I A Zucchi ottobre 97: equazioni di II grado numeriche e teoria

1. Quando una equazione del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ risulta essere di II grado?
2. Perché, nella generica equazione di II grado la quantità $\Delta = b^2 - 4ac$ è detta discriminante?
3. Quando, nel risolvere l'equazione di II grado si usa $\Delta/4$ e perché?
4. Risolvere $(x + 9)^2 = 2(x + 7)^2 - 17$
5. Risolvere $\frac{2}{5}x^2 = \frac{1}{2}x$
6. Risolvere $\dfrac{x^2 - x - 1}{x + 2} = 2x + 3$
7. Risolvere $\dfrac{2x - 1}{x + 2} = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4} + \dfrac{1}{5x - 10}$
8. Risolvere $1 + \dfrac{4x^2}{2x^2 + 8x} + \dfrac{27}{2x^2 + 7x - 4} = \dfrac{6}{2x - 1}$
9. Risolvere $\dfrac{2(x + 1)}{x - 3} + \dfrac{4x^2 - 21x - 25}{x^2 - x - 6} = \dfrac{3(x + 1)}{x + 2}$

1 ⇒ 0.5	2 ⇒ 1	3 ⇒ 1	4 ⇒ 1	5 ⇒ 0.5	6 ⇒ 1.2	7 ⇒ 2	8 ⇒ 4	9 ⇒ 2.5	totale 13.7

IA Zucchi ottobre 96 equazioni e problemi correlati

1. Risolvere e discutere al variare del parametro b la seguente equazione di I grado
   $\frac{x(b+1)}{b-1} - \frac{2b}{1-b^2} = \frac{x(b-1)}{b+1} + \frac{b}{b+1}$
2. Attraverso il metodo preferito (raccoglimenti parziali o Ruffini) fattorizzare la seguente equazione di III grado e risolverla $3x^3-x^2-27x+9=0$
3. Risolvere la seguente equazione di II grado frazionaria $\frac{8x^2+15x-27}{x^2-8x+7} - \frac{x^2-9}{1-x} = \frac{x^2-2x-15}{x-7}$
4. Data l'equazione $(2m-1)x^2+(m-3)x+(1-m)=0$ stabilire per quale valore di m essa ammette $x=1$ come soluzione. In tale caso, ricordando la relazione che dà il prodotto delle radici, trovare l'altra radice.
5. Dimostrare che per $\Delta < 0$ l'equazione $ax^2+bx+c=0$ non ammette soluzioni

Partendo dalla formula risolvente dimostrare che le soluzioni dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ nel caso in cui sia

6. $\Delta > 0$ e $b = 2k$ possono essere scritte nella forma: $x_{1\text{-}2} = \frac{-k\pm\sqrt{\Delta/4}}{a}$
7. Sfruttando la scomposizione del trinomio già nota dal ginnasio risolvere la seguente equazione di II grado: $x^2- \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)x + 2\sqrt{3} = 0$

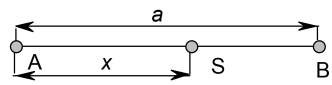
IA Zucchi ottobre 95 equazioni e problemi correlati

1. Risolvere la seguente equazione di II grado $(2-x)(7-x) - \frac{7x-x^2-10}{3} = \frac{(x-2)(x+4)}{6}$
2. Risolvere e discutere al variare di a la seguente equazione letterale di II grado $(a-1)^2x^2 + 2(a^2+1)x + (a+1)^2 = 0$
3. Risolvere e discutere la seguente equazione frazionaria di II grado $\frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^3+1}$
4. Scomporre il trinomio di II grado attraverso la determinazione delle radici $P(x) = (1-a)x^2 + (a-3)x + 2$ con $a \neq 1$
5. Semplificare la seguente espressione frazionaria $\frac{x^2-9x+20}{x^2-6x} : \frac{x^2-5x}{x^2-13x+42}$
6. Data l'equazione di II grado $y^2 + my + n = 0$ stabilire come devono essere scelti m e n affinché le due radici y_1 e y_2 dell'equazione siano le reciproche delle radici di $x^2 + px + q = 0$
7. Data l'equazione parametrica di II grado $(k+2)x^2 - 2(k+1)x - (1-k) = 0$:
   a) stabilire cosa accade per $k=-2$
   b) determinare in quale caso si hanno radici reali e distinte
   c) trovare il valore di k per il quale $x=2$ è soluzione e motivare come mai tale soluzione è unica
   d) scrivere l'equazione nella variabile k
   e) trovare il valore di k per il quale la somma delle radici è pari al triplo del prodotto

I A Zucchi novembre 95 equazioni e disequazioni

1. Ridurre a forma normale e risolvere la seguente disequazione in R $\frac{2}{3x + 2} + \frac{30}{3x^2 - 5x + 2} \geq \frac{5}{2 - 3x}$
2. Risolvere e discutere al variare di *a* la seguente equazione letterale frazionaria di II grado precisando cosa accade per a =1, per a = $\frac{1}{2}$, per a = $\frac{4}{3}$

   $\frac{x + a - 1}{a - 1} - \frac{5x - 1}{x + a - 1} = \frac{a\,(2 - a)}{(x + a - 1)(a - 1)}$
3. Dato un segmento AB di lunghezza *a* si chiama sezione aurea del segmento il segmento AS con S∈AB tale che $\overline{AS}$ è medio proporzionale tra $\overline{AB}$ e la restante parte. Porre $\overline{AS} = x$ e risolvere



I F Zucchi novembre 94 equazioni di II grado

1. Delineare il processo risolutivo che porta a determinare l'equazione risolvente dell'equazione di II grado soffermandosi in particolare sul ruolo del discriminante
2. Data l'equazione di II grado: $(k^2-k)x^2-(k^2-9)x+k^2-4k+3=0$ determinare i valori di k in corrispondenza dei quali: a) l'equazione si abbassa di grado, e in tal caso trovare la soluzione b) ammette x=0 come soluzione, e in tal caso trovare l'altra soluzione, se esiste
3. Tenendo presente *il processo che porta alla formula risolvente* dell'equazione di II grado scrivere un esempio di equazione di II grado che non ammette soluzione, spiegando come mai l'equazione proposta non ammette soluzioni
4. Risolvere la seguente equazione frazionaria: $\frac{3x^2-1}{x^2-1} = -\frac{1}{3} - x\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$
5. Risolvere la seguente equazione letterale $(3a-1)^2x^2-12a(3a-1)x+36a^2-9b^2=0$ e successivamente discutere cosa accade della equazione per $a=1/3$
6. Data l'equazione $(2k-1)x^2-(3k+2)x+(1+5k)=0$ determinare il valore di k affinché una delle radici valga 3 e, in tal caso, determinare l'altra radice senza risolvere l'equazione.

1. Esporre e dimostrare il teorema sulla scomposizione di un generico trinomio di II grado
2. Data l'equazione di II grado: $(k^2-5k+6)x^2- (k-3)x+(k-2)=0$ determinare per quali valori di k: a) l'equazione si abbassa di grado , e in tal caso trovare la soluzione b) ammette x=0 come soluzione, e in tal caso trovare l'altra soluzione, se esiste
3. Scrivere l'equazione di II grado che ammette come radici $\{a,1/a\}$ motivando il procedimento seguito
4. Risolvere la seguente equazione letterale $(a^2-4)x^2+2x(-a+a^2-4)+a^2-3-2a=0$ e successivamente discutere cosa accade della equazione per $a=\pm 2$
5. Data l'equazione $(k-3)x^2-(k+2)x+(2k+1)=0$ determinare il valore di k affinché una delle radici valga 3 e, in tal caso, determinare l'altra radice senza risolvere l'equazione.

IA Zucchi novembre 96 disequazioni

1. Scrivere v o f (per vero e falso) per le seguenti 10 proposizioni nell'insieme dei numeri reali: (+1,–1,0)

$ab>0 \Rightarrow a>0 \wedge b>0$		$a\|a\| = \pm a^2$		$\|a\|>b>0 \Leftrightarrow a>b \vee a<-b$		$a>b \Leftrightarrow a+c > b+c$		$\|a\| = \|-a\|$	
$a>b \Rightarrow ac>bc$		$\sqrt{a^2} = a$		$\|a^2\| = a^2$		$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a=b$		$-\sqrt{a^2} = -\|a\|$	

2. Risolvere la disequazione $\dfrac{7}{1+x} - \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{5x}{x^2 + 3x + 2}$
3. Risolvere la disequazione $|2x - 3| > x^2 - 2x - 2$

IA Zucchi novembre 97 equazioni e disequazioni

1. Risolvere la seguente disequazione che richiede l'uso della scomposizione di un polinomio di III grado con il teorema di Ruffini: $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} > \frac{19x + 18}{2(x + 2)(2x + 3)}$

Risposta $x<-2 \vee -\frac{3}{2} < x < -1 \vee 0 < x < 2 \vee x > 3$

2. Si consideri l'equazione di II grado $(k-1)^2 x^2 - 2(k^2 - 1)x + (k^2 + 2k) = 0$
   a) stabilire cosa accade alla equazione per k = 1
   b) determinare le soluzioni della equazione, quindi senza bisogno di eguagliarle spiegare perché non possono mai essere uguali
   c) discutere in base ai valori trovati delle soluzioni quando $x_1 > 0$ e quando $x_2 > 0$ e quindi dire cosa accade al segno delle soluzioni per i diversi valori di k
   d) Osservare che per $k = -1$ le due soluzioni sono opposte. Alla luce del punto c) spiegare come mai questa cosa accade per un valore dell'intervallo $-2<k<0$?

Risposte: 2b $x_1 = \frac{k+2}{k-1} \wedge x_2 = \frac{k}{k-1}$

3. Determinare l'insieme $\mathscr{S} = \{x \mid 9 - x^2 > 0 \wedge x^2 - 3x + 2 > 0 \wedge x^2 - 3x + 1 < 0\}$

Risposta: $\mathscr{S} = \{x \mid \alpha < x < 1 \vee 2 < x < \beta\}$ con $\alpha,\beta = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

1. Data l'equazione parametrica di II grado $(2k-3)x^2 + (k^2 - 1)x + (k - \frac{3}{8}) = 0$

a) Trovare i valori di k per il quale la equazione di II grado ammette x = 2 come soluzione.
b) Quindi, senza risolvere l'equazione, determinare la seconda soluzione relativa al valore di k > 0 già determinato.

Risposta: $k_1 = \frac{5}{4} \wedge k_2 = -\frac{23}{4}$

IF Zucchi dicembre 94 equazioni e disequazioni di II grado

1. Dopo avere scomposto i polinomi che la compongono semplificare la seguente frazione algebrica precisando le condizioni che consentono di eseguire le semplificazioni: $\dfrac{(a^2 - x^2)(8x^2 + 9ax + a^2)}{(x + a)^2(8x^2 - 7ax - a^2)}$
2. Data l'equazione di II grado $x^2 + px + q = 0$ (1) scrivere l'equazione di II grado nella variabile y che ammette come radici la somma e il prodotto delle radici della equazione (1)
3. Analizzare al variare del parametro k l'andamento delle soluzioni della equazione letterale di II grado $(k + 2)x^2 - 2(k + 1)x - (1 - k) = 0$. Determinare quindi i valori di k in corrispondenza dei quali la somma delle radici è positiva.
4. Risolvere la disequazione frazionaria: $\dfrac{x + 1}{x - 1} > \dfrac{x - 2}{x + 2} + \dfrac{9}{5}$
5. Determinare i valori di x per i quali sono contemporaneamente vere le seguenti disequazioni: $2x^2 < x + 3 \wedge (x + 2) / 3 < (x + 1) / 2 \wedge 3x - 1 > 5(x - 1)$

I A Zucchi dicembre 95 equazioni di II grado

1. Scomporre il seguente polinomio utilizzando il teorema di Ruffini oppure i raccoglimenti parziali: $P(x) = 15x^3 - 19x^2 - 19x + 15$

P(x)=(x+1)(15x2 – 34x +15) $\Rightarrow$ 1.5

2. Risolvere la seguente disequazione prestando attenzione ai problemi di c.e. del denominatore. Per la scomposizione del numeratore usare il risultato dell'esercizio precedente $\dfrac{15x^3 - 19x^2 - 19x + 15}{(x-1)^3 - (x-1)^2 - x + 2} > 0$

$x < -1 \vee 0 < x < 3/5 \vee 5/3 < x < 2 \vee x > 2 \Rightarrow 3$

3. Risolvere e discutere al variare di k la seguente equazione parametrica precisando quando le soluzioni esistono e determinando le soluzioni per k=1 e per $k \neq 1$. $x^2(k-1) - x(k^2 + k - 4) - 2(k+2) = 0$

$\forall k, k \neq 1$ $x_1 = k + 2 \vee x_2 = 2/(1-k)$ k=1 x = 3 $\Rightarrow$ 4

4. Determinare i valori di k per i quali si ha $x_1 = x_2$

$k = 0 \vee k = -1 \Rightarrow 1$

5. Determinare i valori di k per i quali si ha $x_1 \cdot x_2 = x_1 + x_2$

$k = 0 \vee k = -3 \Rightarrow 1$

6. Spiegare come mai per k = 0 si verificano entrambe le condizioni precedenti.

$\Rightarrow$ 0.5

7. Risolvere la seguente equazione ai moduli: $|x^2 - 4x| + 3 = x^2 + |x - 5|$

{–2/3;1/2; 2} $\Rightarrow$ 3

I F Zucchi dicembre 96 proprietà equazione di II grado

1. Si consideri l'equazione di II grado in $\Re$: $x^2+px+q = 0$ e si scrivano nell'apposito riquadro le condizioni relative al parametro q per le quali si ha:

$x_1 \neq x_2$		$x_1^2+x_2^2 = \frac{p^2}{2}$		$x_1 = p$	

2. Si consideri l'equazione biquadratica in $\Re$: $x^4+px^2+q = 0$ e si supponga che sia $\Delta>0 \wedge p>0 \wedge q>0$. Dimostrare che in questo caso l'equazione non può ammettere soluzioni reali.

I A Zucchi Dicembre 97 equazioni parametriche e disequazioni

1. Risolvere la seguente disequazione che, dopo la riduzione a forma normale, comporta l'utilizzo della scomposizione secondo Ruffini per il polinomio di III grado al numeratore $\frac{-293x - 467}{x^2 - 4} + \frac{176}{x - 1} + 30 < 0$

Risposta: $-2 < x < -1 \vee -\frac{3}{5} < x < 1 \vee 2 < x < \frac{13}{2}$ $\Rightarrow$ 2 + 2 + 3

2. Si consideri l'equazione di II grado $(k + 1)^2 x^2 - 3k(k + 1)x + 2k^2 = 0$
   a) stabilire cosa accade alla equazione per $k = -1$
   b) determinare le soluzioni della equazione
   c) le due radici sono legate da una relazione molto semplice, trovarla
   d) Calcolare la somma delle radici e tentare di determinare il valore di k per il quale $s = x_1 + x_2 = 3$. Come mai non si trovano soluzioni?
   e) Spiegare cosa succede alla somma quando k diventa infinitamente grande (cioè $k \to \infty$)

Risposte: 2b $x_1 = \frac{k}{k + 1} \wedge x_2 = \frac{2k}{k + 1}$ 2e) si ha che $s \to 3$

3. Si consideri l'equazione di II grado $x^2 + 4 (k + 1)x + 4(k + 7) = 0$
   a) stabilire per quali valori di k essa ammette soluzioni reali
   b) determinare le due radici doppie e i corrispondenti valori di k
   c) determinare, se esiste, il valore di k per il quale l'equazione ammette due radici reali la cui somma vale -8

Risposte: 3a $k \leq -3 \vee k \geq 2$ $\Rightarrow$ 2 + 1 + 1

4. Determinare l'insieme $\mathscr{S} = \{x \mid x^2 + x - 3 < 0 \wedge 2x^2 - x > 0 \wedge x^2 + 2x - 3 < 0\}$

Risposta: $\mathscr{S} = \{x \mid \alpha < x < 0 \vee ½ < x < 1\}$ con $\alpha = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ $\Rightarrow$ 3

I F Zucchi gennaio 95

1. Risolvere la seguente disequazione: $(2x - 3x^2)\left[\frac{17}{x+3} + \frac{2}{x-2} - 6\right] \geq 0$
2. Risolvere la seguente disequazione $\left|\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 3}\right| > 2$
3. Data l'equazione di II grado $x^2 + (k - 2)x + (2k - 3) = 0$ determinare, argomentando il procedimento seguito, i valori di k per cui essa ammette sempre due soluzioni reali e distinte
4. Risolvere la seguente disequazione di tipo elementare $\frac{5x^3 - 10x^2}{x - 2} > 0$

I A Zucchi gennaio 97

1. Risolvere la seguente equazione in $\Re$: $x^2 + (m - 4)x - (2m^2 - m - 3) = 0$

(Risposta: $x_1 = m + 1$ $x_2 = 3 - 2m$ $\Rightarrow$ 2)

2. Risolvere la seguente disequazione $\left|\frac{x}{4} - \frac{2x-1}{3}\right| < 1$

(Risposta: $-\frac{8}{5} < x < \frac{16}{5}$ $\Rightarrow$ 2)

I F Zucchi febbraio 96: disequazioni ai moduli

1	Risolvere la disequazione dopo aver scomposto con il metodo di Ruffini il numeratore:	$\dfrac{(2x-1)(x^2-\frac{7}{2})+\frac{5}{2}}{\lvert 2x+1\rvert-4} \geq 0$	$-\frac{5}{2} < x \leq -2 \vee 1 \leq x < \frac{3}{2} \vee x > \frac{3}{2}$ $\Rightarrow 4$

2	Risolvere la disequazione:	$\lvert x^2-x-2\rvert \leq x^2-3x+1$	$x \leq 1-\sqrt{2}\ \Rightarrow 3$

I A Zucchi marzo 98: sistemi, disequazioni

1. Risolvere il seguente sistema di equazioni: $2x + 3y - z = 9 \wedge x + 2y + 2z = 3 \wedge 2x^2 + xy - 3z = 7$

Risposte: $\mathcal{S}$ = {(1,2,-1), …} $\Rightarrow 3$

2. Risolvere la disequazione $\dfrac{|2x - 1| + x^2 - 2}{-x^2 - x + 2} \leq 0$

Risposta $\mathcal{S} = \{x<-2 \vee 1-\sqrt{2} \leq x<1 \vee x > 1\}$ $\Rightarrow 3$

3. Determinare il campo di esistenza e quindi risolvere la seguente equazione $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} = 1$

Risposta $\mathcal{D} = \{x \leq -1 \vee x \geq -\frac{2}{3}\}$ $\mathcal{S} = \{x = -2 \vee x = \frac{1}{3}\}$ $\Rightarrow 3$

4. Lavorando sul primo e sul secondo membro e motivando i vari passaggi dimostrare la seguente identità valida se x e y sono concordi: $\left| \frac{1}{2}(x + y) - \sqrt{xy} \right| + \left| \frac{1}{2}(x + y) + \sqrt{xy} \right| = |x| + |y|$ $\Rightarrow 4$

I F Zucchi marzo 94

1) $\frac{\lvert 4x - 1\rvert + x^2}{x+1} > 2$ Punti 4	4) $\sqrt{-x^2 + 2x - 5} - \sqrt{(x+1)^2} \geq 0$ Punti 1.5
2) $\sqrt{19 - 2x} + x + 8 > 0$ Punti 3	5) $\lvert x + 1\rvert + 1 > 0 \wedge \lvert x + 3\rvert - 2\lvert x+3\rvert > 0$ Punti 1.5
3) $\frac{5 + x - \sqrt{x^2 - 1}}{4 - x^2} > 0$ Punti 4	6) $\sqrt{\frac{2 - x}{1 + x}} < 1$ Punti 4

I F Zucchi aprile 95 sistemi

$$\begin{cases} x - 3a - y = 0 \Rightarrow 2 \\ y(x + 1) + (x - 1)(6a + y) = 2 + 6a(3a + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = x^2 + y^2 \Rightarrow 3 \\ x + y = x^3 + y^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 4a \Rightarrow 1 \\ x - y + 2z = 4a + 2b \\ 2x + y - z = a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ 2x - y + z = 7 \\ x - 2y + 3z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 3(x + y) \\ y - x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(x + y) = 5 - 2xy \\ xy = x + y - 1 \end{cases}$$

I A Zucchi Aprile 97: disequazioni e sistemi

1. Risolvere la seguente disequazione irrazionale motivando la procedura seguita: $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \le |x + 1|$

Risposta $\frac{7-\sqrt{41}}{2} \le x \le 1 \vee \dots$

2. Risolvere il seguente sistema di II grado indicando le operazioni svolte: $2a + b + 3c = -4 \wedge 3a + b - c = -2 \wedge a^2 + 2bc - b = -5$

Risposta $\{-2, 3, -1\} \vee \{\dots\}$

I A Zucchi Aprile 98: disequazione irrazionale

Risolvere la seguente disequazione irrazionale motivando la procedura seguita: $\sqrt{x^2 - 6x - 7} \le 2x + 3$

Risposta $\beta = \frac{-9+\sqrt{33}}{3} \le x \le -1 \vee x \ge 7$

2F ordinamento 13/10/2000 radicali ed equazioni di II grado teoria e competenze (2 ore)

Il compito comprende 6 quesiti di teoria e 7 esercizi di natura operativa. Rispondere su 2 fogli separati dedicando grosso modo lo stesso tempo ad entrambe le parti. Nella parte di teoria l'esercizio 2 è facoltativo. Nella parte operativa sono facoltativi due degli ultimi 3 esercizi

1tr. Completare le seguenti questioni:

1.1) $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow$ _________ 1.2) $n = 2k \wedge a \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \geq 0$. Motivare sul foglio le due positività affermate

1.3) $n = 2k + 1 \wedge \sqrt[n]{a} < 0 \Rightarrow$ ________ 1.4) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{}$ 1.5) Si vuole ridurre $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[m]{b}$ allo stesso indice. Cosa si fa e cosa si ottiene? (rispondere sul foglio simbolicamente) 1.6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} =$ ____________ 1.7) Esiste almeno un caso in cui la identità $\sqrt[n]{(a\,b)} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ non vale. Quando ciò accade? (rispondere sul foglio)

1.8) $\sqrt{a^2} =$ ______ 1.9) $\sqrt{(-5)^2} =$ _____ $\sqrt[4]{\dfrac{16}{(1-\sqrt{2})^4}} =$ ___________

2tr. Supponiamo di estendere la definizione di potenza ponendo per definizione $a^{q/p} = \sqrt[p]{a^q}$. Utilizzando le proprietà dei radicali e ricordando che $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} = \dfrac{m+n}{mn}$ dimostrare che $a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{1/n + 1/m}$ cioè che la nuova definizione di potenza ad esponente razionale soddisfa una delle proprietà fondamentali delle potenze.

Suggerimento: $a^{1/n} \cdot a^{1/m} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \ldots$

3tr. Dimostrare che $\sqrt{2}$ non può essere razionale

4t. Spiegare perché con la scrittura $\dfrac{m}{n}$ solitamente si intende m:n

5te. Data l'equazione $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ con $\Delta \geq 0$ spiegare perché le soluzioni si possano anche scrivere nella forma $x_{12} = \dfrac{-b/2 \pm \sqrt{\Delta/4}}{a}$ e quando e perché sia più opportuna questa modalità di calcolo

6te. Enunciare e dimostrare il teorema sulla scomposizione del trinomio di II grado

1cr. Calcolare la seguente espressione numerica $\sqrt[3]{\sqrt{12} - 2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{12} + 2} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}}$

2cr. Risolvere la seguente equazione intera a coefficienti irrazionali: $\dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{2} - 1} - \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{2} + 1} = \dfrac{\sqrt{2}\,(2 - x + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + 1}$

3ce. Data l'equazione di II grado $(x - 2k)^2 = k^2 + 2k + 1$ trovare le soluzioni direttamente (cioè senza passare per la formula risolvente)

4ce. Senza usare la formula risolvente ma ripercorrendo i passi che si seguono per determinarla risolvere l'equazione: $x^2 - 4x - 19 = 0$

5ce. Risolvere la seguente equazione di II grado intera: $(3x - 1/2)^2 + x[1/3\,(x-1) - 1/2\,x] = 5/4\,x\,(x + 2/3) + 12$

6ce. Risolvere la seguente equazione frazionaria $\dfrac{x+1}{x^2 - 5x + 6} + \dfrac{x+5}{x^2 - 6x + 8} = \dfrac{13}{x - 2}$

7ce. Semplificare la seguente frazione algebrica $F(x) = \dfrac{44\,x^2 - 16\,x - 3}{8\,x^2 - 10x + 3}$

1t	2t	3t	4t	5t	6t	teor	1c	2c	3c	4c	5c	6c	7c	com
5	3	3	2	3	4	17	2	6	2	2	4	4	4	16

Correzione

1tr. 1.1) $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

1.2) a deve essere ≥ 0 perché nessun numero elevato a esponente pari dà un numero negativo; invece $\sqrt[2k]{a}$ viene posto ≥ 0 per convenzione perché i numeri che elevati a potenza pari danno un numero positivo sono sempre due (se un numero soddisfa la condizione essa è soddisfatta anche dall'opposto). Detto ciò l'equazione $x^2 = k$ con $k \geq 0$ presenta le due soluzioni $x = \pm\sqrt{k}$

1.3) $n = 2k + 1 \wedge \sqrt[n]{a} < 0 \Rightarrow a < 0$ 1.4) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\,p]{a^p}$ 1.5) Posto p = mcm(n,m) e indicati con h = p:n e k = p:m si ha $\sqrt[n]{a} = \sqrt[p]{a^h}$ e $\sqrt[m]{b} = \sqrt[p]{a^k}$ 1.6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\,m]{a}$ 1.7) Quando n è pari e a e b sono entrambi negativi; in quel caso esiste il primo membro ma non esiste il secondo. 1.8) $\sqrt{a^2} = |a|$ 1.9) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

$$\sqrt[4]{\frac{16}{(1-\sqrt{2})^4}} = \left|\frac{2}{1-\sqrt{2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 2(\sqrt{2}+1)$$

2tr. $a^{1/n} \cdot a^{1/m} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^m} \cdot \sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[mn]{a^m\, a^n} = \sqrt[mn]{a^{m+n}} = a^{(m+n)/(mn)} = a^{1/n + 1/m}$ c.v.d

3tr. Se fosse $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ con m e n primi tra loro sarebbe $m = \sqrt{2}\, n$ e cioè $m^2 = 2\, n^2$ e si dovrebbe verificare una delle seguente condizioni tutte irrealizzabili: a) m dispari: impossibile perché il quadrato di un numero dispari è dispari mentre $m^2 = 2\, n^2$ è pari b) m pari e n dispari: impossibile perché n^2 è dispari e pertanto $2n^2$ è multiplo di 2 ma non di 4 mentre m^2 sarebbe multiplo di 4 (quadrato di un numero pari) c) M e n non possono essere entrambi pari se m e n sono primi tra loro.

4t. m:n in generale non si può fare in ℵ ma corrisponde tramite isomorfismo alla divisione tra frazioni $\frac{m}{1} : \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m \cdot 1}{1 \cdot n} = \frac{m}{n}$ pertanto si associa $\frac{m}{n}$ a m:n

5te. Se $\Delta \geq 0$ un teorema ci garantisce l'esistenza delle soluzioni $x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ e con semplici calcoli algebrici si ha: $x_{12} = \frac{-b/2 \pm \sqrt{\Delta}/2}{a} = \frac{-b/2 \pm \sqrt{\Delta/4}}{a}$ con $\Delta/4 = 1/4\,(b^2 - 4ac) = b^2/4 - ac = (b/2)^2 - ac$

Quando b è un numero pari le espressioni della forma ridotta risultano più semplici da calcolare.

6te. Dato $P(x) = ax^2 + bx + c$ il teorema afferma che se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow P(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ dove $x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

La dimostrazione si trova su tutti i testi. Si inizia osservando che $s = x_1 + x_2 = -b/a$ e $p = x_1 \cdot x_2 = c/a$ cosa che si ricava direttamente dalla formula risolvente.

$P(x) = ax^2 + bx + c = a\,(x^2 + b/a\, x + c/a) = a(x^2 - s\,x + p) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2] = a[x^2 - x_1x - x_2x + x_1 \cdot x_2]$ $= a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ c.v.d.

1cr. $\sqrt[3]{\sqrt{12} - 2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{12} + 2} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}} = \sqrt[3]{12 - 4} + \sqrt{49 - 22} = 2 + 3 = 5$ prodotti notevoli

2cr. $\frac{x^2 - 1}{\sqrt{2} - 1} - \frac{x^2 + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}\,(2 - x + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + 1} \Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)(x^2 - 1) - (\sqrt{2} - 1)(x^2 + 1) = \sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 1)(2 - x + \sqrt{2}) \Leftrightarrow$

mettere in evidenza $(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1)x^2 - \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} + 1 = (2 - \sqrt{2})(2 - x + \sqrt{2}) \Leftrightarrow$

$2x^2 - 2\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})[(2 + \sqrt{2}) - x] \Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2} = 2 - (2 - \sqrt{2})\,x \Leftrightarrow$

$2x^2 + (2 - \sqrt{2})x - 2(\sqrt{2} + 1) = 0 \Leftrightarrow \Delta = (2 - \sqrt{2})^2 + 16(\sqrt{2} + 1) = 6 - 4\sqrt{2} + 16\sqrt{2} + 16 = 22 + 12\sqrt{2}$

formula radicale doppio $22^2 - 12^2 \cdot 2 = 196 = 14^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{22 + 14}{2}} + \sqrt{\frac{22 - 14}{2}} = 3\sqrt{2} + 2$

$x_{12} = \frac{-2 + \sqrt{2} \pm (3\sqrt{2} + 2)}{4}$ $x_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{4} = -\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ $x_2 = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$

3ce. $(x - 2k)^2 = (k + 1)^2 \Leftrightarrow (x - 2k) = \pm(k + 1) \Leftrightarrow x = 2k \pm (k + 1) \Leftrightarrow x_1 = k - 1 \vee x_2 = 3k + 3$

4ce. $x^2 - 4x - 19 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 - 19 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 23 \Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{23} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{23}$

5ce. $(3x - 1/2)^2 + x[1/3\ (x-1) - 1/2\ x] = 5/4\ x\ (x + 2/3) + 12 \Leftrightarrow 9x^2 + 1/4 - 3x + x(1/3\ x - 1/3 - 1/2\ x) = 5/4\ x^2 + 5/6\ x + 12 \Leftrightarrow x^2(9 + 1/3 - 1/2 - 5/4) + x(-3 - 1/3 - 5/6) + 1/4 - 12 = 0 \Leftrightarrow 91/12\ x^2 - 25/6\ x - 47/4 = 0 \Leftrightarrow 91\ x^2 - 50\ x - 141 = 0 \Leftrightarrow \Delta/4 = 25^2 + 91 \cdot 141 = 13'456 = 116^2 \wedge x_{12} = \dfrac{25 \pm 116}{91} \Leftrightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = \dfrac{141}{91}$

6ce. $\dfrac{x+1}{x^2 - 5x + 6} + \dfrac{x+5}{x^2 - 6x + 8} = \dfrac{13}{x - 2} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{(x - 3)(x - 2)} + \dfrac{x+5}{(x - 4)(x - 2)} = \dfrac{13}{x - 2}$ (1)

mcm $= (x - 3)(x - 2)(x - 4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 4$ (2)

elimino il denominatore comune e ottengo

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\wedge\ (x + 1)(x - 4) + (x+5)\ (x - 3) = 13\ (x - 3)\ (x - 4) \Leftrightarrow$(2) $\wedge\ x^2 - 3x - 4 + x^2 + 2x - 15 = 13\ x^2 - 91\ x + 156 \Leftrightarrow$ (2) $\wedge\ 11\ x^2 - 90\ x + 175 = 0 \Leftrightarrow \Delta/4 = 45^2 - 175 \cdot 11 = 100 = 10^2\ x_{12} = \dfrac{45 \pm 10}{11}$

$x_1 = 35/11$ s.a. $\vee\ x_2 = 55/11 = 5$

7ce. $F(x) = \dfrac{44\ x^2 - 16\ x - 3}{8\ x^2 - 10x + 3} = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ Scompongo i due polinomi:

$\Delta_1/4 = 64 + 132 = 196 = 14^2\ x_{12} = \dfrac{8 \pm 14}{44}\ \ x_1 = -6/44 = -3/22 \vee x_2 = 22/44 = 1/2 \Rightarrow N(x) = 44(x + 3/22)(x - 1/2) = (22\ x + 3)(2x - 1)$

$\Delta_2/4 = 25 - 24 = 1\ x_{12} = \dfrac{5 \pm 1}{8}\ \ x_1 = 1/2 \vee x_2 = 3/4 \Rightarrow D(x) = 8(x - 1/2)(x - 3/4) = (2\ x - 1)(4x - 3)$

$F(x) = \dfrac{44\ x^2 - 16\ x - 3}{8\ x^2 - 10x + 3} = \dfrac{(22\ x + 3)(2x - 1)}{(2\ x - 1)(4x - 3)} = \dfrac{22\ x + 3}{4x - 3} \wedge x \neq 1/2$

2F PNI 16/11/02 equazioni e disequazioni di grado superiore al I

1. Risolvere queste tre equazioni di II grado adottando la strategia più efficace sulla base delle caratteristiche della equazione: a) $5x^2 + 38x - 16 = 0$ b) $5x^2 + 380x + 125 = 0$ c) $51x^2 - 7x - 18 = 0$

risolvere con la forma ridotta $x_1 = -8 \vee x_2 = \frac{2}{5}$

semplificare per 5 e forma ridotta si ha: $x = -38 \pm \sqrt{1419}$ $\alpha \approx -75.7\backslash$ $\beta \approx -0.330$

$\Delta = 3721 = 61^2$ e si ha $x_1 = -\frac{9}{17} \vee x_2 = \frac{2}{3}$

2. Risolvere la seguente equazione frazionaria

$$\frac{2(x+1)^2 - 3 - 4x}{x^3 - 1} + \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} + \frac{3}{x - 1} = 0$$

$x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{2}{3}$ entrambi accettabili

3. Data la equazione parametrica di II grado $(2k - 1)x^2 + (k + 2)x + (1 - k) = 0$ a) determinare per quali valori di k essa ammette soluzioni reali b) determinare il valore di k per il quale si ha: $x_1 + x_2 = 5$ c) in corrispondenza del valore trovato determinare il prodotto $x_1 \cdot x_2$ delle radici

$\Delta = 9k^2 - 8k + 8 > 0 \ \forall k$

$k = 3/11$

$x_1x_2 = -\frac{8}{5}$

4. Scomporre il polinomio $P(x) = 2x^4 + x^3 - 2x^2 - 11x - 10$

$(x+1)(x-2)(2x^2+3+5)$

5. Risolvere nel modo più efficiente la disequazione $\frac{(x^2 - x - 6)(x^2+x-2)}{(2x^2 - x - 6)(x - 3)} \geq 0$

soluzioni $x = -2 \vee -3/2 < x \leq 1 \vee (x \geq 2 \wedge x \neq 3)$

6. Risolvere la disequazione a soluzione immediata $x^2 + 4 + |x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 221| < 0$

è sempre falsa perché somma di una quantità positiva e di una positiva o nulla

7. Risolvere il sistema di II grado $2a - b + c = 7 \wedge a + 3b + c = -2 \wedge a^2 - b^2 + 3c = 6$

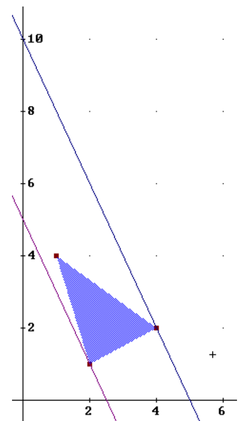
$\{(1,-2,3),(17/5,-7/5,-6/5)\}$

8. Risolvere il sistema simmetrico di IV grado: $x^2 + y^2 - xy = 1 \wedge x + y + 3xy = 5$

Si arriva a 2 soluzioni in x + y; $s = -3 \vee s = 2$ con prodotto $p = 8/3 \vee p = 1$; solo il secondo caso porta a soluzione; soluzione doppia (1,1)

9. Rappresentare in scala 1 = 1 cm il dominio definito dal sistema di disequazioni $y + 3x - 7 \geq 0 \wedge 2x + 3y - 14 \leq 0 \wedge x - 2y \leq 0$. Quindi dopo aver determinato graficamente le coordinate dei vertici del dominio determinare nel fascio di rette parallele $y = -2x + k$ quella passante per il dominio e avente il valore di k minimo e quella con k massimo (la determinazione deve essere analitica). Quanto valgono tali valori di k?

Si disegnano le rette che definiscono i contorni del dominio e il dominio. I punti hanno coordinate (2,1), (4,2) e (1,4). Dopo aver tracciato una retta di coefficiente angolare – 2 si vede che le rette richieste sono quelle per il primo e secondo punto cui corrispondono i valori di k = 5 e k = 10.



1,3	2,2.5	3,3	4,2.5	5,4	6,1	7,3	8,4	9,3	equazioni	sistemi	disequaz	dominii

2F PNI 01/10/02 sistemi lineari

1. Risolvere il sistema lineare in 3 incognite con il metodo della eliminazione successiva delle variabili indicando a lato delle equazioni il tipo di calcolo eseguito: $2a + 3b - 2c = -\frac{22}{3} \wedge a + \frac{1}{3}b + c = \frac{2}{3} \wedge \frac{3}{4}a - b - c = \frac{5}{4}$

Iniziamo ad eliminare la variabile c

(1) + 2(2) $\Rightarrow 4a + \frac{11}{3}b = -6$

(2)+(3) $\Rightarrow \frac{7}{4}a - \frac{2}{3}b = \frac{23}{12}$

(1) $\Rightarrow c = \frac{3}{4}a - b - \frac{5}{4}$

eliminiamo ora la variabile b; si potrebbe eliminare a con 7(1) - 4(2)

2(1) +11 (2) $\Rightarrow \frac{109}{4}a = \frac{109}{12} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

(1) $\Rightarrow b = \frac{3}{11}(-6 - 4a) = \frac{3}{11}(-6 - 4\frac{1}{3}) = \frac{3}{11}(-\frac{22}{3}) = -2$

(2) $\Rightarrow c = \frac{3}{4}\frac{1}{3} + 2 - \frac{5}{4} = 1$

Soluzione del sistema $\{\frac{1}{3}, -2, 1\}$

Note: come ho mostrato in classe è bene, in caso di scarsa dimestichezza con il calcolo esplicitare i coefficienti numerici; per esempio (1) –2(2) porta a: 0 a + b(3 – 2/3) + c(–2 – 2) = –22/3 – 4/3 etc.

Sommare sempre a colonne ed evitare le trascrizioni inutili; ricordarsi che il metodi di eliminazione richiede, dopo aver scelto la variabile da eliminare, di essere coerenti con la scelta; la III equazione deve esplicitare la variabile eliminata (guardare il testo originale che spesso contiene un'equazione idonea).

2. Risolvere il seguente sistema: $\frac{2}{x} + \frac{3}{y-1} = 1 \wedge \frac{3}{x} - \frac{4}{y-1} = 2$

Si opera la sostituzione di variabile $\frac{1}{x} = u \wedge \frac{1}{y-1} = v$ e si ottiene il sistema:

$\begin{cases} 2u + 3v = 1 \\ 3u - 4v = 2 \end{cases}$ che si risolve con $4(1)+3(2) \Rightarrow 17u = 10 \Rightarrow u = \frac{10}{17}$ mentre $v = \frac{1}{3}(1 - 2u) = \frac{1}{3}(1 - \frac{20}{17}) = -\frac{1}{17}$

dobbiamo ora determinare x e y

$x = \frac{1}{u} = \frac{17}{10}$ mentre $y = 1 + \frac{1}{v} = -16$

Note: chi non ha sostituito ha quasi sempre sbagliato già la eliminazione del denominatore; ricordarsi di scrivere le soluzioni in x e y e di invertire correttamente

2F PNI 10/5/2003 compito finale

Risolvere in $\Re$ la disequazione $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{5 - x - \sqrt{2x^2 - 1}}{2x - x^2 + 24} \geq 0$.

Si consiglia di calcolare separatamente il dominio per evitare di commettere errori nello studio del segno.

dominio	numeratore	denominatore	schema finale	valutazione
2	4	1	3	

dominio

Si tratta di una disequazione irrazionale e frazionaria che presenta problematiche di dominio:

per l'esistenza della radice $2x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \vee x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

per l'esistenza del denominatore $x^2 - 2x - 24 \neq 0 \quad \Delta/4 = 1 + 24 = 25 = 5^2 \quad \Rightarrow x \neq 1 \pm 5 = \begin{cases} -4 \\ 6 \end{cases}$

Nota di correzione: molti errori nella prima disequazione (che è una banale disequazione di II grado con i capisaldi radici della equazione $x^2 = ½$ che siccome è semplice viene sbagliata.

C'è gente che si ostina a lavorare con il primo coefficiente negativo e poi sbaglia perché si dimentica di dividere per – 1. Studiamo ora separatamente il segno del numeratore e del denominatore

numeratore

$N(x) \geq 0$ porta alla disequazione irrazionale: $5 - x \geq \sqrt{2x^2 - 1}$ che a sua volta porta alla discussione di due casi:

a) $5 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$; sotto questa condizione si può elevare al quadrato e si ha $25 + x^2 - 10x \geq 2x^2 - 1 \Leftrightarrow$
   $x^2 + 10x - 26 \leq 0 \quad \Delta/4 = 25+26 = 51$

   La disequazione è vera per valori interni all'intervallo delle radici $x = -5 \pm \sqrt{51} = \begin{cases} \alpha \approx -12.14 \\ \beta \approx 2.14 \end{cases}$

   Il caso a) porta alla soluzione $\alpha \leq x \leq \beta$ perché $\alpha \leq x \leq \beta$ è un sottoinsieme di $x \leq 5$

b) $x > 5 \Rightarrow x \in \varnothing$ perché un numero negativo non può mai essere maggiore di una radice (quantità positiva o nulla)

   Dunque, fatti salvi i problemi di dominio, facendo l'unione si ha $N(x) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq x \leq \beta$

   Note di correzione: molto diffusa la tendenza a non concludere o a saltare il confronto con le condizioni poste. Anche se in questo caso i risultati non cambiavano si tratta di un grave errore procedurale (di natura logica).

denominatore

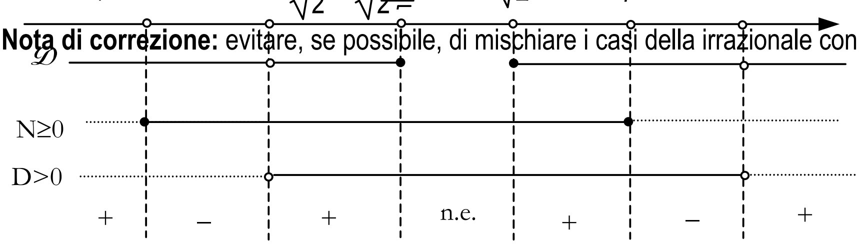
$D(x) > 0$ per valori interni all'intervallo delle radici (già determinate) $-4 < x < 6$

Riportiamo in un unico schema la discussione del segno e il dominio

Sulla base dello schema le soluzioni sono pertanto:

$x < -5 - \sqrt{51} \vee -4 \leq x \leq -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \vee \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq -5 + \sqrt{51} \vee x > 6$

Nota di correzione: evitare, se possibile, di mischiare i casi della irrazionale con lo studio del segno



2F ordinamento 20/11/2000 equazioni di II grado e trinomio (1 ora)

Competenze

1c. Determinare le soluzioni della seguente equazione frazionaria di II grado *prestando attenzione alle semplificazioni possibili*

$$\frac{x^2 + x - 2}{2(x^2 + 3x + 2)(x - 1)} + \frac{7x + 8}{4(x - 2)} = \frac{5}{(x - 2)(x + 1)} + 1$$

Conoscenze teoria

2t. L'equazione frazionaria polinomiale $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)}$ equivale a $B(x)\,D(x) \neq 0 \wedge A(x)\,D(x) - B(x)\,C(x) = 0$. Spiegare perché questo metodo di soluzione non necessariamente è il migliore e cosa conviene fare al suo posto (due cose).

3t. A cosa equivale l'equazione $A(x)\,B(x) = A(x)\,C(x)$?

4t. L'equazione $a\,x^2 + ab\,x + c = 0$ con a, b, x reali equivale a: $x^2 + b\,x + c/a = 0 \wedge$ ___________

5t. Il trinomio di secondo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$ quando $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ha il segno di a. Dimostralo.

1 ⇒10					2 ⇒ 3	3 ⇒ 1.5	4 ⇒ 0.5	5 ⇒ 5
semplifica	equazione risolvente	soluzioni	linguaggio	tecnica	padronanza	conoscenza	conoscenza	conoscenza e padronanza
2	3	2	1	2				
Voto competenze					Voto teoria			

2F ordinamento 27/11/2000 disequazioni razionali (1 ora)

Competenze

$\boxed{\text{1c.}}$ Determinare in $\Re$ le soluzioni della disequazione frazionaria: $\dfrac{N(x)}{A(x)\ B(x)} = \dfrac{x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6}{(6x^2 + 5x - 6)\ (x^2 - x - 3)} \leq 0$

Per risolvere la disequazione occorre preventivamente fattorizzare il numeratore e per farlo utilizzerò il teorema di Ruffini.
P(1) = 1 + 5 + 5 – 5 – 6 = 0 osserviamo anche che sostituendo –1 cambiano alcuni segni e viene ancora 0
P(-1) = 1 – 5 + 5 + 5 – 6 = pertanto il polinomio ammette come radici $\pm$ 1

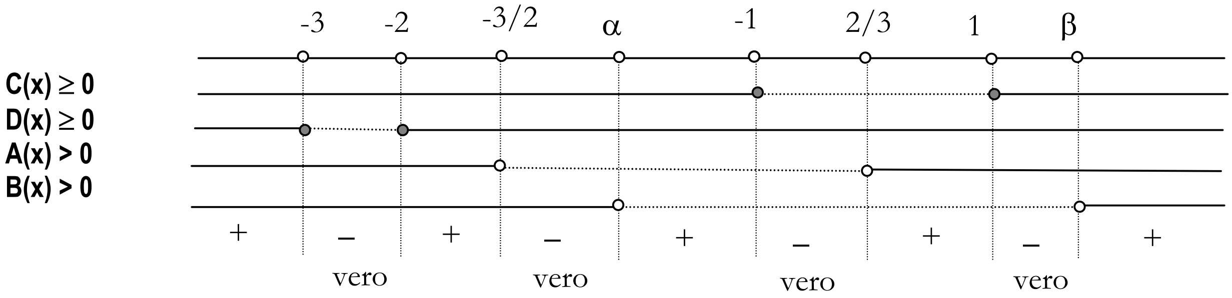
	1	5	5	-5	-6
1		1	6	11	6
	1	6	11	6	0
-1		-1	-5	-6	
	1	5	6	0	

Si ha dunque:
$N(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 5x + 6) = C(x)\ D(x)$ e questi due polinomi sono entrambi positivi o nulli per valori esterni all'intervallo delle radici ($\pm$ 1; -2; -3).

$A(x) > 0 \Leftrightarrow \Delta = 25 + 36\cdot 4 = 13^3$ valori esterni all'intervallo delle radici $x_{12} = \dfrac{-5 \pm 13}{12} \Leftrightarrow x_1 = -18/12 = -3/2\ \ x_2 = 8/12 = 2/3$

$B(x) > 0 \Leftrightarrow \Delta = 1 + 12 = 13$ valori esterni all'intervallo delle radici $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{2} \approx -1.30$ e $\beta = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2} \approx 2.30$

Si ottiene così il seguente schema di discussione:



Le soluzioni sono pertanto gli intervalli:
$-3 \leq x \leq -2 \vee -3/2 < x < \alpha \vee -1 \leq x < 2/3 \vee 1 \leq x < \beta$

$\boxed{\text{2c.}}$ Dopo averla ridotta a forma normale determinare in $\Re$ le soluzioni della disequazione frazionaria:

$1 + \dfrac{4x^2}{2x^2 + 8x} + \dfrac{27}{2x^2 + 7x - 4} > \dfrac{6}{2x - 1}$ (1)

Scompongo i polinomi coinvolti
$2x^2 + 8x = 2x(x + 4)$

$2x^2 + 7x - 4 = 0\ \Delta = 49+32 = 81 = 9^2\ x = \dfrac{-7 \pm 9}{4} \Rightarrow 2x^2 + 7x - 4 = 2(x + 4)(x-1/2) = (x + 4)\ (2x - 1)$

Pertanto mcm = $2x(x + 4)\ (2x - 1)$. Posso ridurre a forma normale:

$\Leftrightarrow \dfrac{2x(x + 4)\ (2x - 1) + 4x^2(2x - 1) + 27\cdot 2x - 6\cdot 2x(x + 4)}{2x(x + 4)\ (2x - 1)} > 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{2x(2x^2 + 7x - 4) + 8x^3 - 4x^2 + 54x - 12x(x + 4)}{2x(2x^2 + 7x - 4)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x^3 + 14x^2 - 8x + 8x^3 - 4x^2 + 54x - 12x^2 - 48x}{2x(2x^2 + 7x - 4)} > 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{12x^3 - 2x^2 - 2x}{2x(2x^2 + 7x - 4)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{6x^2 - x - 1}{2x^2 + 7x - 4} > 0 \wedge x \neq 0$

$N(x) > 0 \Leftrightarrow \Delta = 1 + 24 = 25$ valori esterni a $x = \dfrac{1 \pm 5}{12}$ cioè $x_1 = -4/12 = -1/3$ e $x_2 = 6/12 = ½$

$D(x) > 0 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > ½$ (si poteva semplificare per $2x - 1$). Semplificando si ottiene (1) $\Leftrightarrow \dfrac{(3x + 1)(2x - 1)}{(2x - 1)\ (x + 4)} > 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x + 1}{x + 4} > 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq ½$

Poiché il rapporto ha lo stesso segno del prodotto le soluzioni si avranno per valori esterni all'intervallo delle radici e cioè per :
$[x < -4 \vee x > -1/3\ ] \wedge x \neq 0 \wedge x \neq ½$

Conoscenze

$\boxed{\text{1t.}}$ Dimostrare che $\alpha > \beta > 0 \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$ (suggerimento: ricordare cosa significa $\alpha > \beta$ e che se α e β sono entrambi positivi lo è anche la loro somma).

Poiché $(\alpha - \beta) > 0 \wedge (a + \beta) > 0$ anche il loro prodotto è positivo e dunque $\alpha^2 - \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2$ cvd

2t. Vengono qui di seguito fornite una serie di disuguaglianze. Distinguere le vere dalle false e per quelle false precisare cosa c'è di sbagliato o dare un controesempio (esempio che prova la falsità).

$\alpha<\beta \wedge \gamma<0 \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$	V	F	$\alpha\beta \le 0 \wedge \beta > 0 \Rightarrow \alpha \le 0$	V	F	$\alpha\,\beta \ge 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \ge 0$	V	F
$\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 1 \wedge \beta > 0$	V	F	$\frac{\alpha}{\beta} > 0 \Rightarrow \alpha\,\beta > 0$	V	F	$\frac{\alpha}{\beta} > 1 \wedge \beta < 0 \Rightarrow \alpha < \beta$	V	F
$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\gamma - \alpha}{\beta} < 0$	V	F	$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$	V	F	$\alpha\,\lvert\beta\rvert \ge 0 \Rightarrow \alpha \ge 0$	V	F

Le risposte corrette sono quelle in giallo e si dà, come richiesto la motivazione della falsità:

$\alpha\,\beta \ge 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \ge 0$ Il termine di sinistra è vero per $\beta = 0$ e mentre quello di destra non ha senso

$\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 1 \wedge \beta > 0$ Falso la risposta corretta è $\alpha < \beta \Rightarrow [\frac{\alpha}{\beta} < 1 \wedge \beta > 0] \vee [\frac{\alpha}{\beta} > 1 \wedge \beta < 0] \vee [\beta = 0 \wedge \alpha < 0]$. Basta come controesempio $-2 < 0$

$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$ Falso: controesempio $2 > -3$

$\alpha\,|\beta| \ge 0 \Rightarrow \alpha \ge 0$ La risposta corretta è $\alpha \ge 0 \vee \beta = 0$ Controesempio $(-3)\cdot 0$

1c			2c			competenze
forma normale	segno fattori	schema	forma normale	soluzioni	eleganza	
3	3	2	3	3	1	

t1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	conoscenze

2F ordinamento 13/3/2001 Sistemi di equazioni

1) Risolvere il seguente sistema lineare: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + z = 2 \ \wedge\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y + z = \frac{49}{30} \wedge\ \frac{2}{5}x + \frac{2}{3}y + z = \frac{13}{5}$
2) Risolvere il seguente sistema di II grado $3x^2 + 2y^2 - 5z + yz = 14 \ \wedge\ 2x - 3y + 4z = -8 \ \wedge 3x + 2y + z = 6$
3) Risolvere il seguente sistema di IV grado $x^2 + y^2 + 2(x + y) = 23 \ \wedge\ x^2 + y^2 + xy = 19$
4) Risolvere il seguente sistema di IV grado $x^2 + y^2 + z^2 = 14 \ \wedge z^2 + 2xy = -11 \ \wedge x + y = 1$

1	2	3	4	

2F ordinamento 24/4/2001 Equazioni irrazionali e Sistemi di equazioni

1) Risolvere il seguente sistema di II grado $3a + b + c = -4 \wedge 2a - b + c = 1 \wedge a^2 - 4bc + c = 10$
2) Risolvere il seguente sistema simmetrico $a^2 + b^2 - 3ab - a - b = 10 \wedge a + b + ab = -1$
3) Con considerazioni basate sul dominio spiegare perché la seguente equazione irrazionale non può ammettere soluzioni: $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x^2+x+4}$
4) Risolvere la seguente equazione irrazionale: $\sqrt{2x^2 - x + 3} = 3x - 2$
5) Risolvere la seguente equazione irrazionale: $\sqrt[3]{2x-10} - \sqrt[3]{2x-1} + 3 = 0$

1	2	3	4	5	

1) $(1) - (2) \Leftrightarrow a + 2b = -5 \Leftrightarrow a = -5 - 2b \wedge c = 1 - 2a + b = 5b + 11 \wedge a^2 + c(1 - 4b) = 10$
Dalla terza si ha per sostituzione $16b^2 + 19b - 26 = 0$ che porta a $b = \frac{-19 \pm 45}{32} \Leftrightarrow b_1 = \frac{13}{16} \vee b_2 = -2$ e da qui per sostituzione
$a_1 = -\frac{53}{8} \vee a_2 = -1$ $c_1 = \frac{81}{16} \vee c_2 = 1$
2) Si tratta di un sistema simmetrico di IV grado che va innanzitutto ricondotto a forma normale:
$(a + b)^2 - 5ab - (a + b) = 10 \wedge ab = -1 - (a+b)$
$(a + b)^2 + 5 + 5(a + b) - (a + b) = 10$ da cui $(a + b)^2 + 4(a + b) - 5 = 0$ che porta a $(a+b)_1 = -5 \vee (a+b)_2 = 1$
Da qui si ha $ab = -1 - (a+b) = 4$ oppure -2
Si hanno pertanto due sistemi simmetrici che hanno come soluzione le soluzioni delle equazioni di II grado in z:
$z^2 + 5z + 4 = 0 \vee z^2 - z - 2 = 0$ con soluzioni $z_1 = -4 \vee z_2 = -1 \vee z_3 = -1 \vee z_4 = 2$. ILO sistema presenta dunque le soluzioni in a e b date da $(-4,-1) \vee (-1,-4) \vee (-1,2) \vee (2,-1)$
3) Il dominio è $x = 1$ (per la compatibilità tra le prime due radici) la terza è sempre definita avendo $\Delta < 0$ pertanto la soluzione non ha soluzione perché per $x=1$ si ha $0 = 2\sqrt{6}$
4) Posta la condizione $x \geq 2/3$ si può elevare al quadrato (non occorre porre il campo di esistenza che è implicito nella equazione risolvente)
$2x^2 - x + 3 = (3x - 2)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 3 = 9x^2 + 4 - 12x \Leftrightarrow 7x^2 - 11x + 1 = 0$ $\Delta = 121 - 28 = 93$. Si hanno pertanto le soluzioni $x_1 = \frac{11 - \sqrt{93}}{14} \approx -0.010$ sol. non accettabile $x_2 = \frac{11 + \sqrt{93}}{14} \approx 1.47$ sol. accettabile
5) Conviene porre l'equazione nella forma più comoda per l'elevamento al cubo (non si pongono problemi di campo di esistenza né condizioni aggiuntive legate all'elevamento a potenza)
$\sqrt[3]{2x-10} = \sqrt[3]{2x-1} - 3 \Leftrightarrow 2x - 10 = 2x - 1 - 9\sqrt[3]{(2x-1)^2} + 27\sqrt[3]{2x-1} - 27 \Leftrightarrow 9\sqrt[3]{(2x-1)^2} - 27\sqrt[3]{2x-1} + 18 = 0 \Leftrightarrow$ $\sqrt[3]{(2x-1)^2} - 3\sqrt[3]{2x-1} + 2 = 0 \Leftrightarrow$ si tratta di una equazione di II grado nella variabile $z = \sqrt[3]{2x-1}$ che porta alle soluzioni: $z_1 = 1 \vee z_2 = 2$. Da qui $\sqrt[3]{2x-1} = 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ oppure $\sqrt[3]{2x-1} = 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = 8 \Leftrightarrow x = 9/2$

2F ordinamento 27/4/2001 disequazioni razionali fratte

1) Risolvere la seguente disequazione razionale frazionaria: $\frac{2x-3}{x+2} - \frac{x+1}{-x^2+2x} + \frac{-2x^2+3}{x^2+2x} < 0$

Dopo aver trovato le soluzioni, tenendo conto delle problematiche di campo di esistenza, risolvere la disequazione $\left[\frac{2x-3}{x+2} - \frac{x+1}{-x^2+2x} + \frac{-2x^2+3}{x^2+2x}\right]\sqrt{3x^2-19x+6} < 0$

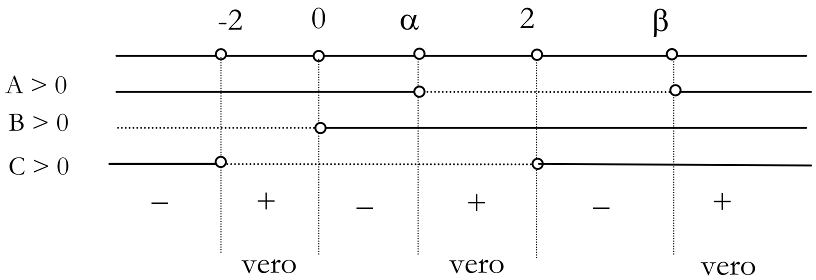
$\frac{2x-3}{x+2} - \frac{x+1}{-x^2+2x} + \frac{-2x^2+3}{x^2+2x} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x+2} + \frac{x+1}{x^2-2x} + \frac{-2x^2+3}{x^2+2x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-3)(x^2-2x)+(x+1)(x+2)+(-2x^2+3)(x-2)}{x(x+2)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow$

$\frac{-2x^2+12x-4}{x(x^2-4)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-6x+2}{x(x^2-4)} > 0 \Leftrightarrow \frac{A}{BC} > 0$

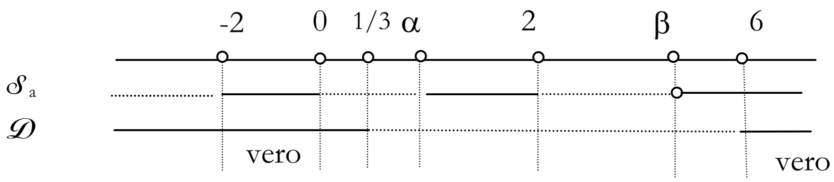
Studio del segno dei diversi fattori:

$A > 0 \Leftrightarrow \Delta/4 = 9 - 2 = 7$ valori esterni all'intervallo delle radici: $x = 3 \pm \sqrt{7} \Leftrightarrow \alpha = 3 - \sqrt{7} \approx 0.35$ e $\beta = 3 + \sqrt{7} \approx 5.6$

$B > 0$ per $x > 0$ e infine $C > 0$ per $x < 2 \vee x > 2$



Per rispondere alla seconda domanda, tenuto conto che la radice, quando esiste è sempre positiva o nulla, basta richiedere che le soluzioni appartengano al dominio della radice con la esclusione dei punti di annullamento (nello schema grafico dovremo effettuare



una intersezione di intervalli, non uno studio del segno)

$\mathcal{D}$: $3x^2 - 19x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta = 19^2 - 72 = 17^2$ valori esterni all'intervallo delle radici $x_1 = 1/3$ e $x_2 = 6$ (estremi esclusi per escludere l'annullamento)

Le soluzioni del secondo quesito sono $-2 < x < 0 \vee x > 6$

forma normale	segno	soluzioni	irrazionale	soluzione	voto	

ex 3G 20/11/99 disequazioni irrazionali e ai moduli (debito anno precedente)

1. Risolvere in $\Re$ la disequazione irrazionale $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq 2x - 1$

2. Risolvere in $\Re$ la disequazione $|4x - 3| < x^2 - 1$

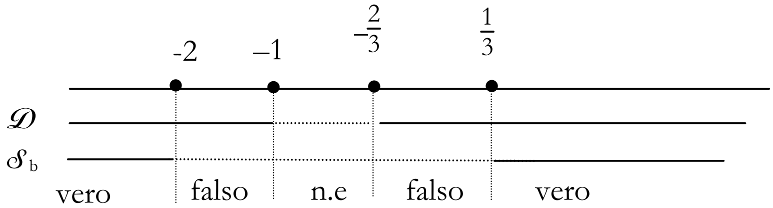
3F PNI 24/9/03 disequazioni ai moduli e irrazionali

Svolgere a propria scelta 2 dei seguenti 3 esercizi.

1. Risolvere la disequazione $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2} \le 1$ che richiede, oltre al calcolo del dominio, un doppio elevamento a quadrato.

a) Il calcolo del dominio $\mathscr{D}$ richiede la positività degli argomenti delle radici e cioè:
$3x^2 + 5x + 7 \ge 0 \wedge 3x^2 + 5x + 2 \ge 0$
$\Delta_1 = 25 - 84 < 0 \Rightarrow$ il primo trinomio è sempre positivo
$\Delta_2 = 25 - 24 = 1 \Rightarrow$ il secondo trinomio è positivo per valori esterni all'intervallo delle radici che sono $x_{12} = \dfrac{-5 \pm 1}{6} = \begin{cases} -1 \\ -2/3 \end{cases}$
Dunque il dominio è $x \le -1 \vee x \ge -2/3$

b) Prima di elevare al quadrato portiamo a destra la seconda radice in modo di ottenere due quantità positive
$\sqrt{3x^2 + 5x + 7} \le \sqrt{3x^2 + 5x +2} + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x + 7 \le 3x^2 + 5x +2 + 1 + 2\sqrt{3x^2 + 5x +2} \Leftrightarrow 4 \le 2\sqrt{3x^2 + 5x +2} \Leftrightarrow$
$4 \le 3x^2 + 5x +2 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 2 \ge 0 \quad \Delta = 25 + 24$
$= 49 = 7^2$ vera per valori esterni all'intervallo delle radici $x_{12} = \dfrac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} -2 \\ 1/3 \end{cases}$



note di correzione: in generale ok salvo sbavature formali che ho segnalato nei diversi compiti e di cui prego di prendere nota con attenzione; per esempio il confronto finale da cui si originano le soluzioni non produce dei + o dei – ma dei vero e dei falso

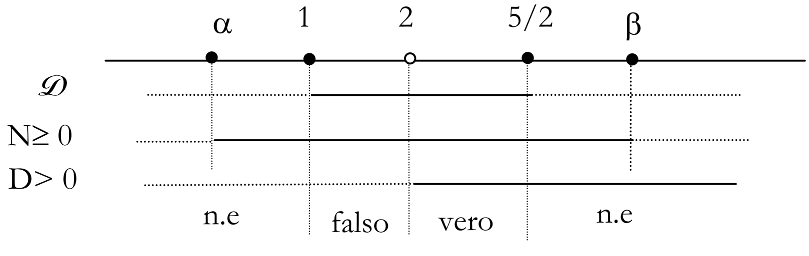
2. Risolvere la seguente disequazione irrazionale ai moduli prestando attenzione, nell'eseguire l'analisi dei casi, alle condizioni imposte dal dominio $\dfrac{|x^2-3x-4| + x - 2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-2x}} \ge 0$

a) Il calcolo del dominio $\mathscr{D}$ richiede che sia $x - 1 \ge 0 \wedge 5 - 2x \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 5/2$

b) Per eliminare il modulo bisogna discutere la positività dell'argomento e cioè la condizione $x^2 - 3x - 4 \ge 0$; poiché $\Delta = 9 + 16 = 25 = 5^2$ l'argomento è positivo per valori esterni all'intervallo delle radici che sono $x_{12} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$
Dunque all'interno del dominio l'argomento del modulo è sempre negativo e non è necessario esaminare altri casi e la disequazione diventa:
$\dfrac{-x^2 + 3x + 4 + x - 2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-2x}} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2 + 4x + 2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-2x}} \ge 0$

c) Bisogna discutere separatamente il segno del numeratore e del denominatore:
$N(x) \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 \le 0 \quad \Delta/4 = 4 + 2 = 6$ la condizione è verificata per valori interni all'intervallo delle radici che sono
$x_{12} = 2 \pm \sqrt{6} = \begin{cases} \alpha \approx -0.45 \\ \beta \approx 4.45 \end{cases}$
$D(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 5 - 2x \Leftrightarrow x > 2$

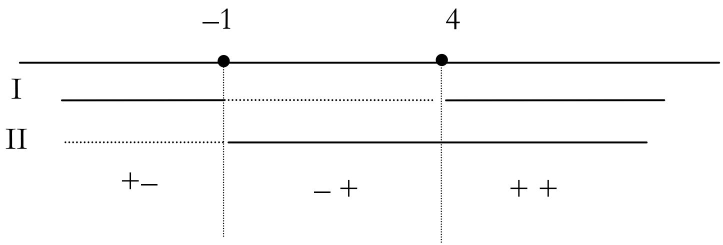
d) Passiamo ora allo studio simultaneo del segno del rapporto tenendo conto del dominio:



Nota di correzione: il suggerimento fornito nel testo non è stato seguito da nessuno o quasi; la discussione del segno dell'argomento del modulo è preliminare allo studio del segno del numeratore e in questo caso portava ad escludere uno dei due casi che si verificava all'esterno del dominio

3. Risolvere la seguente disequazioni ai moduli $f(x) = |x^2 - 3x - 4| + |x + 1| - 1 > 0$ che richiede una analisi dei casi relativa al segno degli argomenti compresi entro i due moduli.

a) discussione del segno degli argomenti dei due moduli:
I) $x^2 - 3x - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \Delta = 9 + 16 = 25 = 5^2$; l'argomento è positivo per valori esterni all'intervallo delle radici $x_{12} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$
II) $x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1$



Si ha pertanto la seguente situazione relativa agli argomenti che determina la necessità di studiare separatamente tre distinte disequazioni per i tre intervalli che sono stati determinati.

b) primo intervallo $x \le -1$; la disequazione diventa:

$x^2 - 3x - 4 - x - 1 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 6 > 0 \Leftrightarrow \Delta/4 = 4 + 6 = 10$ valori esterni all'intervallo delle radici $x_{12} = 2 \pm \sqrt{10} =$
/ $\alpha \approx -1.16$
\ $\beta \approx 5.16$ e per confronto con l'intervallo si ha $x < \alpha = 2 - \sqrt{10}$

c) secondo intervallo $-1 \le x \le 4$; la disequazione diventa:

$-x^2 + 3x + 4 + x + 1 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 < 0 \Leftrightarrow \Delta/4 = 4 + 4 = 8$ valori interni all'intervallo delle radici $x_{12} = 2 \pm 2\sqrt{2} =$
/ $\gamma \approx -0.83$
\ $\delta \approx 4.83$ e per confronto con l'intervallo si ha $\gamma < x \le 4$

d) terzo intervallo $x \ge 4$; la disequazione diventa:

$x^2 - 3x - 4 + x + 1 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow \Delta/4 = 1 + 4 = 5$ valori esterni all'intervallo delle radici $x_{12} = 1 \pm \sqrt{5} =$
/ $\varepsilon \approx -1.24$
\ $\phi \approx 3.24$ e per confronto con l'intervallo si ha $x \ge 4$

e) Se ora si esegue l'unione dei risultati dei tre intervalli si ha:

$x < 2 - \sqrt{10} \vee x > 2 - 2\sqrt{2}$

Nota di correzione: l'analisi preliminare va motivata e non fa parte di uno schema a macchinetta e ciò vale per tutte le disequazioni che sono spesso diverse per strategia risolutiva (essere razionali ed opportunisti sono le due parole d'ordine); molti studenti, dopo l'analisi preliminare hanno dimenticato che i diversi casi valevano entro precisi intervalli (errore molto grave); alla fine ricordarsi di tirare le fila.

2F PNI 26 ottobre 2007 sistemi e disequazioni

1) Risolvere il seguente sistema di I grado in 3 variabili: $\begin{cases} 2a - 4b + 3c = -10 \\ a + 3b + 2c = -7/2 \\ 3a + b + \frac{1}{2} c = -7/2 \end{cases}$

2) Risolvere la disequazione $\frac{5}{x^2 - 4x + 3} + \frac{2}{x - 1} < \frac{4}{x - 3}$

3) Risolvere la disequazione di I grado ai moduli $|x - 1| - |2x - 3| \le 3x - 2$

4) Prestando attenzione a non svolgere conti inutili risolvere la disequazione $\left|\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}\right| < 2$

Nota di correzione generale

- il metodo di riduzione va appreso sia sul piano metodologico (si elimina una variabile ad ogni passaggio e la si esplicita contestualmente) sia sul piano tecnico (migliorare le tecniche di calcolo, esporre con ordine e precisione).
- Chi non sa scomporre per (somma e prodotto) polinomi come $x^2 - 4x + 3$ si dia una regolata. LO stesso vale per chi non sa sommare due frazioni algebriche (si tratta di prerequisiti)
- Nelle disequazioni frazionarie si fattorizza la frazione dopo averla confrontata con lo zero, si indicano simbolicamente i fattori e si discutono separatamente. Si fa lo studio del segno individuando le zone di positività e poi si conclude
- Nelle disequazioni ai moduli c'è una discussione preliminare sugli argomenti delle quantità in modulo che porta a divaricare la strada in vari casi, ciascuno valido nell'intervallo corrispondente. Le soluzioni di ogni caso si trovano intersecando il dominio di validità con la soluzione. Alla fine si unisce il tutto.
- $2 > 0$ è sempre vera; $2x > 0$ eq $x > 0$ e non $x > \frac{1}{2}$ (allucinante)
- La disequazione $|z| < k$ con $k > 0$ equivale a $-k < z < k$
- I prodotti e rapporti di polinomi di I grado si possono sintetizzare osservando che se il termine di II grado è positivo il trinomio è positivo per valori esterni all'intervallo delle radici (tra una settimana, finite le disequazioni di II grado diventa obbligatorio)
- Il tratto pieno vuol dire vero e non positivo

1) $\begin{cases} 2a - 4b + 3c = -10 & \text{I} - 2\,\text{II} \\ a + 3b + 2c = -7/2 & \text{III} - 3\,\text{II} \\ 3a + b + \frac{1}{2} c = -7/2 & \text{II} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10b - c = -3 & 4\,\text{I} - 5\,\text{II} \\ -8b - 11/2\, c = 7 & \text{I} \\ a = -7/2 - 3b - 2c & \text{III} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-4 + 55/2)c = -47 \Leftrightarrow c = -2 \\ b = (-c + 3)/10 = (2 + 3)/10 = 1/2 \\ a = -7/2 - 3/2 + 4 = -5 + 4 = -1 \end{cases}$

Nota di correzione: 2 variabili da eliminare, dunque due passaggi

2) $\frac{5}{x^2 - 4x + 3} + \frac{2}{x - 1} < \frac{4}{x - 3} \Leftrightarrow \frac{5 + 2(x-3) - 4(x-1)}{(x-1)(x-3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-2x + 3}{(x-1)(x-3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{N}{D} < 0$

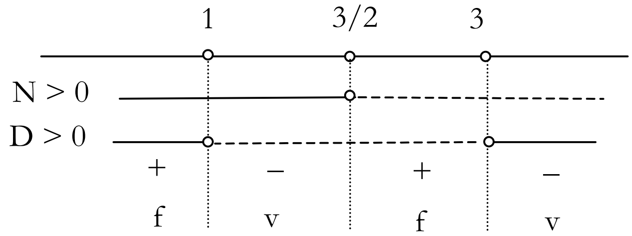
Studio del segno dei fattori

$N > 0 \Leftrightarrow x < 3/2$

$D > 0$ per valori esterni all'intervallo delle radici 1,3

Studio del segno della frazione

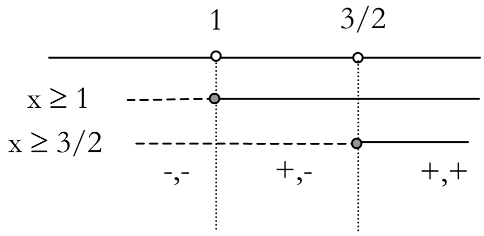
Le soluzioni sono indicate con v (vero)



Se si fosse studiato il denominatore come prodotto si faceva una riga in più (intervallo $x > 1$ e $x > 3$) e si procedeva esattamente allo stesso modo.

3) $|x - 1| - |2x - 3| \le 3x - 2$ è richiesto l'esame preliminare del segno degli argomenti dei moduli

$x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$ mentre $2x - 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 3/2$ si hanno dunque tre intervalli che indicheremo con I, II, III. Essi sono tra loro disgiunti e le soluzioni trovate andranno riferite a tale intervallo



I) $x \le 1 \wedge (-x + 1 + 2x - 3 \le 3x - 2 \Leftrightarrow x \ge 0) \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$

II) $1 < x \le 3/2 \wedge (x - 1 + 2x - 3 \le 3x - 2 \Leftrightarrow 0 \le 2) \Leftrightarrow 1 < x \le 3/2$

III) $x > 3/2 \wedge (x - 1 - 2x + 3 \le 3x - 2 \Leftrightarrow 4x \ge 4 \Leftrightarrow x \ge 1) \Leftrightarrow x \ge 3/2$

Se si uniscono i tre intervalli che sono tutti adiacenti si ottiene come soluzione $x \ge 0$

Nota di correzione: quasi nessuno ha tenuto conto del fatto che ogni caso è relativo ad un dato intervallo; chi ne ha tenuto conto ha spesso sbagliato il confronto.

4) $\left|\dfrac{x^2-7x+12}{x-3}\right| < 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{(x-3)(x-4)}{x-3}\right| < 2 \Leftrightarrow |x-4| < 2 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow -2 < x-4 < 2 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow 4-2 < x < 2+4 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow 2 < x < 6 \wedge x \neq 3$

Nota di correzione: quando si ha una frazione algebrica e si può semplificare è sempre conveniente farlo. Mi è parso di capire che qualcuno sia andato in crisi su x–4 rispetto all'intervallo (I criterio di equivalenza).

sistema, 3	diseq. fraz. 3	diseq. mod. 3	diseq. mod. 2		

2F PNI 30 novembre 2007 equazioni di II grado (annullato)

1) Risolvere la seguente equazione:

$$\frac{1-x}{\sqrt{2}x-1}-\frac{\sqrt{2}(x^2+x)}{2x^2+\sqrt{2}\,x}=\frac{2+\sqrt{2}\,x}{2x^2-1}$$

Posto $x\neq 0$ si semplifica il II termine di sinistra; si può anche semplificare per $\sqrt{2}$ e si ottiene

$$\frac{1-x}{\sqrt{2}x-1}-\frac{x+1}{\sqrt{2}x+1}=\frac{2+\sqrt{2}\,x}{2x^2-1} \qquad \text{mcm} = 2x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

si elimina il denominatore

$(1-x)(\sqrt{2}x+1)-(x+1)(\sqrt{2}x-1)=2+\sqrt{2}\,x \Leftrightarrow$

$\sqrt{2}\,x+1-\sqrt{2}\,x^2-x-\sqrt{2}\,x^2+x-\sqrt{2}\,x+1=2+\sqrt{2}\,x \Leftrightarrow$

$-2\sqrt{2}\,x^2-\sqrt{2}\,x=0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\,x(2x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ s.n.a. $\vee\ x=-½$ s.a.

Nota di correzione: se non si semplifica per x si hanno conti più lunghi ma con il medesimo risultato; in tal caso x va a far parte del mcm

2) Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{x^2-3x}{x^3-2x^2-x+2}-\frac{x-3}{x^2-1}<\frac{1}{x^2-x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}$$

Si tratta di una disequazione razionale fratta e il primo lavoro consiste nello scomporre i denominatori

$x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=(x^2-1)(x-2)=(x+1)(x-1)(x-2)$

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ (somma e prodotto)

$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$ (somma e prodotto)

Dunque m.c.m. $=(x+1)(x-1)(x-2)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\pm 1 \wedge x\neq 2$. Si riduce al medesimo denominatore spostando simultaneamente a sinistra i termini del II membro (attenzione: errore grave eliminare il denominatore perché non si sa quando sia positivo o negativo; stiamo risolvendo una disequazione frazionaria).

$$\frac{x^2-3x-(x-3)(x-2)-(x-1)+(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-x^2+5x-6-x+1+x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)}<0 \Leftrightarrow \frac{2x-4}{(x+1)(x-1)(x-2)}<0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{(x^2-1)(x-2)}<$$

$$0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-1}<0 \wedge x\neq 2 \Leftrightarrow \text{v.i. e cioè } -1<x<1$$

Nota di correzione: la richiesta $x\neq 2$ è già contenuta nelle soluzioni e dunque non va richiesto altro. Gravissimo l'errore di eliminazione del denominatore.

3) Si consideri l'equazione: $(2k-1)x^2+(k+1)x+(3-k)=0$

a) Determinare per quali valori di k essa ammette soluzioni (gli estremi dell'intervallo, indicati con α e β, vanno specificati anche in forma approssimata

$\Delta=(k+1)^2-4(2k-1)(3-k)=k^2+2k+1-4(-2k^2+7k-3)=9k^2-26k+13$

Condizione di realtà delle radici $\Delta\geq 0$; $\Delta'/4=13^2-13\cdot 9=13\cdot 4=(2\cdot\sqrt{13})^2$ si ha $\Delta\geq 0$ per valori esterni all'intervallo delle radici α e β che sono $k=\dfrac{13\pm 2\sqrt{13}}{9}=\begin{matrix}/\ \alpha\approx 0.643\\ \backslash\ \beta\approx 2.24\end{matrix}$ Soluzioni reali per $k\leq\alpha \vee k\geq\beta$

Nota di correzione: usare $\Delta/4$, evitare assurde catene di equivalenze nel calcolo di Δ, esprimere le soluzioni in α e β e non con i valori approssimati (sono tutti errori più o meno gravi).

b) Per quali valori di k le due radici sono concordi

Le radici sono concordi se il prodotto è positivo e dunque se $\dfrac{3-k}{2k-1}>0$ il che accade per valori interni all'intervallo]½,3[ma questo risultato va intersecato con la condizione di esistenza delle radici e dunque si ottiene (tenuto conto di dove sono α e β) $½<k\leq\alpha \vee \beta\leq k<3$

Nota di correzione: il mancato confronto con la condizione di realtà costituisce un errore grave.

c) Per quale valore di k, x = 1 è soluzione? In tal caso quanto vale l'altra soluzione?

Basta sostituire nella equazione e si ottiene $2k-1+k+1+3-k=0 \Leftrightarrow 2k=-3 \Leftrightarrow k=-3/2$

Per trovare l'altra soluzione bisogna ricordare che abbiamo già calcolato il prodotto e dunque $1\cdot x_2=\dfrac{3-k}{2k-1}=\dfrac{3+3/2}{-3-1}=-\dfrac{9}{8}$

4) In alternativa all'esercizio 2 o come completamento (dopo i primi 3) si risolva la disequazione:

$$\frac{(x^2-4)(x^2-7x+6)}{(x^2-5x+6)(2x^2+5x-3)}<0$$

La disequazione è già fattorizzata e dunque basta scomporre i termini di II grado (per discuterne il segno o per effettuare eventuali semplificazioni).

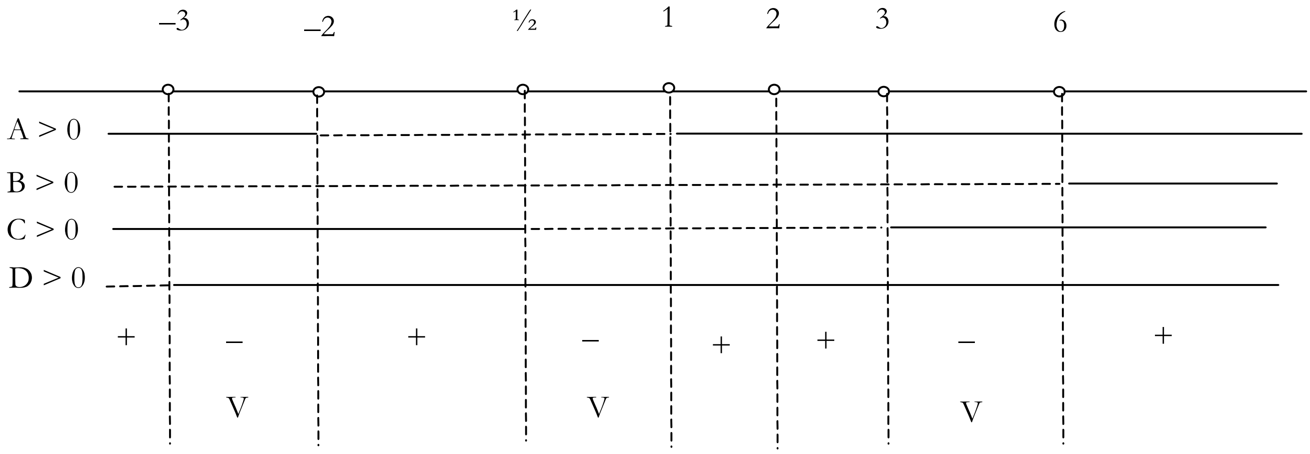
$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ prodotto notevole
$x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$ somma e prodotto
$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ somma e prodotto

$2x^2 + 5x - 3 = 0$ ha $\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2$ le radici sono $x = \frac{-5 \pm 7}{4}$ e cioè ½ e –3 e la scomposizione è $2(x - \frac{1}{2})(x + 3)$

La disequazione può essere semplificata per $x - 2$ dopo aver richiesto che sia $x \neq 2$ e si ottiene:

$$\frac{(x + 2)(x - 1)(x - 6)}{2(x - 3)(x - 1/2)(x + 3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{A \cdot B}{C \cdot D} < 0$$

Si opera ora lo studio del segno dei diversi fattori:
$A = (x+2)(x - 1) > 0$ per v.e.
$B = x - 6 > 0$ per $x > 6$
$C = (x - 3)(x - \frac{1}{2}) > 0$ per v.e.
$D = x + 3 > 0$ per $x > -3$
Si riporta il tutto in un unico schema e si prenderanno come soluzioni quelle per cui il segno risulta negativo



Le soluzioni si hanno per $-3 < x < -2 \vee \frac{1}{2} < x < 1 \vee 3 < x < 6$

Nota di correzione: molti non sanno scomporre; non capito il teorema sulla scomposizione; non capito che anche quando la disequazione è del tipo < 0 si fa comunque il confronto con lo 0 per ricerca di positività. Tutte cose ampiamente spiegate e illustrate negli esercizi svolti in classe.

1		2	
3		4	

2F PNI 15 dicembre 2007 equazioni e disequazioni di II grado

Svolgere i seguenti esercizi; soglia di sufficienza 2 esercizi corretti e completi; l'eventuale seconda disequazione va svolta come quinto esercizio.

1) Lo scopo del presente esercizio è di far riflettere sulla opportunità dei cambiamenti di variabile
   a) Risolvere la seguente equazione: $z + \frac{1}{z} = \frac{17}{4}$
   b) Spiega perché i due valori di z trovati sono l'uno il reciproco dell'altro
   c) Se $z = \left(\frac{2x + 3}{x}\right)^2$ quanto vale x nel caso del valore di z più grande?

   a) $z = 4 \vee z = ¼$ b) perché l'equazione originaria non muta scambiando z con il suo reciproco c) $x = –3/4$

2) Risolvi la disequazione $\frac{2x^3 + 7x^2 + x – 10}{3x^2 – 7x + 4} < 0$

   $x < 5/2 \vee –2<x<1 \vee 1<x<4/3$

3) Risolvi il sistema di II grado $\begin{cases} a + 3b + c = 5 \\ 2a – b + c = – 2 \\ b^2 – 4ac + 4a = 16 \end{cases}$

   soluzioni $(1,2,–2) \vee (–207/113;146/113,334/113)$

4) La equazione di parametrica di II grado $(2k – 1) x^2 + (k – 1)x + (3 – k) = 0$
   a) ha soluzioni per quali valori di k?
   b) esistono valori di k per cui la somma delle radici vale ½ ?
   c) cosa accade per k = ½ ?
   d) cosa accade alle radici per $k = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{3}$? Sapresti trovarne il valore usando il valore della somma già determinato al punto b)? E' richiesto il risultato razionalizzato.

   a) $k \le \frac{5-2\sqrt{3}}{3} \approx 0.512 \vee k \ge \frac{5+2\sqrt{3}}{3} \approx 2.821$ b) viene k = ¾ soluzione non accettabile c) l'equazione si abbassa di grado e viene l'unica soluzione x = 5 d) il Δ si annulla e dunque le due soluzioni sono coincidenti $x = ½ s = …= 3\sqrt{3} + 5$

5) Risolvere la seguente disequazione frazionaria $\frac{3(x + 2)}{x^3 + x^2 + x + 1} \ge \frac{–2x^2+ x + 10}{x^3 – x^2 + x – 1}$ Nota bene: nella fase finale prestare attenzione a cosa accade per $x = –2$

   si riduce a $\frac{(x+2)^2(x – 2)}{x^2 – 1} \ge 0$ che porta a $–1<x<1 \vee x \ge 2$

1			2	3	4				5	
a	b	c			a	b	c	d		

3 marzo 2008 2F PNI compito accertamento debito – 2 ore

Il compito è stato predisposto dalla professoressa Airoldi che ha svolto il corso di recupero e rivisto dal professor Cereda. Verrà valutato nelle sue diverse parti (equazioni e sistemi, disequazioni incluso esercizio sui radicali, problema di a.a.g.) in modo che si possa procedere ad una sanatoria di tipo processuale del debito stesso.

1) Equazioni
   a) Risolvere la seguente equazione frazionaria: $\frac{x}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{21-x}{x^2-9}$
      $x = \pm 3$ soluzioni non accettabili
   b) Risolvere, fattorizzando (con una delle tecniche apprese), la seguente equazione polinomiale di III grado: $7x^3 - 57x^2 + 57x - 7 = 0$
      $x = 1 \vee x = 7 \vee x = 1/7$
   c) Risolvere, attraverso un opportuno cambio di variabile, la seguente equazione di 4° grado biquadratica: $4x^4 - 21x^2 + 27 = 0$
      $x = \pm\sqrt{3} \vee x = \pm 3/2$
   d) Risolvere la seguente equazione elementare di 5° grado: $32x^5 + 243 = 0$
      $x = -3/2$
   e) Si consideri la seguente equazione parametrica di II grado con $k \neq 0$: $kx^2 - 4kx + 4k - 1 = 0$ e, ricordando che le proprietà delle radici costituiscono una condizione valida solo se le radici esistono, determinare e1) $k \mid x_2 = \frac{1}{x_1}$ e2) $k \mid x_1 \cdot x_2 = 9$ e3) $k \mid$ le radici siano discordi
      condizione di esistenza $k > 0$; $k = 1/3$ s.a.; $k = -1/5$ sna; $0<k<1/4$
   f) Risolvere il seguente sistema di II grado in tre variabili: $\begin{cases} 4a - 2b + c = 15/4 \\ 9a - 3b + c = 3 \\ 4ac - b^2 - 16a = 0 \end{cases}$
      le equazioni risolventi sono $b = 5a + 3/4 \wedge c = 6a + 21/4 \wedge a^2 + 5/2\,a + 9/16 = 0$ che portano a $(-9/4, -21/2, -33/4) \vee (-1/4, -1/2, 15/4)$
2) Problema di applicazione dell'algebra alla geometria: data una semicirconferenza di diametro AB con $\overline{AB} = 12$ cm si consideri su di essa un punto P e si indichi con H la proiezione di P sul diametro. Determinare la posizione del punto P in modo che valga la relazione: $\overline{PH}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 = 176$ cm^2. Si consiglia di assumere come variabile descrittiva del problema $x = \overline{AH}$. Facoltativamente si illustri il significato geometrico delle due soluzioni trovate.
   Si fa tutto con il I e II teorema di Euclide e si trovano le due soluzioni simmetriche $x = 4 \vee x = 8$. La simmetria c'è sia nella figura sia nella relazione: di qui le soluzioni simmetriche
3) Disequazioni ed espressioni radicali
   a) Si consideri la seguente espressione radicale $f(x) = \sqrt[4]{A(x)} \cdot \sqrt{B(x)} \cdot \sqrt[4]{C(x)}$
      con $A(x) = x + 2 - \frac{8x}{x+2}$; $B(x) = x + 2 - \frac{8+4x}{2-x}$; $C(x) = \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^2 + 5x + 6}$
      Determinare il campo di esistenza (dominio) di f(x) e quindi calcolare il valore di f(x)
      $A(x) = \frac{(x-2)^2}{x+2}$ $B(x) = \frac{(x+2)^2}{x-2}$ $C(x) = \frac{(x+3)(x-2)^2}{(x+2)(x+3)}$ il dominio è $x > 2$ e il risultato è $\sqrt{x^2-4}$
   b) Risolvere la seguente disequazione frazionaria utilizzando per lo studio di numeratore e denominatore o il teorema del segno del trinomio di II grado o l'equivalente supporto grafico delle parabole
      $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 7x + 6} \geq 0$
      $x \leq -1 \vee 1 < x \leq 4 \vee x > 6$
   c) Risolvere il seguente sistema di disequazioni $x^2 - 8x - 9 \leq 0 \wedge x^2 - 8x + 12 > 0$
      $-1 \leq x < 2 \vee 6 < x \leq 9$

28 maggio 2F PNI

compito finale associato a a.a.g. e geometria analitica

Rispondere direttamente su questo foglio affiancando obbligatoriamente una breve motivazione

1) $(x + 2)^2 + 3 \le 0$ __$x \in \varnothing$ il primo è positivo o nullo il secondo sempre positivo______________________

2) $(x + 2)^2 \le 0$ ___$x = -2$ per gli altri valori è positivo__________________________________

3) $(x + 2)^3 + 3 \ge 0$ _$(x + 2)^3 > -3 \Leftrightarrow x + 2 > -\sqrt[3]{3} \Leftrightarrow x > -2 - \sqrt[3]{3}$ __________________________________

4) $\frac{1}{(x + 2)^2} \ge 0$ ___ $x \ne -2$ per l'esistenza del denominatore; dove esiste è positiva______

5) $\sqrt{(x + 2)^2} =$ _$|x + 2|$ la radice esiste (quadrato nell'argomento) e dove esiste è positiva

6) $\sqrt{x}\sqrt{x} = |x| = x \wedge x \ge 0$ per l'esistenza della radice ____

7) $|x^2+ 3| =$ _$x^2 + 3$ perché l'argomento è sempre positivo (somma di quadrati)____________

8) $\frac{|x^2|}{x} =$ _x______ $\wedge\ x \ne 0$ per l'esistenza del denominatore inoltre $|x^2| = x^2$______________

9) $-x^3 > 1 \Leftrightarrow x^3 < -1 \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{-1} = -1$____

10) $-x^2 > -1$ _$\Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$____