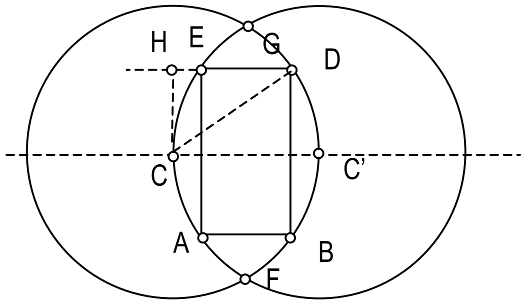
19 aprile 2008 2F PNI

Due circonferenze di centri C e C' hanno lo stesso raggio e passano ciascuna per il centro dell'altra. Inscrivere nella regione comune di esse un rettangolo ABDE e dopo aver scelto come variabile che descrive la figura la misura $\overline{AB} = x$



a) spiegare perché fissato AB il rettangolo è univocamente determinato

Tracciata una parallela alla congiungente dei centri CC' si ottiene il segmento AB e da lì si mandano le perpendicolari a CC' ottenendo i punti E e D che individuano un rettangolo per la simmetria della figura.

b) porre le limitazioni su x calcolando il valore del perimetro dei rettangoli degeneri nei due casi estremi (si trova rispettivamente 2r e $2\sqrt{3}$ r)

Si vede dalla figura che deve essere x < r

Quando AB coincide con CC' il rettangolo degenera nella sovrapposizione di due segmenti di lunghezza r e dunque 2p = 2r

Quando A≡B≡F mentre D≡E≡G poiché il triangolo CC'G è equilatero di lato r si ha $\overline{FG} = 2\frac{\sqrt{3}}{2}r = \sqrt{3}r$ e dunque $2p = 2\sqrt{3}r$

c) determinare $\overline{AE}$ e quindi scrivere l'espressione che fornisce il perimetro del rettangolo (si trova $2p = 2\left(x + \sqrt{3r^2 - x^2 - 2rx}\right)$)

Con riferimento alla figura $\overline{AE} = 2\,\overline{CH}$ mentre $\overline{CH}$ si trova con il teorema di Pitagora sul triangolo CHD di ipotenusa r mentre $\overline{GH} = \overline{HE} + \overline{EG}$ e dunque tutto si riduce a trovare $\overline{HE} = ½\,(\overline{CC'} - \overline{AB}) = ½\,(r - x)$

Si ha dunque $\overline{AE} = 2\,\overline{CH} = 2\sqrt{r^2 - [x + ½\,(r - x)]^2} = 2\sqrt{r^2 - [½\,x + ½\,r]^2} = \sqrt{4r^2 - [x + r]^2} = \sqrt{3r^2 - x^2 - 2rx}$

Infine $2p = 2\left(x + \sqrt{3r^2 - x^2 - 2rx}\right)$

d) trovare il valore di x per il quale il perimetro risulta pari a $(1 + \sqrt{7})r$ (si trovano le soluzioni entrambe accettabili r/2 e $r/2\,(\sqrt{7} - 2)$

$2\left(x + \sqrt{3r^2 - x^2 - 2rx}\right) = (1 + \sqrt{7})r \Leftrightarrow 2\sqrt{3r^2 - x^2 - 2rx} = (1 + \sqrt{7})r - 2x$

Prima di elevare a quadrato occorre porre il *limite aggiunto* $(1 + \sqrt{7})r - 2x \ge 0 \Leftrightarrow x \le ½\,(1 + \sqrt{7})r \approx 1.82$ r e tale condizione è ointeramente assorbita dal limite geometrico

Elevando al quadrato si ha:

$4(3r^2 - x^2 - 2rx) = (8 + 2\sqrt{7})r^2 + 4x^2 - 4(1 + \sqrt{7})r\,x \Leftrightarrow 8x^2 - 4(1 + \sqrt{7} - 2)r\,x + r^2(2\sqrt{7} - 4) = 0 \Leftrightarrow$

$4x^2 - 2(\sqrt{7} - 1)r\,x + r^2(\sqrt{7} - 2) = 0$

$\Delta/4 = (\sqrt{7} - 1)^2r^2 - 4\,r^2(\sqrt{7} - 2) = r^2(16 - 6\sqrt{7}) = [(3 - \sqrt{7})r]^2$

Dunque $x = \frac{\sqrt{7} - 1 \pm (3 - \sqrt{7})}{4}r$ che porta alle due soluzioni x = ½ r accettabile oppure $x = \frac{\sqrt{7} - 2}{2} \approx 0.323$ r accettabile

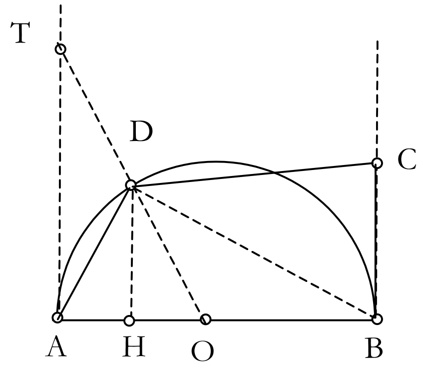
E' ammessa la assunzione di risultati intermedi ma si ricorda che lo scopo dell'esercizio è verificare la capacità di *impostare e risolvere* problemi di applicazione dell'algebra alla geometria.

Non è indispensabile rifare la figura ma evitare di pasticciare quella fornita con il testo.

16 febbraio 2008: 2F PNI

Si consideri una semicirconferenza di diametro AB = 2 e centro O. Dopo aver tracciato le due semirette tangenti per A e per B dalla parte della semicirconferenza si prenda su quella per A un generico punto T e lo si unisca al centro O. Si indichi con D il punto di intersezione con la semicirconferenza e con C il punto della tangente per B tale che $\overline{BC} = 1$.

1) Costruire la figura ed indicare con H la proiezione di D sul diametro.



2) Indicata con x la misura di AT calcolare le misure $\overline{HD}$ e $\overline{HO}$. Risulta $\overline{HD} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ e $\overline{HO} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\overset{\Delta}{ATO} \sim \overset{\Delta}{HDO}$ (rettangoli con angolo in comune) $\Rightarrow \overline{AT} : \overline{HD} = \overline{OT} : \overline{OD}$ ma per il teorema di Pitagora $\overline{OT} = \sqrt{x^2+1}$ con la condizione x > 0 (lunghezza di un segmento)

Ne segue che $\overline{HD} = \dfrac{\overline{AT} \cdot \overline{OD}}{\overline{OT}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Analogamente $\overline{AT} : \overline{HD} = \overline{OA} : \overline{OH}$ ne segue che $\overline{OH} = \dfrac{\overline{HD} \cdot \overline{OA}}{\overline{AT}} = \dfrac{x}{x\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Nota di correzione: usare due volte la similitudine, precisare quali sono i triangoli simili e perché, essere stringati, evitare di usare inutilmente il teorema di Pitagora

3) Tenendo conto del risultato precedente scrivere come si potrebbe calcolare in maniera semplice l'area del quadrilatero ABCD da indicare con σ_{ABCD}. Calcolare tale area dimostrando che risulta:

$$\sigma_{ABCD} = ½\,\frac{2x + 1 + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Il quadrilatero richiesto si decompone in due triangoli $\overset{\Delta}{ADB}$ e $\overset{\Delta}{DBC}$ le cui aree sono calcolabili semplicemente (il primo è già determinato e per il secondo basta osservare che la sua altezza è $\overline{HB} = \overline{HO} + \overline{OB} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 1$

$\sigma_{ADB} = ½\ \overline{AB}\ \overline{HD} = ½ \cdot 2 \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\sigma_{DBC} = ½\ \overline{BC}\ \overline{HB} = ½ \cdot 1 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} + 1}{2\sqrt{x^2+1}}$

da cui per somma si ha $\sigma_{ABCD} = ½\,\dfrac{2x + 1 + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

Nota di correzione: era esplicitamente detto di cercare la via più semplice e gli elementi richiesti nella domanda precedente erano chiarissimi. Solo chi non si è esercitato non vede queste cose.
Le altre alternative erano più lunghe e più complesse nei calcoli (ad esempio un triangolo e un trapezio)

4) Determinare il valore di x per il quale si ha $\sigma_{ABCD} = ½\left(\sqrt{5}+1\right)$. Si ottiene x = 2

$½\dfrac{2x+1+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = ½\left(\sqrt{5}+1\right) \Leftrightarrow 2x+1+\sqrt{x^2+1} = \left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt{5}\sqrt{x^2+1}$

Poiché x > 0 lo è anche 2x + 1 e si può elevare al quadrato ottenendo:

$4x^2 + 1 + 4x = 5x^2 + 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ soluzione accettabile

Nota di correzione: pasticci algebrici vari sia nel semplificare l'espressione irrazionale sia negli elevamenti a quadrato, sia nella possibilità di quadrare.

5) Scrivere in forma normale la equazione di II grado parametrica che si ottiene imponendo che l'area abbia un generico valore k.

$½\dfrac{2x+1+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = k$ con k > 0 (è un'area) $\Leftrightarrow 2x+1+\sqrt{x^2+1} = 2k\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 2x+1 = (2k-1)\sqrt{x^2+1}$

Tale equazione ammette soluzioni solo se 2k – 1 > 0 (visto che il termine di sinistra è positivo); deve dunque essere k > ½ e in tale ambito si può elevare a quadrato. Poiché 2k – 1 compare sempre al quadrato conviene indicarlo con un nuovo simbolo (per esempio h). Si ha dunque:

$4x^2 + 1 + 4x = h(x^2+1) \Leftrightarrow x^2(h-4) - 4x + (h-1) = 0$

Nota di correzione: la limitazione k > ½ non è un optional; nel corso del compito ho suggerito il cambio di variabile

6) Determinare per quali valori di k tale equazione ammette soluzioni

L'equazione ha soluzioni reali per $\Delta/4 \geq 0$ e si ha $\Delta/4 = 4 + (h-4)(1-h) = -h^2 + 5h \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq h \leq 5$ e se si ritorna a k ciò significa

$0 < 2k - 1 \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow ½ < k \leq \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

Dunque quando il punto T si muove si hanno sempre due posizioni con la medesima area (due valori di x per lo stesso k); l'area non può avere valori qualsiasi e il suo valore massimo è proprio quello di cui al punto 4

Nota di correzione: l'ultima domanda era per il 10 ma siamo molto lontani.

8/2/03: 2F PNI

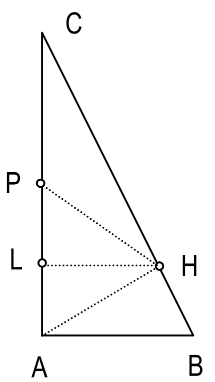
Costruire la figura in maniera ordinata; citare il teorema che si usa; evidenziare i risultati di ogni punto richiesto

In un triangolo rettangolo ABC si ha $C\hat{A}B = 90°$, $\tan C\hat{B}A = 2$ e $\overline{AB} = 2$ cm.

1. Determinare $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$
2. Tracciare da A l'altezza AH e determinare $\overline{CH}$, $\overline{HB}$ e $\overline{AH}$
3. Indicare con L la proiezione di H su AC e determinare $\overline{CL}$ e $\overline{LH}$
4. Si consideri un punto P∈CL e si assuma $\overline{CP} = x$. Scrivere l'espressione che corrisponde a $\overline{PH}^{\,2}$ e determinare il valore di x per il quale si ha $\overline{PH} = 2$ cm
5. In corrispondenza del valore così determinato trovare l'area σ del triangolo CPH.

$\overline{CB} = 2\sqrt{5}$ cm; $\overline{CH} = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$ cm; $\overline{LH} = \dfrac{8}{5}$ cm; $x = 2$cm; $\sigma = \dfrac{16}{5\sqrt{5}}$ cm^2

AC	CB		
CH	HB	AH	
CL	LH		
PH^2	x		
σ			



1) $\overline{AC} = \overline{AB}\tan C\hat{B}A = 2 \cdot 2 = 4$ cm mentre per il teorema di Pitagora $\overline{CB} = \sqrt{\overline{AC}^{\,2} + \overline{AB}^{\,2})} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm

Note di correzione: la figura deve essere rispettosa del rapporto dato tra i due cateti pena la impossibilità di cogliere immediatamente proprietà che la figura ben evidenza. Le determinazioni potevano anche essere svolte per via trigonometrica ma ciò avrebbe richiesto il calcolo di cos α e sin α noto tan α = 2. E' ciò che faremmo in III mentre per ora l'approccio alla trigonometria è puramente operativo e legato alle necessità del calcolo vettoriale.

2) Per il I teorema di Euclide applicato ad ABC si ha $\overline{CH} = \dfrac{\overline{AC^2}}{\overline{CB}} = \dfrac{16}{2\sqrt{5}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$ cm e analogamente(o per differenza) si trova

$\overline{HB} = 2\sqrt{5} - \dfrac{8}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ cm

$\overline{AH}$ può essere determinato tramite il II teorema di Euclide $\overline{AH} = \sqrt{\overline{CH}\ \overline{HB}} = \dfrac{16}{5}$cm

Note di correzione: le domande e anche le risposte erano messe in modo di suggerire in che ordine (quello più razionale) svolgere le diverse determinazioni. Quando si può evitare di usare il teorema di Pitagora è meglio farlo perché nel calcolo compaiono conti meno semplici di quelli che vengono dai prodotti e dai rapporti.

3) Per determinare gli elementi di LHC si può operare nuovamente con i teoremi di Euclide e con la similitudine tra LHC e ABC (stesso rapporto tra i cateti che vale 2).

$\overline{LC} = \dfrac{\overline{CH}^2}{\overline{AC}} = \dfrac{64}{5\cdot 4} = \dfrac{16}{5}$ cm $\qquad \overline{LA} = \overline{AC} - \overline{LC} = 4 - \dfrac{16}{5} = \dfrac{4}{5}$ cm mentre $\overline{LH} = ½\ \overline{LC} = \dfrac{8}{5}$ cm

4) Posto $\overline{CP} = x$ dovrà essere $0 < x < \dfrac{16}{5}$ e poiché $\overline{PL} = \dfrac{16}{5} - x$ si potrà determinare agevolmente quanto richiesto con il teorema di Pitagora applicato al triangolo PLH.

$\overline{PH}^2 = \dfrac{64}{25} + \left(\dfrac{16}{5} - x\right)^2 = \dfrac{320}{25} - \dfrac{32}{5}x + x^2$

Se ora imponiamo la condizione che $\overline{PH}^2 = 4$ otterremo la equazione:

$\dfrac{320}{25} - \dfrac{32}{5}x + x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{32}{5}x + \dfrac{44}{5} = 0 \qquad \Delta/4 = \dfrac{256}{25} - \dfrac{220}{25} = \dfrac{36}{25} = \left(\dfrac{6}{5}\right)^2 \qquad x = \dfrac{16}{5} \pm \dfrac{6}{5} = \begin{cases} 2 \text{ s.a.} \\ \dfrac{22}{5} \text{ s.n.a} \end{cases}$

Nota di correzione: evitare di confondere l'operatore di equivalenza $\Leftrightarrow$ che lega proposizioni e l'operatore di eguaglianza che lega espressioni numeriche. Evitare nelle espressioni semplificazioni che sono lecite solo nelle equazioni e così via.

5) L'area del triangolo PCH che risulta essere isoscele si può trovare immediatamente osservando che PC e LH sono rispettivamente la base e l'altezza per cui $\sigma = ½\ \overline{CP}\ \overline{LH} = ½\ 2\ \dfrac{8}{5} = \dfrac{8}{5}$ cm^2

Note di correzione: con maggiore onerosità di calcolo tale area poteva essere determinata o con la formula di Erone o sfruttando il fatto che il triangolo è isoscele e pertanto si calcola facilmente l'altezza relativa alla base CH

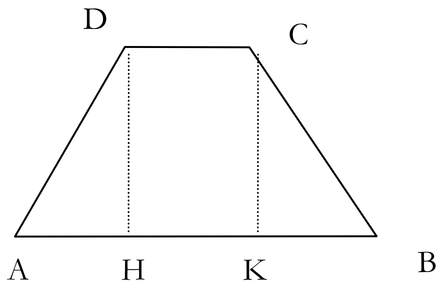
30/1/2001 2F ordinamento

Lo svolgimento completo e corretto di un problema corrisponde ad una valutazione di buono. Lo svolgimento parziale del rimanente vale in funzione aggiuntiva solo dopo il completamento di quello prescelto.

1. Nel trapezio isoscele ABCD di base maggiore AB sono note l'area $\sigma = 52\ cm^2$, il perimetro $2p = 36$ cm e l'altezza $h = \overline{DH} = 4$ cm. Dopo aver fissato liberamente una variabile incognita x in grado di descrivere la figura determinare le misure delle basi e dei lati obliqui. Completare la trattazione determinando l'area di un trapezio con la stessa base maggiore e la stessa altezza, ma con angoli alla base rispettivamente di 60° e 45°.

Soluzione:

Sono assegnate 1 grandezza e 2 relazioni esattamente pari al numero di elemnti necessari per determinare un trapezio isoscele e posso scegliere liberamente come variabile uno qualunque degli elementi lineari (base maggiore, minore, lato, proiezione del lato).



Per altro il problema si può svolgere in 2 o 3 passaggi osservando che dall'area e dall'altezza si trova la somma basi; dal perimetro si trova il lato obliquo e quindi con il teorema di Pitagora la proiezione di esso sulla base maggiore; a questo punto la somma basi (nota) si può scrivere come doppio della somma della base minore (incognita) e della proiezione e il gioco è fatto. Vediamo ora come si presenta la soluzione più tradizionale basata sulla scelta di una variabile incognita.

Supponiamo di scegliere la base maggiore $x = \overline{AB}$ con la condizione $x > \overline{DC} > 0$

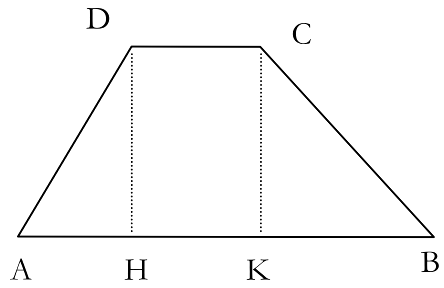
Poiché $\sigma = ½ [\overline{AB} + \overline{DC}]\overline{DH}$ si ha $x + \overline{DC} = \frac{2\sigma}{h} = \frac{2 \cdot 52}{4} = 26$ cm e pertanto $\overline{DC} = 26 - x$ con la condizione indotta $x < 26$. Determiniamo $\overline{AH} = ½ (\overline{AB} - \overline{DC}) = ½ (2x - 26) = x - 13$ con la condizione indotta $x > 13$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo AHD si ha: $\overline{AD} = \sqrt{\overline{AH}^2 + h^2} = \sqrt{(x - 13)^2 + 16} = \sqrt{x^2 - 26x + 185}$. Possiamo ora usare l'ultima relazione (quella sul perimetro) e avremo che:

$2\sqrt{x^2 - 26x + 185} + x + (26 - x) = 36 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 26x + 185} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 26x + 160 = 0 \Leftrightarrow \Delta/4 = 169 - 160 = 9 = 3^2 \wedge x = 13 \pm 3$.
Solo la soluzione $x = 16 > 13$ è accettabile.

$\overline{DC} = 26 - x = 26 - 16 = 10$ cm

$\overline{AD} = \sqrt{x^2 - 26x + 185} = \sqrt{16^2 - 26 \cdot 16 + 185} = 5$ cm



Con le indicazioni date sugli angoli si ha che:

$\overline{HD} / \overline{AH} = \sqrt{3} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ cm

$\overline{BK} = \overline{DH} = 4 \text{ cm} \Rightarrow \overline{BK} + \overline{AH} = 4\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

La base minore vale dunque: $\overline{AB} - \overline{AH} - \overline{KB}$ e la somma basi necessaria al calcolo dell'area:

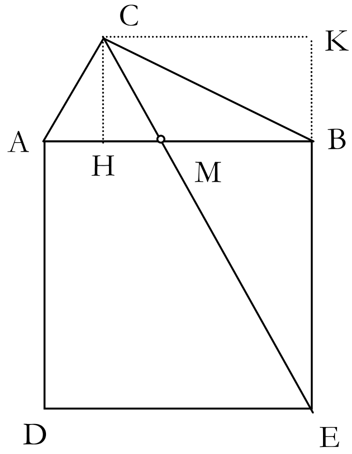
$\overline{AB} + \overline{DC} = 2\overline{AB} - (\overline{AH} + \overline{KB}) = 32 - 4\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 28 - \frac{4}{\sqrt{3}}$ cm

La nuova area risulta dunque $\sigma' = ½ \left(28 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)4 = 56 - \frac{8}{\sqrt{3}}\ cm^2$

2. È dato il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ di ipotenusa $\overline{AB} = l$ con $C\hat{A}B = 60°$. Costruire da parte opposta rispetto al triangolo il quadrato BADE. La retta r_{CE} interseca AB in M. Determinare la lunghezza del segmento BM. (Si consiglia di costruire il triangolo rettangolo di ipotenusa CE con cateti paralleli ad AD e AB. Si ottengono una serie di triangoli dalle caratteristiche note). Se il triangolo originale fosse caratterizzato dalla condizione $\overline{AC} / \overline{AB} = \alpha$ invece che dall'angolo di 60° quali limiti si avrebbero su α ? Quanto varrebbe $\overline{CB}$? Di conseguenza, senza rifare tutto il problema ma limitandosi a scrivere progressivamente i risultati quanto varrebbe $\overline{BM}$?

Soluzione:

$\overline{AC} = l/2$ e $\overline{CB} = \frac{\sqrt{3}\,l}{2}$ mentre $\overline{CH} = \overline{KB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{4}l$



$\overline{CK} = \overline{CB}\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}l$

$\overline{KE} = \overline{KB} + \overline{BE} = l\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + 1\right) = \frac{\sqrt{3}+4}{4}l$

Ma i triangoli CKE e MBE sono simili pertanto:

$\overline{MB} : \overline{CK} = \overline{BE} : \overline{KE}$ e dunque:

$$\overline{MB} = \frac{\overline{CK}\ \overline{BE}}{\overline{KE}} = \frac{\frac{3}{4}l^2}{\frac{\sqrt{3}+4}{4}l} = \frac{3}{\sqrt{3}+4}l$$

Se $\overline{AC} = \alpha\, l$ deve essere $0 < \alpha < 1$ mentre $\overline{CB}$ si trova con il teorema di Pitagora e vale = $\sqrt{1-\alpha^2}\, l$. Poiché i triangoli CAH e CKB sono simili a ACB valgono per i suoi elementi gli stessi rapporti e dunque:

$\overline{CH} = \overline{KB} = \sqrt{1-\alpha^2}\ \overline{AC} = \alpha\sqrt{1-\alpha^2}\, l$

$\overline{CK} = \overline{CB}\ \sqrt{1-\alpha^2} = (1-\alpha^2)l$ mentre $\overline{KE} = \overline{KB} + \overline{BE} = l\,(1 + \alpha\sqrt{1-\alpha^2}\,)$

Ma i triangoli CKE e MBE sono simili pertanto: $\overline{MB} : \overline{CK} = \overline{BE} : \overline{KE}$ e dunque:

$$\overline{MB} = \frac{\overline{CK}\ \overline{BE}}{\overline{KE}} = \frac{(1-\alpha^2)\, l^2}{l\,(1+\alpha\sqrt{1-\alpha^2})} = \frac{(1-\alpha^2)\, l}{(1+\alpha\sqrt{1-\alpha^2})}$$

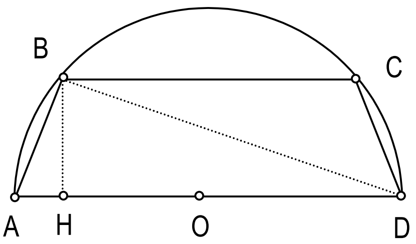
2F PNI 15/3/2003: poligoni inscritti

Il trapezio isoscele ABCD è inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AD}$= 2r.

a) Posto $\overline{BC}$= 2x determinare in funzione di x il lato $\overline{AB}$, l'altezza $\overline{BH}$, l'area σ e il perimetro 2p
b) Tra gli infiniti trapezi trovare quello per cui la somma dei lati e della base minore è 3/2 della base maggiore
c) Che tipo di trapezio viene? Costruire la figura con il compasso.

figura	elementi	equazione	interpretazione	figura finale		

a) Il trapezio isoscele inscritto nella semicirconferenza è caratterizzato dal fatto che il triangolo ABD è rettangolo e inoltre la figura è simmetrica rispetto all'asse del diametro AD. Indichiamo con H la proiezione di B sul diametro ed osserviamo che:



$\overline{HO} = \frac{1}{2}\overline{BC} = x$ con $x \leq r$ e pertanto:

$\overline{AH} = r - x$ $\quad \overline{AB} = \sqrt{\overline{AH}\cdot\overline{AD}} = \sqrt{2r(r-x)}$ (I teorema di Euclide)

$\overline{HB} = \sqrt{\overline{AH}\cdot\overline{HD}} = \sqrt{(r-x)(r+x)}$ (II teorema di Euclide)

$\sigma = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD})\cdot\overline{HB} = \frac{1}{2}(2r + 2x)\sqrt{(r-x)(r+x)} = (r + x)\sqrt{(r-x)(r+x)}$

$2p = 2\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AD} = 2\sqrt{2r(r-x)} + (2r + 2x) = 2(\sqrt{2r(r-x)} + (r + x))$

Note di correzione: l'analisi della figura deve contenere le proprietà geometriche che si utilizzeranno; era meglio, come si vede, operare con i teoremi di Euclide che portavano immediatamente a quanto richiesto; numerose persone non sanno semplificare ½ con 2 (siamo alla fine della II); l'area può essere scritta anche $(r + x)^{3/2}(r - x)^{1/2}$ ma ciò non determina convenienze particolari.

b) Si applica la relazione e si ha:

$2\overline{AB} + \overline{BC} = 3/2\ \overline{AD} \Leftrightarrow 2\sqrt{2r(r-x)} + 2x = 3/2\ (2r) \Leftrightarrow 2\sqrt{2r(r-x)} = 3r - 2x$

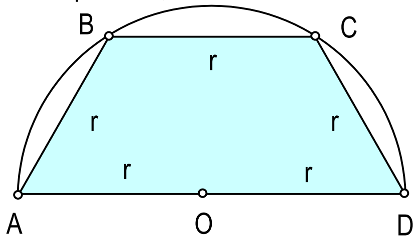
Si può elevare al quadrato se $3r - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3/2\ r$ che è sicuramente vera per la limitazione $x \leq r$

elevando al quadrato si ha:

$4(2r^2 - 2rx) = 9r^2 + 4x^2 - 12rx \Leftrightarrow 4x^2 - 4rx + r^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - r)^2 = 0 \Leftrightarrow x = r/2$ soluzione accettabile

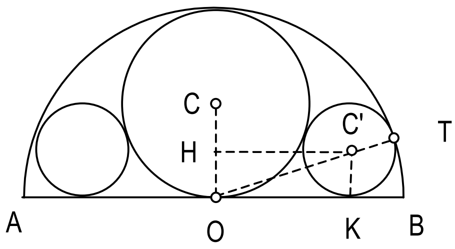
Note di correzione: è obbligatorio discutere la positività del II membro prima di elevare al quadrato; alla fine della II non sono ammessi errori tipo dimenticarsi del doppio prodotto

c) Il trapezio determinato ha base minore = r e lato obliquo $\overline{AB} = \sqrt{2r(r - r/2)} = r$ si tratta dunque della metà di un esagono regolare il cui lato si costruisce banalmente puntando in A e in D con apertura uguale al raggio



2F PNI 9/4/2003: corso recupero verifica finale

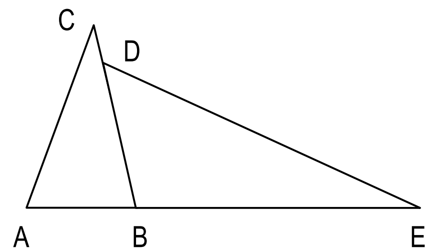
1. Data la semicirconferenza di raggio R e diametro AB si considerino le tre circonferenze tangenti internamente come in figura. Indicare con R' e r i raggi delle due circonferenze maggiore e minore e con O, C e C' i centri delle circonferenze. a) Perché O, C' e T sono allineati? b) perché CO è perpendicolare ad AB? c) Quanto vale R' d) Indicata con H la proiezione di C' su CO e con K uno dei punti di tangenza perché HC'KO è un rettangolo? e) esprimere, tramite il teorema di Pitagora $\overline{C'H}^2$ e $\overline{OK}^2$ in funzione di R e r f) utilizzare la eguaglianza tra $\overline{C'H}^2$ e $\overline{OK}^2$ per determinare r. g) determinare l'area σ racchiusa tra il semicerchio e i cerchi tangenti.



a	b	c	d	e	f	g		

a) per il teorema sulla perpendicolarità tra raggio e retta tangente che, in questo caso,

2. Dimostrare che il lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio *r* vale $r\sqrt{3}$



3. Dati i due triangoli ABC e BED disposti come in figura determinare $\delta = B\hat{D}E$ conoscendo $\alpha = C\hat{A}B = 72°$, $\gamma = A\hat{C}B = 32°$ ed $\varepsilon = D\hat{E}B = 24°$

4. Il rettangolo ABCD è simile al rettangolo EFCD dove E ed F sono i punti medi di AD e BC. Determinare il rapporto $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$. Se $\overline{AB}$ = 3 cm quanto valgono l'area σ e il perimetro 2p di ABCD.

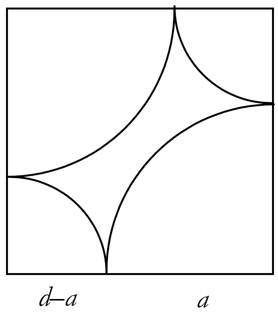
2F PNI 10/5/2003 verifica finale

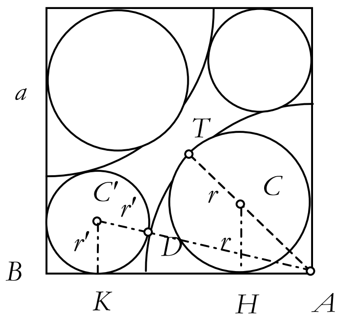
In un quadrato di lato d si tracciano con centro nei vertici 4 archi di raggio alternativamente a e d – a dove a è un valore qualsiasi minore di d.

Risolvere solo uno dei punti 3 o 4 (l'altro è facoltativo).

1) Determinare il perimetro della figura delimitata dagli archi e commentare il risultato.
2) Rifare la figura costruendo solo gli archi di raggio a. Nelle tre regioni in cui viene diviso il quadrato si possono inscrivere 4 circonferenze tangenti agli archi e ai lati. Disegnarle con il compasso con la migliore precisione possibile. Le circonferenze sono congruenti a coppie. Indicare con r il raggio di quella contenuta nel quadrante di raggio a e con r' il raggio dell'altra.
3) Con riferimento alla circonferenza di raggio r indicare con A, C, T e H il vertice del quadrato, il centro della circonferenza, il punto di contatto con l'arco e uno di quelli con il quadrato. Dimostrare che $r = a(\sqrt{2} - 1)$ evidenziando le proprietà geometriche che si usano per la dimostrazione
4) Con riferimento alla circonferenza di raggio r' indicare con C', D e K il centro, il punto di contato con l'arco e uno di quelli con il quadrato. Ragionando sul triangolo C'KA dimostrare che r' è la soluzione della equazione $r'^2 - 2r'(d+a) + d^2 - a^2 = 0$.
5) Risolvere l'equazione del punto precedente per il caso in cui d = 7 cm e a = 2 cm.

1	2	3	4	5	punteggio





2	2	3	4	3	

1) Gli archi sono dei quadranti congruenti a coppie e pertanto la figura ha perimetro pari alla somma di due semicirconferenze di raggi a e d – a; $2p = \pi\,[a + (d - a)] = \pi d$; inaspettatamente il perimetro della figura non dipende dalla misura di a ed ha la misura della circonferenza inscritta nel quadrato.
   Nota di correzione: il perimetro è costante invece l'area, come si può facilmente osservare, dipende dal valore di a (provare a svolgere il calcolo).
   La osservazione della costanza del perimetro è la parte più significativa e richiede che il calcolo, oltre che impostato, venga svolto.
   Chi ha avuto difficoltà a decodificare il testo cerchi di rileggere e si interroghi sulle ragioni della difficoltà perché potrebbero presentarsi testi molto meno espliciti.
2) Vedi figura
   Nota di correzione: i punti A, C e T sono allineati e stanno, per simmetria, sulla diagonale.
   I punti A, D e C' sono anch'essi allineati. La figura deve contenere le 4 circonferenze e le tangenze e le simmetrie reciproche devono essere ben visibili.
3) Il triangolo CHA è rettangolo isoscele (metà di un quadrato) e pertanto $\overline{CA} = \sqrt{2}\,r$. Inoltre A, C e T sono allineati perché TC e TA sono perpendicolari entrambi alla tangente comune.
   Si ha allora: $\overline{TA} = \overline{TC} + \overline{CA} \Leftrightarrow a = r + \sqrt{2}\,r \Leftrightarrow r = \dfrac{a}{\sqrt{2}+1} = a(\sqrt{2} - 1)$

Nota di correzione: è abbastanza assurdo impostare una equazione visto che le proprietà del triangolo rettangolo isoscele dovrebbero essere ben note.

4) Il triangolo C'KA è rettangolo e inoltre C', D e A sono allineati perché i raggi sono perpendicolari alla tangente comune. Se si applica il teorema di Pitagora si ha:

$\overline{C'A}^2 = \overline{C'K}^2 + \overline{KA}^2$ e sostituendo $(r' + a)^2 = r'^2 + (d - r')^2$

$r'^2 + a^2 + 2r'a = r'^2 + d^2 + r'^2 - 2r'd \Leftrightarrow r'^2 - 2r'(d + a) + d^2 - a^2 = 0$ con la condizione $r' < d - a$

Nota di correzione: con tutti i suggerimenti dati sulla figura non mi sembrava così difficile applicare il teorema di Pitagora.

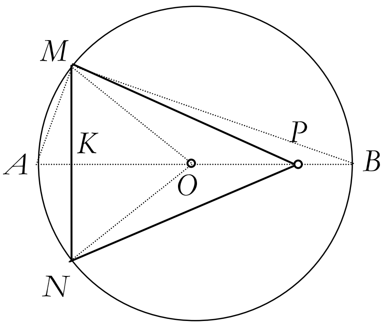
5) Sostituendo i dati nella equazione si ha:

$r'^2 - 18r' + 45 = 0 \Leftrightarrow \Delta/4 = 81 - 45 = 36 = 6^2 \; r = 9 \pm 6 = \begin{cases} 3 \text{ s.a} \\ 15 \text{ s.n.a} \end{cases}$

Nota di correzione: se non è stato svolto il punto 4 diventa necessario individuare la condizione $r' < d - a$ in questa fase.

27/4/2001 2F ordinamento

1) Data una circonferenza di diametro AB e raggio di misura *r* sia MN una corda perpendicolare ad AB e posta a distanza *x* da A. Indicato con P il punto di AB tale che $\overline{PB} = \frac{1}{3}r$ si consideri il triangolo MNP di altezza PK. Considerare solo il caso in cui MN è a sinistra di P.
   a) Dimostrare che il triangolo MNP è isoscele
   b) Determinare i valori di $\overline{KM}$ e $\overline{KP}$ in funzione di *x* (si consiglia di utilizzare il II teorema di Euclide)
   c) Dopo aver dimostrato che $\overline{KM} = \sqrt{x(2r-x)}$ e $\overline{KP} = (\frac{5}{3}r - x)$ determinare il valore di x per il quale si ha: $\overline{KM} = \frac{\sqrt{5}}{4}\overline{KP}$
   d) In corrispondenza del valore trovato determinare il perimetro del triangolo



a) Per dimostrare che MP≅NP si deve dimostrare che $M\hat{O}K \cong N\hat{O}K$ (vero perché in un triangolo isoscele l'altezza è anche bisettrice). Ne consegue che $M\hat{O}P \cong N\hat{O}B$ (supplementari di angoli congruenti). Si può ora applicare il I criterio di congruenza ai triangoli MOP e NOP deducendo la congruenza di MP e NP.

b) Poiché AMB è rettangolo per il II teorema di Euclide si ha $\overline{KM}^2 = \overline{AK} \cdot \overline{KB}$ ma $\overline{AK} = x$, $0 < x < 5/3\ r$ mentre $\overline{KB} = 2r - x$. Pertanto $\overline{KM} = \sqrt{x(2r-x)}$

Invece $\overline{KP} = (2r - 1/3\ r - x) = (5/3\ r - x)$

c) Affinché sia $\overline{KM} = \frac{\sqrt{5}}{4}\overline{KP}$ dovrà essere $\sqrt{x(2r-x)} = \frac{\sqrt{5}}{4}(5/3\ r - x)$. Posta la condizione $5/3\ r - x \geq 0$ che equivale a $x \leq 5/3\ r$ si può elevare al quadrato e si ottiene l'equazione: $x(2r-x) = \frac{5}{16}(\frac{5}{3} - x)^2$: Si riduce a forma normale e si arriva a: $21x^2 - \frac{146}{3}rx + \frac{125}{9}r^2 = 0$. Calcolato $\Delta/4 = \frac{52}{3}r$ si ottiene $x_1 = \frac{1}{3}r$ soluzione accettabile e $x_2 = \frac{125}{63}r$ soluzione non accettabile. Si ha dunque $\overline{KM} = \sqrt{x(2r-x)} = \frac{\sqrt{5}}{3}r$ e $\overline{KP} = (5/3\ r - x) = \frac{4}{3}r$

d) Per trovare il perimetro occorre calcolare $\overline{PM} = \sqrt{\overline{KM}^2 + \overline{KB}^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}r$ e pertanto $2p = 2(\frac{\sqrt{21}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3})r$

Compiti assegnati a classi di I liceo classico (B. Zucchi)

Gennaio 1995

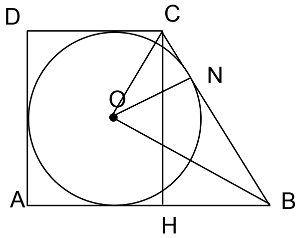
1. Dimostrare che in un trapezio isoscele circoscritto ad una semicirconferenza la base maggiore è sempre doppia del lato obliquo. Successivamente indicata con x la misura del lato obliquo determinare l'area di tale trapezio in funzione di x. Precisare il campo di variabilità di x
2. Dato un quadrato ABCD di centro O e lato *a* prolungare il lato AB dalla parte di A e considerare su tale prolungamento un punto P in modo che la somma dei quadrati delle distanze di P dai vertici e dal centro valga $\frac{93}{4}a^2$

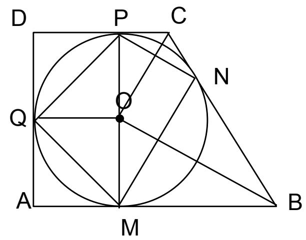
Marzo 1995

1. Si consideri un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ con base AB ed angolo al vertice $A\hat{C}B \cong 36°$. Dopo aver calcolato le misure di $C\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ si tracci la bisettrice AV dell'angolo $C\hat{A}B$ e si spieghi perché $\overset{\Delta}{VAB}$ e $\overset{\Delta}{VAC}$ sono isosceli. Posto AB = x e AC = r si determini il valore di x sfruttando la similitudine evidente. Spiegare cosa c'entra tutto ciò con la determinazione del lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r?
2. Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo equilatero di lato *a*. Si determini sul lato AB un punto M tale che condotte da M le perpendicolari MP e MQ ai lati AC e BC, il quadrilatero APQB abbia area pari ai $\frac{9}{20}$ dell'area di ABC.

Aprile 1995

1. Si consideri il trapezio rettangolo ABCD di base minore DC = 168 cm e altezza AD = 192 cm circoscritto ad una circonferenza di centro O. Dopo aver spiegato perché la figura è costruibile univocamente si determinino tutti i lati del trapezio (soluzioni: CB = 200 cm, AB = 224 cm).Successivamente detti M, N, P e Q i punti di contatto dei lati AB, BC, CD e DA si trovino le lunghezze dei lati MN, NP, PQ e QM ($\overset{\Delta}{COB} \sim \overset{\Delta}{PMN}$ perché...)

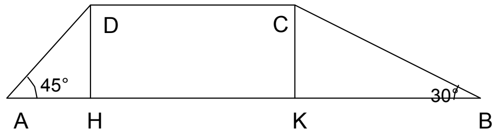




2. Si consideri una circonferenza di raggio r = 3 cm inscritta in un trapezio isoscele di perimetro 2p = 20 cm. Ricordando il teorema sulla circoscrivibilità dei quadrilateri si determini la misura del lato obliquo. Quindi si determinino le due basi.

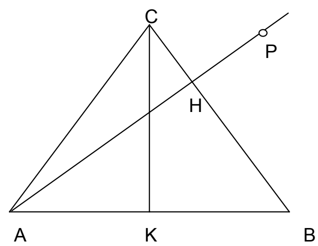
Novembre 1995

Un trapezio di base maggiore *a* e base minore *b* ha gli angoli alla base di 30° e 45°. Indicata con *x* l'altezza la si determini e si trovi quindi l'area del trapezio



Dicembre 1995

È dato un triangolo isoscele ABC di base AB con le condizioni $\overline{AB} = 6a$ e $\overline{AC} = \overline{CB} = 5a$. Dopo aver tracciato le altezze CK e AH si determinino $\overline{CH}$ e $\overline{HB}$. Quindi si consideri un punto P sul prolungamento di AH dalla parte di H e si determini $\overline{HP} = x$ in modo che sia verificata la relazione $\overline{PB}^2 = \frac{2}{5}\overline{PA}^2$



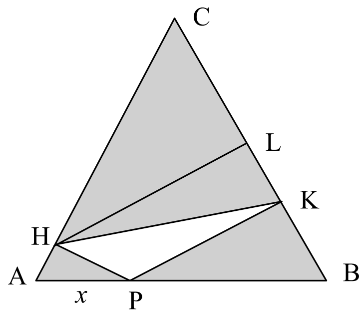
$\overline{CH} = 7/5\ a$, $x = 26/5\ a \vee x = 6/5\ a$

Febbraio 1996

1. In un trapezio isoscele la base maggiore misura 10 cm, i lati obliqui misurano 6 cm e le diagonali 8 cm. Motivare come mai le diagonali risultano perpendicolari ai alti obliqui e determinare la base minore. $\Rightarrow 2$
2. Si considerino due circonferenze $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ con $\mathscr{C}_1$ tangente internamente a $\mathscr{C}_2$ e sia A il punto di tangenza. Si indichino con AT e AB i diametri di $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ e sia PQ la corda di $\mathscr{C}_2$ passante per T e tangente a $\mathscr{C}_1$. Sapendo che $\overline{PQ} = 48\sqrt{2}a$ e $\overline{TB} = 36a$ determinare le misure dei due diametri $\overline{AT}$ e $\overline{AB}$. $\Rightarrow 2$
3. Un trapezio isoscele con gli angoli acuti alla base di 60° è circoscritto ad una circonferenza. Sapendo che il perimetro 2p = 144 cm si trovino il raggio r della circonferenza e l'area σ del trapezio $\Rightarrow 3$
4. Il perimetro di un parallelogramma misura 180 cm mentre un lato supera di 12 cm la metà del lato consecutivo. Sapendo che l'area σ del quadrilatero vale 1040 cm² calcolare i lati e l'altezza relativa al lato maggiore. $\Rightarrow 2$
5. Un trapezio isoscele di perimetro 2p = 348 cm è circoscritto ad una circonferenza di raggio r = 30 cm. Determinare le basi e le distanze dal centro dei vertici del lato obliquo. $\Rightarrow 3$

Dicembre 1996

Si consideri un triangolo equilatero ABC di lato *a*, sia P un generico punto di AB e si indichino con H e K le proiezioni di P su AC e CB. Sia inoltre L la proiezione di H su CB. Rispondere, motivando, ai punti seguenti



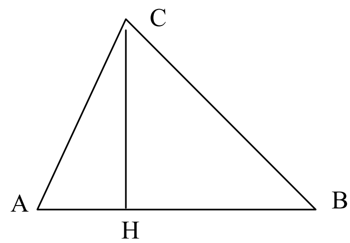
1) Usando le proprietà dei triangoli di 30°, 60°, 90° si scriva l'area σ del triangolo ABC. $\Rightarrow 1$

2) Porre $\overline{AP} = x$ e, dopo aver determinato gli elementi necessari, ed usando la formula precedente determinare σ_{APH} e $\sigma_{PKB} \Rightarrow 3$

3) Determinare $\overline{HL}$ ed utilizzare il valore trovato per calcolare $\sigma_{HKC} \Rightarrow 3$

4) Determinare il valore di x in corrispondenza del quale $\sigma_{HKC} = 2[\sigma_{APH} + \sigma_{PKB}]$ $\Rightarrow 4$

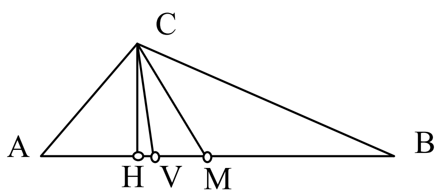
Gennaio 1997



1. È dato il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ con le seguenti caratteristiche b = $\overline{AC}$ = 3 cm, $C\hat{A}B$ = 60°, $C\hat{B}A$ = 45°. Determinare le misure degli altri lati e della altezza $\overline{BH}$

(Risposta: $\overline{AB} = \frac{3}{2}(1+\sqrt{3})$ $\overline{CB} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ $\overline{BH} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{3})$ $\Rightarrow 3$)

2. È dato il triangolo generico $\overset{\Delta}{ABC}$ i cui lati misurano, a, b, c. Dimostrare che la lunghezza x della proiezione di CA su CB vale $x = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}$. Quindi, senza eseguire i calcoli descrivere separatamente il processo di determinazione della altezza AH, della mediana AM e della bisettrice AV. $\Rightarrow 2 + 1 + 1 + 1$



Aprile 1997

1. Dato il quadrato ABCD di lato a si considerino i punti M, N, P collocati su AB, AD e AC e tali che $\overline{AM} = \overline{AN} = \overline{CP}$. Sia poi C' il punto posto sul prolungamento di AB tale che $\overline{AC'} = \overline{AC}$. Determinare la quantità $\overline{AM}$ = x tale che i due triangoli MNP e BCC' abbiano la stessa area.

Suggerimento: posto {H} = MN$\cap$AC determinare $\overline{AH}$ e poi $\overline{PH}$ … si arriva alla equazione $x^2(\sqrt{2}+1) - 2ax + a^2(\sqrt{2}-1) = 0$

2. Dato il triangolo equilatero ABC di lato a si tracci una parallela alla base AB che interseca in Ge F i lati AC e BC. Dette D ed E le proiezioni di G e F su AB si determini la posizione della parallela in modo che l'area del rettangolo DEFG sia $\frac{4}{9}$ dell'area di ABC.

Suggerimento: porre $\overline{AD}$ = x (0 < x < …) si ottiene x = $\frac{1}{3}$ a

Dicembre 97

1. Si consideri un quadrato di lato *l* e si prolunghi ogni lato di una stessa quantità nello stesso senso di rotazione. Si dimostri che si ottiene ancora un quadrato. Si indichi con *x* la misura del prolungamento e si determini il valore di *x* per il quale l'area del nuovo quadrato vale $\frac{5}{2} l^2$ ⇒ 3 + 3
2. Si consideri il triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC e sia AC il cateto di lunghezza maggiore. Indicata con H la proiezione di A sulla ipotenusa determinare gli elementi del triangolo in modo che $\overline{BC} + \overline{AH} = \frac{37}{5}$ cm e che la differenza delle proiezioni dei cateti sulla ipotenusa valga $\frac{7}{5}$ cm.

Suggerimento: *indicare con x e y le due proiezioni dei cateti, applicare il II teorema di Euclide e non dimenticarsi di discutere la accettabilità delle soluzioni.* ⇒ sistema 3, x e y 3, lati 1.5

Gennaio 98 (recupero)

Si consideri un trapezio ABCD di base maggiore AB rettangolo in B e tale che AD⊥DB. Sono noti $\overline{AB}$ = 10 cm e $\overline{CD}$ = 11 cm. Determinare gli altri lati. Quindi si prolunghino i lati BC e AD sino a farli incontrare in K. Determinare $\overline{BK}$.

Aprile 1998

Dato il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ rettangolo in A, si sa che il perimetro 2*p* = 24 cm e che la differenza dei due cateti vale 2 cm. Determinare gli elementi del triangolo.
Risposta: {6 cm,8 cm,10 cm}

Gennaio 99 compito recupero parziale del debito classe prima

Il trapezio rettangolo ABCD di base maggiore AB e lato obliquo BC presenta le seguenti caratteristiche: area σ = 30 cm², $\overline{BC}$ = 5 cm, $\overline{AB} + \overline{CD}$ = 20 cm. Determinare le misure delle due basi e dell'altezza. Si consideri quindi un punto P ∈ AB. Posto $\overline{AP}$ = x si determini il valore di x per il quale il perimetro del trapezio APCD vale 21 cm. Spiegare come mai la quantità $\overline{PC}$ non dipende dalla collocazione di P a destra o a sinistra della proiezione di C su AB.

2F PNI 29/5/08 riepilogo

compito insieme a una parte di algebra e a una di g.a.

Rispondere sul proprio foglio senza rifare la figura (che va eventualmente completata con i simboli usati) ma dando sempre una breve motivazione di ciò che si fa; tutti gli esercizi tranne l'ultimo richiedono soluzioni e motivazioni che stanno in un paio di righe di foglio.

1) dati h, l e b_1 trovare b_2
2) dati b_2, l_2 con angolo 30°, l'altro angolo di 45° trovare h, l_1 e b_1
3) dati a, a_1 e l'area σ trovare σ_1
4) dati a, b_1 e b_2 trovare a_1
5) dati $\overline{AB} = l$, $\overline{AC} = 2/3\ l$, $\overline{OC} = ¼\ l$ trovare r

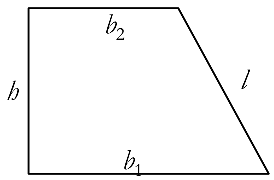


figura 1

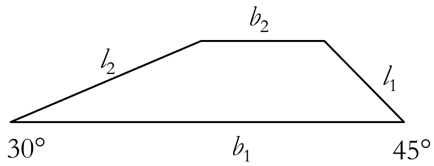


figura 2

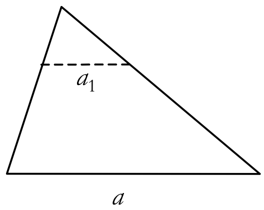


figura 3

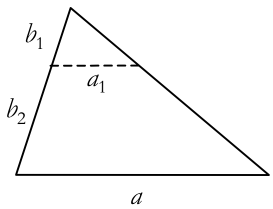


figura 4

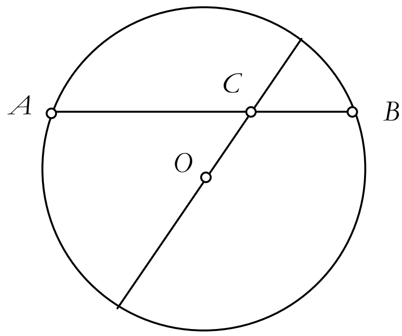


figura 5