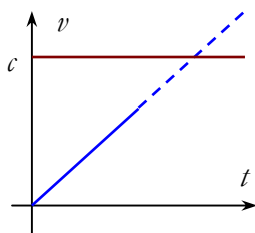


II.4. Elementi di dinamica relativistica

- ⌘ La massa relativistica
- ⌘ L'energia cinetica
- ⌘ Energia e quantità di moto
- ⌘ Energia interna di un sistema di particelle
- ⌘ Cambiamenti di energia interna macroscopici e microscopici
- ⌘ Conservazione dell'energia e incremento relativistico della massa



se F è costante v non può crescere indefinitamente come prevede la meccanica classica perché, dopo un tempo dipendente da F ma comunque finito, si avrebbe $v > c$

La legge fondamentale della dinamica viene scritta con riferimento alla quantità di moto ma ora la massa è una quantità variabile. Come ci ricorda questo francobollo già Newton aveva scritto la II legge in termini di quantità di moto



4.1 La massa relativistica

4.1.1 LA II LEGGE DELLA DINAMICA È IN CONTRASTO CON IL CARATTERE LIMITE DELLA VELOCITÀ DELLA LUCE

Nel capitolo precedente dedicato alla *cinematica relativistica* si è visto che un punto materiale non può avere velocità superiore alla velocità della luce. Ma questa affermazione è in contrasto con la II legge della dinamica perché se si applica ad un corpo in quiete una forza costante esso, essendo sottoposto ad una accelerazione costante, aumenterà con legge lineare la sua velocità senza alcuna limitazione secondo la relazione:

$$v = a t = \frac{F}{m} t \tag{II.4.1}$$

Ma, in meccanica newtoniana si era ipotizzato che la massa di un corpo fosse la stessa in qualunque sistema di riferimento inerziale. Gli esperimenti condotti a velocità molto inferiori a quella della luce sembravano confermare tale assunto. A quelle velocità, infatti, la dipendenza della massa dalla velocità non riesce ad essere rivelata e questa è la ragione per cui, sino a questo punto, si è supposta costante la massa.

Si tratta ora di *costruire una nuova dinamica* e di decidere quali debbano essere i criteri guida da utilizzare nella sua costruzione.

4.1.2 LA COSTRUZIONE DI UNA NUOVA DINAMICA

Il passaggio dalla dinamica classica alla dinamica relativistica, dopo essersi resi conto della incongruenza della prima, può essere fatto in diversi modi che pongono sempre al loro centro la *quantità di moto* $\vec{p} = m \vec{v}$ e le problematiche della sua *conservazione* perché, come si è visto nel capitolo dedicato alla simmetria, *dietro le proprietà di conservazione si nascondono sempre proprietà generali della natura*. Inoltre, procedendo per questa strada, la nuova teoria risulta ammettere la teoria precedente come suo caso limite.

Per ora basti dire che in teoria della relatività ristretta la seconda legge della dinamica che eravamo abituati a vedere nella forma $\vec{F} = m \vec{a}$ dove

$$\vec{a} = \frac{\delta \vec{v}}{\delta t} \text{ viene invece scritta}$$

$$\vec{F} = \frac{\delta(m \vec{v})}{\delta t} \tag{II.4.2}$$

Questa espressione, se la massa è costante, è del tutto identica alla II legge della teoria classica ma, quando m è variabile, porta ad una espressione diversa. In dinamica relativistica si dimostra che, *per imporre la validità delle leggi di conservazione, ed in particolare della conservazione della quantità di moto, la massa deve essere diversa nei diversi sistemi di riferimento sulla base della relazione:*

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (II.4.3)$$



In essa m_0 indica la massa del corpo nel sistema di riferimento in quiete rispetto al corpo. Tale massa è detta *massa propria* o *massa di riposo* del corpo. La quantità m indica la massa del corpo nel sistema di riferimento rispetto al quale il corpo è in moto con velocità v ed è chiamata *massa relativistica*. L'andamento della (II.4.3) è rappresentato in Figura al variare di β .

Si tratta della rappresentazione grafica della espressione già tabulata al termine del capitolo precedente. Come si nota le variazioni di massa sono molto blande per valori di velocità piccole rispetto a c . Sul nostro diagramma la variazione non è percepibile sin quasi a $\beta = 0.2$. Il comportamento è invece a crescita quasi verticale quando ci si approssima a c . La (II.4.3) è oggi largamente confermata direttamente attraverso gli esperimenti della fisica delle alte energie.

Dunque la *quantità di moto*, in teoria della relatività, è definita come nella meccanica newtoniana ponendo $\vec{p} = m \vec{v}$ ma, in questo caso, la massa di riposo costante è sostituita da quella relativistica.

4.1.3 COME CAMBIA LA VELOCITÀ NEL CASO DI FORZA COSTANTE

Esercizio: Se nella (II.4.2) facciamo ancora l'ipotesi che sia $F = \text{costante}$, $t_0 = 0$ e $v_0 = 0$ potremo scrivere:

$$F = \frac{mv}{t} = \frac{m_0 v}{t \sqrt{1 - \beta^2}}$$

Ponendo $b = \frac{F}{m_0}$ = costante e risolvendo l'equazione precedente rispetto a v abbiamo:

$$b t = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Leftrightarrow b^2 t^2 = \frac{v^2}{1 - v^2/c^2} \Leftrightarrow b^2 t^2 (1 - v^2/c^2) = v^2$$

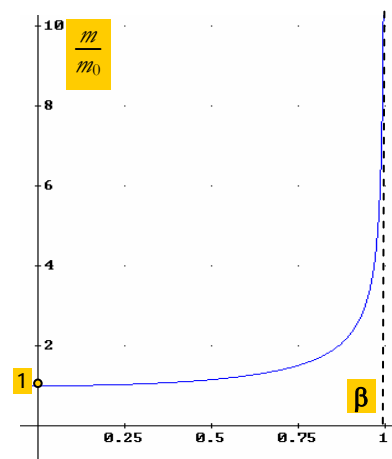
$$\Leftrightarrow b^2 t^2 - b^2 t^2 v^2/c^2 = v^2 \Leftrightarrow v^2 (1 + b^2 t^2/c^2) = b^2 t^2 \Leftrightarrow$$

$$v = \frac{b t}{\sqrt{1 + b^2 t^2/c^2}} \quad (II.4.4)$$

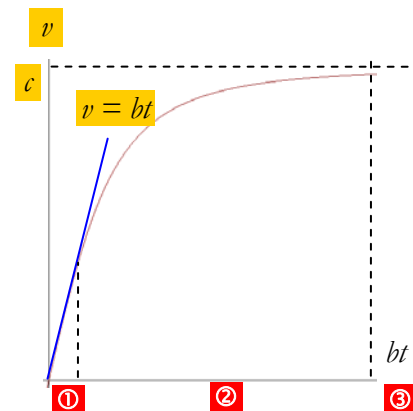
La figura qui a lato rappresenta la funzione trovata che ci indica la crescita nel tempo della velocità di una particella materiale sottoposta ad una forza costante. Nel diagramma non è stata riportata la scala data la arbitrarietà del valore di b , ma comunque si osserva una crescita caratterizzata da tre zone:

- ❑ una *zona* iniziale ① in cui l'andamento è rettilineo e che corrisponde alla meccanica classica; per intervalli di tempo sufficientemente piccoli il prodotto bt è molto minore di c e quindi $b^2 t^2/c^2 \ll 1$; pertanto, in prima approssimazione, è $v \approx bt$. La forza determina accelerazioni ad essa proporzionali e la massa è grosso modo costante.
- ❑ una *zona* ② detta *relativistica* nella quale la velocità continua a crescere ma lo fa con un ritmo inferiore al previsto. L'azione della forza determina sia aumenti di velocità, sia incrementi di massa.
- ❑ Una *zona* ③ detta *ultrarelativistica* nella quale se la forza costante agisce per un tempo sufficientemente lungo il valore bt può divenire

incremento relativistico della massa

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$


Andamento della massa al variare di β ; gli incrementi diventano apprezzabili per $\beta > 0.2$



Le tre regioni in cui resta diviso il mondo della velocità: classica, relativistica ed ultrarelativistica

molto più grande di c e pertanto si ha: $v \approx \frac{bt}{\sqrt{b^2 t^2 / c^2}} = c$. In questa zona l'azione della forza si traduce quasi esclusivamente in incrementi di massa.



La discussione che abbiamo presentato va considerata solo come un primo approccio alla discussione sugli ambiti di validità delle teorie relativistiche. In realtà lo strumento idoneo per stabilire in quale delle tre zone ci si trovi è il rapporto tra la variazione di massa e la massa di riposo della particella che, come vedremo, si correlano alla energia.

4.1.4 L'ENERGIA IN RELATIVITÀ

Secondo la dinamica relativistica *la energia totale di un corpo isolato da ogni tipo di influenza da parte di altri corpi viene definita come il prodotto della sua massa per il quadrato della velocità della luce* e si scrive:

$$\mathcal{E} = m c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} c^2 \quad (\text{II.4.5})$$

Energia ed energia di riposo



Questa definizione viene posta da Einstein come atto conclusivo di una ricerca che incorpora le precedenti concezioni di energia, le generalizza e consente comunque di ottenerle come caso limite per valori di velocità molto minori della velocità della luce. La giustificazione della equazione (II.4.5) sarà data al termine del presente capitolo.

Con questa definizione di energia *Einstein unifica* i due concetti di massa ed energia che avevano costituito dei capisaldi nella storia della scienza a causa delle due leggi di conservazione ad essi collegati.

La legge di conservazione della massa enunciata da Lavoisier¹ fa da presupposto alla nascita della chimica in senso moderno e corrisponde all'idea che la materia pur cambiando aspetto e legandosi e decomponendosi nei processi chimici alla fine si conservi (*nulla si crea, nulla si distrugge, tutto si trasforma*). L'enunciazione di questa legge, che oggi diamo quasi per banale, è avvenuta attraverso ricerche quantitative sofisticate.

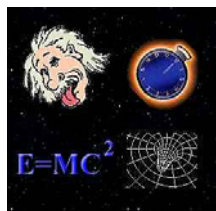
Della *legge di conservazione dell'energia* si è già detto nella parte prima del corso ed essa corrisponde all'idea che *esista un substrato del reale che si conserva entro processi tra loro molto diversi* e sia caratterizzato dalla capacità di compiere o richiedere lavoro.

L'unificazione che Einstein fa delle due leggi presuppone la conservazione simultanea di massa ed energia e non di ciascuna di esse singolarmente prese e ciò significa che si debbano dare sia processi di *produzione energetica con scomparsa di una frazione di massa* del sistema, sia processi di *generazione di materia con scomparsa di una corrispondente porzione di energia immateriale*.

¹ Antoine-Laurent Lavoisier (Parigi, 26 agosto 1743 – Parigi, 8 maggio 1794) è stato un chimico, biologo, filosofo ed economista francese. Enunciò la prima versione della legge di conservazione della massa, riconobbe e battezzò l'ossigeno e l'idrogeno ed è stato il padre della chimica avendo applicato con grande sistematicità il metodo quantitativo (delle masse) allo studio della chimica. Campava e finanziava i suoi studi facendo l'esattore e questa fu la ragione per cui venne ghigliottinato durante la rivoluzione francese (accusatore Marat). Il giudice nel pronunciare la condanna e nel respingere le richieste di clemenza affermò che «*La révolution n'a pas besoin des savants*».



Dalla conservazione della massa di Lavoisier a quella della massa-energia di Einstein



$\mathcal{E} = m \dot{x}^2 ? \mathcal{E} = m \dot{b}^2 ?$



$\mathcal{E} = m c^2 !$

Entrambe le previsioni troveranno conferma di lì a qualche decina d'anni con la scoperta della energia nucleare e con la produzione di coppie di particelle e antiparticelle.

Dalla definizione segue che *la energia totale di un corpo è diversa in sistemi di riferimento diversi*; essa dipende dalla velocità del corpo rispetto al sistema di riferimento e il valore minimo di energia si ha nel sistema di riferimento in cui il corpo è a riposo. Tale valore è detto *energia di riposo* e vale:

$$\mathcal{E}_0 = m_0 c^2 \tag{II.4.6}$$

La energia di riposo, a causa del valore estremamente elevato della velocità della luce corrisponde a valori in Joule molto elevati anche nel caso di masse molto piccole.

Esercizio: Determinare l'energia di riposo corrispondente a 1 mg di materia.



$$\mathcal{E}_0 = m_0 c^2 = 10^{-6} \times (3 \times 10^8)^2 = 9 \times 10^{10} \text{ J}$$



Quando, con la teoria della relatività, si è ripensata tutta la nozione di energia, il processo utilizzato è consistito nel dare definizioni che conservassero la validità delle vecchie leggi e contemporaneamente permettessero di generalizzarle.

Questa è la ragione per cui *si chiama energia cinetica di un corpo la differenza tra la sua energia totale e la sua energia di riposo*, cioè la energia cinetica viene vista come quel *surplus* di energia di cui aumenta la energia di riposo di un corpo quando il corpo si trova in movimento:

$$\mathcal{E}_k = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = (m - m_0) c^2 = \Delta m c^2 \tag{II.4.7}$$

dove si è indicata con \mathcal{E}_k la energia cinetica



Energia cinetica come differenza tra energia totale ed energia di riposo



4.2 L'energia cinetica

4.2.1 ESPRESSIONE RELATIVISTICA E CLASSICA DELL'ENERGIA CINETICA

Al termine del capitolo precedente sono state introdotte alcune espressioni matematiche in grado di semplificare le grandezze relativistiche nel caso in cui $\beta \rightarrow 0$.

Vediamole all'opera in riferimento all'energia cinetica:

$$\mathcal{E}_k = (m - m_0) c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} c^2 - m_0 c^2 \approx \frac{m_0}{1 - \frac{1}{2} \beta^2} c^2 - m_0 c^2 \approx$$

$$\mathcal{E}_k \approx m_0 (1 + \frac{1}{2} \beta^2) c^2 - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

L'espressione relativistica dell'energia cinetica fornisce l'espressione classica a condizione di trascurare termini di IV grado in β .

La espressione einsteiniana della energia cinetica ammette la relazione classica come caso limite

$$\mathcal{E}_k = (m - m_0) c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

4.2.2 ENERGIA CINETICA ED ENERGIA DI RIPOSO

Per stabilire se ci si trovi ad operare in *ambito* classico o relativistico lo strumento più idoneo è il *confronto tra energia cinetica ed energia di riposo del corpo*.

Per velocità molto minori della velocità della luce, la energia cinetica di un corpo è molto minore della energia a riposo. In effetti:

$$\frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_0} = \frac{m - m_0}{m_0} = \frac{m}{m_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \beta^2} - 1 \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2 - 1$$

$$\frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_0} = \frac{1}{2} \beta^2 \ll 1$$

Per contro, alle velocità ultra relativistiche che differiscono dalla velocità della luce molto poco, quasi tutta la energia del corpo è energia cinetica e la energia a riposo è molto minore di quella cinetica.

Per esempio nei protosincrotroni i protoni viaggiano con $v = 0.999923 c$ (non si possono più eseguire le solite approssimazioni perché $\beta \approx 1$) e quindi:

$$\frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_0} = \frac{(m - m_0) c^2}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 = 80.58 - 1 \approx 80$$

dunque a queste velocità l'energia cinetica del protone è 80 volte la energia di riposo.

Se si trascura l'energia di riposo rispetto all'energia cinetica, la equazione (II.4.7) può essere scritta nella seguente forma approssimata valida per velocità ultra relativistiche:

$$\mathcal{E}_k \approx \mathcal{E} = m c^2 \tag{II.4.8}$$



4.2.3 ESEMPI DI UTILIZZO DELLE RELAZIONI RELATIVISTICHE

Esercizio: Si determini a quale velocità la energia cinetica di una particella diventa uguale alla sua energia a riposo

☹

$$\frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_0} = \frac{m}{m_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 = 1 \text{ implica che sia } \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \beta^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \beta^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$$

Pertanto $v \approx 0.866 c \approx 2.6 \times 10^8$ m/s



Esercizio: Determinare le energie di riposo di un elettrone e di un protone.



$\mathcal{E}_0 = m_0 c^2$ e poiché $m_{0e} = 9.109 \times 10^{-31}$ kg, mentre $m_{0p} = 1.673 \times 10^{-27}$ kg le corrispondenti energie di riposo saranno:



$$\mathcal{E}_{0e} = 9.109 \times 10^{-31} \times (2.998 \times 10^8)^2 = 8.187 \times 10^{-14} \text{ J} = \frac{8.187 \times 10^{-14}}{1.602 \times 10^{-19}}$$

$$\mathcal{E}_{0e} = 0.511 \times 10^6 \text{ eV} = 0.511 \text{ MeV} \text{ (2)}$$

Analogamente si ha:

$$\mathcal{E}_{0p} = 1.6726 \times 10^{-27} \times (2.998 \times 10^8)^2 = 1.503 \times 10^{-10} \text{ J} = 0.938 \times 10^9 \text{ eV}$$

$$\mathcal{E}_{0p} = 938 \text{ MeV}$$

I due valori trovati in MeV, dato il largo utilizzo che se ne fa in fisica atomica, nucleare e delle particelle, vanno conosciuti a memoria.



Esercizio: La energia cinetica degli elettroni accelerati da un moderno acceleratore lineare arriva a 10 GeV. Si determini la velocità raggiunta dagli elettroni.



Se teniamo presente che l'energia di riposo dell'elettrone è di 0.511 MeV possiamo tranquillamente osservare di essere ampiamente all'interno del dominio della teoria della relatività.

Si tratta di ripetere il calcolo del primo esercizio con $\frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_0} = \frac{10^4}{0.5} = 2 \times 10^4$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 = 2 \times 10^4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 20'001 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{20'001} \Leftrightarrow$$

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{400'040'001} \Leftrightarrow \beta^2 = \frac{400'040'000}{400'040'001} \Leftrightarrow \beta = 0.999'999'998'750$$



Esercizio: in LHC i fasci di protoni possono raggiungere l'energia di 10 TeV. Si determini la velocità.



$$\frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_0} = \frac{10^7}{938} = 1,06609808102345 \times 10^5$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 = 1,066'098'081'023'45 \times 10^5 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} =$$

$$1,066'108'081'023'45 \times 10^5 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{1,066'108'081'023'45 \times 10^5} =$$

$$9,379912016425290000000 \times 10^{-6}$$

² 1 eV = 1.602 × 10⁻¹⁹ J L'elettronvolt è l'unità di misura dell'energia normalmente usata in fisica atomica e nucleare.

$$\Leftrightarrow 1 - \beta^2 = 8,798'274'943'587'950'00000 \times 10^{-11}$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 = 9,99999999912017000000 \times 10^{-1} \Leftrightarrow \beta = 0,999'999'999'956'009$$

E arriviamo alla undicesima cifra significativa. Il conto è stato eseguito, di necessità, con Excel.

Energia e quantità di moto

4.2.4 UN NUOVO INVARIANTE RELATIVISTICO

Determiniamo ora la relazione tra *energia e quantità di moto* in relatività. Si tratta di una relazione particolarmente importante per le particelle relativistiche perché, come si vedrà studiando gli acceleratori, solitamente è nota la energia delle particelle mentre, diversi parametri dipendono dalla quantità di moto (per esempio il raggio di curvatura della traiettoria).

La relazione discende immediatamente dalla legge sull'incremento relativistico della massa. Infatti, se eleviamo al quadrato l'espressione della massa relativistica e poi eliminiamo i denominatori, avremo:

$$m^2 = \frac{m_0^2}{1 - v^2/c^2} \quad m^2(c^2 - v^2) = m_0^2 c^2$$

moltiplichiamo entrambi i membri c^2 , in modo di arrivare ad espressioni contenenti l'energia:

$$m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

Poiché la quantità di moto è $p = mv$, la energia totale $\mathcal{E} = m c^2$ e la energia di riposo vale $\mathcal{E}_0 = m_0 c^2$, si otterrà la relazione che connette la energia di riposo, la energia totale e la quantità di moto:

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_0^2 + p^2 c^2 \quad (\text{II.4.9})$$

La relazione appena determinata, oltre che utile sul piano pratico, ha anche un valore teorico fine a se stesso; infatti poiché \mathcal{E}_0 è una quantità indipendente dal sistema di riferimento ne consegue che:

$$\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = \text{costante} \quad (\text{II.4.10})$$

al variare del sistema di riferimento; abbiamo determinato un nuovo *invariante relativistico energia e quantità di moto*.

Nel *range ultrarelativistico* \mathcal{E}_0 è trascurabile rispetto a \mathcal{E} e si ha:

$$\mathcal{E}_k \approx \mathcal{E} \approx pc \quad (\text{II.4.11})$$

Dalla analisi della equazione (II.4.9) vediamo che ci sono due modi per cambiare l'energia di un corpo.

- si può cambiare la quantità di moto senza cambiare l'energia di riposo. Ciò si può fare cambiando la velocità del corpo rispetto al sistema di riferimento.
- si può cambiare l'energia di riposo il che significa modificare la massa di riposo (fissione nucleare, annichilazione di materia e antimateria). Questi fenomeni, anche se non appartengono alla esperienza comune, sono ampiamente riproducibili in laboratorio e sono stati dominanti in tutta la fase iniziale di vita dell'universo.

4.2.5 IL LEGAME TRA VARIAZIONI DELL'ENERGIA E VARIAZIONI DI QUANTITÀ DI MOTO

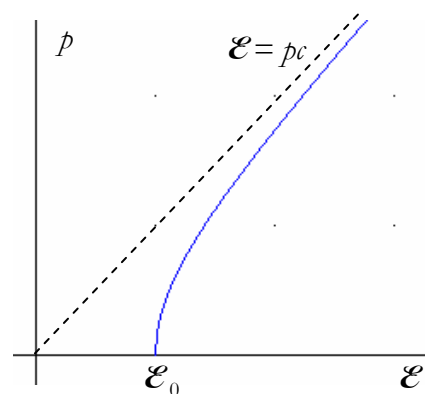
Dalla relazione (II.4.9) discende una interessante legame tra le variazioni di energia e quelle di quantità di moto; tale legame sarà utilizzato per dimostrare che il *teorema dell'energia cinetica vale anche in relatività*; precisamente:

$$\delta\mathcal{E} = v \delta p \quad (\text{II.4.12})$$



La relazione tra energia e quantità di moto rappresenta un **invariante relativistico**

$$\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = \text{costante} = \mathcal{E}_0^2$$



Se si rappresenta il legame tra energia e quantità di moto si ottiene un ramo di iperbole



Per arrivarci utilizzeremo alcune proprietà matematiche generali (già note a chi conosca il *calcolo differenziale*) che abbiamo utilizzato nel capitolo sul momento angolare e che richiamiamo in nota: ³

Se applichiamo queste relazioni alla (II.4.9) avremo:

$$\delta \mathcal{E}^2 = 2 \mathcal{E} \delta \mathcal{E} = 2p \, c^2 \delta p$$

e quindi:

$$\mathcal{E} \delta \mathcal{E} = p \, c^2 \delta p$$

sostituendo la definizione di energia e di quantità di moto:

$$\delta \mathcal{E} \, mc^2 = \delta p \, mv \, c^2$$

e dunque:

$$\delta \mathcal{E} = v \, \delta p$$

4.2.6 IL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA VALE ANCHE IN RELATIVITÀ

Poiché l'energia e la energia cinetica differiscono per una costante si ha anche:

$$\delta \mathcal{E}_k = \delta \mathcal{E} = v \, \delta p$$

Se ora teniamo conto della definizione della velocità e della II legge della dinamica scritta in forma relativistica avremo:

$$\delta \mathcal{E}_k = \frac{\delta r}{\delta t} \delta p = \frac{\delta p}{\delta t} \delta r = F_t \, \delta r = \delta \mathcal{L} \quad 4$$

$$\delta \mathcal{E}_k = \delta \mathcal{L} \tag{II.4.13}$$

Dunque resta dimostrato il *teorema dell'energia cinetica* o, il che è lo stesso, abbiamo dato una ragione alla definizione data di energia cinetica. *Il lavoro elementare è uguale alla variazione elementare di energia cinetica. Quando un corpo è sottoposto all'azione di una forza che ne determina uno spostamento elementare δr la energia cinetica del corpo cambia di una quantità pari al prodotto della componente tangenziale della forza per lo spostamento elementare.*

Se si considera poi uno spostamento finito vale ancora la stessa relazione ma bisogna sommare tutti i contributi elementari.

Il teorema dell'energia cinetica vale anche in relatività a condizione di utilizzare la espressione relativistica per \mathcal{E}_k



³ $\delta(kx) = k\delta x$; $\delta(k + x) = \delta x$; $\delta x^2 = 2x \delta x$. La dimostrazione di queste proprietà è di tipo diretto e si basa sul fatto di trascurare le potenze degli incrementi rispetto agli incrementi stessi. Dimostriamo, per esempio la terza proprietà:

$$\delta x^2 = (x + \delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \delta x + (\delta x)^2 - x^2 = 2x \delta x + (\delta x)^2 \approx 2x \delta x$$

⁴ E' ancora vero che la forza normale non è in grado di cambiare il modulo della velocità e pertanto non influenza il modulo della quantità di moto. Dunque $\frac{\delta p}{\delta t} = F_t$

4.3 Energia interna di un sistema di particelle

4.3.1 MASSA DI RIPOSO DI UN SISTEMA E MASSA DI RIPOSO DEI SINGOLI COMPONENTI

Quando ci si pone l'obiettivo di indagare dal punto di vista energetico un sistema fisico complesso quale un solido, un liquido o un gas ci si deve interrogare su quale sia il significato e l'origine della energia di riposo o, detto altrimenti, su quale sia il legame tra la *energia di riposo* del sistema e la energia di riposo dei singoli componenti che lo costituiscono.

Verrebbe spontaneo di dire che la energia di riposo del sistema sia la somma delle singole energie di riposo, ma basta riflettere un attimo per rendersi conto che *le cose non possono andare così perché ci sono di mezzo le energie presenti su scala microscopica che possono essere sia energie cinetiche, sia energie di interazione e che concorrono a formare la energia di riposo del sistema macroscopico.* Quest'ultima viene solitamente chiamata *energia interna*.⁵

Un singolo corpo macroscopico, anche quando lo percepiamo unitariamente, è comunque costituito da parti. Ci chiediamo come queste singole parti concorrano a determinare l'energia del corpo nel suo insieme. Ciò ci porterà a scoprire che *la massa di riposo non è una grandezza additiva* cioè che la somma fisica di due masse di 1 g, in generale, non produce un corpo di 2 g.⁽⁶⁾



4.3.2 NEI GAS LA DIFFERENZA È DOVUTA ALLA ENERGIA CINETICA DELLE PARTICELLE DI CUI È COSTITUITO

Nel caso di un gas la *energia di riposo* complessiva risulterà maggiore della somma di tutte le energie di riposo delle molecole costituenti il gas.

In effetti la energia (massa) di riposo di un gas in quiete (per il quale sia cioè $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_N \mathbf{v}_N = 0$) è pari alla somma delle energie totali dei singoli componenti e in questo conto entrano sia le energie di riposo di ogni molecola sia le singole energie cinetiche. Non entrano invece in gioco le energie potenziali di interazione tra le molecole che, nel caso dei gas, sono considerate trascurabili.

Avremo dunque:

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_N = \mathcal{E}_{0,1} + \mathcal{E}_{0,2} + \dots + \mathcal{E}_{0,N} + \mathcal{E}_{k,int}$$

dove si è posto $\mathcal{E}_{k,int} = \sum \mathcal{E}_{k,i}$ per indicare la energia cinetica totale dovuta ai moti delle particelle costituenti il corpo.

Se dividiamo la relazione per c^2 avremo:

$$M_0 = \sum m_{0,i} + \frac{\mathcal{E}_{k,int}}{c^2} \tag{II.4.14}$$

La massa di riposo di un gas in quiete macroscopica è maggiore della massa di riposo delle singole molecole di cui il gas è costituito.

⁵ La nozione di energia interna è nata inizialmente entro l'ambito della termodinamica ma si è poi estesa e generalizzata con lo studio della fisica atomica e molecolare e con i punti di vista posti dalla teoria della relatività.

⁶ Alla faccia del senso comune che ha elevato l'*adagio* 1 + 1 fa sempre 2 al rango di verità non confutabile. Il problema, come al solito, è capire cosa voglia dire +.

4.3.3 NEI SOLIDI E NEI LIQUIDI INTERVENGONO ANCHE LE INTERAZIONI MOLECOLARI

Nel punto precedente abbiamo considerato un sistema di particelle non interagenti. Ma in tutti i corpi, con la sola eccezione dei gas rarefatti, le particelle interagiscono in maniera significativa, solitamente attraverso forze attrattive. L'energia potenziale, in caso di forze attrattive è negativa (se si sceglie, come al solito, il riferimento dell'energia potenziale in corrispondenza del punto di annullamento delle forze).

Indichiamo con U_{int} l'energia potenziale totale di interazione tra le particelle (con maggior precisione occorrerebbe dire che U_{int} rappresenta la energia dei campi di forza connessi alle interazioni).

Pertanto generalizzando le precedenti equazioni al caso di interazione tra le particelle potremo scrivere:

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{0,1} + \mathcal{E}_{0,2} + \dots + \mathcal{E}_{0,N} + \mathcal{E}_{k,\text{int}} + U_{\text{int}}$$

e dire che l'energia interna di un corpo è pari alla somma delle energie di riposo delle particelle costituenti il corpo, più l'energia cinetica di queste particelle, più l'energia potenziale dei campi connessi alla interazione tra le particelle.

Dividendo entrambi i lati della equazione per c^2 si ottiene:

$$M_0 = m_{0,1} + m_{0,2} + \dots + m_{0,N} + \frac{1}{c^2} (\mathcal{E}_{k,\text{int}} + U_{\text{int}}) \quad (\text{II.4.15})$$

Possiamo dunque affermare che la massa di riposo di un corpo non corrisponde alla somma delle masse di riposo che lo costituiscono.

Poiché la quantità $\mathcal{E}_{k,\text{int}} + U_{\text{int}}$ è formata da un termine sempre positivo e da un altro termine che è generalmente negativo essa può essere sia positiva sia negativa e dunque la massa del sistema può essere sia maggiore, sia minore di quella dei suoi costituenti elementari.

In particolare, in presenza di grandi forze di attrazione, il valore dell'energia potenziale di interazione può essere più grande in valore assoluto dell'energia cinetica dovuta ai moti di agitazione interni e poiché, quando la forza è attrattiva la energia potenziale è negativa, può essere $\mathcal{E}_{k,\text{int}} + U_{\text{int}} < 0$. In questa situazione la massa di riposo del corpo risulta inferiore alla somma delle masse di riposo dei componenti.

Ritroveremo questa problematica nota come *difetto di massa* trattando delle forze nucleari e dei metodi di utilizzo della energia nucleare.

La restante parte di questo capitolo sarà dedicata all'esame di alcune trasformazioni energetiche ben note ed appartenenti a mondi diversi della fisica. Come vedremo la loro influenza in termini di energia interna è molto diversa e, in un caso, quello delle reazioni nucleari può determinare cambiamenti misurabili nella massa dei partecipanti alla reazione.

La massa di riposo di un corpo macroscopico può essere sia maggiore, sia minore di quella dei singoli costituenti a seconda che prevalgano i termini cinetici o quelli potenziali

4.4 Cambiamenti di energia interna macroscopici e microscopici

Quando un corpo, per effetto dell'azione di una forza, cambia la sua forma e/o le dimensioni, diciamo che si deforma. La *deformazione*, sul piano microscopico corrisponde a cambiamenti nella distanza tra le molecole e, pertanto, a *cambiamenti nella energia molecolare di interazione*. Di conseguenza, *la deformazione di un corpo è accompagnata da cambiamenti nella sua energia interna*.

Ma se cambia l'energia interna di un corpo, cambia anche la sua massa. Perché non cercare di rilevare tale cambiamento? Il prossimo esempio è dedicato ad una tale problematica.

4.4.1 DI QUANTO CAMBIA L'ENERGIA INTERNA DI UNA SBARRA DEFORMATA?



Esercizio: Quanto cambia la massa di una sbarra d'acciaio di lunghezza $l = 1.00$ m e sezione trasversale $S = 1.00$ cm² che viene allungata di $\Delta l = 1$ mm da una forza? Il modulo di elasticità dell'acciaio vale $E = 2.00 \times 10^{11}$ N/m². Di quanto cambia la energia media di una singola molecola?

☹

Se applichiamo la *legge di Hooke* potremo determinare la forza applicata e tramite essa determinare gli apporti energetici.

$$F = E S \frac{\Delta l}{l} = 2.00 \times 10^{11} \times 1.00 \times 10^{-4} \frac{1.00 \times 10^{-3}}{1.00} = 2.00 \times 10^4 \text{ N}$$

Il lavoro fatto dalla forza elastica vale:

$$\mathcal{L} = \frac{kx^2}{2} = \frac{F\Delta l}{2} = 10.0 \text{ J}$$

ed è pari al cambiamento di energia interna: $\mathcal{L} = \Delta \mathcal{E}_0$.

Di conseguenza la variazione di massa vale:

$$\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{c^2} = \frac{10}{9 \times 10^{16}} = 1.1 \times 10^{-16} \text{ kg}$$

Prima della deformazione la massa della barra era

$$m = \rho l S = 7.8 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-4} = 0.78 \text{ kg.}$$

Come si vede il cambiamento nella massa della sbarra è estremamente piccolo ed incide solo sulla sedicesima cifra dopo la virgola. Nessuno strumento esistente può apprezzare una tale variazione.

Calcoliamo ora il cambiamento di massa subito da una singola molecola in caso di deformazione. Un chilogrammo d'acciaio contiene circa 10^{25} molecole.

Il calcolo si effettua conoscendo il peso molecolare $\mu \approx 56$ del ferro. Infatti, indicando con n il numero di moli si ha:

$n = M \cdot 10^3 / \mu$ e poiché $N = n \mathcal{N}$, dove \mathcal{N} è il *numero di Avogadro*, si ha che



$$N = \frac{M 10^3 \mathcal{N}}{\mu} \approx 10^{25} \text{ molecole}$$

La nostra sbarra, del peso di 0.78 kg è pertanto costituita da $N = 0.78 \times 10^{25}$ molecole e il cambiamento di energia per ogni molecola vale:

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{10}{0.78 \times 10^{25}} = 1.3 \times 10^{-24} \text{ J} = \frac{1.3 \times 10^{-24}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV} \approx 10^{-5} \text{ eV}$$

Dunque il cambio di energia interna di una molecola nei processi di deformazione è dell'ordine di qualche milionesimo di eV.

Nei prossimi paragrafi confronteremo questo valore con altri cambiamenti di energia delle molecole in altrettanti processi fisici di trasformazione. Vedremo che in quei casi il valore non è assolutamente trascurabile se si tiene conto del fatto che l'eV corrisponde, come ordine di grandezza, alle energie su scala atomica e che le energie molecolari sono ancora più piccole.



4.4.2 VARIAZIONI DI ENERGIA INTERNA NEI PROCESSI TERMICI

Tutti i processi in cui cambia la temperatura di un corpo, oppure cambia il suo stato di aggregazione, come la fusione o il congelamento, l'evaporazione o la condensazione, sono chiamati *processi termici*. Queste trasformazioni vengono trattate più dettagliatamente nei prossimi capitoli della III parte dedicati alla termodinamica, per ora ci si limita ad affrontarli in relazione ai cambiamenti di energia interna che determinano.

I cambiamenti di temperatura di un corpo sono associati a cambiamenti nella energia cinetica del movimento molecolare, bisogna però sottolineare che, contemporaneamente, si hanno anche cambiamenti nelle energie potenziali di interazione (tranne per i gas rarefatti).

In effetti, qualunque cambiamento di temperatura è accompagnato da un cambiamento nelle distanze tra le posizioni di equilibrio all'interno del reticolo cristallino del corpo e noi percepiamo tale cambiamento sotto forma di *espansione termica*.

Tutto ciò, naturalmente, cambia l'energia di interazione delle molecole. I cambiamenti nello stato di aggregazione sono il risultato di cambiamenti nella struttura molecolare dei corpi che causano tanto cambiamenti nelle energie di interazione delle molecole, quanto nelle loro caratteristiche cinetiche.

Vediamo di stimare i cambiamenti di energia molecolare connessi ai fenomeni termici.



Esercizio: Di quanto cambia la energia di una molecola quando si eleva di 1°C la temperatura di una data massa d'acqua?



E' ben noto dalla definizione di caloria, che se si aumenta di 1 °C la temperatura di 1 kg di acqua, bisogna fornire all'acqua una energia di 1 kcal = 4.18×10^3 J.

Ma in un chilogrammo d'acqua ci sono 3.3×10^{25} molecole. Infatti il peso molecolare dell'acqua H₂O è 2+16=18 pertanto il numero di molecole presenti in un chilogrammo d'acqua è:

$$N = n \mathcal{N} = (10^3/18) \times 6.02 \times 10^{23} \approx 3.3 \times 10^{25} \text{ molecole.}$$

$$\text{Quindi: } \Delta\varepsilon = \frac{\Delta\mathcal{E}_0}{N} = \frac{4.18 \times 10^3}{3.3 \times 10^{25} \times 1.6 \times 10^{-19}} \approx 10^{-3} \text{ eV}$$

Questo valore di energia è di *due ordini di grandezza superiore alla energia connessa al fenomeno di deformazione* considerato in precedenza. La variazione di massa è sempre piuttosto piccola a causa della presenza nel calcolo del termine c^2 ma la variazione di energia di una singola molecola sta via via crescendo.



Esercizio: Determinare la variazione di massa di 1 kg d'acqua nel passaggio dallo stato liquido allo stato di vapore sapendo che il *calore latente di evaporazione* vale 539 kcal/kg.



L'energia richiesta per trasformare 1 kg d'acqua in vapore è di 539 kcal = 2.25×10^6 J e l'energia di ogni molecola aumenta di:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\mathcal{E}_0}{N} = \frac{2.25 \times 10^6}{3.3 \times 10^{25} \times 1.6 \times 10^{-19}} \approx 0.5 \text{ eV}$$

Nonostante il fatto che nei *processi termici* l'energia interna cresca di oltre mille volte rispetto al caso delle deformazioni elastiche, anche in questo caso risulta impossibile misurare i cambiamenti di massa del corpo.

In effetti, anche se l'energia interna di 1 kg d'acqua aumenta di 2.25×10^6 J durante la evaporazione, la sua massa aumenta solo di

$$\Delta m = \frac{\Delta\mathcal{E}_0}{c^2} = \frac{2.25 \times 10^6}{9 \times 10^{16}} = 2.5 \times 10^{-11} \text{ kg}$$

cioè di un valore ancora ben al

di sotto della sensibilità di un apparato sperimentale macroscopico.



4.4.3 NELLE REAZIONI CHIMICHE CAMBIANO LE ENERGIE POTENZIALI

Le *reazioni chimiche* riguardano la riorganizzazione delle molecole, la loro decomposizione in unità più semplici o, per converso, la formazione di molecole più complesse di quelle di partenza.

In questi casi si verifica un sostanziale mutamento nelle forze di interazione tra gli atomi e ciò è accompagnato da sostanziose variazioni nelle energie di interazione. Di più i cambiamenti riguardano sia le caratteristiche del moto molecolare, sia le interazioni molecolari, perché le nuove molecole interagiscono diversamente da quelle originali.



Esercizio: L'antracite (carbon fossile con il 95% di carbonio) ha un potere di combustione di 34 MJ/kg. Determinare in eV il cambiamento di energia di ogni atomo di carbonio.



Nella combustione di 1 kg di carbonio si sviluppano circa $34 \times 0.95 = 3.23 \times 10^7$ J.

Poiché in 1 kg di carbone ci sono circa 5×10^{25} atomi di carbonio ⁽⁷⁾, il cambiamento nella energia di una molecola è:



⁷ Basta ricordare che il peso atomico del carbonio è 12 e procedere come al solito.

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\mathcal{E}_0}{N} = \frac{3 \times 10^7}{5 \times 10^{25} \times 1.6 \times 10^{-19}} \approx 4 \text{ eV}$$

Dunque, il cambiamento di energia per molecola nel corso delle *reazioni chimiche*, è di alcuni elettronvolt, cioè centinaia di migliaia di volte superiore a quella dei *processi termici*, e milioni di volte superiore a quello connessa alle deformazioni.

Questo valore è dello stesso ordine di grandezza della energia cinetica di un elettrone in un atomo e tale valore è sensato, visto che le reazioni chimiche consistono proprio in una riorganizzazione degli strati elettronici di atomi e molecole.

Anche in questo caso il cambiamento di massa rimane al di sotto dei limiti di sensibilità del più preciso strumento di misura: esso incide solo sulla decima cifra significativa e noi non siamo in grado di compiere misure così accurate. In effetti, nella combustione di 1 kg di carbone il cambiamento di massa è:

$$\Delta m = \frac{\Delta\mathcal{E}_0}{c^2} = \frac{3.23 \times 10^7}{9 \times 10^{16}} = 3.6 \times 10^{-10} \text{ kg}$$

☺



un moderno impianto nucleare



4.4.4 CAMBIAMENTI DI ENERGIA INTERNA NELLE REAZIONI NUCLEARI

In certe condizioni, i nuclei atomici possono subire trasformazioni chiamate *reazioni nucleari*. Al di là dei dettagli sulle particelle coinvolte esse sono sempre associate con grandi cambiamenti nella energia delle particelle interagenti.

In questo caso le masse di riposo dei nuclei coinvolti cambiano in maniera sensibile e ciò consente di stimare le energie coinvolte nella reazione dalle differenze di massa tra quelle note dei reagenti e quelle misurate dei prodotti di reazione.

Esercizio: Determinare la energia totale rilasciata dalla fissione di 1 kg di U_{235} nella reazione:



Quindi trovare la corrispondente variazione di massa che si realizza; infine determinare la quantità di carbone necessaria a rilasciare la stessa energia.

☹

Il numero di moli contenuto in 1 kg di uranio è

$$n = \frac{m_g}{\mu} = \frac{1000}{235} = 4.255 \text{ a cui corrispondono } N = n \mathcal{N} \text{ nuclei.}$$

$$N = 4.255 \times 6.02 \times 10^{23} = 2.56 \times 10^{24} \text{ nuclei}$$

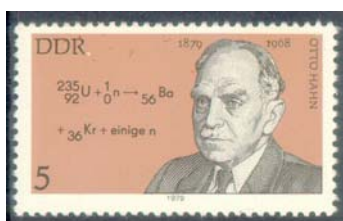
La energia totale rilasciata vale pertanto:

$$\mathcal{E} = N \times 170 \text{ MeV} = 4.35 \times 10^{32} \text{ eV} = 4.35 \times 10^{32} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} = 6.97 \times 10^{13} \text{ J}$$

La variazione di massa è

$$\Delta m = \frac{\mathcal{E}}{c^2} = 7.74 \times 10^{-4} \text{ kg e come si nota si tratta di un valore misurabile macroscopicamente.}$$

Per produrre la stessa energia ipotizzando un potere calorico del carbone di 34 MJ/kg occorrerebbero:



Otto Hahn analizzando i materiali prodotti dal bombardamento neutronico dell'uranio trovò elementi di numero atomico molto minore; era stata osservata la prima fissione nucleare

$$m_C = \frac{6.97 \times 10^{13}}{3.4 \times 10^7} \approx 2.05 \times 10^6 \text{ kg}$$

Poiché un vagone ferroviario può trasportare circa 50 tonnellate di carbone possiamo concludere che dalla fissione di 1 kg di uranio si ricava tanta energia quanta dalla combustione di 41 vagoni di carbone.



Nei processi di fusione dei nuclei leggeri le energie per unità di massa sono 6 o 7 volte più elevate di quelle dell'uranio.

Tali energie sono un milione di volte superiori a quella delle *reazioni chimiche* e mille milioni di volte superiore a quella connessa ai *processi termici*; queste informazioni ci consentono anche di caratterizzare gli ordini di grandezza delle forze nucleari rispetto a quelle che si esercitano tra gli atomi e tra le molecole.

4.5 Conservazione dell'energia ed incremento relativistico della massa

4.5.1 LA LEGGE SULL'INCREMENTO RELATIVISTICO DELLA MASSA SI BASA SUI PRINCIPI DI CONSERVAZIONE

All'inizio di questo capitolo dopo aver evidenziato la incompatibilità tra la II legge della dinamica e i postulati della relatività ristretta si è introdotta la relazione che fornisce l'incremento relativistico della massa senza però darne alcuna dimostrazione. Secondo tale relazione la massa di un punto materiale in moto con velocità v dipende dalla sua velocità secondo la relazione:



$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Vedremo ora che tale relazione si ottiene dalla applicazione di 3 principi: la legge di conservazione della quantità di moto, la legge di conservazione della massa relativistica e la legge di composizione relativistica delle velocità.



In fisica moderna non vale più la conservazione della massa di riposo, ma nel corso delle trasformazioni entro un sistema chiuso, si conserva la massa relativistica e, tenendo conto della relazione di proporzionalità tra massa ed energia, ciò, in ultima analisi, significa nuovamente la conservazione della energia.

4.5.2 UNA DEDUZIONE ELEMENTARE DELLA LEGGE

Consideriamo due corpi assolutamente identici e dotati di massa di riposo m_0 . Supponiamo inoltre che il corpo a destra sia a riposo rispetto al sistema di riferimento mentre l'altro si muova verso destra con velocità \vec{v} lungo l'asse delle ascisse.

Dopo un urto anelastico la quantità di moto del sistema sarà $M V$ dove M è la massa del sistema costituito dai due corpi e V la sua velocità. Se ipotizziamo che valga la conservazione della massa relativistica dovrà essere:

$$M = m + m_0$$

mentre in base alla conservazione della quantità di moto:

$$m v = M V = (m + m_0) V$$

Possiamo determinare il rapporto m / m_0 che ci servirà per determinare la dipendenza della massa relativistica dalla velocità.

In effetti:

$$m v - m V = m_0 V \quad \Leftrightarrow \quad m (v - V) = m_0 V$$

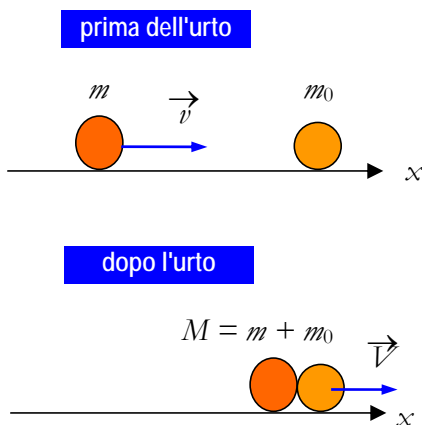
e infine:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{V}{v - V} = \frac{1}{v/V - 1}$$

Il valore di v / V può essere determinato sfruttando il principio di relatività.

Se consideriamo lo stesso fenomeno visto da un sistema di riferimento

K' in moto con velocità \vec{v} rispetto a K otterremo la situazione illustrata in Figura e applicando la conservazione della quantità di moto lungo l'asse x' avremo:



$$-mv = -(m + m_0) V$$

D'altra parte, nel passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro, le velocità si trasformano in base alla relazione sulla composizione relativistica che, nel nostro caso diventa:

$$V' = -V = \frac{V - v}{1 - \frac{vV}{c^2}}$$

Questa relazione ci permette, attraverso semplici trasformazioni algebriche, di pervenire al rapporto $\frac{v}{V}$ essenziale per determinare la massa relativistica.

Si tratta di una equazione di II grado in V che risolta ci permetterà di esprimere V in funzione di v :

$$-V + \frac{v}{c^2} V^2 = V - v \Leftrightarrow \frac{v}{c^2} V^2 - 2V + v = 0$$

Il discriminante è positivo a causa del valore limite della velocità della luce nel vuoto $\frac{\Delta}{4} = 1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \beta^2 > 0$

Pertanto l'equazione ammette due radici reali:

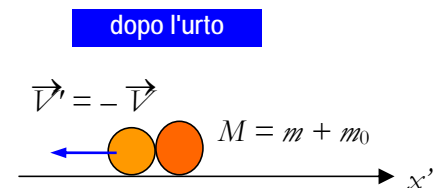
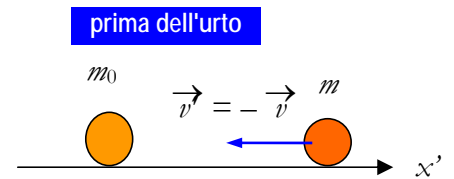
$$V_1 = \frac{c^2}{v} (1 + \sqrt{1 - \beta^2}) \quad V_2 = \frac{c^2}{v} (1 - \sqrt{1 - \beta^2})$$

La prima radice, però, non è accettabile fisicamente, perché corrisponde ad una velocità superiore a quella della luce. Pertanto la velocità del sistema dopo l'urto anelastico vale:

$$V = \frac{c^2}{v} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \Leftrightarrow \frac{v}{V} = \frac{v}{\frac{c^2}{v} (1 - \sqrt{1 - \beta^2})} = \frac{\beta^2}{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}$$

Possiamo finalmente determinare quanto richiesto; infatti:

$$\frac{m_0}{m} = \frac{v}{V} - 1 = \frac{\beta^2}{1 - \sqrt{1 - \beta^2}} - 1 = \frac{\beta^2(1 + \sqrt{1 - \beta^2})}{1 - 1 + \beta^2} - 1 = \sqrt{1 - \beta^2}$$



4.6 Esercizi



4.6.1 LA COSTANTE DI PROPORZIONALITÀ TRA MASSA ED ENERGIA

Esercizio: Data una particella di massa di riposo m_0 , in base alla teoria della relatività, la sua energia di riposo $\mathcal{E}_0 = k m_0$ dove k dipende dal sistema di unità di misura scelto. Determinare k quando la energia viene misurata in MeV e la massa in a.m.u.



Se si opera in unità del SI si ha $\mathcal{E}_0 = m_0 c^2$ e dunque la costante k è il quadrato della velocità della luce. Ma se si opera con m in amu e con \mathcal{E} in MeV invece che in J bisogna operare le necessarie conversioni.

$$\mathcal{E}_{\text{MeV}} = \frac{\mathcal{E} \cdot 10^{-6}}{1.6021892 \cdot 10^{-19}} = \frac{m_{\text{kg}} c^2}{1.6021892 \cdot 10^{-13}} = \frac{m_{\text{amu}} \cdot 1.6605655 \cdot 10^{-27} \cdot c^2}{1.6021892 \cdot 10^{-13}}$$

e dunque il valore k richiesto è

$$k = \frac{1.6605655 \cdot 10^{-27} \cdot 299'792'458^2}{1.6021892 \cdot 10^{-13}} = 931.5016 \text{ MeV/amu.}$$

Il risultato è stato espresso con 7 cifre significative tenendo conto dei numerosi conti e della precisione con 8 cifre usata per massa e carica.



4.6.2 CALCOLO DELLA QUANTITÀ DI MOTO A PARTIRE DALLA ENERGIA CINETICA

Esercizio: Esprimere in funzione della energia cinetica \mathcal{E}_k il modulo della quantità di moto p per una particella di energia di riposo \mathcal{E}_0 . Si trovi poi in kg m/s la quantità di moto di un elettrone con $\mathcal{E}_k = 0.200$ MeV e dopo aver trovato anche il valore previsto dalla relazione classica $\mathcal{E}_k = \frac{p^2}{2m}$ si esprima l'errore relativo che si commette se si usa la relazione classica.



Si parte dall'invariante relativistico $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_0^2 + (pc)^2$ e dalla definizione di energia cinetica $\mathcal{E}_k = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0$.

$$\text{Pertanto } p = \frac{\sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2}}{c} = \frac{\sqrt{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)(\mathcal{E} + \mathcal{E}_0)}}{c} = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_k(\mathcal{E}_k + 2\mathcal{E}_0)}}{c}$$

I calcoli vengono eseguiti con almeno 5 cifre significative dovendosi determinare un effetto relativistico ad un energia che è circa la metà della energia di riposo.

Per determinare la quantità di moto bisogna ricordarsi di convertire la energia cinetica in J (si moltiplica per $1.6022 \cdot 10^{-13}$) e lo stesso si deve fare per la energia di riposo.

$$\mathcal{E}_k = 0.200 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-13} = 0.32044 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$\mathcal{E}_0 = m_{0e} c^2 = 9.109534 \cdot 10^{-31} \cdot 299'792'458^2 = 0.81872 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$p = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_k(\mathcal{E}_k + 2\mathcal{E}_0)}}{c} = \frac{\sqrt{0.32044 \cdot 10^{-13}(0.32044 \cdot 10^{-13} + 2 \cdot 0.81872 \cdot 10^{-13})}}{299'792'458}$$

$$= 2.642 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s}$$

Se si usa la relazione classica

$$p' = \sqrt{2m \mathcal{E}_k} = \sqrt{2 \cdot 9.109534 \cdot 10^{-31} \cdot 0.32044 \cdot 10^{-13}} = 2.416 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s}$$

L'errore relativo che si commette a trascurare gli effetti relativistici è dato da:

$$\varepsilon_r\% = 100 \frac{p - p'}{p} = 100 \frac{2.642 \cdot 10^{-22} - 2.416 \cdot 10^{-22}}{2.642 \cdot 10^{-22}} = 8.55\%$$

Indice analitico

- ambito*: classico o relativistico - 5
- calcolo differenziale*: relazioni utili - 9
- conservazione* - 1; dell'energia - 3; della massa - 3; massa relativistica - 17; quantità di moto - 1, 17; simultanea di massa ed energia - 3; validità delle leggi - 1
- difetto di massa* - 11
- dinamica*: nuova - 1
- Einstein* - 3
- energia*: cinetica, definizione - 4; totale relativistica - definizione - 3
- energia di riposo*: di un gas - 10; di un sistema - 10
- energia e quantità di moto*: invariante relativistico - 8; relazione relativistica - 8
- energia interna*: di un corpo, ruolo delle energie potenziali tra le particelle costituenti - 11; di un sistema - 10
- Esercizio*: andamento della velocità per forza costante - 2; cambiamento di energia interna e massa nei passaggi di stato - 14; cambiamento di energia interna e massa nelle reazioni nucleari - 15; cambiamento di energia interna e molecolare per deformazione - 12; cambiamento di energia interna in una combustione - 14; cambiamento di energia molecolare per variazione di temperatura - 13; energia di riposo corrispondente ad una data massa - 4; energia di riposo ed energia cinetica - 5; energie di riposo di elettrone e protone - 6; la costante di proporzionalità tra massa ed energia per diverse unità di misura - 19; relazione tra quantità di moto ed energia cinetica - 19; velocità di particelle ultrarelativistiche - 6
- espansione termica* - 13
- Hooke*: legge di - 12
- Lavoisier*: Antoine Laurent - 3
- massa*: di riposo o propria - 2; incremento relativistico, deduzione/justificazione - 17; relativistica - 1
- massa di riposo*: non è additiva - 10
- numero di Avogadro* - 12
- principio di relatività* - 17
- processi termici* - 13, 14, 15, 16
- quantità di moto* - 1, 9; definizione relativistica - 2; urto anelastico - 17
- reazioni chimiche* - 14, 16
- reazioni nucleari* - 15
- teorema dell'energia cinetica*: dimostrazione - 9
- unificazione*: di massa ed energia - 3
- velocità*: composizione relativistica - 17
- zona*: classica - 2; relativistica - 2; ultrarelativistica - 2

