maggio 95 algebra: prodotti notevoli

1] $(\frac{1}{3}xy - \frac{1}{6}x^{-1})^3$	**2]** $[(x - y) + z]\,[z - (x - y)]$	**3]** $(6x + 2y - 3)\,(6x + 2y + 3)\,(6x + 2y)^2$

4] $(a^3 - 2b + 1)^3 + (2b - 1 - a^3)^3 = 0$ perché....	**5]** $(a^2 - x^2)^2\,(a^2 + x^2)^2 - (-a^4 + x^4)^2 = 0$ perché...
6] $(x^2 - 1)\,(x^2 + 1)\,(x^4 + 1) - (x^2 - 1)^2 +$ $+ x^2(-x^6 + x^2 - 2)$	**7]** $(2x - 1)^2 - (3x + 1)^2 + (5x)^2 - 10x(2x - 1) +$ $+ (2x - 1)(2x + 1)$
8] $(x - y)^3 + (x + y)^3 + 3(x + y)(x - y)^2 +$ $+ 3(x - y)(x + y)^2 = 8x^3$ perché...	**9]** $(8x^3 - a^6)(8x^3 + a^6) - (2x - a^2)(2x + a^2)\cdot$ $\cdot[2x(2x + a^2) + a^4][4x^2 - a^2(2x - a^2)]$

10] sviluppare $(2a - b)^6$ dopo aver indicato gli elementi del triangolo di Tartaglia

31/5/96: prodotti notevoli

$\boxed{1}$	espressione semplice	$[a(b + c)(b + c - a)+b(a + c)(a + c - b)+c(a + b)(a + b - c)]x$	$\Rightarrow 2$
$\boxed{2}$	espressione semplice	$[(x + \frac{1}{2}y)(\frac{2}{3}a + b) - \frac{1}{3}ay - bx)](6ax - 12by) + 5by(ax + by)$	$\Rightarrow 2$
$\boxed{3}$	prodotti notevoli	$(-\frac{5}{3}x^{m+1} + \frac{3}{5}x^{m-1})^2$	$\Rightarrow 1.5$
$\boxed{4}$	prodotti notevoli	$[(x - \frac{1}{2}y)^2]^2$	$\Rightarrow 1.5$
$\boxed{5}$	prodotti notevoli	$[(x + y)^2 - (x - y)^2]^2$	$\Rightarrow 1.5$
$\boxed{6}$	prodotti notevoli	$(\frac{1}{2}ab^2c^3 - 2a^3b^2c)^3$	$\Rightarrow 1.5$
$\boxed{7}$	prodotti notevoli	$(a - b + c - d)(a + b - c - d)$	$\Rightarrow 1.5$
$\boxed{8}$	prodotti notevoli	$(x^m y^n - 2xy^m)(x^m y^n + 2xy^m)$	$\Rightarrow 1.5$
$\boxed{9}$	espressione complessa	$(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b)^3 - \frac{1}{9}ab(2a + 4b) - \frac{8}{27}b^3](3a) + (b^2 - \frac{1}{3}a^2)(b^2 + \frac{1}{3}a^2)$	$\Rightarrow 4$
$\boxed{10}$	espressione complessa	$\{[(-a - 2b)(-a + 2b)(a^2 + 4b^2) + 17b^4](a^4 - b^4) + b^8\}^2$	$\Rightarrow 4$

10/5/97: calcolo letterale

$\boxed{1.}$ $\frac{1}{2}(a^2)^3 + (-3a^3)^2 - [-(-2a^2)^3 (-24x^3y^2)^0 + (-a^3)^2]$ R. $\frac{1}{2}a^6$

$\boxed{2.}$ $-3[(ax)^3]^2 - (-a)^3(-ax^2)^3 + [-(-2ax)^2]^3 - \{-[-(-2ax)^2]^1\}^3 - \{-[-(-2ax)^1]^2\}^3 - \{-[-(-2ax)^3]^2\}^1$ R. $-4a^6x^6$

$\boxed{3.}$ $x^{m+n}y^n : [x^m(xy)^n] + (ax^2)^{2p} : \{ [(-ax)^p]^2x^{2p}\}$ R. 2

$\boxed{4.}$ $[(x + \frac{1}{2}y)(\frac{2}{3}a + b) - \frac{1}{3}ay - bx] (6ax - 12by) + 5by(ax + by)$ R. $4a^2x^2 - b^2y^2$

$\boxed{5.}$ $[(-\frac{2}{3}ay^2)^2 - \frac{1}{3}a^3(-y^2)^2]:[-2(-\frac{1}{3}ay^2)^2] - \frac{3}{2}a + 1$ R. -1

$\boxed{6.}$ $\{ [2m^2n^3 - \frac{1}{4}m^5)(-8m) + 2(2mn + 1)(4m^2n^2 - 2mn + 1)] : 2 + (m^3 + 1) (m^3 - 1)\} : (-2m^3)$ R. $-m^3$

28/5/97: prodotti notevoli

1. $[(x + y)^2 - (x - y)^2]^1 - (2x + y)^2 + (y + 1)^2 + (2x + 1)(2x - 1)$ $\Rightarrow 2$
2. $[4a^2 + (a + 1)^2(a - 1)^2 - (a^2 + 1)^2]\ (a + b)^3 + a^3 + b^3 + 3ab(a + b) - (a + b)^3$ $\Rightarrow 2$
3. $(-\frac{1}{2}a^3 + 4b^3)^3$ $\Rightarrow 2$
4. $\{\ [\ (2x + 3y)^2 - 12xy\ ]\ (4x^2 - 9y^2) + 81y^4 + y\ \}\ (y - 16x^4)$ $\Rightarrow 3$

Estinzione del debito algebra 20/9/02

1. Risolvere l'espressione $\left[\dfrac{\left(\frac{11}{3}+\frac{3}{5}\right):\left(1-\frac{7}{9}\right)+\frac{4}{5}}{2\cdot\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{6}\right)}-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right):\left(-\frac{13}{7}\right)\right]^3\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)$
2. Calcolare i seguenti prodotti notevoli: a) $(\frac{2}{5}a^2-\frac{1}{2}b+4)^2$ b) $(2x-1+x^2-\frac{1}{2}y)\,(2x+\frac{1}{2}y+x^2+1)$

   Fattorizzare i seguenti polinomi: a) $P_1(x,y) = 3x + 4(x-y)^2 + 5x^2 - 3y - 5xy$ b) $P_2(x,y) = 81x^2 + 16y^2 + 9 - 72xy + 54x - 24y$ c) $P_3(x,y) = 81x^2 + 16y^2 - 72xy - 9$
3. Il polinomio $P(x) = 3x^4 + x^3 + 6x^2 - 7x - 3$, come si può facilmente verificare, possiede la radice $\alpha = -\frac{1}{3}$. Scomporlo.
4. Dopo aver scomposto i denominatori calcolare la seguente espressione letterale frazionaria. $F(x) = \dfrac{x-1}{-x^2+x+6} - \dfrac{3}{2x^2+18-12x} + \dfrac{x+1}{4-x^2}$
5. Risolvere la seguente equazione frazionaria: $\left[\dfrac{a-3}{a^2+3a+2}:\left(\dfrac{2}{a+2}-\dfrac{3}{a+1}\right)\right] : \left[\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{a+1}\right):\dfrac{3a+1}{a^2-2a-3}\right] = 0$ dedicata alla verifica della capacità di calcolo con le frazioni algebriche

8/2/02 prodotti notevoli e calcolo letterale

1. In 3 passaggi calcolare la seguente espressione: $\{[-\frac{12}{5}a^2b^2\cdot(-\frac{25}{6}a^3b^3)]:(5ab)^2\}:[\frac{2}{5}\cdot(ab)^6:(a^3b^3)]$

Tendenza a dimenticare le parentesi; da parte di alcuni, incapacità nel calcolo

$\{(10a^5b^5):(25a^2b^2)\}:[\frac{2}{5}a^3b^3] = [\frac{2}{5}a^3b^3]:[\frac{2}{5}a^3b^3] = 1$

2. In 2 passaggi calcolare la seguente espressione: $(\frac{3}{4}x^a+\frac{1}{2}y^{3b}+\frac{1}{8}x^{2a}y^{2b})-(\frac{9}{8}x^{2a}y^{2b}+y^{3b}+x^{2a})+(x^{2a}y^{2b}+\frac{1}{2}y^{3b}+x^{2a})$

Dopo aver eliminato le parentesi prestare attenzione alla riduzione dei termini simili (qualcuno sbaglia nel sommare algebricamente le frazioni)

$\frac{3}{4}x^a+\frac{1}{2}y^{3b}+\frac{1}{8}x^{2a}y^{2b}-\frac{9}{8}x^{2a}y^{2b}-y^{3b}-x^{2a}+x^{2a}y^{2b}+\frac{1}{2}y^{3b}+x^{2a} = \frac{3}{4}x^a$

3. In 4 passaggi calcolare la seguente espressione $-\frac{2}{3}m\{m^2-[3n-(m-\frac{n}{9})-\frac{2}{3}m(n-\frac{3}{4}m)]\}-\frac{1}{9}m(-3m^2+n^2-2nm)$

$-\frac{2}{3}m\{m^2-[3n-m+\frac{n}{9}-\frac{2}{3}mn+\frac{1}{2}m^2]\}+\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{9}mn^2+\frac{2}{9}m^2n = -\frac{2}{3}m\{\frac{1}{2}m^2-\frac{28}{9}n+m+\frac{2}{3}mn\}+\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{9}mn^2+\frac{2}{9}m^2n = -\frac{1}{3}m^3+\frac{56}{27}mn-\frac{2}{3}m^2-\frac{4}{9}m^2n+\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{9}mn^2+\frac{2}{9}m^2n = \frac{56}{27}mn-\frac{2}{3}m^2-\frac{2}{9}m^2n-\frac{1}{9}mn^2$

Nessuno ha operato la riduzione $3n+\frac{n}{9}=\frac{28}{9}n$

4. Calcolare i seguenti prodotti notevoli:
   a) $(\frac{2}{5}a^2-\frac{1}{2}b+4)^2$ b) $(2x-1+x^2-\frac{1}{2}y)(2x+\frac{1}{2}y+x^2+1)$ c) $(-x^3+\frac{1}{3}ax^2)^3$ d) $(\frac{1}{2}a-2b)^5$

a) quadrato di un trinomio (quadrati e doppi prodotti con il segno indotto dai prodotti stessi) $\frac{4}{25}a^4+\frac{1}{4}b^2+16-\frac{2}{5}a^2b+\frac{16}{5}a^2-4b$

b) differenza dei quadrati (scrivere la differenza e poi svolgere i quadrati senza dimenticare i doppi prodotti): $(2x+x^2)^2-(\frac{1}{2}y+1)^2$ $=4x^2+x^4+4x^3-\frac{1}{4}y^2-1-y$

c) prodotto notevole (molti non lo hanno studiato o non si sono esercitati: è il caso più semplice di triangolo di Tartaglia con coefficienti 1,3, 3, 1 e con i segni indotti dagli elevamenti a potenza; vista la quantità di errori faccio esplicitamente il passaggio che, a regime, va fatto a mente). Segnalo numerosi errori nell'elevamento a potenza di binomi segno di scarsa dimestichezza con le proprietà delle potenze $(-x^3)^3+3(-x^3)^2(\frac{1}{3}ax^2)+3(-x^3)(\frac{1}{3}ax^2)^2+(\frac{1}{3}ax^2)^3 = -x^9+x^8a-\frac{1}{3}a^2x^7+\frac{1}{27}a^3x^6$

d) richiede la determinazione preventiva dei coefficienti per l'esponente 5 che calcolo partendo dal 3: 1,3,3,1 $\Rightarrow$ 1, 4, 6, 4, 1 $\Rightarrow$ 1, 5, 10, 10, 5, 1. Applicando la relazione $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} c_i x^{n-i} y^i$ dove i c_i sono i coefficienti del triangolo di Tartaglia si ha: $(\frac{1}{2}a-2b)^5 =$ $(\frac{1}{2}a)^5+5(\frac{1}{2}a)^4(-2b)+10(\frac{1}{2}a)^3(-2b)^2+10(\frac{1}{2}a)^2(-2b)^3+5(\frac{1}{2}a)(-2b)^4+(-2b)^5 = \frac{1}{32}a^5-\frac{5}{8}a^4b+5a^3b^2-20a^2b^3+40ab^4-32b^5$

5. Prestando attenzione a non svolgere conti inutili alla fine svolgere in 3 passaggi la seguente espressione: $[a^2-(a-b)(a+b)+b^3]^3-(1+b)^3[(b^3+1)(b^3-1)+1]$

Attenzione ai passaggi finali in cui si sfrutta la proprietà delle potenze secondo cui il prodotto di potenze con lo stesso esponente dà una potenza ancora con lo stesso esponente avente come base il prodotto delle basi per evitare i conti inutili (nessuno ha fatto così, ma a parte ciò si sono visti anche molti errori nello sviluppo del cubo oltre che eliminazioni indebite di parentesi ed errori di segno $[a^2-a^2+b^2+b^3]^3-(1+b)^3[b^6-1+1] = [b^2+b^3]^3-(1+b)^3b^6 = [b^2+b^3]^3-[(1+b)(b^2)]^3 = 0$

6. Svolgere in 3 passaggi la seguente espressione: $[\frac{1}{2}ab-(\frac{1}{4}a+b)^2+(b+\frac{1}{4}a)(b-\frac{1}{4}a)]a+(b+\frac{1}{2}a)^3-b^2(\frac{3}{2}a+b)$

Attenzione alla eliminazione dei termini simili nella prima [ ] e anche alla eliminazione dei termini successivi

$[\frac{1}{2}ab-\frac{1}{16}a^2-b^2-\frac{1}{2}ab+b^2-\frac{1}{16}a^2]a+b^3+\frac{3}{2}ab^2+\frac{3}{4}a^2b+\frac{1}{8}a^3-\frac{3}{2}ab^2-b^3 = -\frac{1}{8}a^3+\frac{3}{4}a^2b+\frac{1}{8}a^3 = \frac{3}{4}a^2b$

Recupero 12/3/02 operazioni di calcolo letterale e prodotti notevoli

Scrivere il coefficiente e la parte letterale dei seguenti monomi:

a) $3x^2(-\frac{2}{3}yx^{-1})^2$

b) $-\frac{2}{3}x(-y)^2(-x)^3$

c) $-[-(-\frac{1}{2})^2x]^3$

1. Moltiplicazioni e divisioni tra monomi

a) $(-\frac{2}{3}xy)^2(-\frac{9}{8}xy)$

b) $(-x)(-xy)(-y^2):(\frac{2}{3}x^2y^2)$

c) $(-\frac{1}{2}x^4y^3):(3x^2y):(-\frac{1}{4}xy)$

2. Addizione di monomi simili

a) $\frac{2}{3}ab - \frac{4}{9}a^2b + \frac{5}{6}a^2b - \frac{3}{4}ab - ab$

b) $\frac{2}{3}ab - (-\frac{1}{9}ab) - \frac{2}{9}ab + ab$

c) $ab(-\frac{3}{4}) + \frac{1}{4}ab - (-\frac{1}{8}ab)$

3. Semplificare la seguente espressione

$[\frac{2}{3}ab - (-\frac{1}{9}ab)](-ab)^2:(\frac{1}{3}ab) - \frac{2}{5}a^2b(\frac{1}{3}b - b)$

4. Calcolare i seguenti prodotti notevoli

a) $(\frac{2}{3}a - \frac{1}{4}b)(\frac{1}{4}b + \frac{2}{3}a)$

b) $(\frac{2}{3}a - \frac{1}{4}b)(\frac{1}{4}b - \frac{2}{3}a)$ dire che prodotto notevole è e quanto viene

c) $(\frac{2}{3}a - \frac{1}{4}b)^3$

d) $(\frac{2}{3}a - \frac{1}{4}b)^4$

e) $(\frac{2}{3}a - \frac{1}{4}b + 2c)^2$

15/3/2002 Scomposizioni e frazioni algebriche

1) Fattorizzare i seguenti polinomi

a) $P_1(x,y) = 3x + 4(x–y)^2 + 5x^2 – 3y – 5xy$

raccoglimento parziale si ottiene $3(x–y) + 4(x–y)^2 + 5x(x – y) = (x – y)(3 + 4x – 4y + 5x) = (x – y)(3 + 9x – 4y)$

In genere non si è vista la presenza del fattore comune $(x – y)$.

Come più volte detto a lezione non è detto che i termini si presentino già ordinati e pronti per la scomposizione

b) $P_2(x,y) = 81x^2 + 16y^2 + 9 – 72xy + 54x – 24y$

quadrato di un trinomio (3 quadrati e 3 doppi prodotti; prestare attenzione ai segni e impostare la cosa come si fa in classe con le frecce verticali di riconoscimento dei quadrati) si ha $(9x – 4y + 3)^2$

Ovviamente va bene anche l'espressione ottenuta per cambiamento di segno dentro al quadrato $(–9x + 4y –3)^2$

Ricordarsi di verificare che i doppi prodotti siano tali

c) $P_3(x,y) = 81x^2 + 16y^2 – 72xy – 9$

differenza di quadrati si ha $(9x – 4y)^2 – 3^2 = (9x – 4y + 3)(9x – 4y – 3)$

qualcuno ha riconosciuto il quadrato ma poi non ha scomposto, molti non hanno visto la differenza di qìuadrati nonostante i termini fossero stati presentati già ordinati.

d) $P_4(x,y) = –2x^2 + xy + y^2$

trinomio caratteristico: si ordina in y, ottenendo $y^2 + xy – 2x^2$ si calcola il $\Delta = x^2 + 8x^2 = (3x)^2$ (quadrato perfetto) e si cercano due monomi con somma x e prodotto $– 2x^2$, si ottiene così $(y + 2x)(y – x)$

Se non si ordina in y la scomposizione è analoga ma con qualche complicazione in più.

Segnalo la tendenza a non calcolare il Δ, a dimenticarsi della variabile x, a dimenticarsi di somma e prodotto, a sbagliare il risultato; insomma, di tutto di più…

2) Determinare il m.c.m. P(x,y) dei 4 polinomi dell'esercizio precedente

$P(x,y) = (x – y)(9x – 4y + 3)^2(9x – 4y – 3)(y + 2x)$

Ricordo che il minimo comune multiplo è il prodotto dei fattori comuni e non comuni con il massimo esponente e richiede la preventiva scomposizione dei polinomi.

3) Il polinomio $P(x) = 3x^4 + x^3 + 6x^2 – 7x – 3$, come si può facilmente verificare, possiede la radice $\alpha = -\frac{1}{3}$. Scomporlo.

Si osserva subito che $P(1) = 3+1+6–7–3 = 0$. Inoltre come indicato dal testo $P(-\frac{1}{3}) = \frac{3}{81} - \frac{1}{27} + \frac{2}{3} + \frac{7}{3} - 3 = 0$

Si ha pertanto eseguendo le divisioni con il metodo di Ruffini:

	3	1	6	–7	–3
1		3	4	10	3
	3	4	10	3	0
$-\frac{1}{3}$		–1	–1	–3	
	3	3	9	0	

Dunque $P(x) = 3x^4 + x^3 + 6x^2 – 7x – 3 = (x–1)(x + \frac{1}{3})(3x^3+3x^2+9) = 3(x–1)(x + \frac{1}{3})(x^2+x+3) = (x–1)(3x + 1)(x^2+x+3)$. Il trinomio x^2+x+3ha $\Delta = 1 – 12 < 0$ e pertanto non è ulteriormente scomponibile.

Osservazioni: prima di eseguire la divisione è obbligatoria la sostituzione per verificare l'annullamento del resto. Ricordarsi del Δ quando si arriva al trinomio di II grado.

4) Calcolare la seguente espressione letterale frazionaria

$$F(x) = \frac{x-1}{2x^2+3x-2} + \frac{x+1}{4-x^2} + \frac{2x+1}{4x^2-4x+1}$$

I 3 denominatori si scompongono con trinomio caratteristico, differenza di quadrati e quadrato del binomio.

Infatti $\Delta = 9 + 16 = 25 = 5^2$. La scomposizione si può eseguire o con Ruffini o per somma e prodotto dopo aver messo in evidenza il 2. Si ottiene $2x^2 + 3x – 2 = (2x–1)(x+2)$; $4–x^2 = (2–x)(2+x)$ mentre $4x^2 – 4x +1 = (2x – 1)^2$

A questo punto si può calcolare il m.c.m. e si ottiene:

$$\frac{(x-1)(2x-1)(2-x) + (x+1)(2x-1)^2 + (2x+1)(4-x^2)}{(2x-1)^2(x+2)(2-x)} = \dots = \frac{6x^2 - 2x + 7}{(2x-1)^2(x+2)(2-x)}$$

Il numeratore non è ulteriormente scomponibile perché $\Delta = 4 – 168 < 0$ e dunque l'esercizio è finito.

Al posto dei … ci sono due noiosi passaggi di moltiplicazione. Per la eliminazione dei termini simili consiglio di procedere con $x^3(….) + x^2(….) + x (….) + (….)$

5) Facoltativo. Il seguente polinomio non corrisponde alla potenza di un binomio a causa della difformità di valore di 2 coefficienti. Individuarli e scrivere il valore che dovrebbero avere affinché il polinomio possa essere la potenza di un binomio. Scrivere tale potenza.

$32x^5 - 80x^4y + 20x^3y^2 - 5x^2y^3 + \frac{5}{4}xy^4 - \frac{1}{32}y^5$

Visti i segni e il fatto che $32 = 2^5$ mentre $\frac{1}{32} = (\frac{1}{2})^5$ bisogna scrivere i coefficienti del triangolo di Tartaglia e calcolare i termini dello sviluppo del binomio:

1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Si tratta di $(2x - \frac{1}{2} y)^5 = 32x^5 - 40x^4y + 20x^3y^2 - 5x^2y^3 + \frac{5}{8}xy^4 - \frac{1}{32}y^5$ e i coefficienti sbagliati sono il II che vale – 40 e il IV che vale $+\frac{5}{8}$

Descrittori e griglia di correzione

Sa scomporre per riconoscimento trinomio caratteristico ⇒ 3	
Sa scomporre per differenza di quadrati ⇒ 2	
Sa scomporre per riconoscimento di quadrati ⇒ 2	
Sa scomporre per raccoglimenti parziali ⇒ 3	
Sa scomporre con uso del teorema e dell'algoritmo di Ruffini ⇒ 2 + 2 + 2	
Sa calcolare correttamente il m.c.m. ⇒ 1	
Sa semplificare espressioni frazionarie con uso delle tecniche di fattorizzazione, moltiplicare e ridurre a forma normale dei polinomi. ⇒ 3 + 2 + 1	
Sa utilizzare l'algoritmo per la potenza del binomio ⇒ 3	

21/3/2002 Scomposizioni e frazioni algebriche recupero

1) Fattorizzare i seguenti polinomi
   a) $P_1(x,y) = -3y + 2(x-y)^2 + x^2 + 3x - y^2$
   b) $P_2(x,y) = 9x^2 - y^2 + 9 + 18x$
   c) $P_3(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 5xy$
   d) $P_4(x,y) = 36x^2 + 72x + 24xy + 24y + 4y^2 + 36$
2) Determinare il m.c.m. P(x,y) dei 4 polinomi dell'esercizio precedente
3) Il polinomio $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 18x + 18$, come si può e si deve facilmente verificare, possiede la radice $\alpha = \frac{3}{2}$. Scomporlo.
4) Dopo aver scomposto i denominatori calcolare la seguente espressione letterale frazionaria. $F(x) = \frac{x-1}{-x^2+x+6} - \frac{3}{2x^2+18-12x} + \frac{x+1}{4-x^2}$

Descrittori e griglia di correzione

Sa scomporre per riconoscimento trinomio caratteristico ⇒ 3	
Sa scomporre per differenza di quadrati ⇒ 2	
Sa scomporre per riconoscimento di quadrati ⇒ 2	
Sa scomporre per raccoglimenti parziali ⇒ 3	
Sa scomporre con uso del teorema e dell'algoritmo di Ruffini ⇒ 2 + 2 + 2	
Sa calcolare correttamente il m.c.m. ⇒ 1	
Sa semplificare espressioni frazionarie con uso delle tecniche di fattorizzazione, moltiplicare e ridurre a forma normale dei polinomi. ⇒ 3 + 2 + 1	

15/5/2002: verifica finale su equazioni e calcolo letterale

1. Dati i polinomi $P(y) = y^4 - y^3 - y^2 + y - 4$ e $D(y) = y^2 + y + 1$ eseguire la divisone $P(y) : D(y)$ determinando il quoziente $Q(y)$ e il resto $R(y)$. Scrivere il risultato nella forma che evidenzia il legame reciproco tra i diversi polinomi coinvolti.

y^4	$-y^3$	$-y^2$	$+y$	-4	y^2	$+y$	$+1$
$-y^4$	$-y^3$	$-y^2$			y^2	$-2y$	
==	$-2y^3$	$-2y^2$	$+y$	-4			
	$+2y^3$	$+2y^2$	$+2y$				
	==	==	$+3y$	-4			

Il quoziente vale $Q(y) = y^2 - 2y$ e il resto $R(y) = 3y - 4$. Si ha $D(y)\,Q(y) + R(y) = P(y)$

Note di correzione: Non è corretto scrive $P(y):D(y) = Q(y) + R(y)$. Se fosse così i due polinomi sarebbero divisibili e il quoziente sarebbe $Q(y) + R(y)$.

2. Data la frazione algebrica $F(x) = \dfrac{4x^4 + 4x^3 - 80x^2}{8x^5 + 32x^4 - 40x^3}$ semplificarla e indicare le condizioni da esplicitare per la semplificazione.

$F(x) = \dfrac{4x^4 + 4x^3 - 80x^2}{8x^5 + 32x^4 - 40x^3} = \dfrac{4x^2(x^2 + x - 20)}{8x^3(x^2 + 4x - 5)} = \dfrac{4x^2(x + 5)(x - 4)}{8x^3(x + 5)(x - 1)} = \dfrac{x - 4}{2x(x - 1)}$ con la condizione $x \neq 0 \wedge x \neq -5$

Note di correzione: la condizione $x \neq 1$ non è indispensabile perché è implicita nella scrittura della frazione. Imparare a scomporre con il trinomio caratteristico dopo aver calcolato il Δ.

3. Risolvere la seguente equazione frazionaria: $\left[\dfrac{a - 3}{a^2 + 3a + 2} : \left(\dfrac{2}{a+2} - \dfrac{3}{a+1}\right)\right] : \left[\left(\dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{a + 1}\right) : \dfrac{3a + 1}{a^2 - 2a - 3}\right] = 0$ dedicata alla verifica della capacità di calcolo con le frazioni algebriche

$\left[\dfrac{a - 3}{(a + 2)(a + 1)} : \dfrac{2a + 2 - 3a - 6}{(a+2)(a + 1)}\right] : \left[\dfrac{a + 1 + 2a}{2a\,(a + 1)} : \dfrac{3a + 1}{(a - 3)(a + 1)}\right] = 0 \Leftrightarrow \quad a \neq -1 \wedge a \neq -2 \wedge a \neq 3$

$\left[\dfrac{a - 3}{(a + 2)(a + 1)} \cdot \dfrac{(a+2)(a + 1)}{-a - 4}\right] : \left[\dfrac{3a + 1}{2a\,(a + 1)} \cdot \dfrac{(a - 3)(a + 1)}{3a + 1}\right] = 0 \Leftrightarrow \qquad a \neq -1/3$

$-\dfrac{a - 3}{a + 4} : \dfrac{a - 3}{2a} = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2a}{a + 4} = 0 \wedge a \neq 0 \Leftrightarrow a \in \varnothing$

Note di correzione: in diverse persone si sono dimenticati della condizione $a \neq 0$ che rendeva non accettabile la soluzione

4. Risolvere la seguente equazione intera con coefficienti numerici frazionari dedicata alla verifica della capacità di calcolo efficiente ed ordinato con le frazioni: $\dfrac{(1-x)(1+x)}{2} - \dfrac{7}{9} - \dfrac{x - 8}{3} = \dfrac{1}{9}x - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3x + 1}{3}\right)^2 + 2\left(\dfrac{x + 1}{3} - \dfrac{x - 2}{2}\right)$

$\dfrac{1}{2}(1 - x^2) - \dfrac{7}{9} - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3} = \dfrac{1}{9}x - \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 + 2\dfrac{2x + 2 - 3x + 6}{6} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{7}{9} - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{9}x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow$

$\left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\right)x + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{9} + \dfrac{8}{3} + \dfrac{1}{18} - \dfrac{8}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{9}x + \dfrac{9 - 14 + 1}{18} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{18} \cdot \dfrac{9}{2} = 1$

Note di correzione: diffusi gli errori sui due banali prodotti notevoli presenti; tendenza a non ridurre i polinomi e a ricopiare espressioni semplificabili; nessuno lavora con le frazione; guardate che alla lunga ciò diventa una penalizzazione in contesti nei quali bisogna saper calcolare con efficienza e stile.

5. Risolvere la seguente equazione frazionaria di grado superiore al primo e fattorizzabile: $\dfrac{(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 3x + 2)}{(x - 2)(x - 1)} = 0$

$\dfrac{(x - 2)(x - 3)(x - 1)(x - 2)}{(x - 2)(x - 1)} = 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \wedge x \neq 1 \wedge (x - 3)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Note di correzione: In questo esercizio la corretta posizione del dominio implicava la non accettabilità della soluzione x = 2 e l'esercizio aveva questo elemento come tema qualificante.

6. Un quadrilatero ABCD ha area $\sigma = 75\ cm^2$ e la diagonale AC lo divide in due triangoli tali che i $\dfrac{5}{8}$ dell'area del primo sommata alla metà dell'area del secondo dà $40\ cm^2$. Quanto valgono le aree dei due triangoli?

Indicata con x l'area del primo dei due triangoli si ha:

$\frac{5}{8}x + \frac{1}{2}(75 - x) = 40 \Leftrightarrow x(\frac{5}{8} - \frac{1}{2}) = 40 - \frac{75}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{8}x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 20 \text{ cm}^2$

L'altro triangolo ha area 75 – 20 = 45 cm^2.

settembre 95

$\boxed{1}$ $-[-(-\frac{1}{2}ab)]-(-4a^2)-\frac{1}{3}b^2-\{-[-(-\frac{1}{3}ab)-\frac{1}{2}b^2-(-\frac{1}{6}ab)+(-\frac{1}{6}b^2)]\}$	$\Rightarrow 2$
$\boxed{2}$ $[-(-2ax)^2]^3;\ -\{-[-(-2ax)^2]^1\}^3;\ -\{-[-(-2ax)^1]^2\}^3;\ -\{-[-(-2ax)^3]^2\}^1$	$\Rightarrow 3$
$\boxed{3}$ $[2m(2m-3n)+6n(m-\frac{3}{2}n)+(8n^2-3m^2)+(n^2-1)](-2m)$	$\Rightarrow 1.5$
$\boxed{4}$ $(a+b)(a^2+b^2)(a-b)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$	$\Rightarrow 2$
$\boxed{5}$ $[3m^2-½n)(2x+3)+nx-9m^2](2m^2x-2n)-m^2x(12m^2x-15n)$	$\Rightarrow 3$
$\boxed{6}$ $(½x+xy)^2-(½x)^2-x^2[(y+1)^2-(y+1)]+\frac{2}{3}x[y(x+y)(x-y)+y^3]$	$\Rightarrow 3$
$\boxed{7}$ $\{[(a+b+c)(a+b-c)-2ab](a^2-b^2+c^2)-2b^2c^2+c^4\}(a^4+b^4)$	$\Rightarrow 4$

ottobre 95

1.	Eseguire la seguente divisione tra polinomi Q(a)=N(a) : D(a) $N(a)=a^6-4a^5+4a^4+8a^3-29a^2+32a-12$; $D(a)=a^2-2a+3$
2.	Usando ripetutamente il teorema ed il metodo di divisione di Ruffini scomporre il seguente polinomio: $Q(a)=a^4-2a^3-3a^2+8a-4$
3.	In base ai risultati degli esercizi 1 e 2 scomporre il polinomio N(a)
4.	Attraverso la metodologia dei raccoglimenti parziali scomporre il seguente polinomio: $P(a)=a^3+a^2c+a^2b-bc-ab-b^2$
5.	Scomporre il seguente polinomio sfruttando i prodotti notevoli: $P(a) = a^3 - (a - 1)^2 - 1$
6.	Dopo aver scelto se sviluppare e successivamente raccogliere, oppure usare la somma e differenza di cubi e poi raccogliere, fattorizzare la seguente espressione: $P(a,b,c)=(a-b)^3+(b-c)^3-(a-c)^3$

ottobre 97

1 ⇒ 2	2 ⇒ 3	3 ⇒ 2	4 ⇒ 4	5 ⇒ 2	6 ⇒ 2	7 ⇒ 3	totale 18

Fattorizzare i seguenti polinomi:

1. $2ab^2(a - 2b) - (a - 2b)^2a^3b^3 + ab^2(2b - a)$

2. $(a^2 - 2ab + b^2)(2x^3 - 3x^2 + x) + (a - b)^2(x^2 + 2x^3) - (b - a)^2(3x^3 + 5x)$

3. $\frac{3}{4}ab - 3a + \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{2}b$

4. $2xy^2 - 3x^2y - 2ab(3x - 2y - 1) + xy - (xy + 2ab)^2$

5. $25(x - y)^2 - 16(x + y)^2$

6. $(a^2 - b^2)(c + d) + (a - b)(c^2 - d^2)$

7. $5x^5y - 10x^3y^3 + 5xy^5$

novembre 97 (recupero)

$1 \Rightarrow 4$	$2 \Rightarrow 1$	$3 \Rightarrow 2$	$4 \Rightarrow 3$	$5 \Rightarrow 1$	$6 \Rightarrow 4$	totale 15

1. Eseguire la seguente divisione N(x) : D(x) scrivendo al termine il quoziente Q(x) e il resto R(x) essendo dati: $N(x) = \frac{2}{3}x^5 - \frac{7}{4}x^4 - \frac{29}{12}x^3 + \frac{199}{12}x^2 - 23x - \frac{1}{3}$ e $D(x) = x^2 - 3x + 5$.
Ricordarsi di semplificare le frazioni $Q(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 5x + \frac{1}{3}$ $R(x) = 3x - 2$

2. Ridurre e quindi fattorizzare il seguente polinomio: $P(x) = \frac{2}{3}x^2y^2 - \frac{4}{9}x^3y + \frac{8}{3}xy^3 + \frac{8}{9}x^3y$
$P(x) = \frac{2}{3}xy(xy + \frac{2}{3}x^2 + 4y^2)$

3. Fattorizzare il seguente polinomio: $N(x,y) = (2x - y)(x^2 - 2xy + y^2) + (x - y)(4x^2 - 4xy + y^2)$
$N(x,y) = (2x - y)(x - y)(3x - 2y)$

4. Ridurre e fattorizzare il seguente polinomio: $N(x,y) = (4x - y)^2 + 3(y - 4x)^2 - (5x - 3y)^2$
$N(x,y) = (3x + y)(13x - 5y)$

5. Fattorizzare il seguente polinomio: $N(x) = 6x^3 + 2x - 3 - 9x^2$
$N(x) = (3x^2 + 1)(2x - 3)$

6. Fattorizzare il seguente polinomio: $P(a,b) = (a - b)^3 - (b - a)^2(a - 2b) + 3(a - b)(b^2 - a^2)$
$P(a,b) = -(a - b)^2(3a + 2b)$

novembre 96

1.	Eseguire la seguente divisione tra polinomi $Q(x)=N(x) : D(x)$ $N(x)=2x^5-5x^4-12x^3+23x^2+16x-12$; $D(x)=2x^2-7x+3$	$\Rightarrow$ 3
2.	Scomporre i polinomi $Q(x)$ e $D(x)$ dell'esercizio precedente ed utilizzare i risultati trovati per scomporre il polinomio $N(x)$	$\Rightarrow$ 2 + 2
3.	Scomporre il seguente polinomio: $P(a,b) = a^6-b^6+3ab(a+b)(a^3-b^3)$	$\Rightarrow$ 3
4.	Scomporre il seguente polinomio: $P(a,b) = a^4-a^2(b^2+1)+b^2$	$\Rightarrow$ 3
5.	Scomporre il seguente polinomio in un prodotto di due trinomi attraverso la metodologia dei raccoglimenti parziali aggiungendo e togliendo gli elementi che mancano. Iniziare con $+a^2 -a^2$: $P(a,b) = a^3+a^2b-ab+b+1$	$\Rightarrow$ 4

novembre 95

1.	Dati i polinomi $P(x) = 2x^2 - 10x + 12$; $Q(x) = -3x^2 + 12$; $R(x) = 5x^2 - 10x$ determinare il massimo comune divisore S(x) e il minimo comune multiplo T(x)	3p
2.	Scomporre tramite raccoglimenti parziali o con il metodo di Ruffini il seguente polinomio: $P(x) = x^3 - ax^2 - x + a$	2p
3.	Semplificare le seguenti frazioni algebriche: $F(a,b) = \dfrac{a^2 - 9ab + 14b^2}{a^2 - ab - 2b^2}$; $G(a,b) = \dfrac{(a - b)^2(a - 2)}{(b - a)^2(2 - a)}$; $H(a,b) = \dfrac{(a - b)^3}{(b - a)^2}$; $K(a,b) = \dfrac{(a^2 - b^2)}{(b^3 - a^3)}$	5p
4.	Calcolare la seguente espressione frazionaria $F(x) = \dfrac{2}{x + 4} - \dfrac{x - 3}{x^2 - 4x + 16} - \dfrac{x^2 + 80}{x^3 + 64}$	4p.
5.	Calcolare la seguente espressione frazionaria prestando attenzione ai segni ed alle possibili semplificazioni $G(a,b) = \dfrac{a^2}{a^2 - b^2} + \dfrac{b^2}{b^2 - a^2} - \dfrac{ab - b^2}{-a^2 - b^2 + 2ab}$	4p.

dicembre 97

1. Completare le seguenti semplici eguaglianze:

$\dfrac{a}{\dfrac{b}{c}} =$	$\dfrac{\dfrac{a}{b}}{c} =$	$-\dfrac{-a}{-b} =$	$(-ab)^2 =$	$\dfrac{a+b}{a-b} = 1 + \dfrac{\quad}{a-b}$	$a+b = a\left(\ldots + \dfrac{}{}\right)$	$-\dfrac{a-c}{a-b} = \dfrac{\quad}{b-a}$
⇒ 0.5	⇒ 0.5	⇒ 0.5	⇒ 0.5	⇒ 1	⇒ 0.5	⇒ 0.5

2. Scomporre il seguente polinomio in prodotto di polinomi di I grado: $P(x) = 2x^4+x^3-8x^2-x+6$ ⇒ 3

3. Calcolare la seguente espressione specificando man mano le diverse condizioni di esistenza:

$$F(a) = \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{a^2}\right)\left(\frac{2a^2+1}{a^2-a} + \frac{2}{1-a} - \frac{a}{a-1}\right)\frac{a^2}{2-a} \qquad \Rightarrow 3$$

4. Calcolare la seguente espressione specificando man mano le diverse condizioni di esistenza:

$$F(a) = \left(\frac{a+1}{a-2} + \frac{3a-5}{a+3} - \frac{3a^2+7}{a^2+a-6}\right)\frac{a^2+4a+3}{a^2-4a-12} \qquad \Rightarrow 4$$

gennaio 97

Svolgere gli esercizi 1 e 2 (voto separato) e 3 e 4 oppure 5 e 6

1. In corrispondenza delle seguenti uguaglianze scrivere vero o falso: (1/1/1/1/1)

$\dfrac{ab + ac}{a^2 b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{c}{a b}$		$\dfrac{ab + c}{a d} = \dfrac{b + c}{d}$		$\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b c}$		$\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a b}{c}$		$\dfrac{x + y}{x y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$	

2. Sono date le frazioni $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ e si sa che mcm(n,q) = a e che che MCD(r,s) = b. Sommare e semplificare le seguenti frazioni: (2/2)

$\dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{q} = \dfrac{\qquad\qquad}{a}$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{r}{s} = \dfrac{\qquad}{\qquad}$

3. Usando teorema del resto e metodo di divisione di Ruffini scomporre il polinomio $P(x)= 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9$

4. Calcolare la seguente espressione algebrica utilizzando la scomposizione precedente:

$$\frac{2 - x}{x^2 - 4x + 3} + \frac{3x - 1}{2x^2 - 3x - 9} - \frac{2x^2 - 3x + 4}{2x^3 - 5x^2 - 6x + 9}$$

5. Calcolare la seguente espressione algebrica: $\left(\dfrac{x + 1}{x} - \dfrac{x}{x + 1}\right) : \left(\dfrac{6}{x - 1} - \dfrac{2}{x}\right) : \dfrac{2}{x^2 - 1}$

6. Prestando attenzione alle semplificazioni preventive, calcolare la seguente espressione algebrica:

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} + \frac{(x^2 - 4)(x - 3)}{x^2 - x - 6} + \frac{(x - 4)(x^2 + 6x + 9)}{x^2 - x - 12}$$

gennaio 96

1	Risolvere la seguente espressione algebrica frazionaria: R. $\frac{16}{2a+1} \Rightarrow 4$	$\left(1-\frac{1}{a}\right)^2\left(3-a+\frac{11a^2+a-2}{2a+1}\right)\left[\left(\frac{4a}{3a+1}-\frac{a+1}{a}\right):\left(a-3-\frac{a+1}{a}\right)+\frac{1}{a-1}\right]^2$

2	Risolvere la seguente espressione algebrica frazionaria: R. $\frac{2(a+1)^2}{4a^2-1} \Rightarrow 5$	$\left(\frac{a^3-2}{2a^3}+\frac{a^2+1}{a^2}-\frac{3a-4}{2a}\right)^2:\frac{8a^3-1-12a^2+6a}{a^6}-\frac{a^2+2a+1}{2a+1}$

3	Risolvere la seguente equazione numerica a coefficienti frazionari lavorando con le frazioni: R. $x = 3 \Rightarrow 2$	$(x+1)^2 - x(x+2) + 2\frac{3-x}{3} = \frac{1}{2}(5-x) + 3\frac{x-3}{4}$

marzo 95

1) Semplificare le seguenti espressioni, scrivendo il risultato in forma fattorizzata:

$[x^4 (3x+4)^2 : (-2x)^3 + 2x] : (-3x)^2 - x\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}$	$2(a + b)^3 - 10x (a + b)^2 - 3ax - 3bx$
$15x - 5y - 9x^2 - y^2 + 6xy$	$6a - 12b + (2a + 8b)(a - 2b) - 2(2a - 4b)^2$

2) Semplificare le seguenti espressioni frazionarie:

$\frac{x^4 + x^2 - (y^4 + y^2)}{x^3 + xy^2 + x - y(x^2 + y^2 + 1)}$	$\frac{a^2 + ab - 6b^2}{a^2 - 4ab + 4b^2}$

3) Calcolare la seguente espressione algebrica:

$$\frac{x + 2}{x^2 + 5x + 4} : \left(\frac{2}{x + 4} - \frac{1}{x + 1}\right) : \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} : \frac{2x + 1}{x^2 + 3x + 2}\right)\right]$$

4) Calcolare la seguente espressione algebrica dopo aver eseguito le possibili semplificazioni

$$\left[\frac{2(a^2 - 1) + 3(a + 1)}{a^2 + 2a + 1} - \frac{a^2 - 1 - 3(a - 1)}{a^2 - 2a + 1}\right] : \frac{a^2 + 1}{1 - a^2}$$

marzo 98

Esercizi obbligatori 1, 2 e uno a scelta dal 3 al 5

1 ⇒ 2.5	2 ⇒ 4	3 ⇒ 3.5	4 ⇒ 4	5 ⇒ 3	totale

$\boxed{1.}$ Risolvere la seguente equazione frazionaria: $\frac{2}{(x+3)^2} - \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$ Risposta: $x = -\frac{1}{3}$

$\boxed{2.}$ Risolvere e discutere al variare del parametro a la seguente equazione a coefficienti frazionari:

$\frac{2a + 3}{4 - a^2} = \frac{(2 - a)\,x}{a^2 + 4a + 4} - \frac{x}{a + 2} - \frac{3}{a^2 - 4}$ Risposta: casi $a=0$, $a=2$, $a=-2$; $a\neq 0 \wedge a\neq 2 \wedge a\neq -2$

$\boxed{3.}$ Dato il triangolo ABC rettangolo in B si sa che $\overline{AC} + \overline{AB} = 8$ cm e $\overline{AC} - \overline{AB} = 2$ cm. Determinare i 3 lati, la lunghezza della mediana BM, della altezza BH e dei segmenti AH e HC. Risposta: $\overline{AC} = 5$ cm

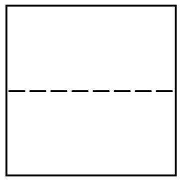
$\boxed{4.}$ Si sa che $x^3 + y^3 = 8100$ e che $x + y = 30$. Usando le proprietà dei prodotti notevoli e le equazioni determinare $x^2 + y^2$ Risposta $x^2 + y^2 = 480$

$\boxed{5.}$ In un trapezio ABCD la base minore CD è tale che $\overline{CD} = \frac{2}{3}\overline{AB}$. Inoltre l'area σ_{ABD} del triangolo ABD vale 24 cm^2. Quanto vale l'area del trapezio? Risposta 40 cm^2

5 marzo 2007 1F PNI calcolo letterale e matematica generale (annullato)

1) x, y, z sono degli interi positivi tra loro diversi e si sa che $xyz = (xy)^2$. Di quale proprietà deve godere z rispetto a x e y? Perché z non può mai valere 1?

Se x e y sono interi positivi il loro prodotto è diverso da zero e dunque si può semplificare per xy ottenendo z = xy dunque z è il prodotto di due interi positivi tra loro diversi e dunque non può fare 1



2) Un foglio di carta quadrato viene piegato a formare due rettangoli uguali di perimetro 18 cm. Quanto vale l'area del quadrato?

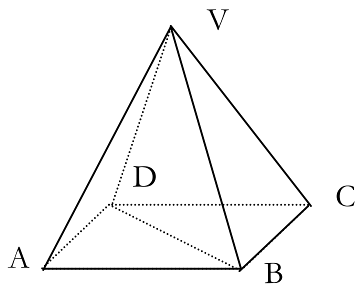
se indichiamo con b il lato del quadrato sarà 2b + b = 18 cm e dunque b = 6 cm e $\sigma = 36\ cm^2$

3) Si considerino i seguenti 8 numeri 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9. Qual è la cifra finale del loro prodotto? Spiega il ragionamento.

Nel prodotto l'ultima cifra è influenzata solo dal prodotto delle ultime cifre e dunque:

$1 \cdot 2 = 2$ e $3 \cdot 2 = 6$ e $4 \cdot 6 = 4$ e $6 \cdot 4 = 4$ e $7 \cdot 4 = 8$ e $8 \cdot 8 = 4$ e $9 \cdot 4 = 6$

4) Una piramide a base quadrata ABCD e di vertice V ha le facce costituite tutte da triangoli equilateri. Che caratteristiche ha il triangolo BDV? Spiega la tua risposta.



Il triangolo BDV è isoscele perché DV ≅ VB ≅ AB perché tutte le facce hanno gli spigoli congruenti al lato di base che è il lato di un quadrato. Inoltre $\overline{DB} = \sqrt{2}\ \overline{AB}$ perché diagonale di un quadrato (teorema di Pitagora). Ma allora il triangolo DBV è isoscele e rettangolo perché la stessa proprietà vale per i suoi tre lati.

5) Dato il polinomio $P(x) = 3x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 23x^2 - 10x + 3$ e il polinomio $D(x) = 3x^2 - 5x + 2$ calcola quoziente e resto della divisione P(x):D(x)

non merita

6) $(x - y + 1)^{109} + (-x + y - 1)^{109} = 0\ \forall x, \forall y$ come mai?

$x - y + 1 = \alpha$ e $-x + y - 1 = -(x - y + 1) = -\alpha$ sono opposti. Elevando a potenza dispari il segno non cambia e dunque $\beta = \alpha^{109}$ e $(-\alpha)^{109}$ sono ancora opposti e la loro somma fa zero

7) I coefficienti di $(a + b)^7$ sono? Calcolali con il triangolo di Tartaglia.

non merita; ma prestare attenzione al fatto che la domanda chiedeva i soli coefficienti ma in compenso ne richiedeva esplicitamente il calcolo

0	1			
1	1	1		
2	1	2	1	
3	1	3	3	1 eccetera

8) Calcola le seguenti semplici espressioni contenenti prodotti notevoli

a) $[(x+y)^2-(x-y)^2]^3=$

$[(x+y)^2-(x-y)^2]^3 = [x^2+2xy+y^2 - (x^2-2xy+y^2)]^3 = [4xy]^3 = 64\ x^3y^3$

b) $(3a - 2b^2)^3=$

$(3a)^3 + 3(9a^2)(-2b^2) + 3(3a)(4b^4) + (-2b^2)^3 = 27a^3 - 54a^2b^2 + 36ab^4 - 8b^6$

9) Svolgi i seguenti calcoli rapidi

questo esercizio è stato un vero disastro insieme al successivo; ricordo di calcolare sempre il segno separato dal coefficiente e dalla parte letterale; per questa ragione, a costo di essere pedante, svolgo tutti i conti separatamente

a) $[(-a^2)^{-5}]^{-3} =$

$(-)^{15}a^{2(-5)(-3)} = -a^{30}$

b) $[-(-½)^{-2}]^{-1}=$

$[-(-)^{(-2)}]^{-1}(½)^{(-2)(-1)} = -(½)^2 = -¼$

c) $(-a^{2a})^{3a} + (-a^{a})^{6a} =$

Se a è un esponente allora è un numero intero e può essere pari o dispari. Ricordo che il quadrato di un numero pari è pari e il quadrato di un numero dispari è dispari e che il prodotto di un numero pari per uno dispari è pari.

$(-)^{3a}(a)^{6a^2}+ (-)^{6a}(a)^{6a^2} = (-)^{3a}a^{6a^2}+ a^{6a^2}$

Se a è pari $(-)^{3a} = +$ mentre se a è dispari $(-)^{3a} = -$

Nel primo caso viene $2a^{6a^2}$ nel secondo viene 0

d) $(-a^{3a})^{2a}\cdot(a^{6a})^{-a} =$

$(-)^{2a}a^{6a^2-6a^2} = + a^0 = 1$

10) Calcola la seguente espressione $(a-2b)^3(a+2b)^3 - (a-2b)(a+2b)(a^4+4a^2b^2+16b^4) - 12a^2b^2(2b+a)(2b-a)$

Anche in questo caso, a costo di apparire pedante, esplicito tutti i passaggi per tener conto delle diverse scempiaggini viste che rimangono tali anche quando dopo una serie di errori ripetuti vi è venuto il risultato giusto.

$[(a-2b)(a+2b)]^3 - (a^2-4b^2)(a^4+4a^2b^2+16b^4) - 12a^2b^2(4b^2-a^2) = (a^2-4b^2)^3 - [a^6+4a^4b^2+16a^2b^4] + [4b^2a^4+16a^2b^4+64b^6] - 48a^2b^4 + 12a^4b^2 = a^6 - 12a^4b^2 + 48a^2b^4 - 64b^6 - a^6 - 4a^4b^2 - 16a^2b^4 + 4b^2a^4 + 16a^2b^4 + 64b^6 - 48a^2b^4 + 12a^4b^2 = a^6(1-1) + a^4b^2(-12-4+4+12) + a^2b^4(48-16+16-48) + b^6(-64+64) = 0$

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Nome e cognome: ____________________16 marzo 2007 1F PNI geometria olimpiadi + algebra polinomi

Consegne per la sufficienza: Svolgere almeno uno dei 3 problemi di geometria, la divisione, e almeno una espressione

1) Si consideri un quadrato di lato unitario in cui è inscritta una circonferenza entro cui è inscritto un esagono regolare. Quanto misura il lato dell'esagono?

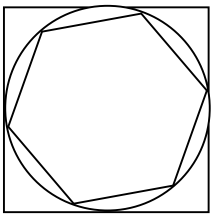
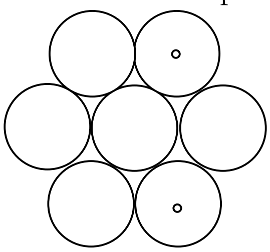
Il raggio del cerchio inscritto al quadrato è ½ . L'esagono regolare inscritto ha lato uguale al raggio perché forma 6 triangoli equilateri (isosceli con angolo al vertice di 60°) e dunque il suo lato vale ½

Nota di correzione: dare un minimo di motivazione

2) I raggi di tre sfere sono proporzionali a 1, 2, 3. Ricorda che il volume è proporzionale a r^3 e la superficie a r^2. Allora si ha che:
   (A) il volume della sfera più grande è il triplo del volume della sfera più piccola
   (B) la somma dei volumi delle due sfere più piccole è uguale al volume della sfera più grande
   (C) il volume della sfera più grande è il triplo della somma dei volumi delle altre due
   (D) la superficie della sfera più grande è uguale alla somma delle superfici delle altre due
   (E) la superficie della sfera più grande è il triplo della somma delle superfici delle altre due.

$V_1:V_2:V_3 = 1^3:2^3:3^3 = 1:8:27$ e poiché $(1 + 8)\cdot 3 = 27$ resta dimostrata la risposta c)

3) Sette cerchi di raggio unitario sono disposti come in figura. Trova la distanza tra i punti indicati

I 6 centri delle circonferenze formano con quella centrale 6 triangoli equilateri e dunque i due centri dati formano con quello centrale un triangolo isoscele di angolo al centro 120° che si spezza in due triangoli rettangoli di 30°, 60° e 90° (il cateto minore è 1, l'ipotenusa è 2 e dunque il cateto maggiore è $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. La distanza richiesta è $2\sqrt{3}$

4) Calcolare quoziente e resto di: $\left(a^4 - \frac{5}{4}a^3 + \frac{11}{8}a^2 - \frac{23}{4}a + 6\right) : \left(a^2 - \frac{3}{4}a + 1\right)$

Nota di correzione: errori diffusi in tutti quelli che non hanno semplificato 2/4 = ½ (e sono tanti)

5) Calcolare il seguente cubo $\left(-\frac{2}{3}a^2b + \frac{1}{3}a^2b^3\right)^3$

Nota di correzione: fare il conto in due passaggi (nel primo si impostano i prodotti ma si calcolano i quadrati) nel secondo si scrive il risultato

6) Calcolare la seguente espressione:

$$\frac{1}{4}(x^2 + 2y^2)^2 - \frac{2}{3}y\left(2x - \frac{3}{2}y\right)^3 + \frac{9}{4}x(7x^3 + 4y^3) - \left(4x^2 - \frac{1}{2}xy\right)\left(4x^2 + \frac{1}{2}xy\right) - \frac{1}{4}y^2(53x^2 + 13y^2).$$

Nota di correzione: errori sia nei quadrati che nel cubo; ricordarsi alla fine di raggruppare i termini simili in questo modo $x^4(1/4 + 63/4 - 16) + y^4(1 + 9/4 - 13/4) + \dots$ Risultato $-16/3\ x^3y$

7) Calcolare la seguente espressione: $\left(\frac{3}{5}x^3 - 2x^2 + 5x - 2\right)^2 - \left(\frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 1\right)^2 - (7x-3)(x-1) + 3x^3\left(x^2 + \frac{21}{5}\right)$

Nota di correzione: Il quadrato di un quadrinomio si calcola in molti modi (ricordando che produce tutti i quadrati e tutti i doppi prodotti oppure sviluppando come se fosse una somma di due binomi). In ogni caso nello sviluppo deve essere evidente la strategia scelta
Risultato $63/4\ x^4 - 6\ x^3$

8) Calcolare la seguente espressione: $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}x + y\right)^2\left(\frac{2}{3}x - y\right)^2 - \left(\frac{4}{9}x^2 + y^2\right)^2\right]\left(-\frac{9}{8}\right) - x\right\}(x + 2x^2y^2) + x^2$

Nota di correzione: nel primo passaggio si ha $(4/9\ x^2 - y^2)^2 - (4/9\ x^2 + y^2)^2$ e facendo i conti rimangono solo i due doppi prodotti e cioè $-16/9\ x^2y^2$. IN alternativa si fa con somma e differenza e viene lo stesso risultato
Risposta $4x^4y^4$

9) Sapresti spiegare la seguente identità senza svolgere tutti i calcoli?

$$\left(\frac{1}{2}p^2+\frac{2}{3}pq\right)^2-2\left(\frac{1}{2}p^2+\frac{2}{3}pq\right)\left(\frac{1}{4}q^2-\frac{2}{3}pq\right)+\left(\frac{1}{4}q^2-\frac{2}{3}pq\right)^2=\left(\frac{1}{2}p^2+\frac{4}{3}pq-\frac{1}{4}q^2\right)^2.$$

Nota di correzione: non l'ha provato nessuno
Il termine a sinistra è il quadrato di un binomio e dunque vale [1/2 p^2 + 2/3 pq – (1/4 q^2 – 2/3 pq)]^2 = [1/2 p^2 + 4/3 pq –1/4 q^2]^2 ☺

10) Calcola la seguente espressione:

$$(x^2+2)(x^2-2)-(2x^2+1)^2-(3x^2-5)^2+6(2x^4-3x^2+5)-(2x+1)^2-(2x+3)(2x-3)-2[2x(1-2x)+5]$$

Nota di correzione: ci sono un po' di conti ma assolutamente semplici.
Risposta: $8x^2 – 8x – 2$

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)		

Nome e cognome: ________________________________21 aprile 2007 1F scomposizione di polinomi

I polinomi qui presentati vanno scomposti. Soglia della sufficienza tra i 4 e 5 esercizi corretti e completi (da Scaglianti – dalla parte del docente)

1) $(4a-4b)(2a+3b)-(a-b)^2-9a^2+9b^2$
2) $4x-1+y^2-4y+4-4x^2$.
3) $(a^2-ab+b^2)(a-b)-a^3-b^3$
4) $x^5+3x^4+2x^3-27x^2-81x-54$
5) $2x^3+4x^2y-2x(1-y^2)$
6) $(a^2-9)^2-a^2-6a-9$
7) $(x-3y)^3-2x(x-3y)^2-3x^2(x-3y)$
8) $(x+2y)^2(x-y)-(2x+y)^2(x+2y)+(x+2y)(4x^2-xy+7y^2)$
9) a^4+a^2+1 (ricondursi ad una differenza di quadrati)
10) $a^4-16b^4+a^2c^2-4b^2c^2$

21 maggio 2007 1F PNI calcolo letterale ed equazioni

1) Si consideri la tratta ferroviaria ABC lungo la quale i treni viaggiano solitamente con una velocità *v* costante. Un treno percorre la tratta AB secondo il piano previsto ma nel tratto BC rallenta del 25%. Si vuole determinare il tempo di percorrenza $t_{AC} = x$ sapendo che $t_{AB} = t_{BC}$ mentre nel viaggio di ritorno accade il contrario di quanto avvenuto all'andata e cioè nel tratto CA si viaggia a velocità normale mentre nel tratto BA si ha un rallentamento del 25%. Per effetto di tutto ciò risulta che al ritorno si impiegano 5/12 di ora in più che all'andata. Suggerimento: cercare di calcolarsi la espressione di t_{CA} e quindi applicare la condizione finale. Il risultato non dipende dal valore di *v*.

Da Scaglianti – dalla parte del docente

2) Scomporre il polinomio $8x^3 + 27y^3 - 6xy(2x + 3y)$
3) Scomporre il polinomio $3x(x+2)^2 - 3(x+2)^3 - 2x^2(x+2)^2$
4) Calcolare la seguente espressione $\left[\left(\frac{t-3}{t^2-3t+2} + \frac{t-2}{t^2-4t+3} - \frac{2t-13}{t^2-5t+6}\right) : \left(t - 3 + \frac{2}{t}\right)\right] : \frac{10}{t-3}$
5) Risolvere la seguente equazione $\frac{(m-2)x}{m^2+5m+6} + \frac{(m+2)x}{m^2+m-6} + \frac{m^2+12}{4-m^2} = \frac{x}{m+3}$. Non è richiesta discussione.