Faraday, avremo che il deposito o la cessione di un grammo-atomo corrispondono ad un passaggio di carica di $2 \times 96'500$ C.

La f.e.m. corrispondente sarà data dal rapporto tra lavoro del campo estraneo e carica trasportata:

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{L}}{Q} = \frac{2.06 \times 10^5}{2 \times 96'500} \approx 1.07 \text{ V}$$

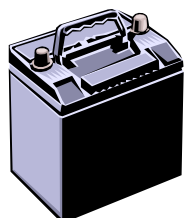
5.2.5 GLI ACCUMULATORI

Le reazioni di polarizzazione giocano un ruolo positivo, anziché negativo, nel caso degli accumulatori. Gli accumulatori sono pile reversibili, cioè pile nelle quali si possono indurre, imponendo reazioni elettrolitiche che coinvolgono gli elettrodi, delle modificazioni degli elettrodi stessi in grado di trasformare il bagno elettrolitico in una pila.

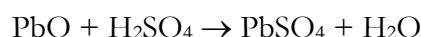


Si tratta di un dispositivo inventato nel 1859 da Gaston Planté (1834-1889) e che risulta ancora ineguagliato quando si deve disporre di una sorgente di energia elettrica ripristinabile e sufficientemente potente (si pensi al ruolo degli accumulatori nella industria automobilistica). Nonostante le numerose ricerche in corso, nonostante l'elevato potere inquinante del piombo, gli accumulatori a piombo e acido solforico sono ancora quelli più utilizzati. Ne discuteremo pertanto il funzionamento.

Gli accumulatori sono costituiti da un recipiente plastico contenente una soluzione di acido solforico (al 30 %). All'interno del recipiente sono inserite in successione delle piastre in piombo poste a distanza ravvicinata, e collegate in parallelo alternativamente (la 1 con la 3, la 5, ... la 2 con la 4, la 6, ...). In questo modo si ottiene una configurazione degli elettrodi con una elevatissima superficie, una piccola distanza e una bassissima resistenza interna.



Le piastre hanno una struttura alveolare riempita di ossido di piombo bivalente (PbO). Poste in soluzione le due piastre si ricoprono di una patina non solubile di solfato di piombo mentre diminuisce la concentrazione di acido solforico:



Quando si applica dall'esterno una f.e.m. gli ioni SO_4^{2-} si dirigono all'anodo mentre gli ioni 2H^+ si dirigono al catodo dove avvengono le seguenti reazioni:

- anodo: $\text{PbSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O} + \text{SO}_4^{2-} \rightarrow \text{PbO}_2 + 2\text{H}_2\text{SO}_4 + 2e^-$

⁶ Si ricordi che un grammo-atomo di rame e di zinco contengono lo stesso numero di atomi.

- catodo: $\text{PbSO}_4 + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Pb} + \text{H}_2\text{SO}_4$

I due elettrodi cambiano natura grazie alla circolazione elettronica e questa è la ragione per cui le piastre vengono predisposte diversamente: l'anodo deve essere in grado di ospitare l'ossido di piombo che si produce mentre il catodo deve poter presentare la massima superficie disponibile di piombo. Si osservi che durante la fase di carica aumenta nuovamente la concentrazione di acido solforico che viene prodotto ad entrambi gli elettrodi.

Il grado di carica dell'accumulatore dipende dal grado di interessamento delle superfici coinvolte nella trasformazione e al termine di essa si presenta una f.e.m. tra l'anodo di biossido di piombo e il catodo di piombo pari a circa 2.7 V.

Se si collega un carico tra gli elettrodi tale forza elettromotrice scende quasi immediatamente a 2 V e rimane stabile e poi, quando l'accumulatore è scarico, scende bruscamente a circa 1.8 V. Durante la fase di scarica inizia il processo inverso per le due reazioni già discusse. Non bisogna mai attendere che si ricrei solfato di piombo perché in tal caso l'accumulatore si danneggia in maniera irreparabile. Pertanto l'accumulatore andrebbe costantemente scaricato parzialmente e ricaricato.

Gli accumulatori correntemente utilizzati dispongono, in uno stesso recipiente, di 6 gruppi di piastre collegati in serie e producono pertanto la ben nota f.e.m. di 12 V. Il parametro che viene utilizzato per descriverne la *potenza elettrica* si chiama *capacità* e misura in Ah (ampere·ora) la carica elettrica che l'accumulatore è in grado di restituire durante la scarica. Un accumulatore di 45 Ah è in grado di erogare una corrente di 1 A per 45 ore.

Ovviamente questo concetto va inteso con intelligenza. A causa della tumultuosità delle reazioni rapide, è da escludere che lo stesso accumulatore sia in grado di erogare 90 A per mezzora senza rovinarsi. Per questa ragione, nel caso di difficoltà di avviamento, tutte le cause automobilistiche consigliano di non insistere eccessivamente nell'utilizzo del motorino di avviamento.

Per verificare lo stato di usura di un accumulatore basta caricarlo e verificare la concentrazione di acido solforico con un densimetro. Se la concentrazione non è tornata vicina al 30% vuol dire che reazioni secondarie dovute ad impurità (e a svariate altre cause che non esamineremo qui) hanno reso l'accumulatore sempre meno reversibile, finché il grado di interessamento profondo delle piastre diventa così scarso da renderlo inutilizzabile.

Al di fuori delle applicazioni automobilistiche sono utilizzati anche accumulatori alcalini (soluzioni di idrato di potassio o di idrato di sodio con elettrodi in ferro e nichel). Il vantaggio di questi apparati è quello di garantire una maggiore resistenza ai processi di carica e scarica totale e per questa ragione sono utilizzati anche per le batterie ricaricabili di uso domestico e per i Personal Computer portatili.

5.3 Il collegamento delle resistenze

5.3.1 COLLEGAMENTO IN SERIE E IN PARALLELO

Nel capitolo dedicato ai condensatori si è già discusso il collegamento in serie e in parallelo dei bipoli e le resistenze sono dei particolari bipoli.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad R = \frac{\Delta V}{i}$$

Non si ripete qui la dimostrazione già impostata per il collegamento dei condensatori, che si lascia eventualmente per esercizio, trattandosi di ripetere esattamente le considerazioni già svolte e ci si limita a riassumere i risultati che, vista la definizione in cui la d.d.p. passa dal denominatore al numeratore, risultano invertiti rispetto a quanto accade per i condensatori.

- **Nel collegamento in serie** per il principio di conservazione della carica la corrente è la stessa in tutti i punti mentre le differenze di potenziale si sommano $V_{AB} = V_{AC} + V_{CB}$

La resistenza equivalente è pari alla somma delle resistenze e nel caso di resistenze tutte uguali è n volte la resistenza di una.

$$R_{eq} = \sum R_i \tag{V.5.3}$$

Dunque nel collegamento in serie la resistenza aumenta sempre e nel caso di resistenze tutte identiche si ha:

$$R_{eq} = n R$$

Inoltre, poiché la corrente è la stessa le d.d.p. ai capi delle diverse resistenze sono proporzionali alle resistenze stesse.

- **Nel collegamento in parallelo** la d.d.p. è la stessa e invece si sommano le intensità di corrente: $i = i_1 + i_2$

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i} \tag{V.5.4}$$

Nel caso particolare in cui le resistenze siano solo 2 la (43.26) assume la espressione più semplice

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{V.5.5}$$

Se le resistenze sono tutte uguali si ha:

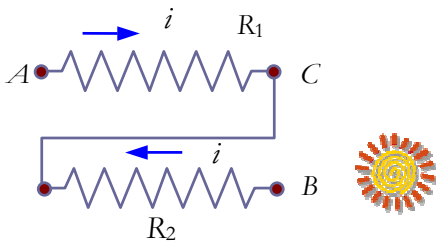
$$R_{eq} = \frac{R}{n}$$

Nel collegamento in parallelo la resistenza diminuisce sempre. Infatti, quando si collega una resistenza in parallelo la corrente aumenta e, a parità di d.d.p., ciò equivale ad una diminuzione di resistenza.

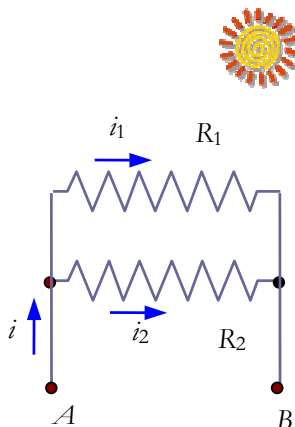
Inoltre le correnti nelle diverse resistenze sono inversamente proporzionali alle resistenze stesse.

5.3.2 QUANDO SI USA L'UNO O L'ALTRO DEI DUE COLLEGAMENTI

Il collegamento in parallelo è utilizzato in tutte le applicazioni di carattere elettrico perché i diversi utilizzatori (lampadine, motori, resistenze per riscaldamento, ...) sono progettati per funzionare in maniera ottimale ad



collegamento in serie: la corrente è la stessa; si sommano le d.d.p. e le resistenze



collegamento in parallelo: la d.d.p. è la stessa, le correnti si sommano; per la resistenza si sommano gli inversi

una ben precisa d.d.p. e ciò è appunto garantito dal collegamento in parallelo che si basa proprio su questo aspetto.

Inoltre il collegamento in parallelo è caratterizzato da una totale indipendenza tra i diversi utilizzatori che possono essere collegati e scollegati dal circuito senza che ciò influenzi il comportamento degli altri utilizzatori.

Ogni utilizzatore reca obbligatoriamente una targhetta che indica almeno due informazioni: la d.d.p. di funzionamento (espressa in volt) e la potenza dissipata (espressa in watt). Se un dispositivo viene collegato ad una d.d.p. inferiore a quella per cui è stato progettato non rende; se invece viene collegato ad una d.d.p. superiore rischia di bruciare.

L'unica applicazione del collegamento in serie si ha quando si devono collegare un gran numero di utilizzatori tutti uguali in uno spazio esteso. In questo caso collegandoli in serie si ha un risparmio dei fili di collegamento perché si utilizza un filo solo anziché due. Naturalmente la d.d.p. di alimentazione deve essere pari a n volte quella necessaria ad un singolo dispositivo e inoltre se uno solo degli utilizzatori si danneggia l'intero circuito cessa di funzionare. Si utilizza questo tipo di disposizione per la illuminazione stradale (e per le lampadine dell'albero di Natale perché si vogliono alimentare tante lampadine progettate per funzionare a bassa tensione utilizzando i 220 V della rete domestica).

La resistenza dei fili di collegamento di un impianto, per quanto piccola e solitamente trascurabile rispetto alle altre resistenze in gioco, equivale a resistenze collegate in serie.

5.3.3 IL REOSTATO

Si chiama *reostato* una resistenza variabile ottenuta con dei contatti striscianti che consentono di collegare una porzione della intera resistenza.

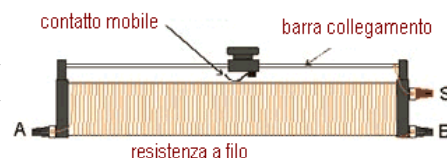
Allo scopo si può utilizzare sia un filo avvolto intorno ad un cilindro (come nei reostati di laboratorio), sia uno strato di materiale resistivo come nei reostati degli elettrodomestici.

Se si collegano gli estremi A e S risulta collegato solo il tratto di sinistra della resistenza indicato con αR dove α è un numero compreso tra 0 e 1 e rappresenta il rapporto tra la lunghezza di filo collegato e la lunghezza totale.⁷

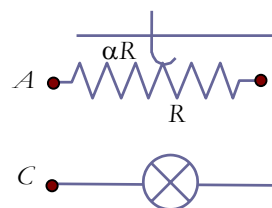
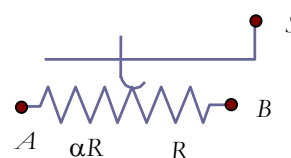
Se si collegano gli estremi B e S risulta collegato solo il tratto di destra della resistenza il cui valore è pari a $R - \alpha R = (1 - \alpha) R$.

Un esempio di applicazione del collegamento reostatico è rappresentato in figura. Quando $\alpha = 0$ (cursore a sinistra) la lampadina è perfettamente accesa e man mano che α aumenta la resistenza totale (resistenza della lampadina e resistenza del reostato) aumenta e pertanto diminuisce la intensità di corrente (con essa diminuisce anche la luminosità della lampadina). I regolatori di luminosità collegati a molte lampade a stelo svolgono esattamente questa funzione ma il loro funzionamento si basa su altri principi (di elettronica) in modo che la attenuazione non comporti degli sprechi di energia.

⁷ Poiché $R \propto l$ ne consegue che α corrisponde sia al rapporto tra la resistenza collegata e l'intera resistenza, sia al rapporto tra la distanza tra l'estremo fisso e quello mobile e l'intera lunghezza



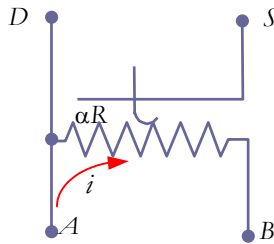
nel reostato da laboratorio una resistenza a filo (estremi A e B) può essere collegata parzialmente tramite un contatto strisciante (S) solitamente di colore diverso



resistenza variabile connessa in serie ad un utilizzatore: si fa variare la corrente facendo variare la resistenza totale

5.3.4 IL POTENZIOMETRO

Si chiama *potenziometro* o *partitore di tensione* un reostato collegato secondo lo schema in figura. Esso consente di ottenere qualsiasi valore di d.d.p. a partire da 0 sino al valore applicato alla alimentazione.



nel **potenziometro** si alimenta sulla intera resistenza e si preleva l'uscita dal contatto mobile e da uno dei due estremi a scelta

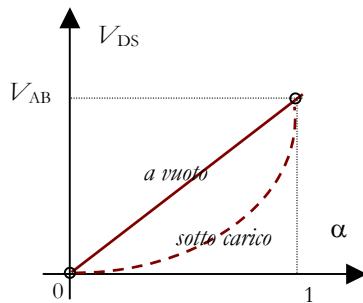
Il potenziometro si presenta all'esterno come un quadripolo con due morsetti di ingresso a cui si applica la d.d.p. V_{AB} e due morsetti di uscita da cui si preleva la d.d.p. V_{DS} . Osserviamo, di passaggio, che poiché i punti A e D sono collegati da uno stesso conduttore si trovano anche allo stesso potenziale.

La corrente che circola nella resistenza R è data, in base alla legge di Ohm da:

$$i = \frac{V_{AB}}{R}$$

La d.d.p. di uscita V_{DS} , sempre in base alla legge di Ohm vale:

$$V_{DS} = \alpha R i = \alpha R \frac{V_{AB}}{R} = \alpha V_{AB} \tag{V.5.6}$$



La risposta del potenziometro è di tipo lineare a vuoto mentre la curva caratteristica si trova al di sotto in presenza di un carico

e dunque la tensione di uscita è proporzionale al numero α che descrive la posizione del cursore.

La dimostrazione svolta si basa sul fatto che i due pezzi del reostato sono percorsi dalla stessa corrente e ciò comporta che ai due morsetti D e S non sia collegato nessun carico. Questa condizione è ancora realizzata se la resistenza del carico R_c è molto maggiore della resistenza αR perché in tale caso la corrente che va verso il carico è trascurabile.

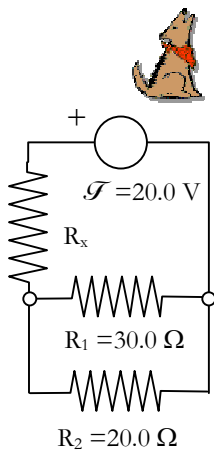
Man mano che questa condizione cade, cade anche la linearità nel comportamento del potenziometro. Rimangono ancora identici i punti di partenza e di arrivo del diagramma ma si passa da una linea retta ad una curva.

Si consiglia, ragionando sulla legge di Ohm e sul tipo di collegamento che si realizza in presenza di un carico, di motivare come mai, in presenza di un carico il diagramma (tranne negli estremi) si trova al di sotto della retta.⁸

5.3.5 ESEMPI DI APPLICAZIONE DELLA LEGGE DI OHM

Analisi di un circuito con più resistenze

Quale resistenza deve avere il resistore R_x del circuito in figura, perché in esso circoli la corrente $i = 1.00$ A?



☹

La resistenza R_x è in serie al parallelo di R_1 e R_2 e pertanto la resistenza totale è data da

$$R = R_x + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_x + \frac{30.0 \cdot 20.0}{30.0 + 20.0} = R_x + 12.0 \Omega$$

Ma nota la f.e.m e la corrente totale (la stessa che circola in R_x) si ha $R = \frac{\mathcal{E}}{i} = \frac{20.0}{1.00} = 20.0 \Omega$.

⁸ Risulta una resistenza $(1-\alpha)R$ collegata in serie al parallelo tra αR e la resistenza di carico. Partire dalla considerazione che la corrente totale aumenta e ragionare sulle cadute di tensione.

Pertanto $R_x = R - 12.0 = 8.0 \Omega$



Analisi di un circuito con più resistenze

Tutti i resistori del circuito in hanno la stessa resistenza R , e la resistenza equivalente del circuito è $R_{eq} = 1.00 \cdot 10^2 \Omega$. Qual è il valore della resistenza R ? Qual è la forza elettromotrice \mathcal{E} della pila, se in ogni ramo del parallelo circola la corrente $i' = 20.0 \text{ mA}$?



Si hanno due resistenze in serie a due in parallelo pertanto $R_{eq} = 2R + R/2 = 5/2 R$.

Noto R_{eq} si ha $R = 2/5 R_{eq} = 40.0 \Omega$.

La corrente i' è metà di i (perché le due resistenze in parallelo sono uguali) pertanto $i = 40.0 \text{ mA} = 4.00 \cdot 10^{-2} \text{ A}$.

Per la legge di Ohm la f.e.m del generatore è pertanto $R_{eq} i = 1.00 \cdot 10^2 \cdot 4.00 \cdot 10^{-2} = 4.00 \text{ V}$



La resistenza di shunt⁹

Si vuole fare in modo che nel circuito rappresentato in figura la corrente i_t sia α volte la corrente i con $\alpha > 1$ qualsiasi. Determinare il valore della resistenza R_s da collegare in parallelo a R affinché si verifichi la condizione richiesta.



La resistenza R_s è chiamata *resistenza di shunt* (resistenza di diramazione).

Il calcolo richiesto si può effettuare in svariati modi (ma sempre applicando la legge di Ohm e le relazioni sul collegamento in parallelo). Il metodo più rapido, e che induce ad allenare la capacità di lettura delle relazioni fisiche di proporzionalità è il seguente: poiché a parità di d.d.p. la corrente è inversamente proporzionale alla resistenza possiamo dire che:

$$\frac{i}{i_s} = \frac{R_s}{R}$$

Per ottenere la corrente $i_t = i + i_s$ applichiamo una proprietà delle proporzioni (comporre):

$$\frac{i_s + i}{i} = \frac{R + R_s}{R_s}$$

Dunque deve essere:

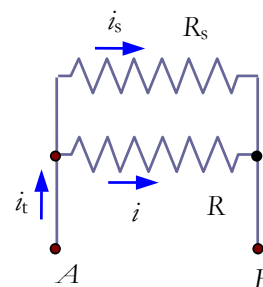
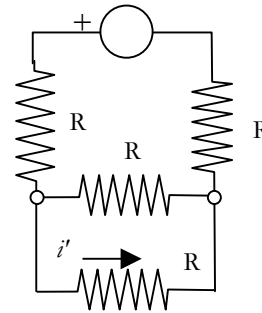
$$\alpha = \frac{R + R_s}{R_s}$$

Poiché era richiesto di determinare R_s si ha $\alpha R_s = R + R_s$ e dunque:

$$R_s = R \frac{1}{\alpha - 1}$$

Per esempio se deve passare una pari a 10 volte quella originaria si ha

⁹ Dall'inglese *to shunt* = deviare



$$R_s = \frac{1}{9} R$$

e così facendo $i_t = i + 9i = 10 i$

Come si vedrà in uno dei prossimi paragrafi la tecnica di *shunt* è normalmente usata per cambiare la portata degli strumenti elettrici di misura.



Combinare le modalità di collegamento

Si hanno 4 resistenze uguali di valore R . In quanti modi possono essere collegate? Determinare per ciascuno dei modi la resistenza equivalente.



- a) Quattro in serie $R_{eq} = 4 R$
- b) Tre in serie in parallelo a una $R_{eq} = \frac{3R R}{4R} = \frac{3}{4} R$
- c) Due in serie in parallelo a due in serie $R_{eq} = \frac{1}{2} (2R) = R$
- d) Due in serie in parallelo a due in parallelo $R_{eq} = \frac{2R \cdot \frac{1}{2} R}{(2 + \frac{1}{2})R} = \frac{2}{5} R$
- e) Due in serie in parallelo a una; il tutto in serie all'altra $R_{eq} = R + \frac{2R R}{(2 + 1)R} = (1 + \frac{2}{3})R = \frac{5}{3} R$
- f) Due in serie in serie a due in parallelo $R_{eq} = 2R + \frac{1}{2} R = \frac{5}{2} R$
- g) Due in parallelo in serie a una; il tutto in parallelo all'altra $R_{eq} = \frac{\frac{3}{2}R R}{(\frac{3}{2} + 1)R} = \frac{3}{2} \frac{2}{5} R = \frac{3}{5} R$
- h) Tre in parallelo in serie a una $R_{eq} = \frac{1}{3} R + R = \frac{4}{3} R$
- i) Quattro in parallelo $R_{eq} = R/4$

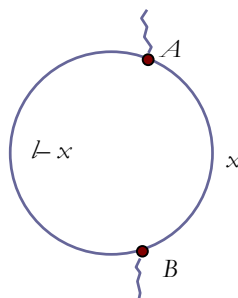
I modi possibili sono 9 in tutto.



La resistenza di un anello di materiale conduttore



Il circuito rappresentato in figura è formato da un anello di rame di lunghezza $l = 65.3$ cm e del diametro $d = 0.20$ mm. Determinare l'espressione della resistenza del circuito in funzione di $\beta = \frac{x}{l}$ e trovare quindi per quale valore di x la resistenza equivalente vale 0.10Ω . Stabilire per quali valori di resistenza equivalente il problema ammette soluzioni.



L'anello viene diviso dai punti A e B in due resistenze in parallelo R' e R'' di lunghezze rispettivamente l e $l-x$ e per la resistenza equivalente si ha:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{A}{\rho} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} \right) = \frac{A}{\rho} \frac{l}{x(l-x)} = \frac{A}{l \rho} \frac{1}{\beta(1-\beta)}$$

$$R = R_f \beta (1 - \beta)$$

dove si è indicato con R_f la resistenza del filo costituente l'intero anello.

Il valore $R_f = \rho \frac{l}{A} = 1.7 \times 10^{-6} \frac{0.653}{\pi \times (0.1 \times 10^{-3})^2} \approx 0.35 \Omega$

Se si inserisce il valore dato per R si ottiene:

$$\frac{0.10}{0.35} = \beta - \beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 - \beta + 0.29 = 0$$

$\Delta = 1 - 4 \times 0.29 = -0.16 < 0$ l'equazione non ammette soluzioni.

Se indichiamo con $\alpha = \frac{R}{R_f}$ l'equazione risolvente diventa:

$$\beta^2 - \beta + \alpha = 0$$

$$\Delta = 1 - 4\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < R \leq \frac{1}{4} 0.35 \approx 0.087 \Omega$$

Dunque con la configurazione data il problema ammette soluzione solo se la resistenza equivalente assegnata è minore di 0.087Ω



Un risultato inatteso: si chiude un interruttore e due lampadine uguali si comportano in maniera opposta

Il circuito in figura è formato da tre lampadine identiche. Spiegare perché quando si chiude l'interruttore la luminosità di L_1 aumenta mentre quella di L_2 diminuisce.



La luminosità delle lampadine, visto che sono identiche dipende dalla corrente che le percorre.

Prima di chiudere l'interruttore L_1 e L_2 sono in serie mentre L_3 è disinnescata. Pertanto L_1 e L_2 presentano la stessa luminosità.

Quando si chiude l'interruttore si stabilisce un collegamento in parallelo tra L_2 e L_3 e pertanto la resistenza totale del circuito diminuisce. Ciò fa aumentare la corrente totale che percorre L_1 . Per questa ragione la sua luminosità aumenta.

Se la corrente in L_1 aumenta, aumenta anche la caduta di tensione su di essa e poiché la ΔV totale non è cambiata ne segue che diminuisce la ΔV ai capi di L_2 e L_3 (che sono in parallelo). Pertanto esse sono percorse da una corrente minore e la luminosità di L_2 diminuisce.



Collegamento a 3 dimensioni: ragionare sulle simmetrie

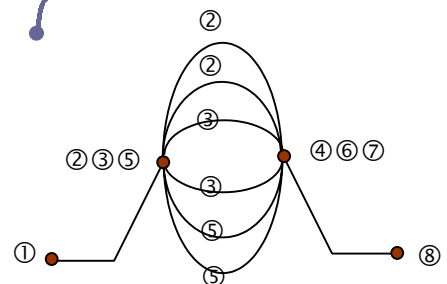
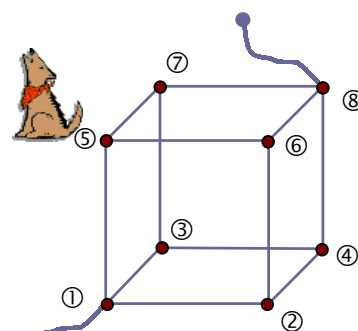
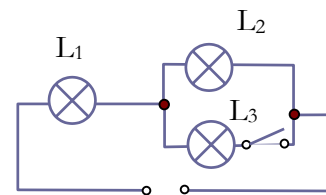
Delle resistenze di valore R sono collegate tra i 12 spigoli di un cubo. Determinare la resistenza equivalente tra i vertici contrapposti 1 e 8.

Suggerimento: Ragionare sulla simmetria delle connessioni. Si consiglia di variare il tipo di esercizio cambiando i punti di connessione.



Per ragioni di simmetria i punti ②③⑤ devono trovarsi allo stesso potenziale e lo stesso deve valere per ④⑥⑦. Pertanto i corrispondenti vertici possono essere posti in connessione diretta e ciò fa sì che si abbiano due resistenze la $R_{1(235)}$ e la $R_{1(467)}$ pari ciascuna a $R/3$ collegate in serie.

Se ora proiettiamo nel piano i collegamenti osserviamo immediatamente che tra i due punti ②③⑤ e ④⑥⑦ sono connesse 6 resistenze di valore R che risultano tutte in parallelo. Si tratta di 24, 26, 34, 37, 56, 57 come si nota nella figura qui a lato.



Pertanto la resistenza equivalente (ricordando che n resistenze uguali in parallelo equivalgono ad una resistenza di valore R/n) si trova considerando la serie di 3 gruppi di resistenze e si ottiene:

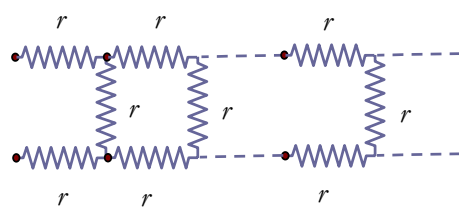
$$R_{eq} = \frac{R}{3} + \frac{R}{3} + \frac{R}{6} = \frac{5}{6} R.$$



Una rete formata da infinite resistenze

Una rete è costituita dalla replicazione all'infinito di 3 resistenze uguali di valore r connesse come in figura.

Determinare la resistenza equivalente.



Indichiamo con R il valore cercato ed osserviamo che se si elimina la prima terna si dovrà ottenere nuovamente R ma la prima terna è collegata al resto tramite $2r$ in serie al parallelo tra r e R pertanto potremo scrivere la relazione:

$$2r + \frac{rR}{r + R} = R$$

La relazione corrisponde alla equazione di II grado:

$$2r^2 + 2rR + rR = rR + R^2 \Leftrightarrow R^2 - 2rR - 2r^2 = 0$$

$\Delta/4 = 3r^2$ pertanto si ha come unica soluzione accettabile (quella positiva):

$$R = r(1 + \sqrt{3})$$



5.4 La legge di Ohm per un tratto di circuito con generatori

5.4.1 I GENERATORI DI F.E.M.

In questo capitolo abbiamo già esaminato circuiti piuttosto complessi ma abbiamo sempre pensato che esistessero due estremi a cui veniva applicata una d.d.p. Da dove si origina questa d.d.p.?

Storicamente le prime sorgenti sono state le pile voltaiche, che abbiamo descritto all'inizio del capitolo, e le batterie di pile. Le batterie erano insieme di pile collegate in serie o in parallelo. Attraverso il collegamento in serie si otteneva una replicazione della f.e.m. mentre attraverso il collegamento in parallelo si aumentava la capacità della pila di fornire corrente.

Con lo sviluppo dell'elettromagnetismo prima e dell'elettronica poi, si sono rese disponibili a partire dagli anni 30 del 900 altre sorgenti di f.e.m. più stabili e per le quali è possibile progettare a priori le caratteristiche di funzionamento. Queste sorgenti saranno indicate con il nome generico di *alimentatori*.

In generale chiameremo con il termine di *generatore di tensione* una generica sorgente di f.e.m. per la quale sarà necessario precisare solamente la polarità (quale morsetto si trova a potenziale più alto) e il valore di f.e.m.

5.4.2 COME SI ESTENDE LA LEGGE DI OHM IN PRESENZA DI GENERATORI

La legge di Ohm è stata enunciata nella ipotesi di assenza di f.e.m. cioè nella situazione in cui la caduta di tensione coincide con la d.d.p. del campo coulombiano.

Se consideriamo ora un circuito non omogeneo, cioè in cui oltre alla forza coulombiana agiscono *forze estranee* non dovremo far altro che tenere conto anche della loro presenza ed utilizzare al posto della d.d.p. la *caduta di tensione*.

$$u = i R$$

Un tratto di circuito contenente conduttori ohmici e/o generatori è chiamato *ramo del circuito* e la legge di Ohm per un generico ramo diventa, sostituendo al posto del voltaggio l'espressione attraverso d.d.p. e f.e.m.:

$$V_{12} \pm \mathcal{E} = \pm R i$$

o anche:

$$V_{12} = \pm \mathcal{E} \pm R i \tag{V.5.7}$$

Il segno \pm deriva dal fatto che tutte le grandezze considerate hanno un segno.

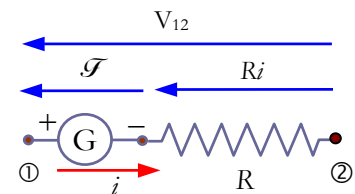
V_{12} e Ri hanno lo stesso segno nella equazione quando la corrente entra dal nodo 1 ed esce dal nodo 2.

V_{12} ed \mathcal{E} hanno lo stesso segno nella equazione quando il polo positivo del generatore coincide con il punto 1.

La figura qui a lato aiuta ad orientarsi: si tratta di rappresentare le diverse grandezze tramite segmenti orientati e comportarsi logicamente rispetto alle operazioni di somma.



I simboli utilizzati per rappresentare l'elemento di una pila, la batteria di pile e un generico generatore di tensione



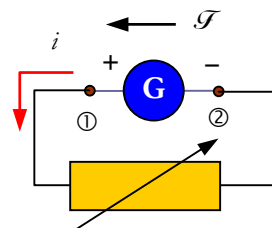
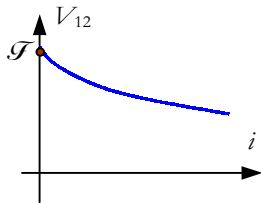
legge di Ohm per un ramo di circuito
 $V_{12} \pm \mathcal{E} = R i$

Nelle applicazioni, in generale non è noto il verso della corrente, ma ciò non deve preoccupare perché, risolvendo le equazioni, si possono trovare valori sia positivi sia negativi di i : nel primo caso la corrente avrà il verso che era stato arbitrariamente fissato, nel secondo avrà verso contrario.

Ricordiamo infine che in un circuito chiuso la differenza di potenziale è uguale a zero perché il campo coulombiano è conservativo. Pertanto, nel caso di un circuito chiuso la legge di Ohm si scrive:

$$i = \frac{\mathcal{F}}{R} \tag{V.5.8}$$

dove R rappresenta la resistenza totale del circuito e \mathcal{F} è la somma algebrica delle forze elettromotrici.



la curva voltamperometrica di un generatore reale è caratterizzata da una progressiva diminuzione della d.d.p. ai capi al crescere della corrente

5.4.3 CARATTERISTICA VOLTAMPEROMETRICA DEI GENERATORI

Tutti i generatori, con la sola eccezione di quelli progettati appositamente attraverso l'uso dell'elettronica, sono caratterizzati da una curva voltamperometrica che non è costante. Ciò significa che se la corrente erogata dal generatore cambia d.d.p. ai capi dei morsetti del generatore diminuisce.

In altri termini ai capi di un generatore non è disponibile l'intera f.e.m. ma solo una sua parte tranne quando il generatore non eroga corrente; in quel caso $V_{12} = \mathcal{F}$ e si ottiene così un modo per dare una definizione operativa della f.e.m.: *la f.e.m. corrisponde alla differenza di potenziale ai capi del generatore quando questo non eroga corrente (circuito aperto).*

La diminuzione della d.d.p. è dovuta a dissipazioni energetiche che il generatore stesso compie al suo interno nell'aumentare l'energia potenziale delle cariche. Queste perdite di energia sono diverse per i diversi generatori e la curva presenta forme diverse.

In prima approssimazione si può considerare lineare questo andamento mentre i diversi generatori differiranno per la inclinazione di tale linea.

La equazione della linea retta sarà del tipo:

$$V_{12} = \mathcal{F} - m i$$

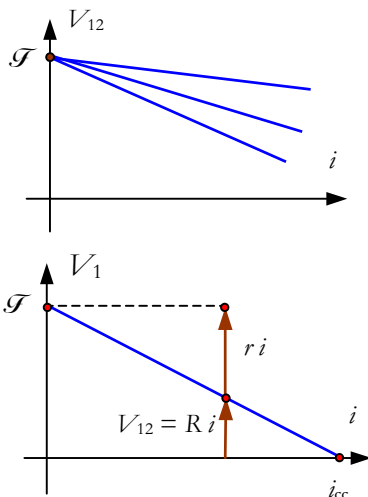
poiché $m i$ ha le dimensioni di una d.d.p. si assimila m ad una resistenza che viene chiamata *resistenza interna del generatore* e la si indica con r . Si scrive dunque, se si indica con R la resistenza del carico ai capi del generatore:

$$V_{12} = R i = \mathcal{F} - r i \Leftrightarrow \mathcal{F} = (R + r) i \Leftrightarrow i = \frac{\mathcal{F}}{R_c + r} \tag{V.5.9}$$

Il valore di corrente per il quale la d.d.p. ai capi si riduce a zero viene detto *corrente di corto circuito*. Si dice che si fa un corto circuito quando due punti a potenziale diverso vengono collegati con un conduttore imponendo loro di portarsi allo stesso potenziale attraverso una corrente molto grande.

$$i_{cc} = \frac{\mathcal{F}}{r} \tag{V.5.10}$$

Tra i generatori di corrente di origine chimica le comuni pile a secco hanno resistenze interne piuttosto elevate e quindi, correnti di corto circuito basse. Ciò significa che, poste in c.c. non danno luogo a danneggiamenti, salvo il fatto di scaricarsi.



Nella approssimazione lineare della caratteristica voltamperometrica di un generatore vengono definite per il generatore due nuove grandezze: la **resistenza interna** e la **corrente di corto circuito**

Capita l'esatto contrario con gli accumulatori delle automobili che sono progettati volutamente per dare correnti di c.c. molto elevate e se posti in c.c. possono produrre l'incendio della automobile. Il motivo di questa scelta costruttiva sta nell'elevato valore di corrente richiesto dal motorino di avviamento all'atto della accensione.

5.4.4 LE LEGGI DI KIRCHHOFF

Quando si analizzano circuiti complessi contenenti generatori e resistenze in maniera qualsiasi la legge di Ohm si rivela di difficile applicazione ed al suo posto si utilizza una metodica di analisi nota come *leggi di Kirchhoff*.

Un circuito complesso viene analizzato utilizzando tre concetti:

- *nodo*: è un punto di un circuito cui afferiscono più conduttori
- *ramo*: è la connessione tra due nodi e può contenere sia resistenze, sia generatori
- *maglia*: è un insieme di rami che formano una poligonale chiusa

Le leggi di Kirchhoff sono due: la prima riguarda i nodi ed è una diretta conseguenza della legge di conservazione della carica, la seconda riguarda le maglie ed è una diretta conseguenza della conservatività della forza coulombiana.

Considerato un nodo, la somma delle correnti entranti è sempre uguale alla somma delle correnti uscenti o anche, se decidiamo di assegnare segno positivo a quelle entranti e segno negativo a quelle uscenti: *la somma algebrica delle correnti in corrispondenza di un nodo è uguale a 0*.

$$\sum i_i = 0 \tag{V.5.11}$$

La seconda legge dice che *considerata una maglia e fissato su di esso un verso di rotazione arbitrario la somma algebrica delle forze elettromotrici è uguale alla somma algebrica delle cadute di tensione ai capi delle resistenze*.

Le f.e.m. vengono prese con il segno + quando il loro verso coincide con quello di rotazione e lo stesso si fa per le cadute di tensione. Poiché il verso delle correnti è a priori ignoto si fissa un verso arbitrario ad esse (il verso reale risulterà a posteriori).

Per dimostrare l'equazione delle maglie consideriamo una maglia come in figura ed applichiamo ad ogni ramo di essa l'equazione (V.5.7).

$$\begin{aligned} V_{AB} &= +\mathcal{F}_1 + R_1 i_1 \\ V_{BC} &= +\mathcal{F}_2 - R_2 i_2 \\ V_{CD} &= +\mathcal{F}_3 - R_3 i_3 \\ V_{DA} &= -\mathcal{F}_4 + R_4 i_4 \end{aligned}$$

Se si sommano i termini di sinistra si ottiene 0 e spostando a sinistra le forze elettromotrici si ha:

$$-\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4 = R_1 i_1 - R_2 i_2 - R_3 i_3 + R_4 i_4$$

ovvero:

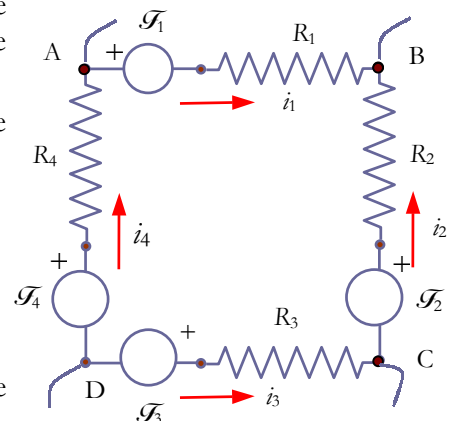
$$\sum \mathcal{F}_i = \sum R_i i_i \tag{V.5.12}$$

con la seguente precisazione sui segni: le cadute di tensione e le f.e.m. vengono prese positive quando la corrente e la polarità del generatore

i principi di Kirchhoff per la analisi dei circuiti

$$\sum i_i = 0$$

$$\sum \mathcal{F}_i = \sum R_i i_i$$



sono nel verso di percorrenza della maglia, in caso contrario vengono fatte precedere dal segno $-$.

5.4.5 CIRCUITI CONTENENTI GENERATORI

Come si usa la legge di Ohm a circuito chiuso

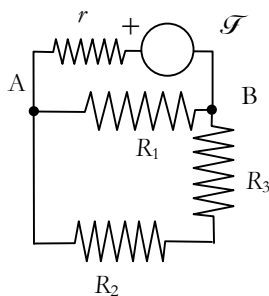
Nel circuito in figura la batteria presenta, a circuito aperto, una d.d.p. (f.e.m) $\mathcal{E} = 50.0 \text{ V}$; quando viene collegata al circuito, in esso circola la corrente $i = 2.00 \text{ A}$. Se $R_1 = 40.0 \Omega$, $R_2 = R_3 = 30.0 \Omega$: quanto vale la sua resistenza interna r_i ? Quanto vale la d.d.p. V_{AB} ai capi della batteria?



☹

Il carico della batteria è costituito dal parallelo tra R_1 e la serie di R_2 e R_3 .

Pertanto $R_c = \frac{R_1 R_{23}}{R_1 + R_{23}} = \frac{40.0 \cdot 60.0}{40.0 + 60.0} = 24.0 \Omega$ con $R_{23} = R_2 + R_3 = 60.0 \Omega$.



Se quando si chiude il circuito circolano 2.00 A con 50.0 V vuol dire che la resistenza totale è di 25.0Ω e pertanto la resistenza interna del generatore $r = 25.0 - 24.0 = 1.0 \Omega$.

$$V_{AB} = \mathcal{E} - r i = 50.0 - 1.0 \cdot 2.00 = 48.0 \text{ V}$$

☺

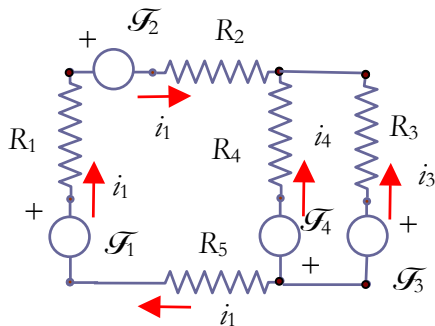
Analisi di un circuito contenente maglie con uso dei principi di Kirchhoff

Dato il circuito rappresentato qui a lato determinare le correnti che lo percorrono sapendo che $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_4 = 12.0 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 15.0 \text{ V}$, $R_1 = R_3 = R_4 = 3.00 \Omega$, $R_2 = R_5 = 5.00 \Omega$

☹



Dopo aver fissato in maniera arbitraria i versi delle correnti osserviamo che il nostro circuito presenta 2 nodi, 3 rami e 3 maglie. Sono dunque presenti 3 incognite i_1, i_3, i_4 e ci serviranno 3 equazioni. Conviene scrivere il maggior numero possibile di equazioni ai nodi (ma il numero massimo è $n - 1$ perché le equazioni ai nodi non sono indipendenti) e noi ne useremo 1. Ci serviranno poi 2 equazioni alle maglie tra le 3 possibili.



Scegliamo come verso di rotazione quello orario e avremo:

$$\begin{cases} i_1 = i_3 + i_4 \\ \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_2 = (R_1 + R_2 + R_5) i_1 - R_4 i_4 \\ -\mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_3 = R_4 i_4 - R_3 i_3 \end{cases}$$

il sistema (tenendo conto dei dati) equivale a:

$$\begin{cases} i_1 = i_3 + i_4 \\ 9.00 = 11.00 i_1 - 3.00 i_4 \\ -27 = 3.00 i_4 - 3.00 i_3 \end{cases}$$

Si tratta ora di risolvere un sistema di I grado e il gioco è fatto. Si ottiene:

$$i_1 = -0.47 \text{ A} \quad i_3 = 4.26 \text{ A} \quad i_4 = -4.74 \text{ A}$$

I valori trovati ci dicono che in realtà i_1 e i_4 hanno un verso contrario a quello indicato temporaneamente sullo schema.

Le reti, oltre che con il metodo indicato possono essere risolte anche usando il principio di sovrapposizione. Si tratta di determinare, con la legge di Ohm e con le leggi sul collegamento delle resistenze, le correnti

che si avrebbero se funzionasse un solo generatore alla volta. Le correnti reali si ottengono poi determinando la somma, ramo per ramo, delle correnti così determinate.



Una rete con n nodi interconnessi alimentata da un generatore

Sono dati n punti tutti interconnessi da conduttori di resistenza R. Due punti qualsiasi sono collegati ad un generatore di f.e.m. \mathcal{E} e di resistenza interna r. Determinare la corrente erogata dal generatore.



Per risolvere il problema conviene procedere per fasi.

Se $n = 3$ la situazione è quella illustrata qui a lato ed evidentemente la situazione corrisponde ad una resistenza R in parallelo a 2R.

Se $n = 4$ si aggiungono le connessioni diagonali e si osserva immediatamente, per simmetria, che i punti ③ e ④ devono trovarsi allo stesso potenziale e dunque rispetto al caso precedente si aggiunge una resistenza in parallelo di valore 2R

Se si aggiungono altri punti la situazione non muta nel senso che per $n = 5$ diventano allo stesso potenziale i punti ③④⑤ si aggiunge una nuova resistenza e così via.

Dunque la resistenza connessa tra ① e ② corrisponde all situazione rappresentata qui a lato che corrisponde al parallelo tra R e n-2 resistenze di valore 2R.

Le n-2 resistenze identiche valgono $\frac{2R}{n-2}$ e pertanto:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R} + \frac{n-2}{2R} = \frac{n}{2R}$$

la resistenza equivalente vale $R_{12} = \frac{2R}{n}$

La corrente erogata dal generatore di f.e.m. \mathcal{E} e di resistenza interna r vale dunque:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{2R}{n}} = \frac{n\mathcal{E}}{nr + 2R}$$



Calcolo della f.e.m. di un generatore in base alle variazioni di ΔV al variare del carico

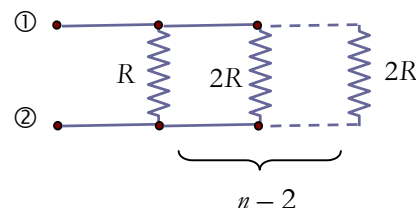
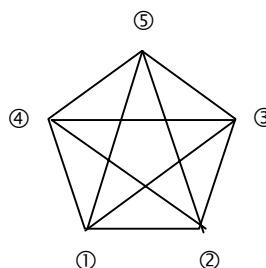
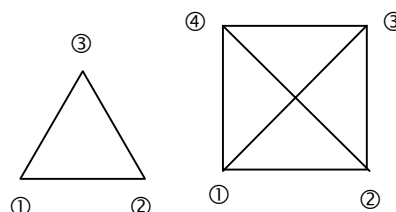
Ad un generatore di resistenza interna r e f.e.m. \mathcal{E} viene applicato un carico R_c e si riscontra una d.d.p. $\Delta V = 10.0$ V. Se la resistenza di carico viene triplicata la d.d.p. cambia a $\Delta V' = 12.0$ V. Determinare la f.e.m.



Si tratta di uno di quei problemi per i quali sembra mancare qualche dato ma non è così; si ha infatti:

$$10.0 = R_c i = \frac{\mathcal{E}}{R_c + r} R_c \qquad 12.0 = 3R_c i' = \frac{\mathcal{E}}{3R_c + r} 3R_c$$

Basta ora eliminare risolvere il sistema delle due equazioni nelle variabili r e \mathcal{E} si arriva a determinare le caratteristiche del generatore.



$$10.0(R_c + r) = \mathcal{F}R_c \quad \wedge \quad 12.0(3R_c + r) = 3\mathcal{F}R_c$$

facendo il rapporto si ha:

$$\frac{12.0(3R_c + r)}{10.0(R_c + r)} = 3 \text{ e da qui si ha: } 12.0(3R_c + r) = 30.0(R_c + r)$$

$$r = \frac{6.0R_c}{18.0} = \frac{1}{3} R_c$$

$$\mathcal{F} = \frac{10.0(R_c + r)}{R_c} = \frac{4}{3} 10.0 = 13.3 \text{ V}$$

Si consiglia di risolvere il problema per il caso di un α qualsiasi.

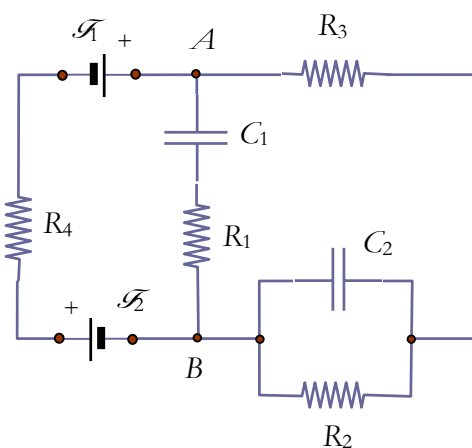


Analisi del regime stazionario di un circuito contenente resistenze e condensatori

Nel circuito a maglie qui rappresentato sono assegnate le f.e.m dei generatori e tutti i valori delle resistenze e dei condensatori. Determinare, a regime, le cariche immagazzinate sui due condensatori.



Trascorso un tempo dipendente dalla costante di tempo RC ¹⁰ dei diversi rami il circuito va in equilibrio e non si ha più passaggio di corrente nei rami contenenti condensatori. Per questa ragione, agli effetti del calcolo delle correnti possiamo ignorare la presenza del ramo AB e di C_2 . Ciò significa che si ha un'unica maglia percorsa dalla corrente i , alimentata da un'unica f.e.m. $\Delta\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$ e comprendente le resistenze in serie R_3, R_2, R_4 . Dunque:



$$i = \frac{\Delta\mathcal{F}}{R_3 + R_2 + R_4}$$

Supponiamo che i circoli in verso orario allora

$$V_{AB} = i (R_3 + R_2) \text{ e}$$

$$Q_1 = C_1 V_{AB} = C_1 \frac{\Delta\mathcal{F}(R_3 + R_2)}{R_3 + R_2 + R_4}$$

Mentre la d.d.p. ai capi di C_2 vale $R_2 i$ e pertanto:

$$Q_2 = C_2 R_2 i = C_2 \frac{\Delta\mathcal{F}R_2}{R_3 + R_2 + R_4}$$



5.5 La potenza elettrica

5.5.1 QUALCHE RICHIAMO SULLA POTENZA

¹⁰ Si veda il paragrafo 7 dedicato a carica e scarica dei condensatori

La potenza, in un processo di conversione energetica nel quale avviene una conversione $\delta\mathcal{E}$ in un tempo δt è definita come la velocità di conversione tramite il rapporto:

$$P = \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta t}$$

In elettricità le conversioni energetiche corrispondono al lavoro complessivamente svolto dai campi elettrici ed estranei e pertanto sono calcolabili come prodotto del voltaggio per la carica trasportata:

$$\delta\mathcal{E} = \delta\mathcal{L} = u \delta q$$

Da queste due relazioni si giunge alla relazione che fornisce la potenza elettrica in generale:

$$P = \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta t} = \frac{u \delta q}{\delta t} = u i \tag{V.5.13}$$

Quando un bipolo caratterizzato da una caduta di tensione u viene attraversato da una intensità di corrente i esso utilizza una potenza elettrica pari al prodotto delle due quantità u e i .



La potenza elettrica $P = u i$

Il risultato trovato presenta due casi particolari quando si ha la presenza di soli generatori o di soli campi coulombiani. Nel primo caso si ha:

$$P = \mathcal{F} i$$

Nel secondo caso:

$$P = \Delta V i$$

Negli utilizzatori previsti per il funzionamento in parallelo la indicazione della potenza è sempre stampata sulla etichetta dell'apparecchiatura insieme alla d.d.p. di funzionamento; naturalmente si tratta di una grandezza additiva se l'apparecchio viene alimentato con la corretta d.d.p.; si possono cioè eseguire i conti sommando le potenze delle diverse apparecchiature collegate.

5.5.2 SE SONO PRESENTI SOLO RESISTENZE

All'interno dei resistori si verifica una trasformazione, di tipo irreversibile, di energia elettrica in energia interna del conduttore.

In questo caso, poiché la caduta di tensione corrisponde alla d.d.p. e vale la legge di Ohm si ha:

$$P = \Delta V i = R i^2 = \frac{\Delta V^2}{R} \tag{V.5.14}$$

Questa legge, riferita alla energia invece che alla potenza, è nota come *legge di Joule* e la sua verifica sperimentale insieme ad altre relazioni quantitative sulla conversione di svariate forme di energia in calore è stata al centro dei lavori di Joule sulla conservazione della energia. La sua determinazione sperimentale ha fatto da base, insieme ad altre, all'enunciato del teorema di conservazione dell'energia.

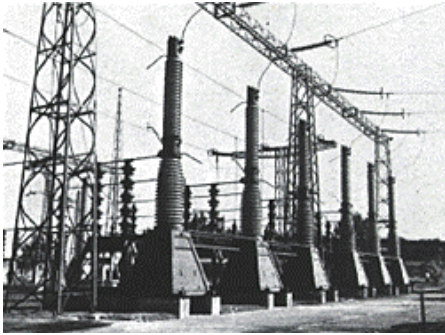
Quando si lavora con la potenza elettrica bisogna imparare ad utilizzare, tra le tre espressioni equivalenti, quella consona al contesto analizzato. Se per esempio si sta operando a potenza costante e si vuol conoscere il legame tra resistenza e differenza di potenziale si userà la III la quale ci dice che la resistenza è proporzionale al quadrato della d.d.p., e così via.

Legge di Joule: in origine è una legge sperimentale nell'ambito delle ricerche sulla conservazione della energia



le diverse espressioni della **potenza elettrica**

$$P = \Delta V i = R i^2 = \frac{\Delta V^2}{R}$$



5.5.3 IL TRASPORTO AD ALTA TENSIONE DELL'ENERGIA ELETTRICA

La (V.5.14) ci spiega bene perché il trasporto della energia elettrica avvenga ad alta tensione. Fissate le caratteristiche della linea di trasporto, si hanno delle perdite di potenza proporzionali al quadrato della intensità di corrente (R è la resistenza della linea elettrica di trasporto).

D'altra parte, a parità di potenza trasportata la corrente è inversamente proporzionale al voltaggio e pertanto, operando ad alta tensione, si ha una minimizzazione delle perdite di trasporto.

Tutto ciò ha comunque un costo: attraverso apposite macchine (i trasformatori) si deve dapprima elevare la tensione a valori dell'ordine delle centinaia di kV, eseguire il trasporto ad alta tensione (tralicci alti, problemi di isolamento) e quindi, in vicinanza delle città, effettuare la conversione inversa.



5.5.4 L'UTILIZZO DELLE RELAZIONI RIGUARDANTI LA POTENZA ELETTRICA

Dimensionamento di uno scaldacqua elettrico

Determinare la potenza di uno scaldacqua elettrico alimentato con una d.d.p. $\Delta V = 220$ V sapendo che è in grado di scaldare 100 litri di acqua dalla temperatura $t_1 = 12.5$ °C alla temperatura $t_2 = 80.0$ °C nel tempo $\tau = 100$ minuti. Si ipotizzi un rendimento dell'80%.

Successivamente si determini la lunghezza del filo di nichel cromo della resistenza elettrica che fa da elemento riscaldante supponendo che la sua sezione sia $A = 5.50$ mm² e che si possano trascurare le variazioni di resistività dovute alle variazioni di temperatura.



☹

Determiniamo in primo luogo la variazione di energia interna della massa d'acqua considerata.

$$Q = \Delta m c \Delta t = 10^2 \times 4.18 \times 10^3 \times (80.0 - 12.5) = 2.82 \times 10^7 \text{ J}$$

Tenendo conto del rendimento il corrispondente lavoro a livello elettrico vale:

$$\mathcal{L} = Q / \eta = 2.82 \times 10^7 / 0.80 = 3.53 \times 10^7 \text{ J}$$

Poiché questa energia viene dissipata in 100' la corrispondente potenza elettrica è pari a:

$$P = \frac{\mathcal{L}}{\tau} = \frac{3.53 \times 10^7}{100 \times 60} = 0.59 \times 10^4 \text{ W}$$

Poiché conosciamo la tensione di alimentazione ΔV possiamo determinare R con la terza delle (V.5.14):

$$R = \frac{\Delta V^2}{P} = \frac{220^2}{0.59 \times 10^4} = 8.2 \text{ } \Omega$$

Poiché conosciamo $\rho_{20} = 100 \times 10^{-8}$ Ω m e sappiamo che il nichel cromo non varia apprezzabilmente la sua resistività con la temperatura potremo applicare la relazione di Ohm sulle caratteristiche geometriche del conduttore avremo che:

$$l = \frac{R A}{\rho} = \frac{8.2 \times 5.50 \times 10^{-6}}{100 \times 10^{-8}} = 45.1 \text{ m}$$



La energia associata ai fulmini

Il fulmine e il lampo sono costituiti da scariche elettriche della durata $\Delta t \approx 10^{-3}$ s tra una nube e la terra o tra due nubi. La corrispondente d.d.p. è $\Delta V \approx 10^9$ V e l'intensità di corrente media $i \approx 2 \times 10^4$ A. Calcolare l'energia media di un lampo e la potenza elettrica corrispondente sulla terra tenendo conto che mediamente cadono 100 lampi al secondo.



La energia coinvolta da un lampo è data da:

$$\mathcal{L} = \Delta V i \Delta t = 10^9 \times 2 \times 10^4 \times 10^{-3} \approx 2 \times 10^{10} \text{ J}$$

La potenza corrispondente a livello della intera terra si troverà moltiplicando per la frequenza:

$$P = \mathcal{L} \nu = 2 \times 10^{10} \times 10^2 = 2 \times 10^{12} \text{ W}$$

Il valore che abbiamo trovato corrisponde alla potenza di 1000 centrali elettriche di tipo moderno (centrali da 2'000 MW).



Caratteristiche costruttive delle lampade a filamento

Spiegare perché le lampade a filamento a bassa tensione a parità di potenza presentano un rendimento luminoso più elevato. Detto altrimenti perché una lampadina da 20 W da automobile (12 V) fa molta più luce di una lampada da 20 W di tipo domestico (220 V)?



A parità di potenza la resistenza è proporzionale al quadrato della differenza di potenziale e ciò vuol dire che la lampada a bassa tensione ha una resistenza molto minore.

Poiché in una lampadina la lunghezza del filamento dipende dalle dimensioni del bulbo e non può essere scelta liberamente il parametro su cui si interviene è la sezione che, in quelle a bassa tensione, è decisamente più grande. Se la sezione è più grande la lampada è più robusta e pertanto può essere progettata in modo di lavorare a temperature più elevate. Ma più è alta la temperatura e maggiore è il rendimento luminoso.



Collegamento in serie e in parallelo di lampade di potenza assegnata

Due lampade recano stampato sul proprio bulbo di vetro le seguenti indicazioni: 1) 12 V, 3 W 2) 12 V, 5 W. Cosa si può dire delle resistenze delle due lampade? Cosa accade se le due lampade vengono collegate in serie alimentandone con la d.d.p. di 12 V? Per quale valore di d.d.p. viene raggiunta la condizione di massima luminosità di una delle due? Cosa si può dire della luminosità della lampada che fa meno luce?



Poiché $P = \frac{\Delta V^2}{R}$ a parità di d.d.p. si può affermare che la resistenza sia

inversamente proporzionale alla potenza e dunque $\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2}{R_1}$

Con i dati del problema $\frac{R_2}{R_1} = \frac{3}{5} = 0.6$ ovvero $R_2 = 0.6 R_1$



Tenendo conto che ciò accade per $\Delta V = 12 \text{ V}$ si ha $R_1 = \frac{\Delta V^2}{P_1} = \frac{12^2}{3} = 48 \text{ } \Omega$ mentre $R_2 = 0.6 R_1 = 28.8 \text{ } \Omega$

Se ora le due lampade vengono collegate in serie esse risultano attraversate dalla stessa corrente e dunque poiché $P = Ri^2$ ne risulta che la potenza sia direttamente proporzionale alla resistenza:

$\frac{P_1'}{P_2'} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{5}{3} = 1.67$ ovvero la lampada progettata per dare meno luce dissipa una potenza maggiore della seconda anche se nessuna delle due dissipa la potenza nominale visto che la d.d.p. di 12 V è ripartita tra le due lampade in maniera proporzionale alla resistenza.

Perché la prima lampada dissipi 3 W occorre che $i = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{3}{48}} = 0.25 \text{ A}$

La d.d.p da applicare alla serie delle due resistenze è pertanto:

$$\Delta V'' = (R_1 + R_2)i = 76.8 \cdot 0.25 = 19.2 \text{ V}$$

La lampada che fa meno luce dissipa una potenza:

$$P_2'' = R_2 i^2 = 28.8 \cdot 0.25^2 = 1.8 \text{ W} \text{ contro i } 5 \text{ W di potenza nominale.}$$

E' sbagliato affermare che la luminosità sia $1.8/5 = 0.36$ del valore nominale perché il rendimento luminoso cresce con la temperatura più rapidamente che in maniera lineare e dunque il rendimento luminoso che si ottiene è molto più basso del 36% del valore nominale.



Dimensionamento di una linea di trasporto dell'energia elettrica

Un carico resistivo viene alimentato a valle di una linea da una d.d.p. $\Delta V_v = 2.20 \cdot 10^2 \text{ V}$ e assorbe una potenza $P_c = 2.55 \text{ kW}$. La linea di trasporto è formata da 2 fili di rame della lunghezza $d = 6.25 \cdot 10^2 \text{ m}$, sezione $\sigma = 2.3 \text{ mm}^2$. Si assuma una resistività costante $\rho = 0.017 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$.



a) Determinare la resistenza R_l della linea e quella R_c del carico. b) Determinare la d.d.p. ΔV_m con cui bisogna alimentare a monte. c) Dopo aver calcolato le perdite di potenza in linea P_l determinare il rendimento del trasporto. d) Supponendo di collegare in parallelo al carico un secondo carico di resistenza $R_s = 45.0 \text{ } \Omega$ determinare il nuovo valore di corrente in linea i' supposta invariata la d.d.p. ΔV_m a monte. e) Determinare la nuova d.d.p. a valle $\Delta V'_v$



a) Il circuito è costituito da due resistenze R_l e R_c in serie; la corrente è dunque la stessa mentre le d.d.p. si sommano $\Delta V_m = \Delta V_l + \Delta V_v$. Si tenga infine presente che la linea è costituita da 2 fili e pertanto la sua lunghezza $l = 2d$.

$$\text{In base alla II legge di Ohm } R_l = \rho \frac{2d}{\sigma} = 0.017 \frac{2 \cdot 6.25 \cdot 10^2}{2.3} = 9.2 \text{ } \Omega$$

Per determinare la resistenza di carico conviene calcolare la corrente i dalla potenza (la useremo per determinare la caduta in linea).

$$i = \frac{P_c}{\Delta V_v} = \frac{2.55 \cdot 10^3}{2.20 \cdot 10^2} = 11.6 \text{ A} \quad R_c = \frac{\Delta V_v}{i} = \frac{2.20 \cdot 10^2}{11.6} = 19.0 \text{ } \Omega$$

b) Basta calcolare la caduta di tensione in linea $\Delta V_l = R_l i = 19.0 \cdot 11.6 = 107 \text{ V}$ e $\Delta V_m = \Delta V_l + \Delta V_v = 220 + 107 = 327 \text{ V}$

c) $P_l = R_l i^2 = 9.2 \cdot 11.6^2 = 1.24 \cdot 10^3 \text{ W}$ (si poteva anche moltiplicare la caduta di tensione in linea per la corrente). Il rendimento è sempre dato dall'effetto utile (potenza trasportata) su costo (potenza alimentata)

$\eta = \frac{P_c}{P_m} = \frac{2.55}{2.55 + 1.24} = 0.67$ (poiché si tratta di un rapporto tra grandezze omogenee non importa in quale unità si esprimono le grandezze).

d) Quando si collega un carico in parallelo e non si cambia la d.d.p. a monte aumenterà la corrente (per effetto della diminuzione di resistenza) e ciò determinerà una diminuzione della d.d.p. a valle per effetto dell'aumento della caduta di tensione in linea.

Quello che l'ENEL fa in realtà è di adeguare la tensione di alimentazione a monte per adeguare il valore a valle che deve rimanere costante (si usano appositi dispositivi a *feed back*)

Il circuito risulta costituito dalla serie della linea con il parallelo tra il vecchio e il nuovo carico, pertanto $R_t = R_l + \frac{R_s \cdot R_c}{R_s + R_c} = 9.2 + \frac{19 \cdot 45}{19 + 45} = 9.2 + 13.4 = 22.6 \Omega$

$$i = \frac{\Delta V_m}{R_t} = \frac{327}{22.6} = 14.5 \text{ A}$$

e) $\Delta V_l = R_l i = 133 \text{ V}$ pertanto $\Delta V_v = \Delta V_m - \Delta V_l = 327 - 133 = 194 \text{ V}$

☺

Rendimento energetico di un generatore al variare del carico

Un generatore dotato di f.e.m. \mathcal{E} e di resistenza interna r è collegato ad un carico resistivo variabile R . Determinare l'andamento della potenza del carico al variare della corrente. Quindi trovare il rendimento del generatore in funzione della corrente. Infine tracciare e commentare i diagrammi delle due funzioni così ottenute individuando in particolare per quale valore di resistenza di carico si può ottenere la potenza massima dal generatore.



☹

La potenza del carico può essere scritta in funzione della sola corrente come differenza tra la potenza erogata e quella perduta:

$P = \mathcal{E}i - r i^2$ il cui diagramma è costituito da una parabola con la concavità verso il basso che taglia l'asse delle i nell'origine e per $i = \frac{\mathcal{E}}{r}$ cioè in corrispondenza della corrente di corto circuito. Il massimo corrisponde al vertice che si ha per $i = \frac{\mathcal{E}}{2r}$ e in questo caso deve essere $r = R$ visto che le due resistenze sono in serie.

Dunque si riesce ad ottenere il massimo energetico da un generatore quando la resistenza di carico è uguale alla resistenza interna.

Per quanto riguarda il rendimento si ha invece:

$$\eta = \frac{P}{P_c} = \frac{\mathcal{E}i - r i^2}{\mathcal{E}i} = 1 - \frac{r i}{\mathcal{E}} = 1 - \frac{i}{i_{cc}}$$

e in questo caso si ha una retta con coefficiente angolare negativo con valore massimo quando il generatore non eroga corrente (ma non è una gran consolazione) e valore minimo (0) in condizione di corto circuito.



Come cambia la temperatura di due lampadine collegate in serie al variare delle loro caratteristiche geometriche ?



Consideriamo due lampadine collegate in serie e caratterizzate da filamenti dello stesso materiale di diametri d_1 e d_2 e lunghezze l_1 e l_2 . Indicate con ΔT_1 e ΔT_2 le differenze di temperatura dei filamenti rispetto alla temperatura dell'ambiente determinare la relazione tra tali variazioni. Supporre che la potenza scambiata con l'ambiente sia proporzionale alla superficie del filamento e alla differenza di temperatura. Trascurare le variazioni di resistività dovute alle differenze di temperatura.



Se indichiamo con P_1 e P_2 le potenze scambiate con l'ambiente nei due casi potremo scrivere, in base alle ipotesi del problema che:

$$P_1 = k \pi d_1 l_1 \Delta T_1 \quad \text{e} \quad P_2 = k \pi d_2 l_2 \Delta T_2$$

dove k è una costante dipendente esclusivamente dal sistema di unità di misura scelto.

D'altra parte in condizioni stazionarie la potenza scambiata sarà pari alla potenza elettrica dissipata nella resistenza e pertanto:

$$P_1 = R_1 i^2 = \rho \frac{4l_1}{\pi d_1^2} i^2 \quad \quad P_2 = R_2 i^2 = \rho \frac{4l_2}{\pi d_2^2} i^2$$

Se eseguiamo un rapporto sulle due coppie di equazioni si elimineranno tutte le quantità ignote ma costanti e si avrà:

$$\frac{d_1 l_1 \Delta T_1}{d_2 l_2 \Delta T_2} = \frac{l_1 d_2^2}{d_1^2 l_2} \quad \text{e pertanto:}$$

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{d_2^3}{d_1^3}$$

Abbiamo condotto la trattazione in chiave simbolica perché ciò consente di svolgere alcune interessanti considerazioni:

- non ha importanza la lunghezza dei filamenti
- mentre il rapporto delle resistenze è inversamente proporzionale ai quadrati dei diametri dei filamenti il rapporto delle variazioni di temperatura va come il cubo (se si raddoppia il diametro, la resistenza diventa un quarto e la variazione di temperatura un ottavo).



Il tempo di intervento di un interruttore termico

Per la protezione degli impianti elettrici si utilizzano i cosiddetti interruttori di massima che funzionano per effetto termico o per effetto magnetico. Nel primo caso un sensore percorso dalla corrente da monitorare si dilata per effetto Joule. Quando la variazione di lunghezza supera un valore preassegnato scatta un comando di sgancio che apre il circuito.



Supponiamo che il sensore si costituisca da una barretta di costantana ((45% Ni e 55% Cu) caratterizzata da un basso coefficiente di temperatura resistivo in modo di trascurare le variazioni di resistenza connesse alle variazioni di temperatura ($2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$).

La costantana ha le seguenti caratteristiche: calore specifico $c = 0.39 \text{ J/(g K)}$, densità $\delta = 8.9 \text{ kg/dm}^3$, coefficiente di dilatazione lineare $\alpha = 1.49 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, resistività $\rho = 5.0 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$.

La sbarra ha una lunghezza $l = 5.00 \text{ cm}$ e una sezione $S = 3 \text{ mm}^2$ deve far scattare il relais quando viene percorsa da una corrente $i = 25.0 \text{ A}$ in un tempo $\Delta t = 10 \text{ s}$. Determinare quale debba essere la variazione di lunghezza su cui deve essere tarato l'interruttore di sgancio supponendo che nel corso della dilatazione non si abbiano scambi energetici verso l'esterno.



La resistenza della sbarretta di costantana vale:

$$R = \rho \frac{l}{S} = 5.0 \cdot 10^{-8} \frac{5.00 \cdot 10^{-2}}{3.00 \cdot 10^{-6}} = 8.33 \cdot 10^{-4} \Omega$$

quando la resistenza è percorsa dalla corrente di sgancio si dissipa nel tempo Δt una energia;

$$\Delta \mathcal{E} = P \Delta t = R i^2 \Delta t = 8.33 \cdot 10^{-4} \cdot 25.0^2 \cdot 10 = 5.21 \text{ J}$$

Questa energia produce una variazione di temperatura ΔT determinabile attraverso il calore specifico:

$$\Delta \mathcal{E} = m c \Delta T = \delta V c \Delta T = \delta l S c \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\delta l S c} = \frac{5.21}{8.9 \cdot 10^3 \cdot 5.00 \cdot 10^{-2} \cdot 3.00 \cdot 10^{-6} \cdot 0.39 \cdot 10^3} = 10.0 \text{ K}$$

La variazione di lunghezza è calcolabile dalla relazione sulla dilatazione lineare secondo cui:

$$\Delta l = \alpha l \Delta T = 1.49 \cdot 10^{-5} \cdot 5.00 \cdot 10^{-2} \cdot 10.0 = 7.45 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Il valore determinato (7 millesimi di millimetro) appare troppo basso per una realizzabilità pratica. Per questa ragione proviamo a determinare la relazione che fornisce il risultato in forma simbolica e costruiamo a posteriori dei dati sensati:

$$\Delta l = \alpha l \Delta T = \alpha l \frac{\Delta \mathcal{E}}{\delta l S c} = \frac{\alpha \Delta \mathcal{E}}{\delta S c} = \frac{\alpha R i^2 \Delta t}{\delta S c} = \frac{\alpha \rho l i^2 \Delta t}{\delta S^2 c}$$

Gli unici parametri su cui si può pensare di intervenire sono la lunghezza (proporzionale a Δl) e la sezione (inversamente proporzionale al quadrato). Poiché la lunghezza non può essere variata in modo significativo (stante le dimensioni dell'interruttore) appare più realistico agire sulla sezione; supponiamo dunque che siano $S = 0.5 \text{ mm}^2$ e $l = 10.0 \text{ cm}$. Con questi dati si ottiene:

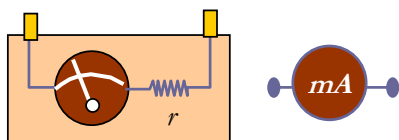
$$\Delta l = \frac{\alpha \rho l i^2 \Delta t}{\delta S^2 c} = \frac{1.49 \cdot 10^{-5} \cdot 5.0 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-1} \cdot 25^2 \cdot 10}{8.9 \cdot 10^3 \cdot (0.5 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 0.39 \cdot 10^3} = 0.0054 \text{ m} = 5.4 \text{ mm}$$



5.6 Voltmetro ed amperometro

5.6.1 SI PARTE SEMPRE DA UN MILLIAMPEROMETRO

Come vedremo nel capitolo dedicato al magnetismo è possibile sfruttare la interazione tra correnti elettriche e campi magnetici per costruire un misuratore di correnti elettriche. Tale strumento è già sensibile a correnti elettriche molto piccole e, per questa ragione, viene chiamata milliamperometro (misuratore di milliampere).



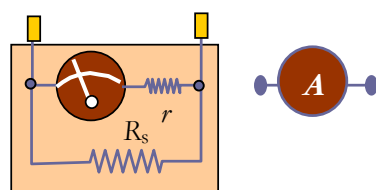
il **milliamperometro** dal punto di vista circuitale è assimilabile ad una resistenza molto piccola che corrisponde alla resistenza dell'avvolgimento di rame in cui scorre la corrente da misurare

Non ci interessano qui gli aspetti costruttivi, ma solamente le caratteristiche elettriche. Essendo il milliamperometro costituito da una bobina di rame, la sua resistenza (che chiameremo resistenza interna dello strumento e che indicheremo con r) è molto piccola.

Il milliamperometro sarà dunque rappresentato come in figura (a destra compare il simbolo usato negli schemi elettrici), senza dimenticarsi della resistenza interna r , e per misurare la corrente elettrica sarà collocato in serie al circuito di misura in modo che venga attraversato dalla corrente da determinare.

5.6.2 PER ARRIVARE ALL'AMPEROMETRO

Grazie alla legge di Ohm un milliamperometro può sempre essere trasformato in un amperometro di portata qualsiasi. ⁽¹¹⁾



l'**amperometro** è un milliamperometro con collegata in parallelo una resistenza di shunt solitamente più piccola della resistenza interna che ne modifica la portata oltre che la resistenza equivalente

Infatti, se si tiene presente quanto già visto negli esercizi di applicazione della legge di Ohm nel capitolo precedente, si ha la soluzione al come si possa trasformare un milliamperometro in un amperometro.

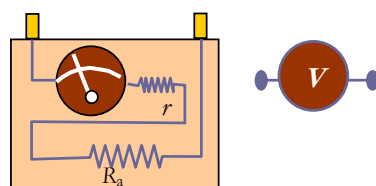
Basta collegare in parallelo a r un resistenza ancora più piccola di r e la maggior parte della corrente passerà nel ramo di derivazione.

Per esempio se $R_s = \frac{1}{9} r$ allora la corrente totale è 10 volte quella che passa nel milliamperometro e si è decuplicata la portata dello strumento.

Si presti molta attenzione al fatto che l'amperometro, per ragioni costruttive, presenta una resistenza interna molto bassa (ancora più bassa di quella già piccola del milliamperometro). Per questa ragione non bisogna sbagliarne il collegamento. Se lo si collega tra due punti a d.d.p. diversa si fa un *corto circuito* con danni significativi all'impianto oltre che allo strumento.

5.6.3 E AL VOLTMETRO

Il voltmetro è un milliamperometro opportunamente truccato. Invece di mettergli una resistenza piccola in parallelo si mette una grande resistenza in serie. Tale resistenza è chiamata resistenza addizionale ed è indicata con R_a in figura.



il **voltmetro** è un milliamperometro cui si collega in serie una resistenza molto elevata; grazie a ciò lo si può collegare tra punti a potenziale diverso e la corrente che lo attraversa sarà proporzionale alla d.d.p.

Poiché $R_a \gg r$ si può trascurare r e affermare che se si collega lo strumento ad una sorgente di d.d.p. V_{AB} al suo interno circola una corrente $i = \frac{V_{AB}}{R_a}$ dunque la corrente che circola nello strumento (e che è misurata dal milliamperometro) è proporzionale alla d.d.p. Basta cambiare la scala

¹¹ Si chiama *portata* di uno strumento il valore massimo di grandezza che lo strumento è in grado di misurare.

e il milliamperometro diventa un voltmetro. Cambiando il valore di R_x si cambia la sua portata.

5.6.4 IN SINTESI

Riassumendo: l'amperometro è uno strumento di piccolissima resistenza interna e va collegato in serie al circuito; il voltmetro è uno strumento di altissima resistenza interna e va collegato in parallelo al circuito.

Se si sbaglia a collegare un amperometro lo si danneggia perché si fa un corto circuito collegando una resistenza molto piccola tra due punti a potenziale diverso. Se invece si sbaglia a collegare un voltmetro il circuito funziona male perché la d.d.p. che dovrebbe essere applicata al carico risulta invece ripartita tra il carico e il voltmetro ma lo strumento non si danneggia.

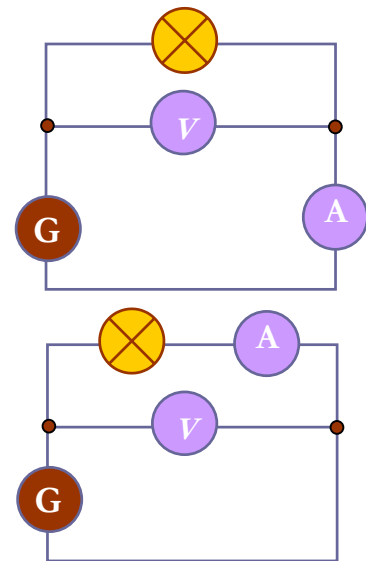
Concludiamo l'argomento indicando due possibili modalità di inserzione di voltmetro e amperometro in un circuito di accensione di una lampadina alimentato da un generatore G .

Come si nota il voltmetro risulta sempre collegato in parallelo mentre l'amperometro è in serie. In cosa differiscono dal punto di vista operativo i due tipi di collegamento?

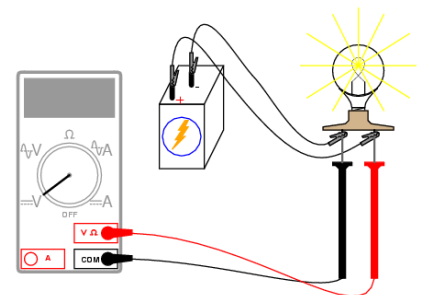
Nel rispondere si tenga presente che in entrambi i tipi di collegamento si sconta un errore di misura connesso al tipo di collegamento (errore sistematico).

In tutti gli ipermercati sono ormai disponibili per cifre inferiori ai 10 euro misuratori universali (tester digitali) in grado sia di funzionare come amperometro e/o come voltmetro con portate diverse ma anche come ohmetro. Per fare una misura di resistenza si sfrutta una pila presente all'interno dello strumento come generatore; si mettono i puntali in corto circuito e si opera su una ghiera di regolazione in modo che lo strumento indichi resistenza zero.

A questo punto basta toccare gli estremi della resistenza per leggerne il valore. In realtà lo strumento misura una opportuna corrente elettrica prodotta da un generatore di corrente di corto circuito nota e, attraverso la lettura di una corrente si fa una misura di resistenza.



in una misurazione simultanea di tipo voltamperometrico o si sbaglia la determinazione di i o si sbaglia quella di ΔV a seconda del tipo di collegamento.



5.7 Carica e scarica di condensatori

5.7.1 UN CIRCUITO IN REGIME NON STAZIONARIO

Quando si collega un condensatore ad un generatore il condensatore non si carica istantaneamente (nessun fenomeno fisico caratterizzato dalla variazione finita di una grandezza è di tipo istantaneo).

Sia che il collegamento avvenga attraverso una resistenza collegata in serie, sia che si colleghi direttamente il generatore, non si può prescindere dalla presenza di una resistenza perché esiste comunque la resistenza interna del generatore.

Quando si chiude il circuito incomincia un flusso di corrente e poiché il condensatore è inizialmente scarico si ha che $i_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Man mano che il condensatore si carica la d.d.p. tra le armature cresce ed essa si oppone al movimento delle cariche libere e pertanto la corrente incomincia a diminuire.

Il diagramma in figura indica l'andamento nel tempo di tale variazione.

La equazione che descrive il fenomeno corrisponde al bilancio dei potenziali in gioco e si scrive:

$$\mathcal{E} = v_R + v_C \tag{V.5.14}$$

Si tratta di una particolare equazione nella quale compaiono la caduta di tensione v_R proporzionale alla intensità di corrente (tasso di variazione della carica) e la d.d.p. ai capi del condensatore v_C che è proporzionale a tutta la carica fluita nel circuito (il condensatore accumula la carica).

L'andamento della corrente e della tensione ai capi del condensatore sono dati dalle equazioni:

$$i = i_0 e^{-t/\tau} \text{ con } \tau = RC \tag{V.5.15}$$

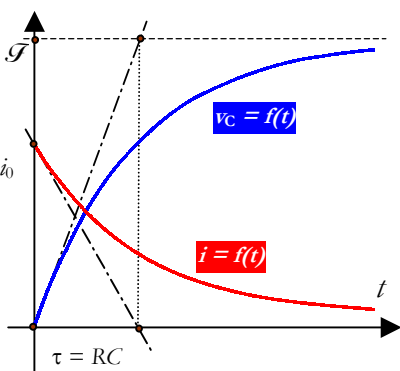
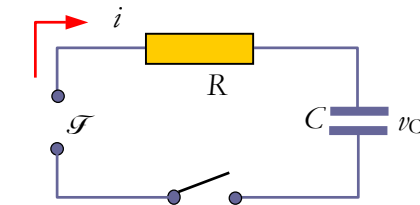
$$v_C = \mathcal{E} - \Delta V_R = \mathcal{E} - R i$$

Comportamenti analoghi si hanno durante i processi di scarica di un condensatore carico attraverso una resistenza.

Il parametro più importante per decidere l'andamento del fenomeno è la quantità $\tau = RC$ detta *costante di tempo del circuito* o *tempo di rilassamento*. La costante di tempo determina la maggiore o minore rapidità dei processi di carica e scarica perché (come si potrebbe dimostrare con calcoli di analisi matematica ¹²) corrisponde alla intercetta sull'asse dei tempi della retta tangente al diagramma tracciata al tempo $t = 0$. Se τ è grande il fenomeno decresce lentamente mentre accade il contrario se τ è piccolo.

Associato al concetto di costante di tempo in tutti i fenomeni aventi natura esponenziale c'è il concetto di *tempo di dimezzamento* $T_{1/2}$ definito come il tempo, trascorso il quale, il fenomeno considerato si è ridotto a metà del valore iniziale.

Il tempo di dimezzamento si lega alla costante di tempo in maniera semplice infatti se deve essere $i/i_0 = 1/2$ si ha:



il caratteristico andamento esponenziale delle curve tensione e corrente nel tempo per un circuito RC



¹² Sulle proprietà della funzione esponenziale si vedano gli ultimi paragrafi della appendice b.

$$e^{-t/\tau} = 1/2 \Leftrightarrow e^{t/\tau} = 2 \Leftrightarrow \frac{t}{\tau} = \ln 2$$

Dunque:

$$T_{1/2} = \ln 2 \tau \approx 0.693 \tau \tag{V.5.16}$$



costante di tempo τ e tempo di dimezzamento

5.7.2 ANALISI ELEMENTARE DEL PROCESSO DI CARICA

Con strumenti matematici di natura elementare non è possibile determinare l'andamento preciso del fenomeno di carica e scarica che ha natura esponenziale, ma con considerazioni di natura energetica si può comunque determinare il tempo approssimativo di carica del condensatore.

In effetti il lavoro compiuto dal generatore durante questo intervallo di tempo è pari all'energia dissipata nella resistenza \mathcal{E}_j più il cambiamento di energia interna del condensatore. Pertanto:

$$\mathcal{L} = \mathcal{E}_j + \frac{1}{2} C V_C^2$$

La d.d.p. finale del condensatore è uguale alla f.e.m. del generatore e \mathcal{E}_j può essere espressa attraverso l'intensità di corrente media \bar{i} su un intervallo di tempo Δt pari al tempo di carica:

$$\bar{i} \mathcal{F} \Delta t = \bar{i}^2 R \Delta t + \frac{1}{2} C \mathcal{F}^2$$

Se assumiamo in prima approssimazione che sia $\bar{i} \approx \frac{i_0}{2} = \frac{\mathcal{F}}{2R}$ si otterrà:

$$\frac{\mathcal{F}^2}{2R} \Delta t \approx \frac{\mathcal{F}^2 R \Delta t}{4R^2} + \frac{1}{2} C \mathcal{F}^2 \Leftrightarrow \Delta t \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \right) = C \Leftrightarrow \Delta t_{CAR} \approx 2 RC = 2\tau$$

Nella ipotesi che sia $\bar{i} \approx \frac{i_0}{2}$ il processo di carica dura 2 costanti di tempo; in realtà processo avviene in un tempo teoricamente infinito ma la costante di tempo è un buon indicatore del processo.

La costante $\tau = RC$ è un indicatore della *inerzia del circuito* ad andare a regime. Se si considera un segnale variabile e lo si manda attraverso un circuito RC l'effetto risultante sarà una specie di livellamento dovuto alla difficoltà che il circuito oppone alle variazioni brusche. Questa proprietà è ampiamente utilizzata in elettronica.

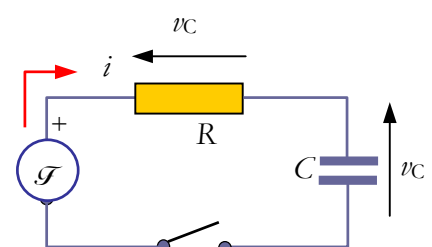
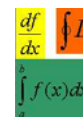
Per ragioni di completezza riportiamo l'equazione generale che governa il fenomeno (legge di Ohm a circuito chiuso):

$$\mathcal{F} = v_R + v_C = R i + \frac{q}{C}$$

Se deriviamo l'equazione avremo che $0 = R i' + \frac{i}{RC}$ da cui $i' = -\frac{i}{RC}$

Ma $i' = \frac{\delta i}{\delta t}$ e pertanto $\frac{\delta i}{i} = -\frac{\delta t}{RC}$ integrando si ha:

$$\ln i = -\frac{t}{RC} + k$$



La costante additiva può essere determinata assegnando la condizione iniziale per cui al tempo 0 la corrente vale $i_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ e si ottiene $k = \ln i_0$

Dunque:

$$\ln i - \ln i_0 = \ln \frac{i}{i_0} = -\frac{t}{RC} \text{ e passando alla funzione inversa:}$$

$$\frac{i}{i_0} = e^{-t/(RC)}$$

Quello che abbiamo presentato è il metodo generale usato in fisica per analizzare fenomeni in cui si debba determinare una grandezza che risulti proporzionale alla sua derivata. La soluzione è sempre una funzione esponenziale.

Un esempio di carica e scarica di un condensatore



Un condensatore carico accumula una carica $q_0 = 2.64 \cdot 10^{-2}$ C con una energia di carica $\mathcal{E}_0 = 0.158$ J. a) determinare la d.d.p. ΔV_0 e la capacità C. b) Il condensatore viene fatto scaricare attraverso una resistenza $R = 1136 \Omega$. Determinare la costante di tempo τ del circuito c) Quanto vale la d.d.p. ai capi del condensatore al tempo $t = 4.00$ s? d) Perché senza ricalcolare l'energia si può affermare che, essendosi ridotta la d.d.p. al 20% del valore iniziale l'energia si è ridotta a circa il 4%?



$$\text{a) } \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} q_0 \Delta V_0 \text{ pertanto } \Delta V_0 = \frac{2\mathcal{E}_0}{q_0} = 12.0 \text{ V e inoltre}$$

$$C = \frac{q_0}{\Delta V_0} = \frac{2.64 \cdot 10^{-2}}{12.0} = 2.20 \cdot 10^{-3} \text{ F}$$

$$\text{b) } \tau = RC = 1136 \cdot 2.20 \cdot 10^{-3} = 2.50 \text{ s}$$

c) La legge di decremento della carica e anche della d.d.p. di potenziale

che è ad essa proporzionale è data da: $\frac{\Delta V}{\Delta V_0} = e^{-t/\tau} = e^{-4.00/2.50} = 0.202$ e

dunque dopo 4 secondi si ha:

$$\Delta V = 0.202 \cdot 12.0 = 2.42 \text{ V}$$

d) Poiché l'energia è proporzionale al prodotto della carica per la d.d.p. e poiché ciascuna di queste grandezze si riduce allo 0.202 del valore iniziale si ha che l'energia si riduce allo $0.202^2 = 0.041$ del valore iniziale.



5.8 La sicurezza negli impianti elettrici

5.8.1 FILO DI FASE, NEUTRO E TERRA

Nelle abitazioni viene distribuita, tramite un impianto in parallelo, una d.d.p. variabile con legge sinusoidale il cui *valore efficace* (una specie di valore medio riferito agli apporti energetici) è di 220 V. Il segnale varia con una frequenza di 50 Hz.

L'impianto è costituito da tre fili: i primi due sono quelli attraverso cui viene distribuita l'energia, il terzo è il cosiddetto *filo di terra* che viene collegato materialmente a terra attraverso un apposito impianto e svolge una funzione protezionistica importante. Il filo di terra in tutte le prese, è collegato al centro dei tre fori (nelle prese tedesche, le cosiddette prese shuko che costituiscono lo standard europeo per le spine di molti Pc ed elettrodomestici è collegato lateralmente).

I due fili di distribuzione della energia presentano potenziali diversi rispetto a terra. Il primo (detto *filo di fase*) si trova a 220 V mentre il secondo (detto *filo neutro*) si trova approssimativamente al potenziale di terra (viene collegato a terra nella stazione di distribuzione, ma per effetto di fenomeni transitori sulla linea il suo potenziale può essere diverso da 0).

È sempre bene riconoscere il filo di fase (quello più pericoloso) e per farlo esistono in commercio i *caccivite cercafasi* del costo di qualche migliaio di lire. Il caccivite cercafasi ha nel manico una lampadina al neon e una resistenza di valore molto elevato che termina con un contatto metallico accessibile dal manico. Se si appoggia il caccivite sul filo di fase e si tocca l'altro estremo del manico il circuito si chiude a terra attraverso il corpo umano e la lampada si accende (la resistenza elevata fa sì che la caduta di tensione avvenga prevalentemente nel manico e che dunque non si subisca una folgorazione).

Toccando il filo neutro il cercafasi non si accende quasi mai. Toccando il filo di terra non si deve accendere mai.

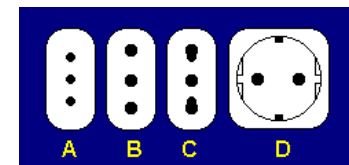
Tutte le interruzioni degli impianti domestici dovrebbero essere fatte sul filo di fase per ridurre il rischio di folgorazione durante piccoli interventi quali la sostituzione di una lampadina anche nel caso in cui non sia stato aperto il circuito generale di alimentazione.

5.8.2 LA PERICOLOSITÀ DELLE CORRENTI ELETTRICHE

Gli effetti biologici della elettricità riguardano la intensità di corrente, ma, in base alla legge di Ohm, la intensità di corrente dipende dalla resistenza del corpo cui si applica la d.d.p. Dunque *a far male sono le correnti, ma le correnti dipendono dalle d.d.p.*

Il limite inferiore di sensibilità umana alle correnti è dato dal mA. La corrente di 1 mA viene percepita come un lieve formicolio. A qualche mA iniziano già le prime sensazioni dolorose e le contratture muscolari. Tra i 10 e i 20 mA le contrazioni muscolari diventano rilevanti (blocco della presa, blocco della respirazione) e si può innescare la cosiddetta *tetanizzazione*.

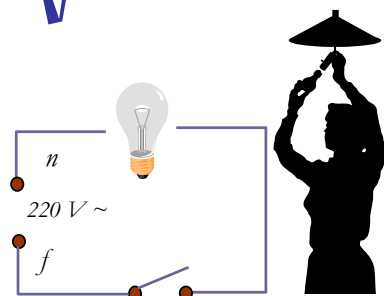
Le fibre muscolari, come è noto, si contraggono per effetto di segnali di tipo elettrico e le correnti alternate, al di sopra di una soglia che nei diversi individui è compresa tra i valori citati determinano una contrazione



spine e prese di utilizzo domestico; in quelle tripolari la terra corrisponde alla connessione centrale nella shuko alla connessione laterale



il caccivite cercafasi consente di identificare in maniera semplice il filo di fase cioè quello che si trova ad un potenziale di 220 V rispetto a terra ed è dunque potenzialmente pericoloso



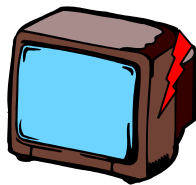
la interruzione deve sempre avvenire sul filo di fase per ragioni di ulteriore sicurezza

il milliampere è il nostro riferimento per ragionare sulla pericolosità delle correnti

effetti biologici delle correnti

il limite di pericolosità

$$5'000 \Omega \times 10 \text{ mA} = 50 \text{ V}$$



la Tv è una bomba di d.d.p. perché il tubo catodico è alimentato a 30'000 V

permanente che impedisce il distacco del soggetto dalla fonte di elettricità.

Intorno ai 100 mA (con esposizioni dell'ordine del secondo) compare la fibrillazione ventricolare già nel 50% dei casi. La comparsa della fibrillazione è fortemente influenzata dal tempo di contatto e questa è la ragione per cui è essenziale che la risposta delle protezioni automatiche sia molto veloce.

Al di sopra di questi valori, già di per sé letali compaiono altri fenomeni di elettrolisi cellulare, distruzione di origine termica e così via.

Il corpo umano è prevalentemente fatto di una soluzione salina ed è pertanto un buon conduttore. Solo la superficie esterna (la pelle) essendo fatta di cellule morte presenta una qualche resistenza (dell'ordine di $10^5 \Omega/\text{cm}^2$). Ma tale valore, che decresce al crescere della superficie di contatto, si riduce di molto quando la pelle si bagna (anche per effetto del sudore) e può arrivare a non più di 500 Ω per un corpo immerso in acqua.

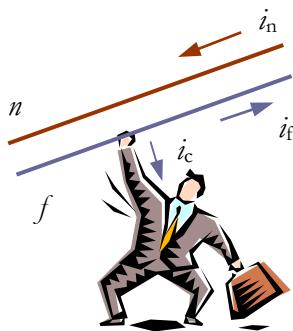
Se assumiamo, per ragioni precauzionali, un valore di resistenza intermedio di 5'000 Ω e il valore di corrente in grado di generare effetti significativi sull'organismo (10 mA) otteniamo una corrispondente d.d.p. di 50 V. Le d.d.p. superiori a questo valore sono sempre da considerare sicuramente pericolose per il rischio di folgorazioni.

Una potenziale *bomba elettrica* è collocata in ogni televisore che, per il funzionamento del tubo a raggi catodici necessita di d.d.p. comprese tra i 15'000 e i 20'000 volt. Per questa ragione è assolutamente da evitare ogni operazione di apertura della cassa del televisore.

Una tragica modalità di folgorazione indotta si può avere nel tentativo di soccorso di un folgorato: le parti eventualmente sotto tensione (compreso l'infortunato) non vanno mai afferrate ma eventualmente spinte con il dorso della mano (per evitare che la eventuale contrazione indotta impedisca il distacco). Prima di ogni altro intervento di soccorso bisogna allontanare la causa della folgorazione: spostamento del cavo con un corpo isolante (prestando attenzione al fatto che ciò che isola a 220 V non è detto che isoli a 10'000 V), apertura degli interruttori generali, ...

5.8.3 LE PROTEZIONI DI TERRA E DIFFERENZIALE

Gli impianti domestici presentano due tipi di protezioni contro il rischio di folgorazioni:



quando la corrente nel filo di fase è minore di quella nel neutro c'è una folgorazione in atto e l'interruttore differenziale apre il circuito

- **interruttore differenziale:** è un interruttore sensibile alle differenze di corrente tra filo di fase e filo neutro. In caso di folgorazione la corrente che passa per il corpo si scarica a terra (anche nel caso in cui si tocchino con le mani entrambi i fili una parte della corrente va a terra).

In un contesto del genere la corrente nei due fili non è più identica e l'interruttore differenziale apre il circuito di alimentazione. Ovviamente tutto si gioca sulla rapidità di intervento e sulla sensibilità anche a differenze piccole.

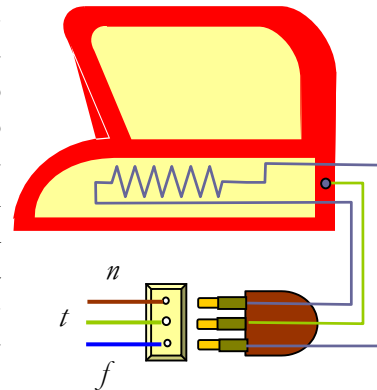
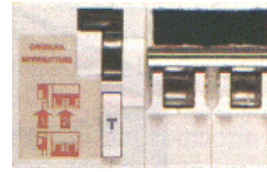
Una buona protezione si sconta con un elevato rischio di *falsi positivi*, cioè di interventi del differenziale anche in assenza di folgorazioni

(per la ripercussione domestica di eventi transitori lungo la linea). L'interruttore differenziale è diventato obbligatorio in questi anni per tutti gli impianti domestici ma, una indebita inerzia, fa sì che sia ancora non installato in molte abitazioni. Il limite di taratura è di solito intorno ai 30 mA in modo di garantire che non si determini mai il rischio di fibrillazione ventricolare.

- messa a terra degli utilizzatori:** la parte metallica esterna dell'elettrodomestico, tramite la spina viene collegata al filo di terra. In questo modo, se per il danneggiamento dell'isolamento interno, una parte sotto tensione va a contatto con la carcassa si produce un corto circuito e gli interruttori generali si aprono. Ovviamente, in un caso del genere bisogna immediatamente individuare la causa del fenomeno (l'elettrodomestico difettoso) e porvi rimedio. La cosa da non fare, espressamente vietata, ma largamente attuata in molti edifici costruiti prima degli anni 60, è la realizzazione di impianti di messa a terra semi artigianali basati sul collegamento del filo di terra all'impianto idraulico. Non solo si hanno scarsi risultati, ma si corre il rischio di folgorare altri inquilini dello stabile.

Alle due protezioni citate contro la folgorazione si aggiungono gli interruttori di massima che scattano quando la corrente richiesta supera i limiti contrattuali (15 A); ma si tratta di protezioni dell'impianto e non delle persone (interruttori magnetotermici).

Appartengono alla stessa categoria i *fusibili* messi a protezione di alcune apparecchiature elettroniche e dell'impianto della automobile. Nei fusibili si sfrutta l'effetto Joule: una porzione di circuito è molto più sottile del resto del circuito e pertanto, quando si supera un valore prefissato di corrente, il calore dissipato in quel trattino di resistenza ne determina la fusione con interruzione del circuito.



il principio della messa a terra degli elettrodomestici; perché funzioni è necessaria una buona messa a terra dell'impianto; ciò garantisce che le parti metalliche degli elettrodomestici non possano mai portarsi al potenziale del filo di fase divenendo fonte di folgorazioni

