4F PNI Liceo Frisi 23/9/2003

1. Scrivere in forma goniometrica il numero complesso $z = -2 + 3i$

   $\rho = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ basta ora mettere in evidenza il modulo e si ha: $z = \sqrt{13}\,(-2/\sqrt{13} + 3/\sqrt{13})$

   Si osservi che θ = artan(-3/2) + π perché siamo nel II quadrante (il conto separato di sin θ e di cos θ è inutile perché il risultato è già stato determinato)

   Note di correzione: nessuno ha messo in evidenza; uso improprio delle parentesi; mancato riferimento ai quadranti

2. Scrivere in forma algebrica il numero complesso $z = 3(\cos\theta + i \sin\theta)$ sapendo che θ si trova nel III quadrante e che $\tan\theta = 6/5$

   $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+36/25}} = -\dfrac{5}{\sqrt{61}}$ mentre $\sin\theta = \cos\theta \tan\theta = -\dfrac{6}{\sqrt{61}}$

   pertanto: $z = -\dfrac{15}{\sqrt{61}} - i\dfrac{18}{\sqrt{61}}$

   Note di correzione: nessuno ricorda le relazioni di $\cos\alpha = f(\tan\alpha)$ e che consentono di evitare la soluzione di un sistema in a e b

3. Determinare nell'insieme dei reali x e y in modo che valga l'identità: $(3 - x) + i\,(2 + y) = (y + 2) + i\,(1 + 3x)$

   I due numeri complessi sono uguali se lo sono sia le parti reali sia quelle immaginarie; pertanto dovrà essere:

   $3 - x = y + 2 \wedge 2 + y = 1 + 3x \Leftrightarrow x + y - 1 = 0 \wedge 3x - y - 1 = 0$; risolvendo il sistema lineare si ottiene $x = ½ \wedge y = ½$

   Nota di correzione: serviva a verificare che fosse nota la definizione di uguaglianza tra numeri complessi; ho visto un sacco di passaggi iniziali inutili

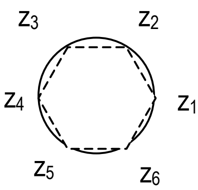
4. Calcolare $\dfrac{z_1}{z_2}$ essendo $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 1 + 2i$

   $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\,\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \dfrac{(2-3i)(1-2i)}{5} = 1/5[(2-6) + i(-3-4)] = -\dfrac{4}{5} - i\dfrac{7}{5}$

   Nota di correzione: si fa in una unica passata

5. Calcolare $\sqrt[6]{64}$ esprimendo il risultato finale in forma algebrica

   $z = 64 = 2^6(\cos 0 + \sin 0)$ (va bene anche 2π) dunque $(0+2k\pi)/6 = k\pi/3$ e le sei radici stanno ai vertici di un esagono regolare (vedi figura)



   $\sqrt[6]{z} = 2[\cos(k\,\pi/3) + i\sin(k\,\pi/3)]$ con k = 0,1,2,3,4,5

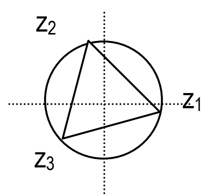
   Si ha pertanto, tenuto conto dei valori delle funzioni goniometriche di $\pi/3$ e degli archi associati

   $z_1 = 2$ $z_2 = 2(½ + i\sqrt{3}/2) = 1 + i\sqrt{3}$ $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$ $z_4 = -2$ $z_5 = -1 - i\sqrt{3}$ $z_6 = 1 - i\sqrt{3}$

   Nota di correzione: quasi nessuno (dopo aver riconosciuto le radici sul cerchio) le sa scrivere in forma algebrica (il che richiede la conoscenza delle funzioni di $\pi/3$ e dei suoi archi associati).

6. Calcolare $\sqrt[3]{2-2i}$ scrivendo il risultato in forma goniometrica

   $z = 2 - 2i$ sta nel IV quadrante e θ = artan(–1) = $-\pi/4$; pertanto $z = \sqrt{8}\,[\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)]$ mentre il modulo delle radici è $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt{2}$; le radici si troveranno ai vertici di un triangolo equilatero a partire da anomalia $\theta' = 1/3\,(-\pi/4) = -\pi/12$; esse saranno dunque date dalla formula:



   $\sqrt[3]{2-2i} = \sqrt{2}\,[\cos(-\pi/12 + k\,2/3\,\pi) + i\sin(-\pi/12 + k\,2/3\,\pi)]$ con k = 0, 1, 2

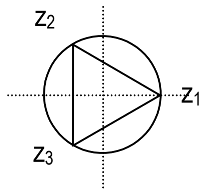
   Nota di correzione: servono tre cose: il modulo, la anomalia della prima radice (θ/n) e l'angolo che determina le altre ruotando sui vertici di un poligono regolare (2π/n); si veda il calcolo del modulo

7. Calcolare l'espressione $z = \dfrac{(-½ + 3/2\,i)\,\dfrac{2-i}{1+i}}{\left(\dfrac{i}{1-i}\right)^2}$

$$z = \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} i\right)\frac{2-i}{1+i}}{\left(\frac{i}{1-i}\right)^2} = \tfrac{1}{2}(3i-1)\,\frac{2-i}{1+i}\left(\frac{1-i}{i}\right)^2 = \tfrac{1}{2}(3i-1)\,\tfrac{1}{2}\,(2-i)(1-i)(1-i)^2\,(-1) = -\,1/4\,(3i-1)(2-i)(1-i)^3 =$$

$$= -1/4(3-2+6i+i)(1-3i+3i^2-i^3) = -\,1/4(1+7i)(-2-2i) = \tfrac{1}{2}(1+7i)(1+i) = \tfrac{1}{2}(1-7+i+7i) = -3+4i$$

Nota di correzione: naturalmente l'esercizio si può fare in tanti modi (come per tutte le espressioni algebriche in cui non è obbligatorio seguire un particolare ordine, schema o proprietà) ma l'importante è svolgere l'esercizio in modo compatto e non a pezzi ed evitare la ripetizione pletorica delle evidenti proprietà che si stanno usando.



8. Risolvere attraverso un cambio di variabile l'equazione $\left(\frac{1+x}{x}\right)^3 - 1 = 0$. Il risultato va scritto con x espresso in forma algebrica

Posto $\frac{1+x}{x} = z$ si ha la semplice equazione $z^3 = 1$ che corrisponde a tre numeri complessi di modulo unitario e poste ai vertici di un triangolo equilatero come in figura.

Si ha pertanto: $z_1 = 1$ $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dobbiamo ora esprimere il risultato in x e ciò richiede di invertire la sostituzione di variabile:

$\frac{1}{x} + 1 = z \Leftrightarrow \frac{1}{x} = z - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{z-1}$ con la condizione $z \neq 1$

Pertanto la prima soluzione $z_1 = 1$ non è accettabile mentre si ha per le altre:

$$x_2 = \frac{1}{-\frac{1}{2} + i\sqrt{3}/2 - 1} = \frac{2}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{1}{6}(-3 - i\sqrt{3})$$

e analogamente (non occorre rifare i conti) $x_2 = \frac{1}{-\frac{1}{2} - i\sqrt{3}/2 - 1} = \frac{1}{6}(-3 + i\sqrt{3})$

Nota di correzione: il cambio di variabile era evidente; volendo evitarlo si poteva lavorare in x e si sarebbe arrivati ad una equazione di II grado con il $\Delta<0$ che portava ancora a due soluzioni complesse e coniugate (provarci)

4F PNI 5/12/03 algebra lineare

1) Si consideri la matrice 4x4 A le cui prima riga ha la forma: α^2 $(\alpha + 1)^2$ $(\alpha + 2)^2$ $(\alpha + 3)^2$ mentre le successive righe sono identiche con variabili β, γ e δ.
Dimostrare, utilizzando le proprietà dei determinanti, che $|A| = 0$.
Suggerimento: sottrarre la prima colonna dalle altre e da lì lavorare ancora sulle colonne puntando ad ottenere colonne identiche.
In base al suggerimento sottraiamo la prima colonna ed osserviamo che si determina su ogni colonna una differenza di quadrati (prodotto notevole) che porta al risultato indicato:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 2\alpha+1 & 2(2\alpha+2) & 3(2\alpha+3) \\ \beta^2 & 2\beta+1 & 2(2\beta+2) & 3(2\beta+3) \\ \gamma^2 & 2\gamma+1 & 2(2\gamma+2) & 3(2\gamma+3) \\ \delta^2 & 2\delta+1 & 2(2\delta+2) & 3(2\delta+3) \end{vmatrix}$$

basta ora osservare che sottraendo dalla quarta colonna la somma della seconda e della terza si ha una colonna costante:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 2\alpha+1 & 2(2\alpha+2) & 5 \\ \beta^2 & 2\beta+1 & 2(2\beta+2) & 5 \\ \gamma^2 & 2\gamma+1 & 2(2\gamma+2) & 5 \\ \delta^2 & 2\delta+1 & 2(2\delta+2) & 5 \end{vmatrix}$$ sottraendo dalla terza il doppio della seconda si ha un'altra colonna costante:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 2\alpha+1 & 2 & 5 \\ \beta^2 & 2\beta+1 & 2 & 5 \\ \gamma^2 & 2\gamma+1 & 2 & 5 \\ \delta^2 & 2\delta+1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\times5 \begin{vmatrix} \alpha^2 & 2\alpha+1 & 1 & 1 \\ \beta^2 & 2\beta+1 & 1 & 1 \\ \gamma^2 & 2\gamma+1 & 1 & 1 \\ \delta^2 & 2\delta+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} \alpha^2 & 2\alpha+1 & 1 & 0 \\ \beta^2 & 2\beta+1 & 1 & 0 \\ \gamma^2 & 2\gamma+1 & 1 & 0 \\ \delta^2 & 2\delta+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Nota di correzione: quando si arriva a righe o colonne proporzionali far vedere (che si arriva al determinante nullo); se possibile mettere in evidenza (non lo fa nessuno). In un compito in classe è inutile ricopiare le righe tra loro uguali salvo lo scambio di α con β, γ e δ. Basta scriverlo e semmai precisare che operazioni si svolgono sulle diverse linee.

2) Usando le proprietà dei determinanti ridurre il seguente determinante 4×4 in 3×3 e quindi calcolarlo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

si sottrae dalla quarta riga la terza: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ e ora la prima colonna dalla seconda:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4\,[-1(2-16) - 3(4-1)] = -4\times5 = -20$$

Nota di correzione: prestare attenzione al segno dei complementi algebrici (è diffusa la tendenza a dimenticarsene); ricordo che $A_{ij} = (-1)^{i+j} B_{ij}$ dove con B_{ij} si intende il minore complementare cioè il determinante della matrice da cui sono state eliminate la riga i e la colonna j.

3) Risolvere e discutere al variare di λ il sistema lineare parametrico $\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=\lambda^2 \end{cases}$

Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2[\lambda+1+1] = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

Nota di correzione: conviene effettuare il calcolo sfruttando le proprietà in modo di fattorizzare il polinomio già in sede di calcolo; ho visto molti errori formali nell'uso del teorema di Ruffini e dei connettivi logici tra le diverse relazioni.

I caso

Il sistema è determinato per $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq -2$; in tale caso le soluzioni si trovano tramite il teorema di Cramer (indichiamo con A_1, A_2, A_3 le matrici ottenute sostituendo la colonna dei termini noti con quella dei coefficienti); si ha così:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ \lambda^2-1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)(1 - \lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda- 1)(\lambda^2-\lambda^2)-1(\lambda-1)+1(\lambda-1)\lambda = (\lambda - 1)^2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 1-\lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda^2 \end{vmatrix} = -(1 -\lambda^2)[\lambda(\lambda-1)-(1-\lambda)] = -(1-\lambda^2)(\lambda-1)(\lambda+1) = (\lambda-1)^2 (\lambda+1)^2$$

Le soluzioni sono pertanto:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} = \frac{-(\lambda + 1)}{(\lambda + 2)} \qquad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} = \frac{1}{\lambda + 2} \qquad z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{(\lambda-1)^2 (\lambda+1)^2}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)} = \frac{(\lambda + 1)^2}{(\lambda + 2)}$$

Nota di correzione: bisogna citare il teorema che si usa; conviene calcolare separatamente i 3 determinanti delle matrici ottenute per sostituzione della colonna delle variabili; ho visto intollerabili errori di calcolo o mancate semplificazioni legate alla incapacità di lavorare con i prodotti notevoli (siamo in IV PNI).

II caso

Per $\lambda = 1$ il sistema diventa: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

le tre equazioni sono uguali e pertanto si hanno due variabili libere e la soluzione è $x = \alpha$; $y = \beta$; $z = 1 -(\alpha+\beta)$

Nota di correzione: era inutile mettersi a lavorare di rango quando la situazione era evidente in modo esemplare.

III caso

Per $\lambda = -2$ il sistema diventa: $\begin{cases} -2x+y+z = 1 \\ x-2y+z = -2 \\ x+y-2z = 4 \end{cases}$

Estraiamo una sottomatrice 2×2 con determinante $\neq 0$, per esempio (prime due righe e colonne):

$$|A'| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

Orliamola con la colonna dei termini noti ed applichiamo il teorema di Kronecher:

$$|A''| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -(-3)(4-1) = 9$$

dunque il rango della matrice orlata è 3 e pertanto per il teorema di Rouchè Capelli il sistema è incompatibile.

In effetti sommando le prime due equazioni si ha: $-x - y + 2z = -1 \Leftrightarrow x + y - 2z = 1$ e questa equazione è incompatibile con la terza.

Nota di correzione: si noti il riferimento ai teoremi, man mano che si usano.

4) Si consideri la generica matrice quadrata $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Determinare le condizioni cui devono soddisfare i coefficienti affinché sia $A^2 = I$. Attraverso le condizioni trovate dimostrare che deve essere $A = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$ oppure $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Applicando la definizione di prodotto tra matrici si ha:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix}$$ e pertanto per avere $A^2 = I$ dovrà essere: $$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab + bd = 0 \\ ca + dc = 0 \\ cb + d^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a + d) = 0 \\ c(a + d) = 0 \\ cb + d^2 = 1 \end{cases}$$

Nota di correzione: scrivere bene il sistema è un requisito essenziale per effettuarne poi una corretta discussione. Inoltre bisogna scrivere correttamente il prodotto tra matrici (righe per colonne).

I caso

$a + d = 0 \Leftrightarrow a = -d$ si ottiene

$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ a + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{1 - a^2}{b} \\ d = -a \end{cases}$ e dunque A = $\begin{bmatrix} a & b \\ \dfrac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$

II caso

$\begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a^2 = 1 \\ d^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a = \pm 1 \\ d = \pm 1 \end{cases}$

Ciò corrisponde alle 4 matrici $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

5) Si considerino in $\Re^3$ i tre vettori $\vec{e_1} \equiv (1,1,1)$, $\vec{e_2} \equiv (1,1,-1)$, $\vec{e_3} \equiv (1,-1,1)$
Dimostrare che i 3 vettori sono linearmente indipendenti e pertanto possono essere usati come base facendo vedere che la equazione vettoriale $\alpha \vec{e_1} + \beta \vec{e_2} + \gamma \vec{e_3} = \vec{0}$ è verificata solo per la soluzione banale $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$

Quindi determinare le coordinate u_1, u_2, u_3 del vettore $\vec{u} \equiv (2,3,-1)$ nella nuova base $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$

La equazione $\alpha \vec{e_1} + \beta \vec{e_2} + \gamma \vec{e_3} = \vec{0}$ corrisponde al sistema omogeneo $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases}$

e tale sistema sarà determinato (soluzione banale) se e solo il determinante della matrice dei coefficienti non si annulla.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

Dunque il sistema possiede solo la soluzione banale e dunque (in base alla definizione) i vettori sono linearmente indipendenti e poiché sono 3 possono costituire una base (non ortogonale).

Per trovare le componenti di $\vec{u} \equiv (2,3,-1)$ basta scrivere il vettore nelle due basi e poi utilizzare il prodotto scalare con i tre versori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

$u_1 \vec{e_1} + u_2 \vec{e_2} + u_3 \vec{e_3} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 1\vec{k}$

Moltiplicando per $\vec{i}$ si ha:

$u_1 \vec{e_1} \cdot \vec{i} + u_2 \vec{e_2} \cdot \vec{i} + u_3 \vec{e_3} \cdot \vec{i} = 2$ e così via per $\vec{j}$, $\vec{k}$

Così si arriva al sistema: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 2 \\ u_1 + u_2 - u_3 = 3 \\ u_1 - u_2 + u_3 = -1 \end{cases}$ e il determinante della matrice dei coefficienti è già stato determinato.

Nota di correzione: in un elaborato bisogna indicare i riferimenti teorici che si seguono (non basta dire *avevamo fatto così in classe*). In questo caso avevamo la questione della indipendenza lineare (richiamare la definizione) e la ricerca delle componenti nel cambio di base.

Il sistema viene risolto con il metodo di Cramer e pertanto calcoliamo i tre determinanti delle matrici ottenute sostituendo le colonne con quella dei termini noti:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2(-3 + 1) = -4$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2(2 + 1) = -6$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2(3 - 2) = 2$$

applicando il teorema di Cramer avremo allora:

$u_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = 1 \quad u_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} = 3/2 \quad u_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|} = -½$

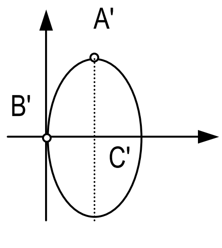
4F PNI 31/1/04 trasformazioni e geometria analitica

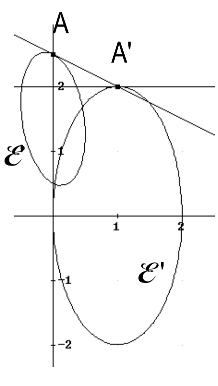
Si consideri l'affinità di equazione: $\mathcal{A}$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

1) Scrivere $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^{-1}$ attraverso le rispettive equazioni sulle componenti
2) determinare gli eventuali punti uniti e rette unite
3) La affinità presenta qualche semplice ed evidente interpretazione?
4) Dati A≡(0,5/2) e B≡(½,5/4) determinare A' e B'
5) Scrivere l'equazione della ellisse $\mathcal{E}$ ' con tangente verticale in B' e tangente orizzontale in A'.
6) Attraverso un banale cambio di scala calcolarne l'area σ' (spiegare cosa si fa)
7) $\mathcal{E}$ ' è la trasformata tramite $\mathcal{A}$ di un'altra ellisse $\mathcal{E}$ di cui si chiede l'equazione in forma f(x,y) = 0
8) Trovare l'equazione della tangente in A a $\mathcal{E}$.

n.	1	2	3	4	5	6	7	8		
indicatore	3	2	1	0.5	2	1	2	2		
punti										

1) Applicando le regole di calcolo del calcolo vettoriale (prodotto matriciale e somma tra vettori) si ha:
$\mathcal{A}$: x' = – 2x + 1 ∧ y' = x + 2y – 3
Per determinare $\mathcal{A}^{-1}$ bisogna risolvere il sistema –2x + 0y = x' – 1 ∧ x + 2y = y' + 3
det(A) = – 4 e risolvendo con il metodo di Cramer si ottiene x = –½ x' + ½ ∧ y = 1/4 x' + ½ y' + 5/4
Nota di correzione: molti errori dovuti al fatto che nella inversione del sistema il termine noto non è stato spostato sempre a destra della equazione; l'errore su questo punto è grave in un compito su questo argomento.
2) P è un punto unito della affinità ⇔ $\mathcal{A}$(P) = P e cioè se x = – 2x + 1 ∧ y = x + 2y – 3; risolvendo il sistema si trova P≡(1/3,8/3).
Per quanto riguarda le rette unite, indicata con r una generica retta, dovrà essere:
$\mathcal{A}$(r) = r
Una generica retta sarà del tipo x = k oppure y = mx + q
Nel primo caso si ha: x = k ∧ x' = –2k + 1; le due rette coincidono ⇔ k = – 2k + 1 ⇔ k = 1/3 dunque la retta x = k = 1/3 è globalmente unita
Nel secondo caso (visto che la trasformazione diretta è più semplice della inversa) partiamo dalla retta r' = mx' + q e trasformiamola in r: x + 2y – 3 = m(– 2x + 1) + q ⇔ y = x(–m – ½) + ½ (q + m + 3). Risolvendo si ha r ≡ r' ⇔ m = –1/4 ∧ q = 11/4
Nota di correzione: nessuno ha individuato la retta unita verticale e anche che ha colto l'esistenza del problema non ha concluso.
3) Si tratta di una affinità indiretta (determinante negativo) comprendente una traslazione. Non è né una isometria né una similitudine.
4) Per sostituzione si ottiene A'= $\mathcal{A}$(A) ≡ (1,2) e B'= $\mathcal{A}$(B) ≡ (0,0)
5) Per le caratteristiche delle tangenti alla ellisse nei vertici essa deve avere centro in C'≡(1,0) con semiassi di lunghezza 1 e 2; pertanto $\mathcal{E}$' avrà equazione: $\frac{(x'-1)^2}{1} + \frac{y'^2}{4} = 1$





Nota di correzione: la equazione di una conica a centro si scrive immediatamente a partire dalla equazione centrata nell'origine (programma di terza); è opportuno usare le variabili primate per distinguere da $\mathcal{E}$ di cui $\mathcal{E}$' è la trasformata.

6) L'ellisse mediante un cambio di scala su y si trasforma in una circonferenza. Dunque posto x' = x'' e y' = 2 y'' si ottiene una circonferenza di raggio unitario e di area σ'' = πr² = π. Tenuto conto che il rapporto di affinità è 2 si ha σ' = 2 σ'' = 2π
7) Se si applica $\mathcal{A}$ ad $\mathcal{E}$' si ottiene (dopo qualche calcolo algebrico di pura sostituzione) $\frac{17}{4}x^2 + y^2 + xy - \frac{3}{2}x - 3y + \frac{5}{4} = 0$
8) La tangente in A' ha equazione: y' = 2 ed essa si trasforma in x + 2y – 3 = 2 e cioè x + 2y - 5 = 0 che è la tangente in A. Nella figura qui a lato sono state tracciate mediante derive le due curve $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{E}$ 'e le due tangenti.

19 aprile 2004 3F PNI affinità

a) Determinare l'equazione della affinità $\mathcal{A}$ che trasforma i punti A≡(1,1) in A'≡(4,0), B≡(–1,–1) in B'≡(–6,2), C≡(0,1) in C'≡(2,3).
b) Data la retta *r*: y = x +1 determinare la equazione di $r' = \mathcal{A}(r)$
c) Dopo aver determinato il rapporto di affinità individuare le caratteristiche della affinità descrivendo le trasformazioni elementari di cui è composta.
d) Ricercare il punto unito G e spiegare perché sia inutile la ricerca di rette unite.
e) Determinare la trasformazione inversa $\mathcal{A}^{-1}$
f) Si considerino la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro A e passante per C e la retta *r*. Esse determinano un segmento circolare. Determinare l'equazione della curva $\mathcal{C}'$ trasformata e l'area σ' del trasformato del segmento circolare.

4F PNI Liceo Frisi 20/9/2004

1. Se $|z| = 1$ allora si ha $z = \dots$ (scrivere in forma goniometrica). Calcolare $1/z$ ed utilizzare il tutto per calcolare (con la formula di De Moivre) la seguente espressione: $z^m + 1/z^m$

Se il modulo è unitario si ha $z = \cos\alpha + i \sin\alpha$ e pertanto $1/z = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \cos\alpha - i\sin\alpha$

$z^m + 1/z^m = \cos m\alpha + i \sin m\alpha + \cos m\alpha - i \sin m\alpha = 2\cos m\alpha$

Note di correzione: svolto da poche persone

2. Calcolare $\sqrt[3]{2-3i}$ scrivendo il risultato approssimato con una precisione alla quarta cifra significativa. Basta scrivere la prima radice ed indicare cosa si fa per le altre.

Se $z = 2 - 3i$ si ha $\rho = |z| = \sqrt{13}$ e $\theta = \arctan(-3/2)$

Dunque $\rho' = \sqrt[3]{\rho} = \sqrt[6]{\rho}$ e $\theta' = 1/3\,\theta$

La prima radice è pertanto $z_1 = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

Utilizzando la macchina calcolatrice si ottiene: $\rho' \approx 1.533406$ e $\theta' \approx -18.76998°$

$z_1 \approx 1.452 - 0.4934$. Le altre due radici hanno lo stesso modulo e sono sfasate di 120 e 240 gradi in senso orario.

Note di correzione: errori goniometrici di tutti i tipi (individuazione di θ e θ', calcoli inutili, confusione tra funzioni goniometriche e loro inverse), mancata comprensione della richiesta (trovare una radice con la approssimazione alla quarta cifra)

3. Sia $z = \dfrac{1+ki}{1-ki}$ con $k \in \Re$. Semplificare la espressione e, tenendo presenti delle note identità goniometriche, spiegare perché $|z| = 1$ e quale sia il significato di k.

Se si calcola il rapporto attraverso la moltiplicazione per l'inverso si ha:

$z = (1 + ki)\dfrac{1+ki}{1+k^2} = \dfrac{1-k^2+2ki}{1+k^2} = \cos t + i \sin t$ in base alle formule parametriche.

Dunque il modulo vale 1 e $t = \tan(½\, k)$

Note di correzione: nonostante l'esercizio fosse guidato la maggioranza ha dimostrato di non ricordare le formule parametriche che servono anche in quinta (per gli integrali). Era un esercizio con test di creatività.

4. Calcolare z^m essendo $z = (1 + \cos\alpha + i \sin\alpha)$. Si consiglia, prima di calcolare la potenza, di passare alle potenze di $½\,\alpha$ in modo di poter utilizzare la formula di De Moivre.

In base alle formule di bisezione si ha: $z = 2\cos^2(½\,\alpha) + 2i\sin(½\,\alpha)\cos(½\,\alpha) = 2\cos(½\,\alpha)\,[\cos(½\,\alpha) + i\sin(½\,\alpha)]$

Ora che il numero è espresso in forma trigonometrica, l'elevamento a potenza è banale e porta a:

$z^m = 2^m \cos^m(½\,\alpha)\,[\cos(½\, m\alpha) + i\sin(½\, m\alpha)]$

Note di correzione: valgono le note del precedente, questa volta riferite alle tecniche di innalzamento di grado tramite bisezione e duplicazione.

5. Calcolare $(2 - 3i)^5$

Il calcolo si fa con la formula dello sviluppo del binomio tenendo presente che $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ e che i coefficienti, calcolati con il triangolo di Tartaglia sono: 1, 5, 10, 10, 5, 1

Si ottiene dunque:

$(2-3i)^5 = 2^5 + 5\cdot 2^4\cdot(-3i) + 10\cdot 2^3\cdot(-3i)^2 + 10\cdot 2^2\cdot(-3i)^3 + 5\cdot 2^1\cdot(-3i)^4 + 1\cdot 2^0\cdot(-3i)^5 = (32 - 720 + 810) + i(-240 + 1080 - 243) = 122 + 597\,i$

note di correzione: le potenze si fanno con De Moivre solo se θ corrisponde ad un arco noto perché allora può essere semplice il calcolo delle funzioni dei suoi multipli. Trattandosi di potenza di grado elevato era assurso puntare al calcolo di $\cos 5\theta$ e $\sin 5\theta$

6. Calcolare $\sqrt[3]{-i}$

Con le solite notazioni si ha $\rho = 1$ e $\theta = -90°$ dunque $\rho' = 1$ e $\theta' = -30°$

Le 3 radici sono sfasate di 120° e sono

$z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - ½\, i \qquad z_2 = i \qquad z_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - ½\, i$

Note di correzione: dove sta $-i$ nel piano di Argand Gauss? Molti errori da qui. Meglio dire –90° piuttosto che 270° (calcoli più semplici)

7. Sia $z_1 = 4 + 4\sqrt{3}\, i$ e $z_2 = -\dfrac{27}{2} + \dfrac{27\sqrt{3}}{2}\, i$. Calcolare $\sqrt[3]{z_1 z_2}$

$z_1 z_2 = (4 + 4\sqrt{3})(-\frac{27}{2} + \frac{27\sqrt{3}}{2} i) = 8 (½ + \frac{\sqrt{3}}{2} i)\, 27(-½ + \frac{\sqrt{3}}{2} i)$ dunque le due anomalie sono 60° e 120° e nel prodotto si ottiene 180°. Con le solite notazioni si ha $\rho = 6^3$ e $\theta = 180°$ e pertanto $\rho' = 6$ e $\theta' = 60°$

Le tre radici sono rispettivamente: $6(½ + \frac{\sqrt{3}}{2} i)$ -6 $6(+½ - \frac{\sqrt{3}}{2} i)$

Nota di correzione: mi sarebbe piaciuto che qualcuno facesse il calcolo di $z_1 z_2$ per via goniometrica. Detto questo vale la notadel punto precedente.

8. Risolvere l'equazione di II grado a coefficienti complessi $z^2 + (i + 1)z - 10 + 11i = 0$. Per evitare calcoli onerosi sui radicali si consiglia di calcolare $\sqrt{\Delta}$ in forma algebrica e cioè imponendo che il suo quadrato faccia Δ

$\Delta = (i + 1)^2 - 4(11i - 10) = 2i + 40 - 44i = 40 - 42 i$

Posto $\sqrt{\Delta} = a + i b$ dovrà essere $(a + i b)^2 = 40 - 42 i$ e svolgendo i calcoli si ottiene: $\begin{cases} a^2 - b^2 = 40 \\ 2ab = -42 \end{cases}$. Si tratta di un sistema di 4° grado da risolvere per sostituzione e che porta ad una equazione biquadratica:

$\begin{cases} a = -\frac{21}{b} \\ b^4 + 40 b^2 - 21 = 0 \end{cases}$ e cioè $b = \pm 3$ e $a = -(\pm 7)$

Le due radici di Δ sono pertanto: $-7 + 3i$ e $+7 - 3i$

Le soluzioni della equazione risultano dunque:

$z_1 = \frac{-(i+1) + (-7+3i)}{2} = -4 + i$ $z_2 = \frac{-(i+1) + (7-3i)}{2} = 3 - 2i$

Nota di correzione: si può operare anche per via goniometrica: si trova $\tan\theta$, si passa a $\cos\theta$ e da lì si trovano le funzioni di ½ θ senza dimenticarsi di determinare la corretta collocazione nei quadranti. Le radici quadrate nei numeri complessi sono sempre l'una l'opposta dell'altra (sfasamento di 180°).

Valutazione: soglia della sufficienza 3 esercizi svolti in maniera completa e corretta.

1	2	3	4	5	6	7	8		
3	2.5	3	3	2.5	2.5	3	4		

29/11/2004 4F PNI matrici, sistemi, vettori

Svolgere uno degli esercizi delle seguenti coppie 1xor2, 3, 4xor5, 6xor7

1. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ a) verificare se è possibile calcolare A^{-1} b) e in caso positivo calcolarla c) quindi eseguire il prodotto matriciale $A^T \cdot A^{-1}$. Indicare con A' la matrice dei complementi algebrici.
2. a) sia A una matrice invertibile. Dimostrare che la condizione $AB = BA \Rightarrow A^{-1}B = BA^{-1}$
   b) Considerata la generica matrice di dimensione 2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dimostrare che la condizione $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ implica $d = -a \wedge a^2 = -bc$
3. Discutere e risolvere il sistema parametrico $\begin{cases} (2m+1)x + y + mz = m - 2 \\ (m-2)x - y + (m-2)z = -1 \\ (2-2m)x + 2y + (3-m)z = m+3 \end{cases}$
4. Dati i vettori $\vec{v_1} \equiv (2,-1,1)$ $\vec{v_2} \equiv (1,1,0)$ $\vec{v_3} \equiv (0,-3,1)$
   a) stabilire se i 3 vettori sono linearmente indipendenti
   b) motivare la ragione per cui i 3 vettori costituiscono una base di $\Re^3$
   c) determinare $\cos \alpha$ dove α rappresenta l'angolo tra $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$
   d) scrivere un vettore che sia perpendicolare al piano formato da $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ e poi normalizzarlo
5. Dati i vettori $\vec{v_1} \equiv (7,-3,2)$ $\vec{v_2} \equiv (3,-7,8)$ $\vec{v_3} \equiv (1,-1,1)$
   a) Tramite il prodotto misto dimostrare che sono complanari
   b) Dimostrare che sono complanari facendo vedere che sono linearmente dipendenti e determinare la combinazione lineare che ne genera uno tramite gli altri due.
   c) Considerato $\vec{u} \equiv \vec{v_1} - \vec{v_3}$ determinare $\cos \alpha$ dove α è l'angolo tra $\vec{u}$ e $\vec{v_2}$
6. Si consideri il numero complesso $u = \dfrac{27\, e^{i(\pi/3)}}{4\sqrt{2}\,(1+i)}$ a) dopo averlo semplificato b) calcolare la prima (z_1) delle tre radici della equazione $z^3 = u$ e quindi, posto $z_2 = 4\, e^{i(11/36)\pi}$ c) calcolare $z_1\, z_2$ e rappresentarlo nel piano di Argand Gauss
7. Determinare il dominio della funzione $y = \sqrt{\ln|1-2x| + 4x^2 - 1}$ precisando gli estremi degli intervalli con almeno due cifre significative.

1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	3c	4a	4b	4c	4d	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7c	7c
1	1	1	1	2	1	1	1	1	0.5	0.5	1	1	1	1	0.8	0.8	0.8	2	1
3			3		3			3				3			2.4			3	

4 aprile 2006 III F Pni Numeri complessi

Svolgere gli esercizi da 1 a 6 e uno a scelta tra il 7 e l'8.

1) Calcolare in maniera efficiente $z = (x - 2 - i)(x - 2 + i)(x + 2 + i)(x + 2 - i)$

$z = [(x - 2)^2 + 1][(x + 2)^2 + 1] = (x^2 - 4)^2 + (x - 2)^2 + (x + 2)^2 + 1 = x^4 + 16 - 8x^2 + x^2 + 4 - 4x + x^2 + 4 + 4x + 1 = x^4 - 6x^2 + 25$

2) Calcolare, operando come si preferisce, $z = \dfrac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}$

$z = \dfrac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7} = \dfrac{(1 + i)^9(1 + i)^7}{2^7} = \dfrac{(1 + i)^{16}}{2^7}$

Ma $1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\pi/4 + i \sin\pi/4)$

Dunque $z = \dfrac{2^8(\cos 4\pi + i \sin 4\pi)}{2^7} = 2$

Nota di correzione: solo pochi hanno compreso l'utilità di semplificare la divisione (procedura standard) e poi sfruttare la formula di De Moivre

3) Determinare i numeri complessi z il cui quadrato è uguale al coniugato del numero stesso.

$(a + ib)^2 = a - ib \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + i\,2ab = a - ib$ ciò richiede che sia:

$\begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a = b^2 \\ b(2a + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a = b^2 \\ b = 0 \vee a = -½ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a = b^2 \\ b = 0 \vee a = -½ \end{cases}$

$b = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1$

$a = -½ \Rightarrow b^2 = ¾ \Rightarrow b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Nota di correzione: esercizio molto semplice che consente di verificare la padronanza delle tecniche algebriche

4) Rappresentare in forma trigonometrica i numeri $z_1 = -1 - \sqrt{3}\,i$ e $z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$

$z_1 = -1 - \sqrt{3}\,i = 2(-½ - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i)$ siamo nel III quadrante e dunque $\theta = \pi + \arctan\sqrt{3} = \pi + \pi/3 = 4/3\,\pi$

dunque $z_1 = (2; 4/3\,\pi)$

$z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$ $\rho^2 = 4 + 3 + 4\sqrt{3} + 1 = 8 + 4\sqrt{3} = 2(4 + 2\sqrt{3}) = 2(\sqrt{3} + 1)^2$ e $\rho = \sqrt{2}\,(\sqrt{3} + 1)$

θ sta nel primo quadrante $\theta = \arctan\dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} = \arctan(2 - \sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{12}$

dunque $z_2 = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}, \dfrac{\pi}{12}\right)$

Nota di correzione: si prega di lavorare sulle funzioni goniometriche di $\pi/12$ che si ottengono tramite le formule di bisezione e sono un ottimo esercizio per imparare la razionalizzazione dei radicali

5) Usando la formula di De Moivre calcolare $\cos(5\varphi)$.

$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^5 = (\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi)$

Dunque $\cos 5\varphi$ è la parte reale dello sviluppo della quinta potenza

Tramite il triangolo di Tartaglia calcoliamo i coefficienti

1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Inoltre $i^0 = 1$ $i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$

Per determinare la parte reale ci interessano le potenze di grado pari che presentano segni alternati (dovuti alle potenze di i)

$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi \sin^2\varphi + 5 \cos\varphi \sin^4\varphi = \cos\varphi(\cos^4\varphi - 10\cos^2\varphi \sin^2\varphi + 5 \sin^4\varphi)$

Nota di correzione: tecnica generale per ricavare le formule di replicazione degli angoli svolta per esercizio a lezione ma rimossa dalla maggioranza.

6) Scrivere le tre radici cubiche u_1, u_2, u_3 dell'unità. Verificare che se $z = -11 - 2i$ e $v = 1 + 2i$ si ha $v^3 = z$. Spiegare come si potrebbero trovare le altre due radici di z usando le radici dell'unità e trovare una delle due.

Le tre radici cubiche dell'unità hanno anomalie 0, $2/3\pi$, $4/3\pi$ e sino:

$u_1 = 1$ $u_2 = -½ + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $u_3 = -½ - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$v^3 = (1 + 2i)^3 = 1 + 6i + 12i^2 + 8i^3 = -11 - 2i$

Dunque z è una radice cubica di v. Indichiamola con z_1. Per trovare z_2 basta moltiplicare z_1 per u_2 infatti u_2 è un operatore di rotazione di 120° di modulo unitario e dunque fa ruotare z_1 di 120° senza modificarne il modulo. Ciò produce una delle radici cubiche.
Si lascia da svolgere la moltiplicazione per esercizio.
Nota di correzione: esercizio tecnico con parte finale interessante per le implicazioni sulla importanza delle radici dell'unità

7) Enunciare il principio di induzione matematica ed utilizzarlo per dimostrare che $S_n = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. Quindi cercare di decomporre in differenze di frazioni i diversi termini della somma e dare una dimostrazione diretta del risultato.
Per dimostrare la verità di una proposizione P_n dipendente da un indice n basta verificare che P_n sia vera in almeno un caso (di solito il valore più piccolo per cui vale) e che ammessa vera dalla sua verità si possa far discendere quella di P_{n+1}
$S_1 =_{def} \frac{1}{1\cdot2}$ = ½ mentre $S_1 =_{for} \frac{1}{1+1}$ = ½ dunque P_1 è vera
$S_{n+1} =_{def} S_n + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1+1)} =_{for} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)} = \frac{n'}{n'+1}$ dunque $P_n \Rightarrow P_{n+1}$
Per dimostrare direttamente la proprietà $S_n = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ ☺
Nota di correzione: esercizio semplice svolto da pochi, da nessuno in forma completa. Osservo cattive enunciazioni del principio.

8) Tre numeri a, b = qa e c = q^2a sono in progressione geometrica. Se al secondo si aggiunge 8 si ottengono tre numeri in progressione aritmetica. Se poi si aggiunge 64 al terzo si ottengono tre numeri in progressione geometrica. Determinare a, b e c.
Il secondo elemento si trasforma in qa + 8 e per definizione di progressione aritmetica deve essere $qa + 8 - qa = q^2a - (qa + 8)$
Il terzo elemento si trasforma in $q^2a + 64$ e per definizione di progressione geometrica dovrà essere $\frac{q^2a + 64}{qa + 8} = \frac{qa + 8}{a}$
Si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite .
Dalla prima equazione si trova $a = \frac{16}{(q-1)^2}$
Dalla seconda equazione si trova $a = \frac{4}{4-q}$
Per confronto si arriva alla equazione $q^2 + 2q - 15 = 0$ da cui $q = 3 \vee q = -5$
mentre $a = 4 \vee a = 4/9$
I tre numeri sono: 4, 12, 36 oppure 4/9, –20/9, 100/9
Nota di correzione: l'esercizio era molto guidato ma non è stato completato da nessuno

28 novembre 2006 4F PNI matrici, determinanti, sistemi

Svolgere i seguenti esercizi: 1 xor 4; 2 xor 3; 5.

1. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ citando i relativi teoremi a) dimostrare che essa è invertibile b) calcolare la matrice inversa A^{-1}

   Poiché $AA^{-1} = I$ e dunque $\det A \det A^{-1} = 1$ per il teorema di Binet dovrà essere $\det A \neq 0$

   $\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ operazioni eseguite c1–c2 e c3+c2

   $\det A = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1) = 1$

   La matrice inversa è data da $\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ dove A_{ik} indica il complemento algebrico di a_{ik} (si noti che la matrice indicata è la trasposta di quella dei complementi algebrici).

   $A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$ e così via. Visto che $\det A = 1$ si ha che $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

   Nota di correzione: svolto da pochi e con errori di conto (anche 6 su 9).

2. Date la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ e la matrice $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ come devono essere scelti a, b, c, d affinché sia $AB = BA$?

   Si esegue il prodotto righe per colonne nei due casi e dalla eguaglianza data per ipotesi si ottengono 4 equazioni:

   $a + 2c = a - b \wedge b + 2d = 2a - b \wedge -a - c = c - d \wedge -b - d = 2c - d$

   Dalla prima si ha $b = -2c$ che equivale alla quarta.

   Dalla seconda $a = b + d = d - 2c$ che equivale alla terza e dunque ci sono due variabili libere e due variabili vincolate. a, –2c, c, a + 2c e la matrice $B = \begin{bmatrix} a & -2c \\ c & a + 2c \end{bmatrix}$

   Nota di correzione: dire come devono essere scelti vuol dire individuare le variabili libere e scrivere la matrice (stiamo facendo un compito di algebra lineare).

3. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n. Indichiamo con C e con D rispettivamente $C = AB$ e $D = BA$. Calcola gli elementi della diagonale principale della matrice $E = C - D$. Spiega la risposta.

   Gli elementi della diagonale principale di E sono dati dalla differenza di quelli di C e D.

   $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$ mentre $d_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}$ e come si vede sono diversi

   Per esempio $c_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + \dots a_{1n}\, b_{n1}$ mentre $d_{11} = b_{11}\, a_{11} + b_{12}\, a_{21} + \dots b_{1n}\, a_{n1}$

   La differenza sulla diagonale principale produce $e_{11} = a_{12}\, b_{21} + \dots a_{1n}\, b_{n1} - (b_{12}\, a_{21} + \dots b_{1n}\, a_{n1})$ che si annulla solo nel caso in cui le due matrici A e B sono simmetriche. Invece la somma di tutti gli elementi diagonali di E fa comunque zero.

4. Sfruttando le proprietà dei determinanti calcola il determinante det(A) dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   $\det A = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ a + c & b & c & d - c \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ con $c1 \to c1 + c3$ e $c4 \to c4 - c3$

   $\det A = -1\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ a + c & b & d - c \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ a + c & b - d + c & d - c \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ con $c2 \to c2 - c3$

   $\det A = (-1)(-1)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ a + c & b - d + c \end{vmatrix} = -b + d - c + 3a + 3c = 3a - b + 2c + d$

   Nota di correzione: i determinanti sono numeri e si connettono con =; il simbolo ~ di equivalenza tra matrici riguarda il calcolo del rango ed è soggetto a regole più larghe di quello del calcolo dei determinanti; per esempio se si moltiplica per k la riga di una matrice il determinante viene moltiplicato per k mentre la matrice è equivalente a quella originaria. Se accanto al determinante si scrive la trasformazione effettuata è più facile controllare e cercare eventuali errori.

5. Discutere e risolvere il sistema parametrico $\begin{cases} 3m\,x + (3m-7)\,y + (m-5)\,z = m-1 \\ (2m-1)x + (4m-1)y + 2m\,z = m+1 \\ 4m\,x + (5m-7)y + (2m-5)\,z = 0 \end{cases}$ al variare del parametro m. Viene richiesto quanto segue a) Per quali valori di m il sistema è crameriano; in tale caso determinare la soluzione per x b) Cosa accade quando il sistema non è crameriano discutendo i vari casi possibili. In questo caso è sufficiente indicare se il sistema è compatibile oppure no. Citare i teoremi.

Il sistema è di tipo 3×3 e in base al teorema di Cramer condizione necessaria e sufficiente affinché sia determinato è che sia det A ≠ 0. Calcoliamo pertanto det A.

$\det A = \begin{vmatrix} 3m & 3m-7 & m-5 \\ 2m-1 & 4m-1 & 2m \\ 4m & 5m-7 & 2m-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & m+3 & m-5 \\ -2m & -1 & 2m \\ -m+7 & m+3 & 2m-5 \end{vmatrix}$ con $c1 \to c1 - c2$ e $c2 \to c2 - 2c3$

$\det A = \begin{vmatrix} m+2 & m+3 & m-5 \\ 0 & -1 & 2m \\ m+2 & m+3 & 2m-5 \end{vmatrix}$ con $c1 \to c1 + c3$ $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -m \\ 0 & -1 & 2m \\ m+2 & m+3 & 2m-5 \end{vmatrix}$ con $r1 \to r1 - r3$

dunque $\det A = -m(m+2)$ e $\det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \wedge m \neq -2$

sotto queste condizioni il sistema è crameriano e il valore di x si ottiene come $D_x/\det A$ dove D_x rappresenta il determinante ottenuto sostituendo la colonna dei coefficienti di x con la colonna dei termini noti.

$D_x = \begin{vmatrix} m-1 & 3m-7 & m-5 \\ m+1 & 4m-1 & 2m \\ 0 & 5m-7 & 2m-5 \end{vmatrix}$ il determinante non può essere calcolato in maniera semplice puntando ad eliminare 2 elementi di una stessa linea e viene pertanto calcolato sviluppandolo:

$D_x = (m-1)[(4m-1)(2m-5)-2m(5m-7)] - (m+1)[(3m-7)(2m-5) - (m-5)(5m-7)] = (m-1)[-2m^2 - 8m + 5] - (m+1)[m^2 + 3m] =$
$= -2m^3 - 8m^2 + 5m + 2m^2 + 8m - 5 - m^3 - 3m^2 - m^2 - 3m = -3m^3 - 10m^2 + 10m - 5$

si osserva immediatamente che le due radici del denominatore non sono radici del numeratore e dunque:

$x = \dfrac{3m^3 + 10m^2 - 10m + 5}{m(m+2)}$

Per m = 0 e per m = –2 il sistema non è crameriano; discutiamo separatamente i due casi:

Per m = 0 la matrice completa risulta $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & -5 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \end{array}\right]$ e si vede subito che la prima riga è incompatibile con la III dunque il sistema non ammette soluzioni.

Per m = –2 la matrice completa risulta $\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & -13 & -7 & -3 \\ -5 & -9 & -4 & -1 \\ -8 & -17 & -9 & 0 \end{array}\right]$ dal calcolo di $\begin{vmatrix} -6 & -13 \\ -5 & -9 \end{vmatrix} = 54 - 65 = -11 \neq 0$ si deduce che rango A = 2

Se orliamo la matrice otteniamo il determinante:

$\det A' = \begin{vmatrix} -6 & -13 & -3 \\ -5 & -9 & -1 \\ -8 & -17 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 14 & 0 \\ -5 & -9 & -1 \\ -8 & -17 & 0 \end{vmatrix}$ con la sostituzione $r1 \to r1 - 3r2$ e risulta $\det A' = -(-1)(-17\cdot 9 + 14\cdot 8) \neq 0$ e dunque rango(A') = 3

Per il teorema di Rouché Capelli il sistema è incompatibile

Nota di correzione: molte persone hanno sbagliato già il I determinante. Mi pare che nessuno abbia completato correttamente l'esercizio.

<table>
<tr><td colspan="2">1 xor 4 3 punti</td><td colspan="2">2 xor 3 2 punti</td><td colspan="2">5 5 punti</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Nome e cognome: ______________________________ 4F Pni 17 dicembre 2006 spazi vettoriali

Consegne: Il compito è sovradimensionato per consentire a tutti di scegliere gli esercizi più consoni. In linea di massima il punteggio si ottiene per somma con riferimento ad esercizi sostanzialmente completi

1. Si consideri lo spazio generato dai vettori $\vec{v_1}\equiv(2,1,3,1)$, $\vec{v_2}\equiv(1,2,0,1)$, $\vec{v_3}\equiv(-1,1,-3,0)$ determinare la dimensione dello spazio e, dopo averla determinata scrivere una possibile base di questo spazio (per rispondere si utilizzi il metodo preferito ma si motivino le risposte).

   Si vede immediatamente che $\vec{v_1} = \vec{v_2} - \vec{v_3}$ e poiché $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$ non sono paralleli la base è 2 e una possibile basa è data da una qualsiasi coppia di 2 dei 3 vettori assegnati.

   Nota di correzione: quasi tutti hanno scritto la matrice 3×4 dedicandosi poi alla determinazione del rango. In un caso del genere conviene partire o da una matrice 2×2 e poi usare il teorema degli orlati; esistono altre tecniche basate sulle trasformazioni tra matrici ma non sono state svolte a lezione. Ricordo che quando si orla passando da 2×2 a 3×3 bisogna esaminare tutti i casi possibili; il teorema degli orlati garantisce solo che si può partire da una qualsiasi matrice quadrata con determinante diverso da zero.

   Dopo che si è trovato la matrice 2×2 con determinante diverso da zero i vettori che fanno da base hanno comunque 4 componenti e non 2 ! Molti errori su questo punto.

   Ricordo infine che in molti corsi di algebra astratta il rango della matrice viene definito con riferimento al numero di vettori colonna linearmente indipendenti e si dimostra poi che esso corrisponde all'ordine più elevato delle sottomatrici

2. Si consideri in R^3 la base $\vec{e_1}\equiv(1,1,0)$, $\vec{e_2}\equiv(1,0,1)$, $\vec{e_3}\equiv(0,1,1)$. a) Spiegare perché si tratta di una base b) dato un vettore $\vec{x}\equiv[x_1,x_2,x_3]$ riferito alla base canonica, determinare la sua espressione $[x_1',x_2',x_3']$ riferita alla base data.

   a) I tre vettori non sono indipendenti e neanche complanari come si vede eseguendo il prodotto misto (determinante delle componenti). Infatti il prodotto misto rappresenta sempre il volume del parallelepipedo generato dai 3 vettori e se esso è nullo vuol dire che i 3 vettori sono complanari.

   $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1) -1(1) = -2$. Poiché siamo in R^3 i tre vettori non complanari (e dunque linearmente indipendenti) sono una possibile base dello spazio.

   Nota di correzione: se non si utilizza il prodotto misto bisogna scrivere l'equazione, far vedere che corrisponde ad un sistema omogeneo nelle variabili λ_1, λ_2, λ_3 e far vedere che si ha la soluzione banale (vettori linearmente indipendenti) se e solo se $\det(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\neq 0$

   b) Scriviamo l'espressione del vettore nelle due basi $\vec{x} = x_1'\vec{e_1} + x_2'\vec{e_2} + x_3'\vec{e_3} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ si tratta di esprimere la nuova base in funzione della vecchia e si ottiene $\vec{x} = x_1'(1\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}) + x_2'(1\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}) + x_3'(0\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}) = (x_1' + x_2')\vec{i} + (x_1' + x_3')\vec{j} + (x_2' + x_3')\vec{k}$

   Dunque si tratta di risolvere il sistema

   $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ dove $L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ è la matrice dei vettori riga della nuova base e per risolvere il sistema bisogna moltiplicare a sinistra per L^{-1} ottenendo $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = L^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ dobbiamo dunque calcolare $L^{-1} = \dfrac{1}{\det L}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

   dove A_{ik} rappresenta il complemento algebrico dell'elemento a_{ik}

   $\det L = -2$; $A_{11} = -1$; $A_{21} = -(1)$; $A_{31} = 1$; $A_{12} = -(1)$; $A_{22} = 1$; $A_{32} = -(1)$; $A_{13} = 1$; $A_{23} = -(1)$; $A_{33} = (-1)$ e dunque:

   $L^{-1} = = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ eseguendo il prodotto righe per colonne si ha:

   $x_1' = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3)$ e così via.

   Nota di correzione: la parte iniziale in cui si scrive l'equazione matriciale corrispondente alla determinazione delle nuove componenti non è un optional.

   Nella determinazione di L^{-1} sono stati nuovamente sbagliati i coefficienti della matrice aggiunta e sono stato sbagliati perché c'è chi, erroneamente, moltiplica i determinanti del II ordine per l'elemento su cui si è calcolato il complemento algebrico.

3. In uno spazio euclideo R^4 sono dati i punti A≡(1,1,2,–1), B≡(0,0,1,1), C≡(2,–1,0,2). a) Scrivere le coordinate riferite alla base canonica dei vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ b) Determinare il coseno dell'angolo $\alpha = B\hat{A}C$

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ = (–1,–1,–1,2) mentre $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ = (1,–2,–2,3)

Nota di correzione: Grave, gravissima dimenticanza della identità di Chasles strumento principe in ogni geometria vettoriale per determinare le coorsinate di un vettore di estremi noti.

b) Per determinare il coseno occorre calcolare il prodotto scalare dei due vettori e dividere per il prodotto dei moduli

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \sum x_i y_i = -1 + 2 + 2 + 6 = 9$ mentre $\overrightarrow{AB}^2 = \sum x_i^2 = 1 + 1 + 1 + 4 = 7$ mentre $\overrightarrow{AC}^2 = 1 + 4 + 4 + 9 = 18$

Dunque $\cos \alpha = \dfrac{9}{\sqrt{7 \cdot 18}} = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$

4. Sono dati i vettori $\overrightarrow{v_1}$≡(1,1,1,1), $\overrightarrow{v_2}$≡(1,–1,–1,1), $\overrightarrow{v_3}$≡(2,1,1,3). Determinare un vettore $\overrightarrow{v_4}$ ortonormale agli altri tre.

Indichiamo $\overrightarrow{v_4}$ con (a,b,c,d); per la ortogonalità dovrà essere: $a+b+c+d = 0 \wedge a-b-c+d = 0 \wedge 2a+b+c+3d = 0$; dalle prime due equazioni si ottiene per somma e differenza: $a = -d \wedge b = -c$ e sostituendo nella terza a = 0 dunque il vettore ortogonale è (0,b,–b,0) e per la normalizzazione $2b^2 = 1$. Scegliamo la soluzione positiva (i vettori possibili sono 2) e avremo alla fine:

$\overrightarrow{v_4} = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Nota di correzione: su un sistema così banale si cerca la soluzione per somma e sottrazione. Ricordo che la condizione di normalizzazione porta ad una equazione di II grado ed è demenziale fare riferimento al teorema di Rouché Capelli.

5. Si consideri l'equazione agli autovalori $|A - \lambda\mathbb{1}| = 0$ di una matrice invertibile. Dimostrare in maniera formale che gli autovalori della matrice inversa A^{-1} valgono $1/\lambda$ cioè che se $|A - \lambda\mathbb{1}| = 0 \Rightarrow |A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{1}| = 0$ (si ipotizzi, senza dimostrarlo che sia $\lambda \neq 0$; suggerimento si può moltiplicare per det A^{-1}, infatti …)

Come suggerito, poiché det A ≠ 0 per l'esistenza dell'inversa anche det $A^{-1} \neq 0$, si ha che $|A - \lambda\mathbb{1}| = 0 \Leftrightarrow \det A^{-1} |A - \lambda\mathbb{1}| = 0 \Leftrightarrow |A^{-1}(A - \lambda\mathbb{1})| = 0 \Leftrightarrow |\mathbb{1} - \lambda A^{-1}| = 0 \Leftrightarrow \lambda |\frac{1}{\lambda}\mathbb{1} - A^{-1}| = 0 \Leftrightarrow |A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{1}| = 0$ e dunque se gli autovalori di A valgono λ quelli di A^{-1} valgono $\dfrac{1}{\lambda}$

Nota di correzione: esercizio puramente formale e guidato, ma c'è poco coraggio (= creatività)

6. Si consideri in R^2 l'equazione agli autovalori $|A - \lambda\mathbb{1}| = 0$ e sia $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = 0$ la corrispondente equazione caratteristica. a) Calcolare $|A - \lambda\mathbb{1}||A + \lambda\mathbb{1}| = |(A - \lambda\mathbb{1})(A + \lambda\mathbb{1})| = 0$ operando formalmente. Cos'è l'equazione così ottenuta? b) Ripetere la stessa operazione sulla equazione caratteristica. Cosa si ottiene? c) Cosa si può concludere da a) e b) viste insieme?

a) $|A - \lambda\mathbb{1}||A + \lambda\mathbb{1}| = |(A - \lambda\mathbb{1})(A + \lambda\mathbb{1})| = |A^2 + \lambda A - \lambda A - \lambda^2\mathbb{1}| = |A^2 - \lambda^2\mathbb{1}| = 0$

Si è ottenuta l'equazione agli autovalori di A^2 a condizione di assumere come scalare la variabile λ^2

b) Si tratta di moltiplicare il polinomio caratteristico per quello che si ottiene scambiando λ con $-\lambda$. Si ottiene: $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = 0$ e $(-\lambda-\lambda_1)(-\lambda-\lambda_2) = 0$.

Se si moltiplicano tra loro le due equazioni si ha: $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2) = (\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2) = 0$

c) Dal confronto delle due equazioni si ottiene che gli autovalori della matrice A^2 sono rispettivamente λ_1^2 e λ_2^2

Nota di correzione: esercizio puramente formale e guidato, ma c'è poco coraggio (= creatività)

7. Si consideri uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare (sia $\overrightarrow{x}$ il generico vettore e si indichi con α un generico scalare e con $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$ il prodotto scalare)

a) Indichiamo con A un generico operatore lineare. Cosa vuol dire che è lineare?
b) Un operatore lineare si dice simmetrico rispetto al prodotto scalare se …
c) Se l'operatore è dato in forma matriciale riferita ad una base ortonormale la proprietà di simmetria corrisponde a …

a) Un operatore A si dice lineare se gode delle due seguenti proprietà 1) $\alpha(A\overrightarrow{x}) = A(\alpha\overrightarrow{x})$ 2) $A(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = A\overrightarrow{x} + A\overrightarrow{y}$ ovvero il trasformato di una combinazione lineare è pari alla combinazione lineare dei trasformati.

b) Si dice simmetrico se i vettori possono essere scambiati nel prodotto scalare $(A\vec{x})\cdot\vec{y} = \vec{x}\cdot(A\vec{y})$
c) Si dimostra che un operatore simmetrico espresso in forma matriciale gode della proprietà di simmetria della matrice cioè $a_{ik} = a_{ki}$

8. Si consideri in R^3 la forma quadratica di II grado $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$

a) Scrivere il polinomio caratteristico e trovare i tre autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (calcolare direttamente il determinante e fattorizzarlo con il metodo di Ruffini).

La matrice associata è $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ cui corrisponde l'equazione agli autovalori $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)[\lambda(\lambda-1) - 4] + 2(2\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0$

Si osserva che P(1) = 0 e dunque si può effettuare la divisione con il metodo di Ruffini ottenendo l'equazione $(\lambda-1)(\lambda+2)(-\lambda+4) = 0$ e i tre autovalori 1, –2, 4

Nota di correzione: errori nello scrivere la matrice simmetrica

b) Determinare per ciascuno di essi un autovettore normale $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$

Per $\lambda = 1$ si ottiene l'equazione $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow v_1 - 2v_2 = 0 \wedge -2v_1 - 2v_3 = 0 \wedge -2v_2 - v_3 = 0 \Leftrightarrow v_1 = 2v_2 \wedge v_3 = -2v_2$ (una equazione è ridondante) e dunque un possibile vettore è (2, 1, –2) di modulo 3 e dunque l'autovettore normale è (2/3,1/3,–2/3)

Per $\lambda = -2$ si ha l'equazione $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & +2 \end{bmatrix}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow 4v_1 - 2v_2 = 0 \wedge -2v_1 + 3v_2 - 2v_3 = 0 \wedge -2v_2 + 2v_3 = 0 \Leftrightarrow v_2 = 2v_1 \wedge v_3 = v_2 = 2v_1$(una equazione è ridondante) e dunque un possibile vettore è (1, 2, 2) di modulo 3 e dunque l'autovettore normale è (1/3,2/3, 2/3)

Per $\lambda = 4$ si ha l'equazione $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow -2v_1 - 2v_2 = 0 \wedge -2v_1 - 3v_2 - 2v_3 = 0 \wedge -2v_2 - 4v_3 = 0 \Leftrightarrow v_2 = -v_1 \wedge v_3 = -\frac{1}{2}v_2 = \frac{1}{2}v_1$(una equazione è ridondante) e dunque un possibile vettore è (2,–2, 1) di modulo 3 e dunque l'autovettore normale è (2/3,–2/3, 1/3)

Nota di correzione: quando si determinano gli autovettori si sa già che per ogni autovalori sono gli infiniti vettori paralleli ad un vettore dato e dunque ciò significa che il sistema 3×3 (con determinante nullo) corrisponde a 2 equazioni che si risolvono rapidamente per somma e sottrazione.
A questo punto si determina un vettore particolare e da esso quello normalizzato.

c) Come mai i tre autovettori sono anche ortogonali?
Perché quando la matrice è simmetrica un teorema ci garantisce che gli autovettori sono ortogonali

d) Scrivere la matrice del cambio di base L

La matrice del cambio di base ha i tre autovettori come vettori colonna $L = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

e) Senza fare i conti indicare formalmente come si trasforma la matrice A

$\tilde{A} = L^{-1}AL$ ciò è garantito da un teorema

f) La espressione della forma quadratica (indicando con x_1', x_2', x_3' le coordinate di un punto nel nuovo riferimento) assume la forma …Come mai non è necessario fare l'intero calcolo della trasformazione? (citare il teorema)

La forma quadratica assume la forma $x'^2_1 - 2x'^2_2 + 4x'^2_3$ in virtù di un teorema che ci garantisce che quando L è costruita nel modo descritto e l'operatore A è simmetrico la matrice $\tilde{A}$ è diagonale e ha come elementi della sua diagonale proprio gli autovalori.

1	2a	2b	3a	3b	4	5	6	7	8a	8b	8c	8d	8e	8f	
2	2	4	1.2	1.8	3	3	4	2	3.5	4.5	0.5	1	1	1.5	