5G 18/10/99 derivate e Max, min di analitica

1. 1° quesito s.s. 90 (parziale). Data nel sistema cartesiano xOy la parabola $\mathscr{P}$: $y = 4x - x^2$ e la retta r_k : $y = k$ ($k > 0$) che intercetta sulla parabola i due punti A e B determinare il valore di k per cui l'area σ del triangolo AOB è massima.

2. Data la funzione $y = f(x) = \dfrac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$ precisarne il dominio $\mathscr{D}$, calcolare la sua derivata prima $y = f'(x)$ e, dopo averla fattorizzata, studiarne il segno.

Griglia di correzione

1 figura ⇒ 1	1 area ⇒ 3	1 max ⇒ 4	2 dom ⇒ 1	2 f'(x) ⇒ 3	2 f'(x) ≥ 0 ⇒ 2	Totale 14

5G 7/12/99 Problemi goniometrici e limiti

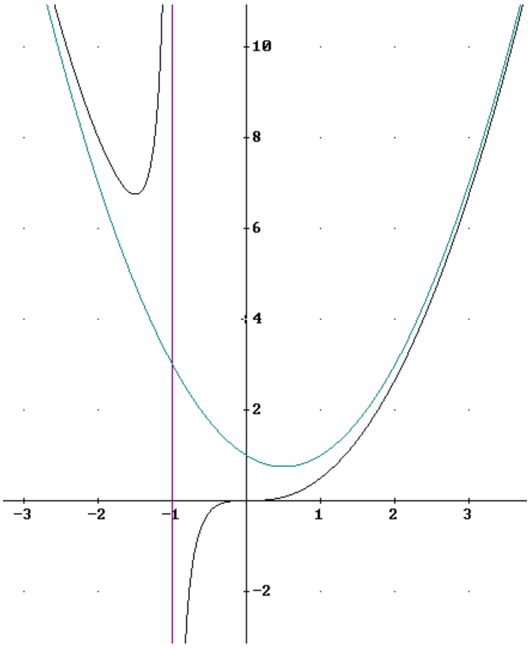
$\boxed{1.}$ Calcolare i seguenti limiti precisando gli elementi essenziali del calcolo eseguito ed indicando la forma indeterminata quando necessario (è ammesso l'uso di ~ e o(…)): $\boxed{1.1}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2 - 2x + 1} - \sqrt{3x^2 + x - 3}\right)$

$\boxed{1.2}$ $\lim\limits_{x\to0+}[\ln x - \ln x^2]$ $\boxed{1.3}$ $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{2\sin x - 1}{2\cos x - \sqrt{3}}$ $\boxed{1.4}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\frac{x}{3} - 1}{\text{sen}\frac{x}{2}\,\tan\frac{x}{4}}$

$\boxed{2.}$ 3° quesito s.o. 92 (variante) Data la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro O e raggio unitario si consideri un punto P esterno ad essa. Tracciata la semiretta OP di origine O si indichino con Q il punto di intersezione con la circonferenza e con A e B i punti di contatto delle due tangenti per P. Determinare la funzione y = f(α) che rappresenta il rapporto $\dfrac{\overline{AQ} + \overline{QB}}{\overline{AB}}$ dove con α si intende l'angolo AOP (precisare il dominio quando il punto P si sposta lungo la semiretta). Senza derivare la funzione trovata spiegare perché si tratta di una funzione crescente. Si determini quindi la quantità x = $\overline{QP}$ e, dopo averla invertita, si trovi cos α = f(x). Si usi la relazione trovata per esprimere i vari elementi della figura in funzione di x invece che di α.

1.1 ⇒ 2	1.2 ⇒ 1	1.3 ⇒ 3	1.4 ⇒ 2	2.1 ⇒ 2	2.2 ⇒ 1.5	2.3 ⇒ 2	2.4 ⇒ 2.5

5G 18/1/2000 Studi di funzione (prova simulata)



Si consideri la famiglia di curve $\gamma_{a,b} : y = f(x,a,b) = \dfrac{x^3+a}{x + b}$. $\boxed{1.}$ Determinare tra esse quella che presenta un asintoto verticale per x= -1 e tale che $f'(-\frac{3}{2}) = 0$. $\boxed{2.}$ Preso atto che ciò si verifica per $a = 0$ e $b = 1$ studiare la funzione così trovata (comportamento agli estremi del dominio, segno, segno della derivata prima, diagramma). $\boxed{3.}$ Calcolare l'area racchiusa tra l'asse delle x e il diagramma della funzione nell'intervallo [0,3]. Per eseguire il calcolo dell'area eseguire preventivamente la divisione tra numeratore e denominatore ed osservare che $[\ln(x+1)]' = \dfrac{1}{x+1}$. Dalla divisione si determina anche la parabola che fa da asintoto alla funzione $\boxed{4.}$ Se resta tempo studiare la derivata seconda come conferma di quanto già evidenziato dallo studio della derivata prima

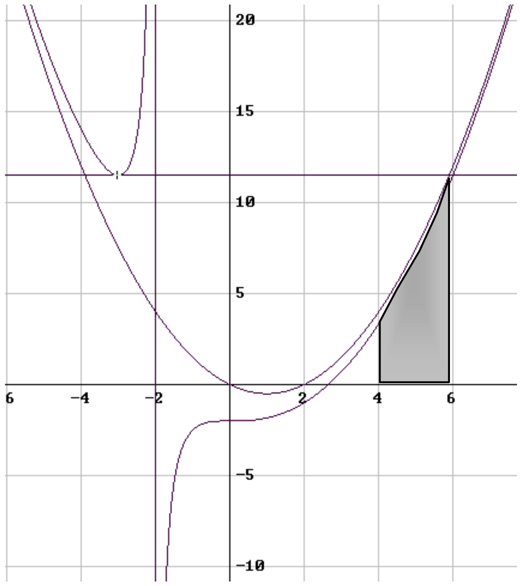
risposte: minimo relativo $(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4})$ asintoto parabolico $y = x^2 - x + 1$ flesso a tangente orizzontale in (0,0) area $= \frac{15}{2} - \ln 4$

$f''(x) = \dfrac{2x\,(x^2 + 3x + 3)}{(x + 1)^3}$

$1 \Rightarrow 1+2+1$	$2 \Rightarrow 2+1+2+1$	$3 \Rightarrow 3+1+1$	$4 \Rightarrow 3$	

5G 20/1/2000 studio di funzioni e test di teoria (2 ore)

1) Data la famiglia di funzioni $f(x,a) = \dfrac{x^3 - 4x + a}{2x + 4}$ determinare il valore di a in modo che f'(-3) = 0. **2)** Indicata con γ: y = f(x) la funzione così trovata determinare l'andamento di γ evidenziando in particolare i seguenti elementi: dominio, comportamento agli estremi, parabola asintotica (cioè la parabola che ne descrive il comportamento all'infinito e che può essere agevolmente determinata eseguendo la divisione ed osservando che N(x) / D(x) = Q(x) + o(1)), crescere decrescere e punti di annullamento della derivata prima. **3)** Eseguire una stima con due cifre significative dell'unico punto di annullamento della funzione e precisare, alla luce del diagramma perché l'equazione f(x) = 0 ammette una sola radice. **4)** Considerato il punto di minimo relativo si tracci per esso la retta tangente che incontra γ in A. Dopo aver determinato l'ascissa di A (usare il teorema di Ruffini) si calcoli l'area sottesa dal diagramma nell'intervallo $[4,x_A]$



risposte: a = -8; asintoto verticale x = -2; minimo relativo (-3,23/2); flesso orizzontale in (0,-2); parabola asintotica $y = x^2/2 - x$; $x_A = 6$; $\int_4^6 f(x)dx = 4\ln\frac{3}{4} + \frac{46}{3}$

1 ⇒ 2 + 1	2⇒ 1+2+2	3 ⇒ 3	4 ⇒ 3	

Teoria

	Mettere una croce su vero o falso: corretto +1, errato -0.5, mancante 0	**V**	**F**
1.	Una funzione limitata nell'intorno di *c* può ammettere limite infinito		*
2.	Una funzione non limitata ha sicuramente come estremo superiore +∞		*
3.	Una funzione non limitata ha sicuramente come estremo inferiore -∞		*
4.	Una funzione limitata superiormente possiede sicuramente un minimo assoluto.		*
5.	Una funzione non limitata superiormente non può ammettere minimi relativi		*
6.	Una funzione limitata inferiormente ammette sempre minimo assoluto		*
7.	Una funzione che ammette massimo e minimo assoluto prende tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo		*
8.	Se una funzione ammette in *c* un massimo relativo allora f'(c) esiste ed è uguale a zero.		*
9.	Se una funzione è derivabile in [a,b] e in un suo punto interno *c* presenta un massimo relativo allora f'(c) = 0	*	
10.	Condizione necessaria affinché una funzione derivabile ammetta un punto di massimo relativo è che la sua derivata si annulli in quel punto.	*	
11.	Condizione sufficiente affinché una funzione ammetta in *c* un massimo relativo è che la derivata prima sia positiva in un intorno sinistro e negativa in un intorno destro	*	
12.	Se per x→+∞ si ha f(x)~g(x) allora f(x)-g(x)→0		*
13.	Se per x→c si ha f(x)~g(x) allora f(x)=g(x) + o(g(x))	*	
14.	Condizione necessaria affinché una funzione sia derivabile è che sia continua	*	
15.	Una funzione si dice derivabile se esiste il limite del rapporto incrementale		*
16.	Se una funzione è derivabile in *c* allora f(c+Δx) - f(c) = f'(c)Δx + o(Δx)	*	
17.	Se una funzione oscilla indefinitamente nell'intorno di un punto non può ammettere limite in quel punto.		*
18.	Se una funzione oscilla indefinitamente nell'intorno di un punto non è mai derivabile in quel punto.		*
19.	Se una funzione ammette massimo assoluto ne ha uno solo	*	
20.	Una funzione definita in [a,b] e che presenta derivata sempre positiva o nulla ha come massimo assoluto f(b)	*	

	Risposte sintetiche	**V**	**F**
1.	Una funzione limitata nell'intorno di *c* può ammettere limite infinito: per ammettere limite infinito deve essere non limitata (non vale il contrario: cioè una funzione non limitata può non ammettere limite)		*

	Risposte sintetiche	**V**	**F**
2.	Una funzione non limitata ha sicuramente come estremo superiore $+\infty$: potrebbe essere non limitata inferiormente ed essere limitata superiormente		*
3.	Una funzione non limitata ha sicuramente come estremo inferiore $-\infty$: idem		*
4.	Una funzione limitata superiormente possiede sicuramente un minimo assoluto: basta che sia illimitata inferiormente		*
5.	Una funzione non limitata superiormente non può ammettere minimi relativi: nulla si sa di cosa accade ai minimi si può invece dire che non ammette massimo		*
6.	Una funzione limitata inferiormente ammette sempre minimo assoluto: basta che l'estremo inferiore del codominio corrisponda ad un asintoto orizzontale e non c'è minimo assoluto		*
7.	Una funzione che ammette massimo e minimo assoluto prende tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo: basta che ammetta una discontinuità di prima specie e sia monotona crescente.		*
8.	Se una funzione ammette in *c* un massimo relativo allora f'(c) esiste ed è uguale a zero. Basta che ci sia una cuspide e in quel caso f'(c) non esiste		*
9.	Se una funzione è derivabile in [a,b] e in un suo punto interno *c* presenta un massimo relativo allora f'(c) = 0: in quel caso visto che la tangente esiste deve essere orizzontale	*	
10.	Condizione necessaria affinché una funzione derivabile ammetta un punto di massimo relativo è che la sua derivata si annulli in quel punto: si consideri una funzione monotona crescente su un intervallo chiuso		*
11.	Condizione sufficiente affinché una funzione ammetta in *c* un massimo relativo è che la derivata prima sia positiva in un intorno sinistro e negativa in un intorno destro	*	
12.	Se per $x\to+\infty$ si ha $f(x)\sim g(x)$ allora $f(x)-g(x)\to 0$: le funzioni x^2 e $x^2 + 2x$ sono asintotiche ma la loro differenza tende a ∞		*
13.	Se per $x\to c$ si ha $f(x)\sim g(x)$ allora $f(x)=g(x) + o(g(x))$: $f(x) / g(x) = 1 + o(1)$ e pertanto $f(x) = g(x) + g(x)\, o(1) = g(x) + o(g(x))$	*	
14.	Condizione necessaria affinché una funzione sia derivabile è che sia continua : teorema sulla continuità delle funzioni derivabili	*	
15.	Una funzione si dice derivabile se esiste il limite del rapporto incrementale: se esiste finito		*
16.	Se una funzione è derivabile in *c* allora $f(c+\Delta x) - f(c) = f'(c)\Delta x + o(\Delta x)$: per ipotesi $[f(c+\Delta x) - f(c)] / \Delta x = f'(c) + o(1)$ e pertanto $f(c+\Delta x) - f(c) = f'(c)\Delta x + o(1)\, \Delta x) = f'(c)\Delta x + o(\Delta x)$	*	
17.	Se una funzione oscilla indefinitamente nell'intorno di un punto non può ammettere limite in quel punto: per esempio $x \sin(1/x)$ nell'intorno dello zero		*
18.	Se una funzione oscilla indefinitamente nell'intorno di un punto non è mai derivabile in quel punto: per esempio $x^3 \sin(1/x)$ nell'intorno dello zero		*
19.	Se una funzione ammette massimo assoluto ne ha uno solo: per definizione	*	
20.	Una funzione definita in [a,b] e che presenta derivata sempre positiva o nulla ha come massimo assoluto f(b)	*	

Rispondere sul foglio alle seguenti questioni:

1) Dare la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ ed illustrarla con un diagramma.

2) Spiegare perché nel dare la definizione di limite per $x\to c$ ci si disinteressa del fatto che *c* appartenga o non appartenga al dominio della funzione. Che caratteristiche deve avere *c*?
3) Prendere 3 questioni a cui si è risposto falso e illustrarle con un controesempio.
4) Scrivere le condizioni affinché la funzione $y = f(x)$ presenti in c un punto angoloso.
5) Scrivere la condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione presenti in un punto *c* interno al suo dominio un massimo relativo.

$1 \Rightarrow 3$	$2\Rightarrow 2$	$3 \Rightarrow 2 + 2 + 2$	$4 \Rightarrow 1.5$	$5 \Rightarrow 2$

risposte sintetiche

1) Se fissato arbitrariamente un intorno di *l* esiste un intorno di $+\infty$ tale che per ogni x appartenente a tale intorno f(x) cade entro l'intorno di *l*. Con intorno di più infinito si intende un intervallo illimitato a destra cioè $x> k$ con k positivo e arbitrariamente grande.

È il caso dell'asintoto orizzontale a destra

2) Nella definizione di limite ci si disinteressa del comportamento della funzione nel punto perché si è alla ricerca di comportamenti regolari nelle vicinanze del punto anche quando la funzione non ha senso nel punto considerato (si veda il caso della derivata che porta sempre a 0/0). Il punto *c* anche se può non appartenere al dominio della funzione deve però esserne un punto di accumulazione per poter applicare la definizione di limite.

4) La funzione deve essere continua nel punto e ammettere derivata destra e sinistra finite e tra loro diverse

5) La funzione deve essere continua, può non essere derivabile nel punto ma deve ammettere un intorno in cui è derivabile positiva a sinistra e negativa a destra.

5G 17/2/2000 Temi esame (2 ore)

I quesito 82/83 (testo rielaborato)

$\boxed{1.}$ a) Studiare la funzione $\gamma : y = f(x) = \frac{a^2}{x^2} - 1$ e disegnarne il grafico (simmetrie, zeri e segno, asintoti, crescere e decrescere) N.B.: non è indispensabile l'uso delle derivate trattandosi di una funzione potenza traslata.

b) Determinare quindi i 4 punti di intersezione (A, B, C, D) tra γ e la circonferenza $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = a^2$ (il calcolo presenta qualche complicazione ed è un buon esercizio di soluzione di sistemi di grado superiore al II).

c) Trovare il valore di a per il quale i 4 punti sono i vertici di un semiesagono regolare (si consiglia di cercare, tra i molti modi possibili, quello caratterizzato dalla massima efficienza di calcolo).

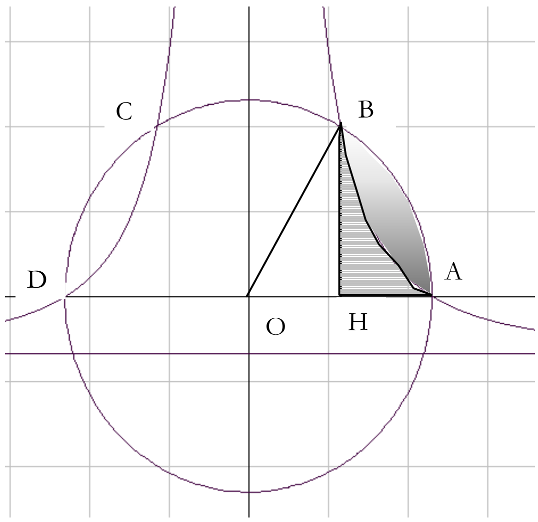
d) In questo caso determinare le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve (per la circonferenza utilizzare l'area del settore che risulta di semplice individuazione).

$\boxed{2.}$ Nel sistema di riferimento xOy è dato il fascio di parabole ad asse verticale $\mathcal{P}_a : y = (a+1)\, x^2 -2(a+1)x + 1$. Determinare i punti fissi del fascio A e B ($x_A < x_B$), la retta r_{AB}, le due parabole $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ simmetriche rispetto alla retta r_{AB} e che nel punto A presentano tangenti tra loro perpendicolari. Determinare infine l'area della regione finita di piano delimitata da $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

risposte sintetiche

$\boxed{1.}$ Si tratta di una funzione potenza (esponente -2) traslata e simmetrica rispetto all'asse y con asintoto verticale (x=0) ed asintoto orizzontale (y=-1). Il parametro a fissa la scala dell'asse y. Tutto il problema è simmetrico rispetto all'asse y e pertanto si può restringere lo studio a $\Re^+$.

$\mathcal{C} \cap \gamma$ porta ad una equazione di III grado in y o di VI grado (nei soli gradi pari) in x. $y(y^2 +y - a^2) = 0$ con $y > -1$. Le soluzioni sono $y = 0 \vee y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a^2}}{2}$ delle quali solo la maggiore è accettabile. Infatti $y^2 +y - a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - x^2 +y - a^2 = 0 \Leftrightarrow y = x^2$ e dunque deve essere $y \geq 0$ mentre $x = \sqrt{y}$



Dopo aver sostituito in x si ottengono i 4 punti $A\equiv(a,0)$, $B\equiv\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2} - 1}{2}}, \frac{\sqrt{1+4a^2} - 1}{2}\right)$, $C\equiv\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2} - 1}{2}}, \frac{\sqrt{1+4a^2} - 1}{2}\right)$, $D\equiv(-a,0)$

Data la simmetria per avere il semiesagono basta che sia AOB = $\pi/3$ da cui $y_B /OB = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Si ha pertanto $\frac{\sqrt{1+4a^2} - 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}|a|$ e da qui si ottiene $|a| = 2\sqrt{3}$

I 4 punti hanno dunque coordinate $A\equiv(2\sqrt{3},0)$, $B\equiv(\sqrt{3},3)$, $C\equiv(-\sqrt{3},3)$, $D\equiv(-2\sqrt{3},0)$

L'area del settore di angolo al centro $\pi/3$ vale 1/6 dell'area del cerchio $\sigma_1 = 1/6\, \pi\, 12 = 2\pi$

L'area del triangolo OBH vale $\sigma_2 = 1/2 \sqrt{3}\, 3 = 3\sqrt{3} /2$

Infine l'area σ_3 del triangolo mistilineo HAB si trova mediante integrale.

$\sigma_3 = F(2\sqrt{3}) - F(\sqrt{3})$ dove $F(x) \mid F'(x) = \frac{12}{x^2} - 1$. Pertanto $F(x) = 12\, x^{-1} /-1 - x = -12/x -x$

$\sigma_3 = F(2\sqrt{3}) - F(\sqrt{3})$ e alla fine si ottiene $\sigma = 2\pi - \frac{5\sqrt{3}}{2}$

23/3/2000 Temi esame (2 ore)

Scegliere uno dei due seguenti problemi e risolverlo. È inutile affrontare un secondo quesito se non si è prima completato quello prescelto perché le parti eccedenti non saranno valutate. Si ricorda l'importanza dell'ordine, della precisione espressiva e della motivazione delle procedure. La prova sarà valutata in quindicesimi.

I quesito 99 s.s. (testo rielaborato)

Data una semicirconferenza di centro O e di diametro AB = $2r$ Si consideri su di essa un punto C in modo che l'angolo $\widehat{AOC}$ si acuto. Indicata con φ l'ampiezza di tale angolo si ponga $x = \tan\frac{\varphi}{2}$ e si indichi con y il raggio della circonferenza tangente al diametro AB in K e alla semicirconferenza in C.

1) Dimostrare che il centro O' di tale circonferenza appartiene al raggio OC
2) Costruire con riga e compasso il centro O' dopo aver motivato la sua appartenenza ad una seconda retta determinabile attraverso i dati.
3) Determinare la funzione $y = f(x)$ precisandone il dominio con riferimento al problema
4) Studiare la funzione prescindendo dalle limitazioni di origine geometrica e determinando anche gli eventuali punti di flesso
5) Scrivere l'equazione della retta tangente alla funzione nel suo punto P di ascissa -2 e determinare quindi l'ascissa dell'altro punto in cui la tangente interseca il diagramma della funzione

III quesito 99 s.s. (testo rielaborato)

Data la funzione $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ si sa che $f(5) = 0$, $f'(5) = -1$, $f''(5) = -\frac{1}{2}$

1) Determinare l'equazione della parabola e, dopo aver indicato con A e B i punti di intersezione con l'asse x, calcolare l'area del triangolo ABC ove C rappresenta il punto d'incontro delle due tangenti alla parabola in A e in B.
2) Determinare il rapporto tra tale area e quella del segmento parabolico di base AB
3) Determinare i due volumi V_1 e V_2 generati dalla rotazione del triangolo e del segmento parabolico intorno all'asse x
4) Fornire, alla luce della definizione di integrale definito, la giustificazione della formula utilizzata per il calcolo dei volumi dei solidi di rotazione.
5) Scrivere l'equazione della circonferenza con centro nel IV quadrante tangente alla parabola in A e avente raggio $r = 2\sqrt{2}$ e determinare le ascisse degli altri due punti di intersezione tra parabola e circonferenza

29/4/2000 temi esame (2 ore)

Scegliere uno dei due seguenti problemi e risolverlo. È inutile affrontare un secondo quesito se non si è prima completato quello prescelto perché le parti eccedenti non saranno valutate. Si ricorda l'importanza dell'ordine, della precisione espressiva e della motivazione delle procedure. La prova sarà valutata in quindicesimi

I quesito 93 s.o. (testo rielaborato)

La funzione y = f(x) è così definita: $y = f_1(x) = -3x^2 + hx$ per $x \le 1$ e $y = f_2(x) = \frac{k}{x^2}$ per x >1. 1) Determinare i valori di h e k in modo che la funzione y = f(x) e la sua derivata prima siano continue in x =1. 2) Rappresentare la funzione così trovata evidenziando in particolare l'andamento in x = 1. 3) Determinare l'area della regione di piano individuata dal diagramma e dal semiasse positivo delle ascisse. 4) Concludere la trattazione precisando cosa si intenda con la scrittura $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ dove f(x) è una funzione continua in $\Re$ e dare un esempio per il quale tale integrale esista finito e infinito.

soluzione sintetica

$\boxed{1.1.}$ Le due funzioni che definiscono f(x) sono costituite da un ramo di parabola (concava verso il basso) e da un ramo di funzione potenza che tende a zero più rapidamente dell'iperbole e della quale null'altro si può dire sino alla determinazione di k. Entrambe le funzioni date sono continue e derivabili ovunque e si tratta pertanto di analizzarne il comportamento in x = 1.

- Per la continuità della funzione dovrà essere:

$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1)$ e pertanto -3 + h = k

- Per la continuità della derivata della funzione dovrà essere:

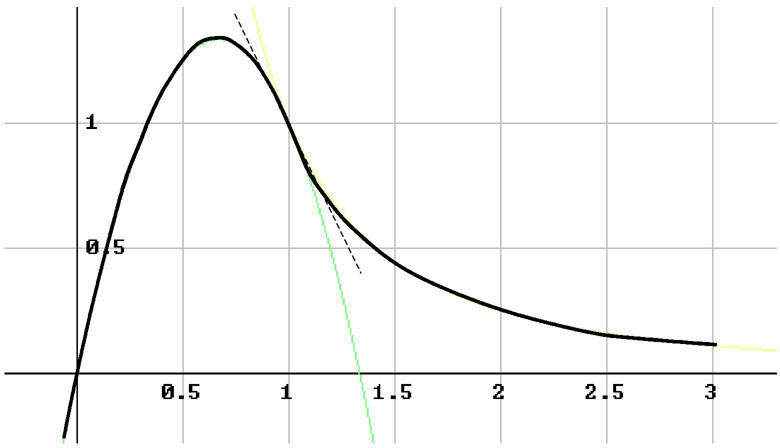
$\lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1+} f'(x)$ e pertanto essendo $f_1'(x) = -6x + h$ e $f_2'(x) = \frac{-2k}{x^3}$ si ha -6 + h = -2k

Risolvendo il sistema si ottiene h= 4 e k = 1.

$\boxed{1.2}$ La funzione y = f(x) risulta pertanto definita, continua e con derivata continua su tutto $\Re$ con $y = f_1(x) = -3x^2 + 4x$ per $x \le 1$ e $y = f_2(x) = \frac{1}{x^2}$ per x >1. In particolare f(1) = 1 e f'(1) = 2

Il vertice della parabola è dato da $x_V = -\frac{4}{-6} = \frac{2}{3}$ mentre $y_V = -3\frac{4}{9} + 4\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

In virtù della positività di k si ha che $f_2(x)$ è positiva decrescente e concava verso il basso (non è indispensabile il calcolo trattandosi di una funzione elementare nota).



Nel punto di ascissa 1 la funzione presenta un flesso con tangente inflessionale di inclinazione -2.

$\boxed{1.3}$ Per determinare l'area richiesta bisogna calcolare separatamente due integrali indefiniti.

$\int (-3x^2 + 4x)dx = -x^3 + 2x^2 = F_1(x)$

$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} = F_2(x)$

A questo punto $\sigma = \int_0^1 f_1(x)dx + \lim_{t\to+\infty}\int_1^t f_2(x)dx =$

$F_1(1) - F_1(0) + \lim_{t\to+\infty}(-\frac{1}{t}) - F_2(1) = 1 - 0 + 0 + 1 = 2$

$\boxed{1.4}$ Con la scrittura $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ si intende $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$ e tale limite è detto integrale generalizzato esso è utile per dare un significato al calcolo dell'area di porzioni di diagramma di estensione infinita.

Il caso in cui l'integrale esiste finito è stato appena visto. Non si deve pensare che il fatto che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ sia una condizione sufficiente perché esista finito l'integrale generalizzato. Per esempio tutto le funzioni potenza $y = 1/x^{\alpha}$ con $\alpha > 1$ presentano area finita mentre quelle con $0 < \alpha \le 1$ hanno area infinita come si può evidenziare semplicemente eseguendo il calcolo dell'integrale indefinito.

Infatti $\int x^{-\alpha}dx = \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ tende a zero se $\alpha>1$, a infinito se $\alpha < 1$ (l'integrale di i/x porta al logaritmo che va anch'esso all'infinito).

III quesito 93 s.o. (testo rielaborato)

Sono assegnate le due funzioni x = sin t e y = sin 2t. 1) Utilizzando note relazioni di goniometria esprimere y in funzione di x. Le due funzioni così trovate hanno la forma y = ± f(x). 2) Studiare le funzioni trovate sino alla derivata seconda inclusa individuando simmetrie e punti di discontinuità e/o di non derivabilità. 3) Calcolare l'area della regione di piano racchiusa tra le curve. 4) Completare la trattazione discutendo il caso di funzioni continue che presentino cuspidi. Fornire opportuni esempi.

soluzione sintetica

$\boxed{3.1.}$ La funzione definita implicitamente dalle due funzioni del parametro t non è univoca a causa della corrispondenza non biunivoca tra seno e coseno. Infatti sin 2t = 2 sin t cos t e cos t = $\pm\sqrt{1 - \sin^2 t}$. Pertanto si ottiene:

$y = 2 \sin t \cos t = 2x (\pm\sqrt{1 - x^2}) = \pm 2x\sqrt{1 - x^2}$

Indichiamo con $f(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$ e con $g(x) = -2x\sqrt{1 - x^2}$. Le due funzioni sono simmetriche rispetto all'asse x e pertanto ci occuperemo solo della prima.

$\boxed{3.2}$ $y = f(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$ è una funzione irrazionale continua ovunque e condominio imposto dall'esistenza della radice: $1 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$. Ma la funzione è anche dispari e pertanto la studieremo su metà dominio $0\le x\le 1$.

$f(0) = f(1) = 0$

La funzione è sempre positiva o nulla entro il campo di studio (prodotto di due quantità positive).

$f'(x) = 2[1\sqrt{1 - x^2} + x\dfrac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}] = 2\dfrac{1-x^2 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = 2\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

Osserviamo preliminarmente che la derivata va all'infinito per x=1 (annullamento del denominatore) e pertanto in x =1 si avrà un punto di non derivabilità con tangente verticale.

Entro il campo di studio la derivata ha il segno del numeratore e dunque $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow 0\le x\le 1/\sqrt{2}$

Per $x = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$ si ha un massimo relativo con tangente orizzontale $f(1/\sqrt{2}) = 2\, 1/\sqrt{2}\, 1/\sqrt{2} = 1$

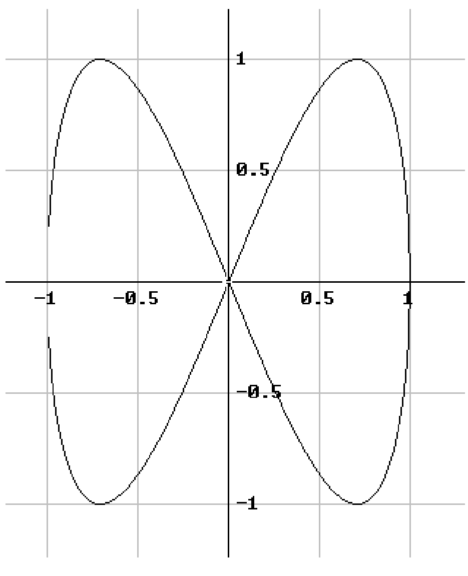
Trattandosi di un campo di studio limitato calcoliamo anche $f'(0) = 2$

Come richiesto calcoliamo f''(x)

$f''(x)= 2\dfrac{-4x\sqrt{1 - x^2} - (1 - 2x^2)\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = 2\dfrac{-4x (1 - x^2) - (1 - 2x^2) (-x)}{(1-x^2)\sqrt{1 - x^2}} = 2$

$\dfrac{-4x + 4x^3 + x - 2x^3}{(1-x^2)\sqrt{1 - x^2}} =$

$2\dfrac{-3x + 2x^3}{(1-x^2)\sqrt{1 - x^2}} = =2\dfrac{x(-3 + 2x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{A\ B}{C\ D}$ La derivata seconda poteva essere calcolata più agevolmente come prodotto di potenze (per chi sa maneggiare gli esponenti razionali).



$A \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$ $\quad$ $B \ge 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3 \ge 0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$ (la radice $\sqrt{3/2}$ è esterna al campo di studio)

$C > 0$ e $D > 0\ \forall x$

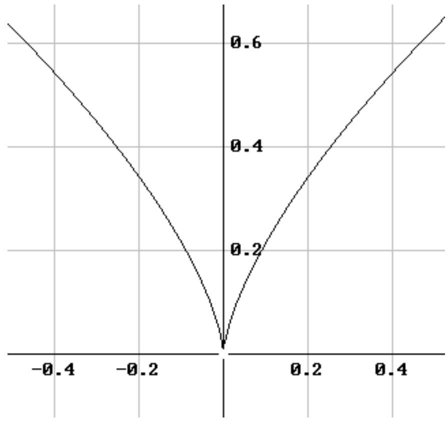
Dunque la derivata seconda è sempre negativa e si annulla per x = 0 dove si avrà un punto di flesso (ricordiamo che si tratta del centro di simmetria della funzione)
A questo punto si può tracciare il diagramma e noi rappresentiamo i 4 rami delle due funzioni di partenza.

3.3 L'area richiesta data la simmetria è pari a 4 volte quella di un solo quadrante.

$$F(x) = \int 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int (1-x^2)'\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int z^{\frac{1}{2}}dz = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$$

$$\sigma = 4\,[F(1) - F(0)] = \frac{8}{3}$$

3.4 Una funzione continua può essere non derivabile in un punto di continuità. Quando la derivata prima non esiste perché il limite del rapporto incrementale (destro e/o sinistro) dà infinito la curva presenta una tangente verticale e il punto è detto punto cuspidale.
Questa situazione si verifica per molte funzioni irrazionali perché nel derivare il termine sotto radice finisce a denominatore e pertanto gli zeri della funzione diventano infiniti della derivata. Il caso più semplice è la funzione $y = \sqrt[3]{x^2}$ il cui diagramma viene indicato qui a lato:



$f'(x) = 2/3\ x^{-1/3} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ e $\lim_{x\to 0} f'(x) = \infty$

1/6/2000 2 ore temi esame

Svolgere in maniera completa uno solo dei seguenti due quesiti

Sessione suppletiva 97 I quesito PNI

a) Rappresentare in coordinate cartesiane ortogonali il diagramma γ della funzione y = f(x) = sin x + 1/3 sin 3x nell'intervallo [0,2π] senza calcolare f"(x) ma evidenziando la presenza dei flessi in base al crescere e decrescere b) Determinare la somma delle tre aree individuate in [0,π] dalla funzione data e dalla funzione y = sin x c) Determinare il periodo della funzione y = sin nx + 1/3 sin mx dove n e m sono numeri naturali diversi da zero d) Eseguire il calcolo di f"(x) e discutere la concavità della funzione

Sessione ordinaria 94 I quesito PNI

a) Rappresentare la funzione γ: y = f(x) = $\sqrt[3]{x^3+3x^2}$ prestando particolare attenzione al comportamento all'infinito ed alla presenza di punti di non derivabilità b) Determinare le equazioni delle rette tangenti negli estremi relativi e nei punti di flesso c) Indicato con P il punto in cui il diagramma interseca l'asintoto *a* della funzione si considerino le intersezioni della retta *r* parallela all'asse delle ascisse e passante per P e si indichino con Q e R le loro proiezioni su *a*. Determinare il rapporto $\overline{QR}$ / $\overline{OP}$ d) Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int (x^2+2x)\sqrt[3]{x^3+3x^2}\,dx$$

5G 14/10/2000 limiti e continuità

Conoscenze teoriche

1t. Dare la definizione di $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, illustrarla graficamente e dare un esempio di funzione che la soddisfi.

2t. Se $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \land \lim_{x \to c} g(x) = l > 0$ argomentare la ragione per cui $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$. Non è richiesta una giustificazione rigorosa ma solo la capacità argomentativa riferita alla definizione.

Competenze

Calcolare i seguenti limiti

c1. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x^{12}} - x^2 + \sqrt{x} - 3}{\sqrt[3]{x^{13}} - 2}$ c2. $\lim_{x \to 3} \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{2x}{x^2 - 9}\right)$ c3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$

si consiglia di porre

$1 + x = z^6$

e quindi motivare

c4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{2^{-x} - 1}{\cos x - 1} \text{artg } x$ c5. Dimostrare che esiste il $\lim_{x \to +\infty} [\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x-1}] = 0$ anche se non esistono i due limiti separatamente presi (differenza di 2 seni …)

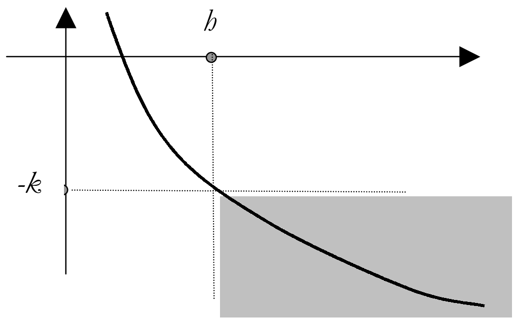
c6. $\lim_{x \to +\infty} [\ln(x+2) - \ln x]$ c7. $\lim_{x \to 0} e^{f(x)}$ dove $f(x) = \dfrac{2x + x^2}{1 - \cos x}$

1t ⇒ 3	2t ⇒ 2	teoria	c1 ⇒ 2	c2 ⇒ 2	c3 ⇒ 3	c4 ⇒ 4	c5 ⇒ 5	c6 ⇒ 2	c7 ⇒ 3	compet

Soluzione

1t. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ quando considerata una funzione con dominio illimitato superiormente si ha che $\forall k, k>0\ \exists h, h>0 \mid \forall x, x>h \Rightarrow f(x) < -k$

Una funzione con questa proprietà è per esempio $y = -x^2$ per la quale posto $-x^2 < -k$ si ha $x^2 > k \Leftrightarrow x > \sqrt{k} \lor x < -\sqrt{k}$ e posto $h = \sqrt{k}$ la definizione è verificata. Incidentalmente resta dimostrato che per questa funzione vale $-\infty$ anche il limite a $-\infty$.



2t. Se $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ la funzione risulta grande a piacere nelle vicinanze di c mentre se $\lim_{x \to c} g(x) = l > 0$ vuol dire che la funzione si avvicina a l nelle vicinanze di c. Poiché il prodotto di una quantità grande a piacere per una limitata e positiva è una quantità positiva grande a piacere ne segue il teorema.

c1. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x^{12}} - x^2 + \sqrt{x} - 3}{\sqrt[3]{x^{13}} - 2} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^{12/5} + o(x^{12/5})}{x^{13/3} + o(x^{13/3})} = \lim_{x \to +\infty} x^{12/5 - 13/3} = \lim_{x \to +\infty} x^{-29/15} = 0^+$

c2. $\lim_{x \to 3} \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{2x}{x^2 - 9}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \to 3} \dfrac{x + 3 - 2x}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \dfrac{3 - x}{x^2 - 9} = (0/0) = \lim_{x \to 3} \dfrac{-1}{x+3} = -\dfrac{1}{6}$

$\boxed{\text{c3.}}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} = (0/0)$ Si pone $x + 1 = z^6$ per trasformare le due radici in potenze che si trattano meglio a livello algebrico. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} = \lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z^3 - 1}{z^2 - 1} = \lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z^2 + z + 1}{z + 1} = \dfrac{3}{2}$

$\boxed{\text{c4.}}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{-x} - 1}{\cos x - 1} \text{artg } x = (0/0)$ Osserviamo che $2^{-x} = e^{-\ln 2\, x} \approx -\ln 2\, x + 1$ $(e^z - 1 \approx z)$. Mentre $\cos x - 1 \approx -x^2/2$ e $\text{artg } x \approx x$ pertanto $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{-x} - 1}{\cos x - 1} \text{artg } x = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\ln 2\, x + 1 - 1}{-x^2/2} \cdot x = 2 \ln 2$

$\boxed{\text{c5.}}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x-1}]$ i limiti delle due funzioni componenti non esistono singolarmente presi ma vediamo se esiste il limite della differenza: allo scopo ci servono le formule di prostaferesi sen p - sen q $= 2 \sin\dfrac{p-q}{2} \cos\dfrac{p+q}{2}$

$$\lim_{x \to +\infty} [\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x-1}] = \lim_{x \to +\infty} \left[2 \sin\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cos\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}\right] =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[2 \sin\frac{x + 1 - (x - 1)}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} \cos\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[2 \sin\frac{2}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} \cos\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}\right] =$$

$= 2 \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)\, g(x)] = 0$ perché $f(x) \to 0$ e $g(x)$ è limitata

$\boxed{\text{c6.}}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} [\ln(x + 2) - \ln x] = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\dfrac{x+2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + o(1)) = \ln 1 = 0$

$\boxed{\text{c7.}}$ $\lim\limits_{x \to 0} e^{f(x)}$ dove $f(x) = \dfrac{2x + x^2}{1 - \cos x}$ Calcoliamo $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + x^2}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + o(x)}{x^2/2 + o(x^2)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{x} = \infty$ ma viste le proprietà dell'esponenziale dovremo distinguere il limite destro da quello sinistro $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \dfrac{4}{x} = \pm\infty$ e pertanto:

$\lim\limits_{x \to 0^+} e^{f(x)} = (e^{+\infty}) = +\infty$ mentre $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{f(x)} = (e^{-\infty}) = 0^+$

5G 16/11/2000 Derivazione e proprietà della derivata

Competenze derivazione: sono richiesti 3 su 4

$\boxed{1c.}$ Calcolare e semplificare la derivata della funzione $y = f(x) = \dfrac{2 \sin^2 x + 1}{(\sin x + \cos x)^2}$ dopo averne precisato il dominio in $[0,2\pi]$. Prima di derivare si consiglia di passare alle funzioni dell'angolo doppio.

$\boxed{2c}$ Dopo aver dimostrato che $f'(x) = 2\dfrac{\sin 2x + 1 - 2 \cos 2x}{(1 + \sin 2x)^2}$ studiare per $x\in[0,\pi]$ il segno di $f'(x)$

$\boxed{3c}$ Calcolare il dominio e la derivata della funzione $y = g(x) = e^{x} + \ln(2 - e^{2x})$

$\boxed{4c}$ Dopo aver calcolato la derivata $g'(x)$ studiarne il segno entro il dominio

Questionario derivazione: scegliere 3 questioni su 5

$\boxed{1q.}$ Data la funzione $y = f(x)$ invertibile si indichi con $x = g(y)$ la sua inversa. Enunciare e dimostrare il teorema sulla derivata della funzione inversa.

$\boxed{2c}$ Applicando il teorema della derivata della funzione inversa determinare la derivata della funzione $y = f(x) = \arcsin(x)$

$\boxed{3q}$ Sia $y = f(x)$ una funzione non costante continua in $[a,b]$. Completare e motivare con riferimento ai teoremi. ① Se $f(a)\cdot f(b) <0$ si può affermare che … ② $c \in \,]a,b[\Rightarrow \lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ precisare anche cosa accade quando $c = a$ ③ La funzione ammette sempre un massimo assoluto. Cosa accade se la funzione è continua in $]a,b[$?

$\boxed{4q}$ Discutere per quali valori del parametro α la funzione $y = f(x)$ così definita: $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin x \cdot \cos x}{x^3}$ per $x<0$ e $f(x) =\sqrt{|x^3 - \alpha|}$ per $x\geq 0$ è continua in $x = 0$

$\boxed{5q}$ Illustrare e motivare il significato geometrico della derivata di una funzione $y = f(x)$ definita in $]a,b[$ in un punto $P\equiv(\tilde{x};f(\tilde{x}))$ interno ad $]a,b[$

Competenze problema

$\boxed{1p}$ Sono assegnate le funzioni $\gamma_1 : y = f(x) = 2 \ln(x)$ e $\gamma_2 : y = g(x) = 2 x^3 - 2 x^2$

① Dimostrare che $T\equiv(1,0) \in\gamma_1\cap\gamma_2$ ② Dimostrare che γ_1 e γ_2 sono tra loro tangenti in T. ③ Tracciare un andamento qualitativo di $f'(x)$ e $g'(x)$ nell'intorno di $x = 1$ e da quell'andamento e dai punti precedenti dedurre che le due curve γ_1 e γ_2 non si possono più incontrare oltre T ④ Indicata con *t* la retta tangente in T determinare la sua ulteriore intersezione R con γ_2 e scrivere l'equazione della retta tangente *s* a γ_2 in R. ⑤ Determinare la tangente goniometrica dell'angolo formato da *t* e *s*.

18/11/2000 classe 5G

$\boxed{\text{1c.}}$ Calcolare e semplificare la derivata della funzione $y = f(x) = \dfrac{2 \sin 2x + 1}{(\sin x + \cos x)^2}$ dopo averne precisato il dominio in $[0,2\pi]$. Prima di derivare si consiglia di passare alle funzioni dell'angolo doppio.

$\mathscr{D}$: $\sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \text{tg } x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{4}\pi \wedge x \neq \frac{5}{4}\pi$

Il passaggio all'angolo doppio è consigliabile, oltre che per semplificare la derivazione, anche per poter effettuare il successivo (indispensabile) studio del segno. Bisogna ricordare le formule di bisezione che vengono qui applicate su x invece che su x/2;

$\sin(x/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$

$$f(x) = \frac{2 \sin^2 x + 1}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1 - \cos 2x + 1}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} = \frac{2 - \cos 2x}{1 + \sin 2x}$$

$$f'(x) = \frac{2\sin 2x(1 + \sin 2x) - (2 - \cos 2x)\, 2 \cos 2x}{(1 + \sin 2x)^2} = 2\,\frac{\sin 2x + \sin^2 2x - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{(1 + \sin 2x)^2} = 2\,\frac{\sin 2x + 1 - 2 \cos 2x}{(1 + \sin 2x)^2}$$

$\boxed{\text{2c}}$ Dopo aver dimostrato che $f'(x) = 2\,\dfrac{\sin 2x + 1 - 2 \cos 2x}{(1 + \sin 2x)^2}$ studiare per $x\in[0,\pi]$ il segno di $f'(x)$

Osservato che il segno di f'(x) è quello del numeratore risolviamo la disequazione $\sin 2x - 2 \cos 2x + 1 \geq 0$ per $2x \in[0,2\pi]$

Utilizzando la identità della combinazione lineare ($a \sin x + b \cos x = A \sin(x + \varphi)$ con $A = \frac{a}{|a|}\sqrt{a^2 + b^2}$ e $\varphi = \text{artg } \frac{b}{a}$)si ha che

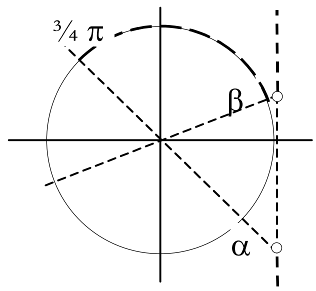
$\sin 2x - 2 \cos 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{5} \sin (2x + \varphi) \geq -1$ con $\varphi = \text{artg}(-2) \approx -1.1071 \Leftrightarrow \sin (2x + \varphi) \geq -1/\sqrt{5}$

Posto $\alpha = \text{arc sin}(-1/\sqrt{5}\,) \approx -0.4636$ si ha (alla luce della discussione grafica e del fatto che $2x + \varphi \in[\varphi,2\pi+\varphi]$) : $\alpha \leq 2x + \varphi \leq \pi - \alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha - \varphi}{2} \leq x \leq \frac{\pi - \alpha - \varphi}{2}$.

Dopo aver calcolato i valori approssimati di α e φ si ottiene

$\frac{\alpha - \varphi}{2} \approx 0.322$ mentre $\frac{\pi - \alpha - \varphi}{2} \approx 2.356$

La disequazione poteva essere risolta anche utilizzando le formule parametriche del seno e coseno così: posto $t = \text{tg } (2x/2) = \text{tg } x$ con $x\in[0,\pi]$ (poiché $x = \pi/2$ resta escluso verifichiamo direttamente se è vera in quel punto $0 + 2 + 1 \geq 0$? vera!).



$\sin 2x - 2 \cos 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2t}{1 + t^2} - 2\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2t - 2 + 2t^2 + 1 + t^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Delta/4 = 1 + 3 = 4 > 0$ valori esterni all'intervallo delle radici $t = \frac{-1 \pm 2}{3}$ pertanto $t_1 = -1$ mentre $t_2 = 1/3$

$\alpha = \text{artg } (-1) = -\pi/4$ mentre $\beta = \text{artg}(1/3) \approx 0.322$

La disequazione è vera per $\beta \leq x \leq ¾\, \pi \approx 2.356$

$\boxed{\text{3c}}$ Calcolare il dominio e la derivata della funzione $y = g(x) = e^{x} + \ln(2 - e^{2x})$

$\mathscr{D}$: è determinato esclusivamente dal logaritmo che richiede la positività (stretta) dell'argomento $2 - e^{2x} > 0 \Leftrightarrow e^{2x} < 2 \Leftrightarrow 2x < \ln 2 \Leftrightarrow x < ½ \ln 2 \approx 0.347$

$$g'(x) = e^x + \frac{1}{2 - e^{2x}}\,(-2e^{2x}) = \frac{e^x(2 - e^{2x}) - 2 e^{2x}}{2 - e^{2x}} = \frac{e^x(2 - e^{2x} - 2e^x)}{2 - e^{2x}}$$

N.B. Nel compito ho osservato i seguenti errori: qualcuno deriva la funzione esponenziale come se fosse una potenza; qualcuno si dimentica di derivare 2x (mentre applica il teorema della derivata della funzione di funzione).

$\boxed{\text{4c}}$ Dopo aver calcolato la derivata g'(x) studiarne il segno entro il dominio

Tenendo conto del dominio e della positività dell'esponenziale si ha $g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow - e^{2x} - 2 e^x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} + 2 e^x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \Delta/4 = 1 + 2 = 3$ valori interni all'intervallo delle radici $e^x = -1 - \sqrt{3}$ non ammissibile perché <0 oppure

$e^x = -1 + \sqrt{3}$ che ci porta a $x \leq \ln(\sqrt{3} - 1) \approx 0.73$

Pertanto $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \forall x, x \in \mathscr{D}$

$\boxed{\text{1q.}}$ Data la funzione $y = f(x)$ invertibile si indichi con $x = g(y)$ la sua inversa. Enunciare e dimostrare il teorema sulla derivata della funzione inversa.

Considerato un punto $P\equiv(\tilde{x}; \tilde{y})$ tale che $\tilde{y}=f(\tilde{x})$ se esiste $f'(\tilde{x})$ con $f'(\tilde{x}) \neq 0$ allora esiste anche $g'(\tilde{y}) = \dfrac{1}{f'(\tilde{x})}$

Ho visto che la dimostrazione l'hanno fatta in pochi e quei pochi avevano studiato a memoria, o copiato, il testo che riporta le cose con una impostazione un po' macchinosa ed estranea al simbolismo che usiamo di solito. Vediamo come si fa:

Per calcolare $g'(\tilde{y})$ mi serve $\dfrac{\Delta g}{\Delta y} = \dfrac{\Delta x}{\Delta f} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta f}{\Delta x}}$. Pertanto quando passo al limite per $\Delta x \to 0$ ottengo il reciproco delle derivate (dopo aver osservato che le funzioni derivabili sono continue e pertanto quando $\Delta x \to 0$ anche $\Delta y \to 0$).

$\boxed{\text{2c}}$ Applicando il teorema della derivata della funzione inversa determinare la derivata della funzione $y = f(x) = \arcsin(x)$

Osserviamo preliminarmente che $x\in[-1,1]$ e $y\in[-\pi/2,\pi/2]$. Indicata con $x=g(y) = \sin y$ la inversa si ha:
$f'(x) = 1/g'(y) = 1/\cos y$ ma per $y\in[-\pi/2,\pi/2]$ $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ e pertanto:
$f'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$. La formula vale per $x\in]-1,1[$ in accordo con la richiesta del teorema che chiede il non annullamento della derivata.
N.B. : nessuno si è ricordato della richiesta sul non annullamento della derivata. In effetti quando il il seno vale 1 o –1 la tangente della funzione è orizzontale e la sua inversa ha tangente verticale, cioè non è derivabile in quel punto.

$\boxed{\text{3q}}$ Sia y = f(x) una funzione non costante continua in [a,b]. Completare e motivare con riferimento ai teoremi.

① Se $f(a)\cdot f(b) <0$ si può affermare che poiché una funzione continua prende tutti valori compresi tra due elementi del codominio essa ammette sicuramente almeno uno zero.

② $c \in]a,b[\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ la affermazione è vera per definizione di continuità precisare anche cosa accade quando c = a.

In quel caso ha senso solo il limite destro $\lim_{x \to a+} f(x)$ ma non si hanno informazioni né sul suo valore né sul valore di f(a).
Pensare al comportamento della funzione $y = \operatorname{tg} x$ per $x\in\ ]-\pi/2, \pi/2[$ che è continua nell'intervallo aperto e presenta due discontinuità di II specie negli estremi.
③ La funzione ammette sempre un massimo assoluto. La affermazione è vera in virtù del teorema di Bolzano Weierstrass. Cosa accade se la funzione è continua in]a,b[? In quel caso non è detto che ammetta massimo e minimo. Si pensi per esempio ad una funzione monotona decrescente. Potremo dire che esistono sicuramente gli estremi superiore ed inferiore, ma nemmeno che essi sono finiti (si veda sempre l'esempio della tangente).

$\boxed{\text{4q}}$ Discutere per quali valori del parametro α la funzione y = f(x) così definita: $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin x \cdot \cos x}{x^3}$ per $x<0$ e $f(x) =\sqrt{|x3 - \alpha|}$ per $x\geq 0$ è continua in x = 0

Calcoliamo $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \dfrac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \to 0-} \dfrac{x\frac{1}{2}x^2}{x^3} = ½$

$\lim_{x \to 0+} f(x) = f(0) = \sqrt{|\alpha|}$

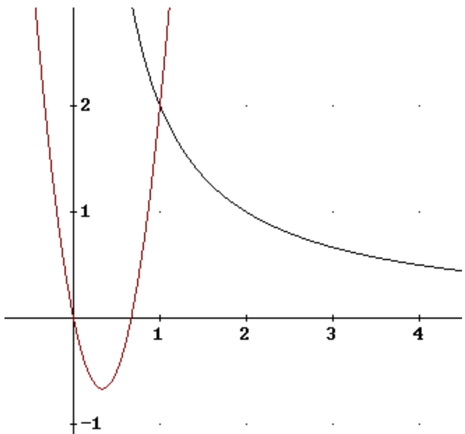
Per la continuità i due limiti devono coincidere ed eguagliare il valore della funzione; pertanto $\sqrt{|\alpha|} = ½ \Leftrightarrow |\alpha|\ ¼ \Leftrightarrow \alpha = \pm ¼$
NB: ci ha provato solo uno studente che, per altro ha sbagliato il limite; brutto segno.

$\boxed{\text{5q}}$ Illustrare e motivare il significato geometrico della derivata di una funzione y = f(x) definita in]a,b[in un punto $P\equiv(\bar{x};f(\bar{x}))$ interno ad]a,b[

Si veda qualsiasi testo ma si tenga presente che la risposta deve contenere la definizione di derivata come limite finito del rapporto incrementale, la osservazione che il rapporto incrementale rappresenta la inclinazione della retta secante (tangente goniometrica dell'angolo tra il verso positivo dell'asse x e la retta) passante per il punto nel quale si calcola la derivata e per il punto mobile (determinato da Δx), la osservazione che quando $\Delta x\to 0$ i due punti vanno a sovrapporsi mentre, per definizione di retta tangente, la secante va a determinare la tangente.

$\boxed{\text{1p}}$ Sono assegnate le funzioni $\gamma_1 : y = f(x) = 2 \ln(x)$ e $\gamma_2 : y = g(x) = 2x^3 - 2x^2$

① Dimostrare che $T\equiv(1,0) \in\gamma_1\cap\gamma 2$ ② Dimostrare che γ_1 e γ_2 sono tra loro tangenti in T. ③ Tracciare un andamento qualitativo di f'(x) e g'(x) nell'intorno di x = 1 e da quell'andamento e dai punti precedenti dedurre che le due curve γ_1 e γ_2 non si possono più incontrare oltre T ④ Indicata con t la retta tangente in T determinare la sua ulteriore intersezione R con



$\gamma 2$ e scrivere l'equazione della retta tangente s a $\gamma 2$ in R. ⑤ Determinare la tangente goniometrica dell'angolo formato da t e s.

① f(1) = 2 ln(1) = 0 $\wedge$ g(1) = 2 - 2 = 0. Pertanto T appartiene ad entrambe le curve.

NB: era richiesto di verificare che … e non di trovare i punti di intersezione.

② Per dimostrare che sono tangenti le due funzioni devono ammettere la stessa retta tangente e dovrà pertanto essere f'(1) = g'(1)

f'(x) = 2/x con x> 0 (dominio)

g'(x) = $6x^2 - 4x$

In effetti f'(1) = 2 e g'(1) = 6 – 4 = 2

③ Le due curve che rappresentano la derivata sono la iperbole equilatera ben nota e una parabola con la concavità verso l'alto che si incontrano nel punto (1,2) come in figura. Oltre T le due funzioni f e g, che avevano la stessa ordinata crescono con un ritmo diverso (visibile dall'andamento delle derivate): la curva logaritmica cresce sempre più lentamente (la derivata tende a zero) mentre la funzione di III grado cresce sempre più rapidamente (la derivata tende a ∞). Pertanto, dopo essersi toccate in T le due curve si lasciano per sempre.

NB: Poiché i pochi studenti che hanno tentato di fare questa parte hanno usato proprietà non dimostrate sul *crescere lento* del logaritmo faccio osservare che ciò che richiedevo (attraverso l'uso della derivata) era appunto una prima giustificazione di questo fatto.

Per completezza vi riporto anche i diagrammi delle due funzioni e vi prego di confrontare tale andamento con quello delle due derivate in modo di osservare i legami reciproci (positività della derivata e crescere della funzione).

④ Indicata con *t* la retta tangente in T determinare la sua ulteriore intersezione R con γ_2 e scrivere l'equazione della retta tangente *s* a γ_2 in R.

T$\equiv$(1,0) e m_t = f'(0) = 2 pertanto *t*: y – 0 = 2(x – 1) $\Leftrightarrow$ y = 2x – 2

$t \cap \gamma_2$: $2x^3 - 2x^2 = 2x - 2 \Leftrightarrow 2x^2(x-1) = 2(x-1) \Leftrightarrow 2(x-1)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x =$ 1 radice doppia $\vee$ x = -1

NB: con un po' di stile, non serviva il teorema di Ruffini.

m_s = g'(-1) = 6 + 4 = 10. Inoltre g(-1) = –2 – 2 = –4 pertanto:

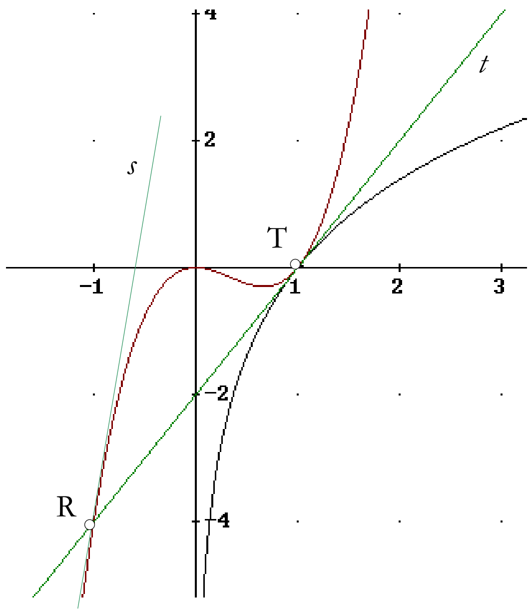
s: y + 4 = 10(x + 1) $\Leftrightarrow$ y = 10 x + 6

⑤ Determinare la tangente goniometrica dell'angolo formato da *t* e *s*.

L'angolo tra le due rette si trova come differenza degli angoli formati con l'asse delle x la cui tangente goniometrica è il coefficiente angolare. Pertanto, indicato con δ l'angolo richiesto avremo che

$\mathrm{tg}\,\delta = \mathrm{tg}\,(\beta - \alpha) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \dfrac{10 - 2}{1 + 10\cdot 2} = 8/21$ e pertanto δ = artg (8/21) $\approx$ 0.364 radianti

NB: L'angolo in figura è deformato dalla modifica di scala (l'inclinazione di una retta è la tangente goniometrica solo se il sistema è ortonormale).



5G 16/12/2000: analitica e massimi minimi

problema

Si consideri la famiglia di parabole $\mathscr{P}_a$ di equazione: $y = ¼ x^2 + ¼ ax – a^2$ e si applichi ad essa la trasformazione x→ -x e y→-y cioè la trasformazione che associa ad ogni punto di $\mathscr{P}_a$ il suo simmetrico rispetto all'origine. Si ottiene così una nuova famiglia di parabole $\mathscr{S}_a$ simmetriche della precedente. Rispondere alle seguenti domande:

1) Scrivere l'equazione di $\mathscr{S}_a$ 2) Determinare le coordinate dei vertici delle V e V' delle due famiglie 3) Giustificare la seguente affermazione *se si scambia* a *con* –a *non cambia nulla nella figura e pertanto si può considerare a>0* 4) Determinare le coordinate dei punti di intersezione A e B e indicare con A quello situato nel primo quadrante 5) Determinare la quantità $\overline{AB}^2$ e dimostrare che essa non ammette massimi né relativi né assoluti 6) Scrivere le equazioni delle due rette tangenti alle parabole nel punto A 7) Indicati con C e D i punti in cui la tangente a $\mathscr{P}_a$ incontra l'asse x e quella a $\mathscr{S}_a$ incontra l'asse y determinare l'area del quadrilatero OCAD

questionario: rispondere a 3 delle 6 domande proposte

1. Dopo aver ricordato la condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia invertibile spiegare utilizzando le derivate il motivo per cui la funzione $y = f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + 5x – 2421$ è invertibile su tutto $\Re$
2. La generica circonferenza di equazione $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ e la generica parabola ad asse verticale di equazione $y = ax^2 + bx + c$ possono incontrasi al più in 4 punti. Giustificare algebricamente la risposta e quindi illustrare graficamente i casi in cui si hanno 2 intersezioni doppie (tangenze), 1 intersezione doppia e 2 intersezioni semplici, 1 intersezione tripla e 1 intersezione semplice.
3. Presi 3 punti $A\equiv(x_A, y_A)$, $B\equiv(x_B, y_B)$, $C\equiv(x_C, y_C)$ collocati nei primi 2 quadranti si può dimostrare facilmente con considerazioni geometriche basate sul calcolo delle aree dei trapezi che l'area σ del triangolo ABC vale $\frac{1}{2}|x_A(y_B – y_C) + x_B(y_C – y_A) + x_C(y_A – y_B)|$. Perché se i punti sono collocati alla rinfusa la formula rimane valida? (ragionare sulle traslazioni).
4. Dimostrare che la funzione $y = f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$ con $x \in \Re^+$ presenta un minimo assoluto in x = 1. Specificare anche cosa accade in x = 0.
5. Calcolare la derivata della funzione $y = f(x) = \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$ e stabilire se presenta nel suo dominio degli estremanti e di che tipo sono.
6. Sia $y = F(x) = f[g(x)]$ una funzione di funzione composta da funzioni derivabili e siano $A = \{x|g(x) \geq 0 \wedge x \in \mathscr{D}_F\}$ e $B = \{x|g(x) < 0 \wedge x \in \mathscr{D}_F\}$. Stabilire come si possa calcolare la derivata della funzione $y = f[|g(x)|]$ distinguendo i due casi $x\in A$ e $x\in B$

5G 1/2/2001

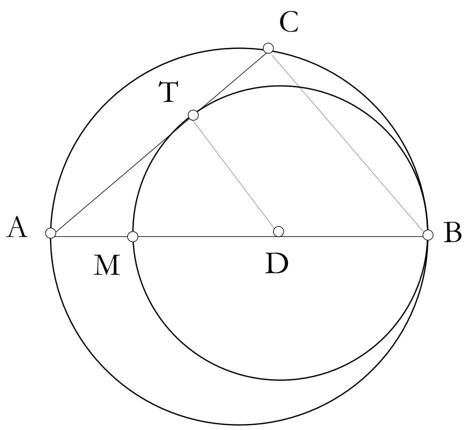
Problema:

Data la circonferenza γ di diametro AB = $2r$ si consideri la circonferenza γ' di diametro MB = $2x$ tangente internamente a γ in B. Dopo aver condotto da A la retta tangente t a γ' si indichino con T il punto di tangenza e con C l'ulteriore intersezione di t a γ.

1) determinare la funzione $y = f(x) = \overline{TC}$ precisandone il dominio con riferimento al problema.

2) dopo aver dimostrato che risulta $f(x) = 2x\,\frac{\sqrt{r(r-x)}}{2r-x}$ studiarne l'andamento (continuità, derivabilità, segno, crescere e decrescere) entro il dominio dato e scegliendo r come unità di misura.

Soluzione



1) Con i limiti del problema è $0 \le 2x \le 2r$ e indicato con D il centro di γ' le due rette r_{TD} e r_{CB} risultano parallele poiché formano entrambe angoli retti con AC (proprietà della tangente rispetto al raggio e proprietà dei triangoli inscritti in una semicirconferenza)

Dunque $\overline{TC} : \overline{DB} = \overline{AT} : \overline{AD}$

Ma per il teorema della tangente e della secante $\overline{AT} = \sqrt{\overline{AM}\ \overline{AB}}$ mentre $\overline{AB} = 2r$, $\overline{AM} = 2r - 2x$ e dunque $\overline{AT} = \sqrt{2(r-x)\,2r} = 2\sqrt{r(r-x)}$

$\overline{AD} = 2r - x$ e $\overline{DB} = x$ pertanto:

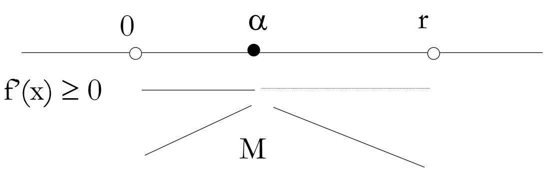
$$\overline{TC} = \overline{DB} \cdot \overline{AT} / \overline{AD} = \frac{x\,2\sqrt{r(r-x)}}{2r-x} = 2x\frac{\sqrt{r(r-x)}}{2r-x}$$

2) La funzione entro i limiti del problema risulta continua e derivabile ovunque ($x = 2r$ è esterno al dominio) è una funzione irrazionale frazionaria sempre positiva e che si annulla per $x = 0$ e $x = r$. Qualche problema potrebbe sorgere alla derivata in $x = r$ per effetto della presenza della radice.

$$f'(x) = 2\frac{\left(\sqrt{r(r-x)} + x\frac{1}{2\sqrt{r(r-x)}}(-r)\right)(2r-x) - x\sqrt{r(r-x)}\,(-1)}{(2r-x)^2} = 2\frac{\frac{2(r(r-x)) - rx}{2\sqrt{r(r-x)}}(2r-x) + x\sqrt{r(r-x)}}{(2r-x)^2} = 2$$

$$\frac{(2r^2 - 3rx)(2r-x) + 2x(r^2 - rx)}{2\sqrt{r(r-x)}(2r-x)^2} = \frac{4r^3 - 2r^2x - 6r^2x + 3rx^2 + 2r^2x - 2rx^2}{\sqrt{r(r-x)}(2r-x)^2} = \frac{r(x^2 - 6rx + 4r^2)}{\sqrt{r(r-x)}(2r-x)^2}$$

$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - 6rx + 4r^2 \ge 0$ il che equivale a valori esterni all'intervallo delle radici $\alpha = (3 - \sqrt{5})\,r$ e $\beta = \alpha = (3 + \sqrt{5})\,r$ di cui solo la prima risulta interna al dominio.

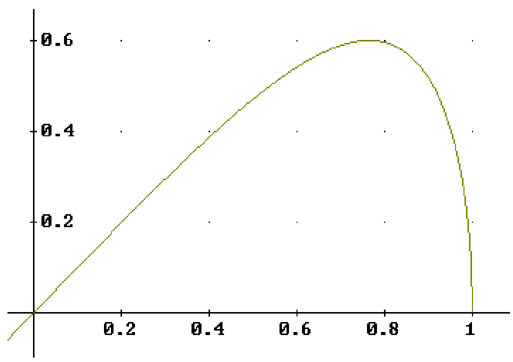


Si hanno dunque un massimo relativo per $x = \alpha$ e un punto di non derivabilità per $x = r$.

Per l'assenza di altri punti critici interni al dominio il massimo è assoluto.

$f(\alpha) \approx 0.6006\,r$

$f'(0) = 1$ e il diagramma risulta quello qui riportato che è stato disegnato assumendo r come unità.



Questionario

1) Data la famiglia di curve $\gamma_a : y = f(x,a) = \frac{2x - a}{x^2 - 5ax + 3}$ scriverla in forma implicita e, attraverso opportune considerazioni algebriche, verificare che essa ammette dei punti fissi, cioè dei punti comuni a tutte le curve e trovarli.

$y = \frac{2x - a}{x^2 - 5ax + 3} \Leftrightarrow x^2y - 5axy + 3y - 2x + a = 0 \Leftrightarrow a(-5xy + 1) + (x^2y + 3y - 2x) = 0$ La equazione è soddisfatta $\forall a \Leftrightarrow (-5xy + 1) = 0 \wedge x^2y + 3y - 2x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{5x} \wedge x^2\frac{1}{5x} + \frac{3}{5x} - 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{5} + \frac{3}{5x} - 2x = 0 \Leftrightarrow -\frac{9x}{5} + \frac{3}{5x} = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \wedge y = \pm\frac{\sqrt{3}}{5}$

I punti $A \equiv (-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{\sqrt{3}}{5})$ e il suo simmetrico $B \equiv (\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{3}}{5})$ appartengono a tutte le curve della famiglia

2) Data la cubica di equazione $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ verificare attraverso una opportuna traslazione che il suo punto di ascissa $x = -\frac{b}{3a}$ è centro di simmetria per la funzione

Sostituendo a $x = -\frac{b}{3a}$ si ottiene $y = \frac{2}{27}\frac{b^3}{a^2} + c$ e dunque se il punto $C \equiv (-\frac{b}{3a}, \frac{2}{27}\frac{b^3}{a^2} + c)$ deve essere centro di simmetria deve accadere che spostata l'origine in C si ottiene una funzione dispari ovvero una funzione per la quale F(-X) – F(X).

La traslazione avrà equazione $x = X - \frac{b}{3a}$ e $y = Y + \frac{2}{27}\frac{b^3}{a^2} + c$. Applicando la trasformazione alla funzione data si ha:

$Y + \frac{2}{27}\frac{b^3}{a^2} + c = a\left(X - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(X - \frac{b}{3a}\right)^2 + c \Leftrightarrow Y = a\,3X^3 - 3a\frac{b}{3a}X^2 + 3a\frac{b^2}{9a^2}X - \frac{b^3}{27a^3} + bX^2 - 2b\frac{b}{3a}X + b\frac{b^2}{9a^2} - \frac{2}{27}\frac{b^3}{a^2} = 3aX^3 - b^2X$ e come si vede scambiando X con – X la funzione va in – Y.

3) Data la funzione $y = f(x)$ così definita: $f(x) = 1 + \sin(x)/x$ per $x < 0$; $f(x) = k \ln(x + 1) / x$ per $x > 0$ e $f(0) = 2$ stabilire per quale valore di k essa è continua in R

La funzione è continua ovunque tranne al più in x = 0. Per stabilire la continuità dobbiamo verificare che il limite destro e sinistro esistano finiti e siano uguali a f(0). Dai limiti notevoli sappiamo che $\lim_{x\to 0^-} [1 + \sin x / x] = 2$ e che $\lim_{x\to 0^+} k \ln(x + 1) / x = k$ pertanto affinché la funzione sia continua deve essere k = 2.

4) La seguente affermazione è sbagliata; motivare il perché: *se una funzione continua e derivabile su R non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle in [a,b] allora non esiste alcun punto interno ad [a,b] tale che $f'(x) = 0$*

L'affermazione è falsa perché il teorema di Rolle è una condizione sufficiente e dunque se cade una delle sue ipotesi la tesi può rimanere valida comunque. Nel nostro caso, trattandosi di funzione continua e derivabile dovrà essere $f(a) \neq f(b)$. Ora basta considerare la funzione (parabola) $y = (x - 2)(x - 4)$ nell'intervallo [1,4] si ha $f(1) = 3 \neq f(4) = 0$ eppure nel punto x = 3 (vertice e interno all'intervallo) si ha f'(3) = 0

5) Calcolare il seguente limite $\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$

Il limite richiede l'uso del teorema di de l'Hopital perché i termini principali si annullano reciprocamente al numeratore; in effetti

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - x - x + o(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^3} = ?$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2 - \cos x - (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - \operatorname{tg}^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 - x^2 + o(x^2)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-1/2\, x^2}{3x^2} = -1/6$$

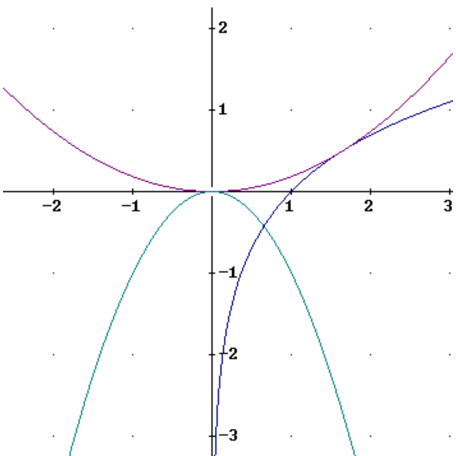
6) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle; esaminare quindi la dimostrazione evidenziando la ragione per cui se la funzione non è ovunque derivabile in]a,b[il teorema può non valere

Per la dimostrazione e l'enunciato vedi testo.

Nel corso della dimostrazione supposto di esaminare il caso in cui ξ è il valore che produce il massimo si fanno i ragionamenti sui rapporti incrementali e sul loro segno ma la possibile non derivabilità in ξ impedisce di concludere sulla esistenza del limite del rapporto incrementale e dunque non autorizza ad affernare che esista $\xi \mid f'(\xi) = 0$

7) Le due funzioni $y = kx^2$, $k > 0$ e $y = \ln x$ possono risultare tangenti per qualche valore di k; trovare tali valori e i corrispondenti valori di x. Utilizzare il risultato trovato per risolvere e discutere l'equazione $kx^2 - \ln x = 0$

Affinché le due curve siano tangenti deve essere simultaneamente $kx^2 = \ln x \wedge 2kx = 1/x$. Dalla seconda si ha $kx^2 = ½$ e dunque $\ln x = ½$ che ci dà $x = \sqrt{e}$. Trovato x deve essere $k = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2e}$. Dunque le due curve possono essere tangenti per un ben determinato valore di k.



L'equazione data corrisponde alla intersezione delle due curve $y = \ln x$ e $y = kx^2$. Se $k < 0$ l'equazione ha sempre una soluzione in]0,1[. Invece quando $k > 0$ si hanno due possibilità ben evidenziate dalla figura. Se $k > \frac{1}{2e}$ non si hanno soluzioni mentre se $0 < k < \frac{1}{2e}$ si hanno due soluzioni.

La parabola tangente trovata all'inizio discrimina i due casi.

8) Dimostrare applicando la definizione di derivata che la funzione $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ con $f(0) = 0$ è derivabile nell'origine e trovare il valore della derivata.

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(0+\Delta x)^2 \sin(1;0+\Delta x)}{\Delta x} = \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x}$; poiché la funzione oscillante $\sin\frac{1}{\Delta x}$ è limitata esiste $f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$

5G 7/4/2001

Questionario

1. Data la funzione $y = f(x) = \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}$ precisarne il dominio e quindi, utilizzando il teorema dell'Hopital, studiarne il comportamento nell'intorno del punto 1. Rispondere alle seguenti domande: tipo di forma di indecisione, trasformazione alla forma cui si possa applicare il teorema, applicazione del teorema e calcolo del limite.

$\mathscr{D}$: $x \neq 1 \wedge x > 0$

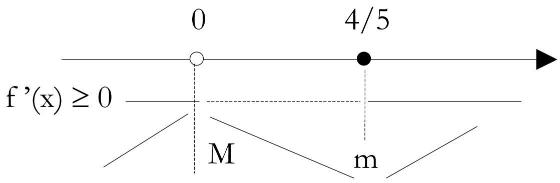
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{0}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x \ln x}{x \ln x + x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + \dfrac{x}{x}}{\ln x + \dfrac{x}{x} + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

2. La funzione $y = f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2} = (x-2)\,x^{2/3}$ presenta 2 punti critici e un flesso. Studiare le caratteristiche di tali punti.

$\mathscr{D} = \Re$

$$f'(x) = x^{2/3} + (x-2)\frac{2}{3}x^{2/3-1} = x^{2/3} + \frac{2}{3}(x-2)x^{-1/3} = \frac{3x + 2(x-2)}{3x^{1/3}} = \frac{5x-4}{3x^{1/3}} = 1/3\,(5x-4)\,x^{-1/3}$$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ (valori esterni all'intervallo delle radici) $x < 0 \vee x \geq \dfrac{4}{5}$



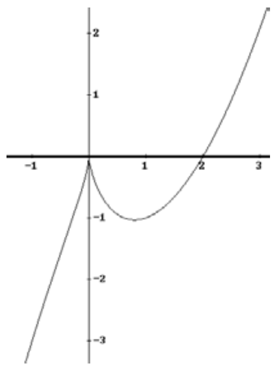
In x = 0 la funzione non è derivabile. Se si studia il crescere si ha:
In x = 0 un massimo relativo di tipo cuspidale
In x = 4/5 un minimo relativo a tangente orizzontale

$$f''(x) = (1/3)[5x^{-1/3} + (5x-4)(-1/3)x^{-1/3-1}] = (1/3)[5x^{-1/3} + (-1/3)(5x-4)x^{-4/3}] = \frac{15x - (5x-4)}{9x^{4/3}} = \frac{10x+4}{9x^{4/3}}$$

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2/5$ punto di flesso

Per completezza si riporta il diagramma approssimato nelle zone interessanti. Si osservi che il punto di flesso risulta poco visibile a causa della notevole inclinazione della tangente inflessionale.

3. Studiare il comportamento all'infinito (ad entrambi gli estremi) della funzione $y = f(x) = e^{-x}\cos x + 2x - 3$



La quantità cos x è limitata ed oscillante e avremo pertanto due comportamenti diversi a $+\infty$ e $-\infty$ dove l'esponenziale tende a 0 e a ∞. In effetti:

$\lim_{x\to -\infty} f(x)$ non esiste perché la funzione oscilla tra più e meno infinito

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 + \infty = +\infty$ perché il prodotto di una funzione limitata per un infinitesimo tende a zero.

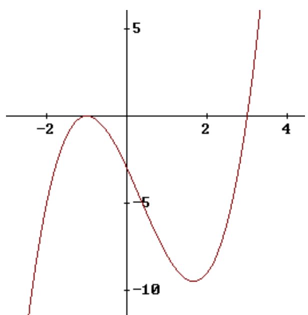
Ne consegue che per $x \to +\infty$ la retta $y = 2x - 3$ è asintoto obliquo.

4. La funzione $y = f(x) = (x+1)^2(x-3)$ ha l'andamento rappresentato in figura. Senza usare il calcolo differenziale, ma utilizzando metodi elementari giustificare tutte le cose che si possono dire del suo diagramma (che viene rappresentato in figura per agevolare il lavoro).

La funzione presenta uno zero corrispondente a radice doppia (tangente orizzontale) in x = – 1 ed è positiva o nulla per $x \geq 3 \vee x = -1$. Pertanto il punto x = –1 è un massimo relativo, inoltre poiché si tratta di una funzione continua si ha un minimo relativo in un punto compreso tra i due punti di annullamento.

La curva va all'infinito come una funzione di III grado (è asintotica a x^3) e deve presentare un flesso tra il massimo e il minimo.

5. La funzione $y = f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$ con $\beta > \alpha$ presenta due punti critici in $\gamma = \alpha$ e in δ. Determinare γ e δ spiegando perché si hanno un massimo e minimo e come mai $\alpha < \delta < \beta$.



$$f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)^2 = (x-\alpha)(2x - 2\beta + x - \alpha) = (x-\alpha)(3x - 2\beta - \alpha)$$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ x assume valori esterni all'intervallo delle radici $x = \alpha \vee x = \dfrac{2\beta + \alpha}{3}$

Si tratta ora di stabilire se $\dfrac{2\beta + \alpha}{3}$ è a destra o sinistra di α

$\dfrac{2\beta + \alpha}{3} > \alpha \Leftrightarrow 2\beta + \alpha > 3\alpha \Leftrightarrow \beta > \alpha$ vera

Dunque la funzione decresce sino ad α, poi cresce sino a $\dfrac{2\beta + \alpha}{3}$ e infine decresce (minimo in α e massimo in $\dfrac{2\beta + \alpha}{3}$)

6. Spiegare perché la funzione $y = f(x) = k^2 x^3 + \text{artg } x$ non presenta massimi e minimi né assoluti né relativi.

La funzione è data dalla somma di una parabola cubica e di una funzione limitata (arco tangente) e pertanto va da meno infinito a più infinito (non esistono massimo e minimo assoluto).
Per vedere che non esistono neanche estremanti basta derivare:

$f'(x) = 3k^2 x^2 + \dfrac{1}{1 + x^2} > 0$ sempre e pertanto la funzione è sempre crescente.

Studio di funzione

Studiare la funzione γ: $y = f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$ determinando i seguenti elementi: dominio, comportamento agli estremi e asintoti, segno, derivabilità e punti critici con le loro caratteristiche, flessi.

Mi limito a dare gli elementi essenziali
$\mathscr{D} = \Re$ (funzione irrazionale intera di indice dispari).
$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x \leq 3$. Punti di annullamento in 0 e 3.
$f(x) \sim - x^{3/3} = - x$ (possibile asintoto obliquo)

$\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{3x^2 - x^3} - (-x) = (\infty - \infty) = \ldots$ si fa con i prodotti notevoli che consentono di razionalizzare $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab - b^2)$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^2} + x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{x^2 + x^2 + x^2 + o(x^2)} = 1$$

Pertanto la retta $y = - x + 1$ è asintoto obliquo (da qui si può già sapere che la funzione è sotto l'asintoto a $- \infty$ e sopra a $+ \infty$) perché il termine $3x^2$ è sempre positivo mentre $- x^3$ cambia segno.

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3} = (3x^2 - x^3)^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - x^3)^{-2/3}(6x - 3x^2) = (2x - x^2)(3x^2 - x^3)^{-2/3} = \frac{2 - x}{x^{1/3}(3 - x)^{2/3}}$$

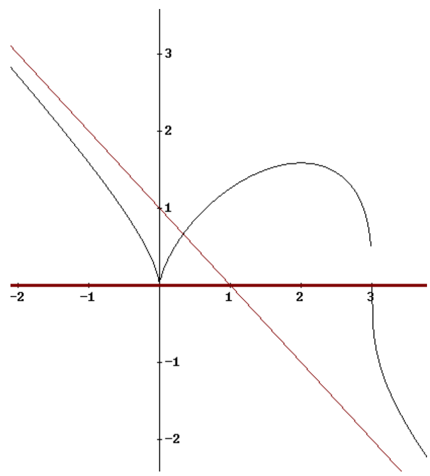
La funzione non è derivabile in $x = 0$ e $x = 3$ dove presenta derivata infinita; la derivata è positiva per valori interni all'intervallo delle radici cioè per $x \in]0,2]$
Si hanno pertanto un minimo di tipo cuspidale in $x = 0$ e un massimo a tangente orizzontale per $x = 2$. Inoltre in $x = 3$ si ha un punto a tangente verticale (si tratta certamente di un flesso necessario per garantire la tangente verticale se la funzione deve continuare a decrescere). Calcolo di $f(2) = \sqrt[3]{4} \approx 1.587$
Arrivati a questo punto si hanno gli elementi per il tracciamento e si può eseguire il calcolo della derivata seconda (un po' faticoso) come elemento aggiuntivo e finale che conferma l'andamento già prevedibile.
Per trovare la derivata seconda conviene derivare nella forma $f'(x) = (2x - x^2)(3x^2 - x^3)^{-2/3}$

$$f''(x) = (2 - 2x)(3x^2 - x^3)^{-2/3} + (2x - x^2)(-2/3)(3x^2 - x^3)^{-5/3}(6x - 3x^2) = \frac{2 - 2x}{\sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^2}} -$$

$$2\frac{(2x - x^2)(2x - x^2)}{\sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^5}} = 2\frac{(1 - x)(3x^2 - x^3) - (2x - x^2)^2}{\sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^5}} = 2$$

$$\frac{3x^2 - x^3 - 3x^3 + x^4 - 4x^2 - x^4 + 4x^3}{\sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^5}} = 2\frac{-x^2}{\sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^5}} = 2\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^5}}$$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 > 0 \Leftrightarrow x > 3$. In $x = 3$ flesso a tangente verticale
La curva ha dunque l'andamento rappresentato in figura.



10/5/2001 Integrali indefiniti: 1 ora

1) Calcolare i seguenti integrali immediati basati sul riconoscimento che sono presenti sia z = φ(x) sia la sua derivata φ'(x) e pertanto dz = φ'(x)dx

$$I_1 = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx \qquad I_2 = \int \frac{\ln^2(x-3)}{2x-6}\,dx \qquad I_3 = \int \frac{\sqrt{(\mathrm{tg}\,x-3)^3}}{\cos^2 x}\,dx$$

2) Calcolare utilizzando le necessarie decomposizioni il seguente integrale $I_4 = \int \frac{dx}{x^2-6x+5}$

3) Calcolare utilizzando la integrazione per parti il seguente integrale che si riduce alla integrazione di una razionale fratta molto semplice da integrare per decomposizione: $I_5 = \int x\,\mathrm{artg}\,x\,dx$

4) Calcolare utilizzando la sostituzione tg x = z il seguente integrale il cui calcolo richiede di ricordare il legame tra coseno e tangente: $I_6 = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$

1	2	3	4	Valutazione

Soluzione

$I_1 = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$ posto sin x = z si ha dz = cos x dx e pertanto $I_1 = \int \frac{dz}{z^3} = \int dz\, z^{-3} = \frac{z^{-2}}{-2} = -\frac{1}{\sin^2 x} + k$

$I_2 = \int \frac{\ln^2(x-3)}{2x-6}\,dx$ posto ln(x – 3) = z si ha $dz = \frac{1}{x-3}\,dx$ e pertanto $I_2 = \int \frac{\ln^2(x-3)}{2x-6}\,dx = \int \frac{z^2}{2}\,dz = \frac{z^3}{6} = \frac{\ln^3(x-3)}{6} + k$

$I_3 = \int \frac{\sqrt{(\mathrm{tg}\,x-3)^3}}{\cos^2 x}\,dx$ posto tg(x – 3) = z si ha $dz = \frac{1}{\cos^2(x-3)}\,dx$ e pertanto $I_3 = \int z^{3/2}\,dz = \frac{z^{5/2}}{5/2} = \frac{2}{5}\sqrt{\mathrm{tg}^5(x-3)} + k$

$I_4 = \int \frac{dx}{x^2-6x+5}$ osservato che Δ > 0 con radici 5 e 1si può decomporre la frazione: $\frac{1}{x^2-6x+5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} = \frac{x(A+B)-5A-B}{x^2-6x+5}$ e pertanto sarà $A + B = 0 \wedge -5A - B = 1 \Leftrightarrow A = -B \wedge 4B = 1 \Leftrightarrow B = ¼ \wedge A = -¼$

$I_4 = \int \frac{dx}{x^2-6x+5} = I_4 = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-5} = -\frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x-5| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + k$

$I_5 = \int x\,\mathrm{artg}\,x\,dx$ osservato che x dx = d(x²/2) si ha che: $I_5 = \int x\,\mathrm{artg}\,x\,dx = \int \mathrm{artg}\,x\,d(x^2/2) = x^2/2\,\mathrm{artg}\,x - \int \frac{x^2/2}{1+x^2}\,dx$

Dobbiamo ora valutare $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x - \mathrm{artg}\,x$

Pertanto $I_5 = \int x\,\mathrm{artg}\,x\,dx = x^2/2\,\mathrm{artg}\,x - \int \frac{x^2/2}{1+x^2}\,dx = ½\,x^2\,\mathrm{artg}\,x - ½\,[x - \mathrm{artg}\,x] = ½\,\mathrm{artg}\,x\,(x^2+1) - ½\,x + k$

$I_6 = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$ posto tg x = z si ha $\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = dz$ e poiché $\frac{1}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}^2 x + 1 = 1 + z^2$ si ottiene $I_6 = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (z^2+1)\,dz = z^3/3 + z = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}\,x + k$

5G 30/5/2001 Simulazione esame: 5 ore

Il candidato risolva a sua scelta uno dei due problemi e 5 fra i 10 quesiti del questionario.

Problema 1 (s.o. 90 II quesito modificato).

1.1) Indicare le due modalità di rappresentazione di una circonferenza (forma generale e forma normale) evidenziando il legame tra i parametri in esse contenute.

1.2) Si determini il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla retta $r: y = \frac{37}{12}$ e passanti per $A\equiv(0, \frac{19}{12})$.

Dopo aver dimostrato che tale luogo corrisponde alla parabola $\mathscr{P}$: $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}$ se ne individuino le caratteristiche essenziali e lo si rappresenti.

1.3) Si determini il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla circonferenza $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$ e passanti per $B \equiv(2, 2)$. Dopo aver dimostrato che tale luogo corrisponde alla iperbole $\mathscr{I}$: $xy = 2$ se ne individuino le caratteristiche essenziali e lo si rappresenti nello stesso sistema d'assi del luogo precedente.

1.4) La intersezione dei due luoghi produce una regione chiusa di piano. Evidenziare tale regione e dopo averne calcolato gli estremi determinarne l'area.

Problema 2 (s.s. 93 III quesito modificato).

2.1) Precisare la condizione sufficiente basata sul segno della derivata prima e seconda affinché una funzione derivabile presenti un punto di massimo relativo in un punto del suo dominio.

2.2) Nella famiglia di funzioni $y = f(k,x) = \left|\frac{\text{sen } x}{k - \cos x}\right|$ si determini il valore di k per il quale la funzione corrispondente presenta un massimo per $x = \frac{\pi}{3}$.

2.3) Preso atto che la funzione precedente si determina per $k = 2$ si richiede di studiare la corrispondente funzione $y = f(x)$ individuando in particolare periodicità, simmetrie, zeri, estremanti, eventuali flessi, inclinazione delle tangenti nei punti critici e nei flessi.

2.4) Supposto che la funzione f(x) rappresenti la componente di una forza lungo l'asse x, che sia cioè $F_x = f(x)$, si determini il lavoro compiuto dalla forza nello spostamento da 0 a π. Determinare, motivando la risposta, quanto vale il valore medio della forza lungo lo spostamento dato.

Questionario

1. Determinare l'area σ della sezione diagonale di una piramide regolare a base quadrata in funzione del volume V e dell'angolo α formato tra lo spigolo e la base.
2. Dopo aver fornito gli elementi essenziali della definizione della funzione $y = \arcsin x$ discutere le differenze tra le due funzioni $y = g(x) = \arcsin(\sin x)$ e $y = h(x) = \sin(\arcsin x)$ (dominio, periodo, diagramma).
3. Date le funzioni γ_1: $y = f(x)$ e γ_2: $y = g(x)$ sia $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{A\}$ con $A\equiv(\alpha,\dots)$. Precisare come si possa definire e calcolare l'angolo tra le due funzioni. In particolare, se γ_1: $y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6}$ e γ_2: $y = g(x) = \ln(2 - x)$ determinare l'angolo delle due curve in $A\equiv(1,0)$.
4. Risolvere per via grafica la disequazione $\ln|x - 2| - x^2 + 3 - 2x > 0$. Gli estremi degli intervalli che definiscono le soluzioni vanno individuati con precisione di almeno 2 cifre significative.
5. Data una funzione $y = f(x)$ descrivere come è possibile, attraverso una traslazione che sposti l'origine in un punto (α,β) e produca una nuova funzione $Y = g(X,\alpha,\beta)$, stabilire se la funzione presenta un centro di simmetria. Applicare quanto descritto alla funzione $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 4x + 5}$ e determinarne il centro di simmetria.
6. Scrivere la formula dello sviluppo di $(a + b)^n$ e quindi applicarla alla determinazione dei termini interi della espressione $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$. Si raccomanda di non scrivere i 10 termini dello sviluppo, ma attraverso la formula generale stabilire preventivamente quali siano interi e quindi calcolarne il valore.

7. Data una funzione y= f(x) continua in un intervallo [a,b] precisare in quali casi il punto $(\alpha, f(\alpha))$ corrisponda ad un punto angoloso e in quale caso ad una cuspide. Con riferimento a quanto detto stabilire posizione e caratteristiche dei punti di non derivabilità della funzione $y = f(x) = x + \sqrt[3]{1 - x^3}$
8. Si enuncino e illustrino il teorema di Lagrange e il lemma della media evidenziando a cosa servono nell'impianto dell'analisi (entrambi consentono di dimostrare altri teoremi). Si dia un esempio, con dimostrazione, del loro utilizzo nella dimostrazione di altri teoremi.
9. Calcolare l'integrale indefinito $\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ e spiegare a cosa serve sul piano applicativo.
10. Derivare la funzione $y = e^{mx} + h$ e quindi, tenendo conto del risultato, determinare la funzione y = f(x) che soddisfa alle seguenti condizioni $f'(x) = k\,f(x) \wedge f(\alpha) = e^{\alpha}$ dove k e α sono delle costanti assegnate. Illustrare almeno un contesto di fisica in cui si incontra una equazione del tipo $f'(x) = k\,f(x)$ precisando quale sia la grandezza rappresentativa di f(x) e chi sia x.

Correzione sintetica

Problema 1 (s.o. 90 II quesito modificato).

Indicare le due modalità di rappresentazione di una circonferenza (forma generale e forma normale) evidenziando il legame tra i parametri in esse contenute.

Data una circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C \equiv (\alpha, \beta)$ e raggio *r* la sua equazione generale è

$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ (1)

Svolgendo questa equazione si arriva alla equazione in forma normale:

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ (2)

con le condizioni $a = -2\alpha$ $b = -2\beta$ $c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$

Tali relazioni sono invertibili solo se $\alpha^2 + \beta^2 - c \geq 0$ e cioè se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \geq 0$. In tale caso si ha:

$$\alpha = -\frac{a}{2} \qquad \beta = -\frac{b}{2} \qquad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

e la (2) diventa riconducibile alla (1) e rappresenta una circonferenza di raggio r e centro C (se r = 0 la circonferenza è degenere e si identifica con il centro).

Molti esercizi sulla circonferenza danno meno complicazioni di calcolo operando in forma normale (ciò si verifica quando le condizioni date si riconducono a semplici proprietà di centro e raggio).

Si determini il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla retta r : $y = \frac{37}{12}$ e passanti per $A \equiv (0, \frac{19}{12})$. Dopo aver dimostrato che tale luogo corrisponde alla parabola $\mathscr{P}$: $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}$ se ne individuino le caratteristiche essenziali e lo si rappresenti.

La prima condizione implica che $\left|\frac{37}{12} - \beta\right| = r$ mentre dalla seconda $\alpha^2 + \left(\frac{19}{12} - \beta\right)^2 = r^2$ Eliminando la variabile *r* si ottiene direttamente il luogo richiesto:

$\alpha^2 + \left(\frac{19}{12} - \beta\right)^2 = \left(\frac{37}{12} - \beta\right)^2$ Se si semplifica questa espressione si ottiene … $\beta = -\frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{7}{3}$

Dunque il luogo richiesto corrisponde ad una parabola ad asse verticale ($\mathscr{P}$: $y = ax^2 + bx + c = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}$)

con la concavità verso il basso, e vertice V con $x_V = -\frac{b}{2a} = 0$ e $y_V = \frac{7}{3}$

La parabola interseca l'asse x in $x = \pm\sqrt{7}$

Si determini il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla circonferenza $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$ e passanti per B $\equiv(2, 2)$. Dopo aver dimostrato che tale luogo corrisponde alla iperbole $\mathscr{I}$: $xy = 2$ se ne individuino le caratteristiche essenziali e lo si rappresenti nello stesso sistema d'assi del luogo precedente.

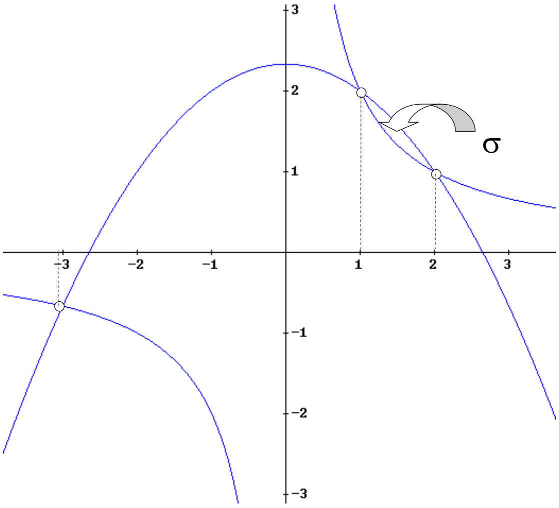
La circonferenza $\mathcal{C}$ fornita in forma normale ha centro $C \equiv \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \equiv (-2, -2)$ e raggio $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$ $= \sqrt{4 + 4 + 8} = 4$.

Una generica circonferenza $\mathcal{C}'$ di centro $C' \equiv (\alpha, \beta)$ ed equazione $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r'^2$ passa per B se $(2 - \alpha)^2 + (2 - \beta)^2 = r'^2$ mentre è tangente a $\mathcal{C}$ se e solo se la distanza tra i centri è pari alla somma (tangenza esterna) o alla differenza (tangenza interna) dei due raggi. Ma poiché il punto B è esterno a $\mathscr{C}$ la circonferenza richiesta può essere tangente solo esternamente. Si arriva così alla equazione (dedotta dalla equazione che fornisce la distanza di due punti): $(\alpha + 2)^2 + (\beta + 2)^2 = (r' + 4)^2$

Basta eliminare r' tra le due equazioni e si arriva dopo semplici passaggi algebrici a $\alpha\beta = 2$

Dunque il luogo richiesto corrisponde alla iperbole con asintoti riferiti agli assi di equazione $\mathscr{I}$: xy = 2.

In figura sono rappresentate la parabola e l'iperbole. Si vede immediatamente che si hanno 3 punti di intersezione e una evidente zona comune nel primo quadrante.



La intersezione dei due luoghi produce una regione chiusa di piano. Evidenziare tale regione e dopo averne calcolato gli estremi determinarne l'area.

$\mathscr{P} \cap \mathscr{I} : \frac{2}{x} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3} \Leftrightarrow 6 = -x^3 + 7x \Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$

Si vede subito che P(1) = 0 e si può pertanto scomporre il polinomio con il metodo di Ruffini ottenendo $(x + 3)(x - 1)(x - 2) = 0$

Si tratta dunque di valutare $\sigma = \int_1^2 [(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}) - \frac{2}{x}]\, dx$

La funzione primitiva F(x) si ottiene molto semplicemente (integrale indefinito elementare): $F(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{7}{3}x - 2\ln|x| + k$

$\sigma = F(2) - F(1) = -\frac{8}{9} + \frac{14}{3} - 2\ln 2 - [-\frac{1}{9} + \frac{7}{3} - 2\ln 1] = \frac{14}{9} - 2\ln 2$

Problema 2 (s.s. 93 III quesito modificato).

Precisare la condizione sufficiente basata sul segno della derivata prima e seconda affinché una funzione derivabile presenti un punto di massimo relativo in un punto del suo dominio.

Una funzione derivabile su un intervallo e che presenti in un punto α appartenente a tale intervallo $f'(\alpha) = 0$ e $f''(\alpha) < 0$ presenta in $x = \alpha$ un punto di massimo relativo.

In effetti la prima condizione mi dice che la tangente è orizzontale per $x = \alpha$ e la seconda condizione mi dice che f'(x) è decrescente in un opportuno intorno di α. Pertanto la derivata prima passa da valori positivi a negativi e ciò significa che la funzione cresce e poi decresce assumendo per $x=\alpha$ un massimo relativo.

Nella famiglia di funzioni $y = f(k,x) = \left|\frac{\text{sen } x}{k - \cos x}\right|$ *si determini il valore di k per il quale la funzione corrispondente presenta un massimo per* $x = \frac{\pi}{3}$.

Poiché stiamo studiando il comportamento in un intorno

Supponiamo intanto che sia $\frac{\text{sen } x}{k - \cos x} \geq 0$ in tale caso la derivata sarà:

$$f'(x,k) = \frac{\cos x(k - \cos x) - \sin x\,(\sin x)}{(k - \cos x)^2} = \frac{k\cos x - 1}{(k - \cos x)^2}$$

$$f''(x,k) = \frac{-k\sin x(k - \cos x)^2 - (k\cos x - 1)\,2(k - \cos x)\sin x}{(k - \cos x)^4} = \frac{-k\sin x(k - \cos x) - 2(k\cos x - 1)\sin x}{(k - \cos x)^3} = \frac{\sin x(2 - k^2) - k\sin x\cos x}{(k - \cos x)^3}$$

Se invece $\frac{\text{sen } x}{k - \cos x} < 0$ si ha $f(x) = -\frac{\text{sen } x}{k - \cos x}$ e pertanto cambiano semplicemente segno le due derivate.

Poiché il valore del presunto estremante è noto basta sostituire con le condizioni stabilite al punto precedente (si ricordi che $\sin \pi/3 = \sqrt{3} / 2$ e $\cos \pi/3 = 1/ 2$

Nel primo caso $f'(\pi/3,k) = \dfrac{k/2-1}{(k-1/2)^2} = 0$ porta a k = 2 ma in tale entre $f''(\pi/3,2) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}(2-4) - 2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}}{(2-\frac{1}{2})^3} =$

$\dfrac{-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\frac{3}{2})^3} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\dfrac{8}{27} = -\dfrac{4\sqrt{3}}{9} < 0$ Inoltre per k = 2 $\dfrac{\text{sen } x}{k - \cos x} \geq 0$ e dunque in $x = \pi/3$ si ha un massimo relativo.

Il caso in cui $\dfrac{\text{sen } x}{k - \cos x} < 0$ non si verifica mai perché la condizione sulla derivata prima dà ancora k = 2 ma in tale caso nell'intorno di $\pi/3$ si ha $\dfrac{\text{sen } x}{k - \cos x} > 0$

Dunque possiamo occuparci della funzione: $y = f(x) = \left|\dfrac{\text{sen } x}{2 - \cos x}\right|$

Preso atto che la funzione precedente si determina per k = 2 si richiede di studiare la corrispondente funzione y = f(x) individuando in particolare periodicità, simmetrie, zeri, estremanti, eventuali flessi, inclinazione delle tangenti nei punti critici e nei flessi.

La funzione considerata è periodica di periodo 2π, non è né pari né dispari (ma come vedremo presenta una simmetria a π) sempre positiva o nulla, il denominatore non si annulla mai e dunque è anche continua mentre la presenza del valore assoluto potrebbe determinare la comparsa di punti di non derivabilità.

Poiché il denominatore è sempre positivo lo studio può essere riferito a due intervalli

a) $x \in [0,\pi]$ in cui $y = f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{2 - \cos x}$ b) $x \in [\pi,2\pi]$ in cui $y = f(x) = -\dfrac{\text{sen } x}{2 - \cos x}$

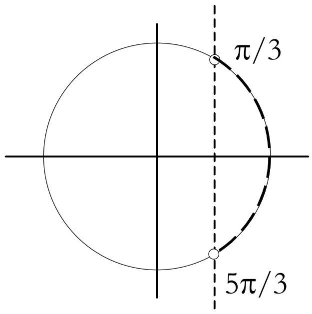
Per avere l'andamento nel secondo intervallo basterà rovesciare il diagramma e pertanto studieremo semplicemente la funzione $y = f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{2 - \cos x}$ con $x \in [0,2\pi]$

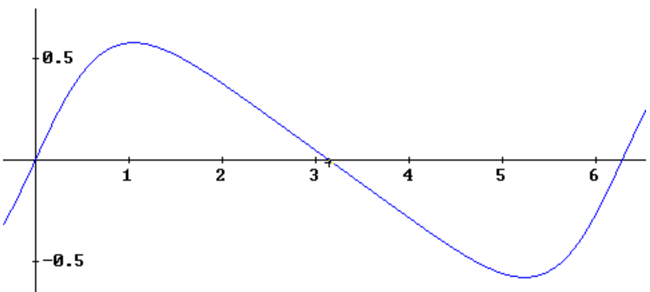
zeri: in $0,\pi,2\pi$ positiva sino a π e poi negativa

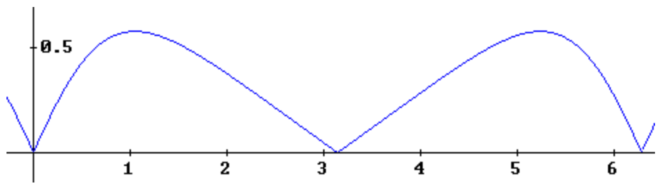
crescere e decrescere: (ricordarsi che le derivate sono già state calcolate)

$f'(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2}$ si ha $f'(x) \geq 0$ per $\cos x \geq ½$ il che ciporta ad evidenziare la presenza di un massimo relativo a $\pi/3$ e di un minimo relativo a $5/3\,\pi$.

$f(\pi/3) = \dfrac{\sqrt{3}/2}{3/2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ mentre $f(5\pi/3) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$







Nei punti 0, π e 2π si avranno dei punti angolosi dovuti al ribaltamento per questo calcoliamo le corrispondenti inclinazioni delle tangenti:

$f'(0) = f'(2\pi) = \dfrac{2-1}{(2-1)^2} = 1$ $\quad f'(\pi) = \dfrac{-2-1}{(2+1)^2} = -\dfrac{1}{3}$

$f''(x) = -2\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{(2-\cos x)^3}$ risulta negativa in $[0,\pi[$ e positiva in $]\pi,2\pi]$ per $x = \pi$ si ha un flesso che si trasformerà in un punto angoloso dopo il ribaltamento.

Supposto che la funzione f(x) rappresenti la componente di una forza lungo l'asse x, che sia cioè $F_x = f(x)$, si determini il lavoro compiuto dalla forza nello spostamento da 0 a π. Determinare, motivando la risposta, quanto vale il valore medio della forza lungo lo spostamento dato.

Per definizione il lavoro di una forza variabile corrisponde alla somma degli infiniti lavori elementari relativi ad uno spostamento infinitesimo, cioè all'integrale definito.

$$\mathscr{L} = \int_0^{\pi} F_x\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 - \cos x} dx = \int_0^{\pi} \frac{d(2 - \cos x)}{2 - \cos x} = \ln |2 - \cos x| \Big|_0^{\pi} = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

La forza media sarà la forza costante che nello stesso percorso compie lo stesso lavoro pertanto $\langle F \rangle\ \Delta x = \mathscr{L}$ e da qui: $\langle F \rangle = \dfrac{\mathscr{L}}{\pi} = \dfrac{\ln 3}{\pi}$

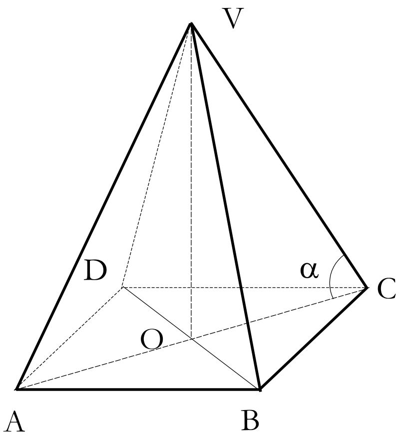
Questionario

Determinare l'area σ della sezione diagonale di una piramide regolare a base quadrata in funzione del volume V e dell'angolo α formato tra lo spigolo e la base.

La sezione diagonale richiesta è l'area del triangolo ACV e pertanto $\sigma = ½\, d\, h$

Assumiamo provvisoriamente come incognito il lato *l* allora $d = \sqrt{2}\, l$ mentre $h = \tan \alpha\ d/2$ allora si ha:

$$V = \frac{1}{3} \pi\, l^2 h = \frac{1}{3} \pi\, l^2 \frac{\tan \alpha \sqrt{2}\, l}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi \tan \alpha\, l^3}{2}$$



Pertanto $l = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}\, V}{\pi \tan \alpha}}$ Determinato *l* è ora possibile determinare σ; infatti $\sigma = ½\, d\, h =$

$$\frac{d^2}{4} \tan \alpha = \frac{l^2}{2} \tan \alpha = \sqrt[3]{\frac{2\, V^2}{\pi^2 \tan^2 \alpha}} \frac{\tan \alpha}{2} = \sqrt[3]{\frac{V^2 \tan \alpha}{4\pi^2}}$$

1. Dopo aver fornito gli elementi essenziali della definizione della funzione $y = \arcsin x$ discutere le differenze tra le due funzioni $y = g(x) = \arcsin(\sin x)$ e $y = h(x) = \sin(\arcsin x)$ (dominio, periodo, diagramma).
2. Date le funzioni γ_1: $y = f(x)$ e γ_2: $y = g(x)$ sia $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{A\}$ con $A \equiv (\alpha, \ldots)$. Precisare come si possa definire e calcolare l'angolo tra le due funzioni. In particolare, se γ_1: $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6}$ e γ_2: $y = g(x) = \ln(2 - x)$ determinare l'angolo delle due curve in $A \equiv (1,0)$.
3. Risolvere per via grafica la disequazione $\ln|x - 2| - x^2 + 3 - 2x > 0$. Gli estremi degli intervalli che definiscono le soluzioni vanno individuati con precisione di almeno 2 cifre significative.
4. Data una funzione $y = f(x)$ descrivere come è possibile, attraverso una traslazione che sposti l'origine in un punto (α,β) e produca una nuova funzione $Y = g(X,\alpha,\beta)$, stabilire se la funzione presenta un centro di simmetria. Applicare quanto descritto alla funzione $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 4x + 5}$ e determinarne il centro di simmetria.
5. Scrivere la formula dello sviluppo di $(a + b)^n$ e quindi applicarla alla determinazione dei termini interi della espressione $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$. Si raccomanda di non scrivere i 10 termini dello sviluppo, ma attraverso la formula generale stabilire preventivamente quali siano interi e quindi calcolarne il valore.
6. Data una funzione $y = f(x)$ continua in un intervallo $[a,b]$ precisare in quali casi il punto $(\alpha, f(\alpha))$ corrisponda ad un punto angoloso e in quale caso ad una cuspide. Con riferimento a quanto detto stabilire posizione e caratteristiche dei punti di non derivabilità della funzione $y = f(x) = x + \sqrt[3]{1 - x^3}$
7. Si enuncino e illustrino il teorema di Lagrange e il lemma della media evidenziando a cosa servono nell'impianto dell'analisi (entrambi consentono di dimostrare altri teoremi). Si dia un esempio, con dimostrazione, del loro utilizzo nella dimostrazione di altri teoremi.
8. Calcolare l'integrale indefinito $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ e spiegare a cosa serve sul piano applicativo.
9. Derivare la funzione $y = e^{mx} + h$ e quindi, tenendo conto del risultato, determinare la funzione $y = f(x)$ che soddisfa alle seguenti condizioni $f'(x) = k\, f(x) \wedge f(\alpha) = e^{\alpha}$ dove k e α sono delle costanti assegnate. Illustrare almeno un contesto di fisica in cui si incontra una equazione del tipo $f'(x) = k\, f(x)$ precisando quale sia la grandezza rappresentativa di f(x) e chi sia x.

4F PNI 28/2/04 calcolo dei limiti

I seguenti limiti sono forniti senza indicazione del fatto che si tratti o meno di forme di indecisione. Nella soluzione precisare se occorre limitarsi al limite destro o sinistro. E' ammesso l'uso delle tecniche basate sui simboli di Landau o, ~ e di scritture improprie quali $(e^{+\infty}) = +\infty$ etc.

$\boxed{1}$ $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ $\boxed{2}$ $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ $\boxed{3}$ $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ $\boxed{4}$ $\lim_{x\to 0} \frac{1-10^x}{1-e^x}$ $\boxed{5}$ $\lim_{x\to 1} \frac{x^x-1}{x \ln x}$

$\boxed{6}$ $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{1-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}$ $\boxed{7}$ $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x-\sqrt{9x^2-2x+3}}{2x-\sqrt{4x^2+5x}}$

Criterio di valutazione 1 punto per ogni limite giusto e ben calcolato (linguaggio formale) a partire da un punteggio base di 3punti.

Note di correzione

razionalizzare e poi usare la relazione $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$. Risposta 1/4

$\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x} = [(1 + 1/x)^x]^{-1}$. Il limite è 1/e

Si opera la sostituzione $x - 1 = z$ e si arriva subito al limite notevole logaritmico

Basta ricordare che $10^x = (e^{\ln 10})^x = e^{x \cdot \ln 10}$ e poi operare con i limiti notevoli

Conviene utilizzare $x^x = e^{\ln x \cdot x}$ e sfruttare il fatto che $e^{\ln x \cdot x} - 1 \sim \ln x \cdot x$

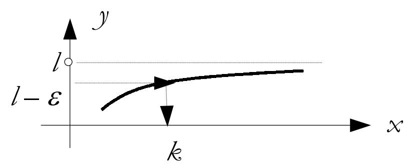
Fatta la sostituzione $x - \pi = z$ si arriva rapidamente a $-\sin z/-[(z/\pi)^2 + 2(z/\pi)]$ e il limite è $\pi/2$

Razionalizzare e poi utilizzare gli infiniti di ordine superiore

1	2	3	4	5	6	7	totale	

4F PNI 6/3/04 teoria limiti e continuità

1) Per intorno I(c) di un numero reale c si intende __*un intervallo chiuso contenente c*______________ un intorno simmetrico di ampiezza 2δ $I_\delta(c)$ si scrive utilizzando il valore assoluto __$|x - c| < \delta$_________
2) Gli intorni godono in $\Re$ di due notevoli proprietà che riguardano la intersezione e la separazione a) in base alla proprietà della intersezione si può dire che considerati $I_1(c)$ e $I_2(c)$ __*si ha sempre* $I_1(c) \cap I_2(c) = I_3c)$ _________ b) in base alla proprietà di separazione se $c_1 \neq c_2 \Rightarrow$ __$\exists\ (I(c_1), I(c_2)) \,|\, I(c_1) \cap I(c_2) = \varnothing$___________________
3) Sia A un insieme ordinato in $\Re$, le due seguenti scritture simboliche molto simili hanno significati molto diversi (con x e y si intendono elementi di A) a) $\forall x \Rightarrow \exists y \mid y > x$ vuol dire che _*l'insieme A non ha massimo*__ b) $\exists y \mid \forall x \Rightarrow y > x$ vuol dire che y è _*il massimo di A* __Se si lascia cadere l'ipotesi che y sia un elemento di A dalla b) si conclude che _*A è limitato superiormente e y è un maggiorante di A*
4) Con il simbolo $\Re^*$ si intende la retta reale estesa e cioè __*l'insieme* $\Re \cup \{+\infty, -\}$________________________
5) Sia A un insieme ordinato in $\Re$ e sia y un elemento di $\Re$ non necessariamente appartenente ad A diremo che y = *Sup* (A) se si verificano le seguenti due condizioni a) __$\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \leq y$______ b) __$\forall \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x,\ x \in A \mid y - \varepsilon < x \leq y$ ____
6) Scrivere la definizione metrica di $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ __$\forall\ k,\ k > 0,\ \exists h,\ h(\varepsilon) > 0 \mid \forall x,\ x < -h \Rightarrow f(x) > k$__
7) Scrivere la definizione topologica di $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$____ $\forall I(l),\ \exists I(c) \mid \forall x,\ x \in I(c) \wedge x \neq c \Rightarrow f(x) \in I(l)$ _____
8) Illustrare nella figura qui a lato il significato geometrico di $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l^-$ (sulla figura devono comparire gli elementi che compaiono nella definizione metrica e il diagramma)



Enunciare in maniera non simbolica il teorema della permanenza del segno _____*se una funzione ammette per $x \to c$ (incluso l'infinito) un limite finito e diverso da zero allora esiste un intorno di c in cui la funzione presenta sempre lo stesso segno di l.* ________
9) Completare il teorema sulle funzioni asintotiche $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow$ ___$f(x) = g(x) + o(g(x))$ ____
10) Dire che f(x) = o[g(x)] vuol dire che __*considerato un punto c di accumulazione del dominio (incluso l'infinito) si ha* $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ______
11) Chiedere che una funzione sia continua in un punto c equivale a chiedere 3 cose (sembrano 2 ma sono 3) a) __$c \in \mathscr{D}$ b) *esista finito* $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$__ c) _ $f(c) = l$_____
12) Le forme indeterminate sono 7: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $+\infty - \infty$; $\infty \cdot 0$; 1^∞; 0^0; ∞^0

13) Con il termine forma indeterminata intendiamo dire che ___*si ha a che fare con un limite in cui compaiono due funzioni che ammettono i limiti presenti nella forma indeterminata e che in questi casi non esiste un teorema in grado di garantire l'esistenza del limite ed il suo valore* ________

Nome e cognome: ________________________________19 aprile 2004 4F PNI: tecniche di derivazione

1) Derivare la funzione $y = f(x) = \dfrac{2x - 4}{3x^2 + 6x + 9}$ e determinare l'ascissa dei punti a tangente orizzontale.
2) Determinare la derivata seconda della funzione $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ e, utilizzando il risultato dimostrare che la funzione non presenta punti di flesso.
3) Determinare la derivata seconda della funzione $y = f(x) = \ln\sqrt{x + 2}$
4) Scrivere il dominio $\mathcal{D}$ della funzione $y = f(x) = \arcsin\sqrt{x}$ e deternare la sua derivata seconda
5) Dalla derivata di $y = e^x$ determinare quella di $y = a^x$. Utilizzare il risultato trovato per derivare la funzione $y = f(x) = -2^x + 4^x + 3x - 1000$ e, in base al risultato trovato, dimostrare che la funzione è sempre crescente.

1	2	3	4	5	

IV F PNI 3 maggio 2004 studio di funzione e problema

Se il polinomio f(x) si divide per x^2 - 1 si ottiene x come quoziente ed x come resto.

a) Determinare f(x).

b) Studiare la funzione $y = \dfrac{f(x)}{x^2 - 1}$ e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver trovato, in particolare, i suoi punti di massimo, minimo e flesso e i suoi asintoti.

c) Trovare l'equazione della retta t tangente a γ nel suo punto di ascissa ½ .

d) Determinare le coordinate dei punti comuni alla retta t e alla curva γ.

Il polinomio è di III grado e per definizione di divisione dovrà essere: $f(x) = Q(x)\, D(x) + R(x) = x(x^2 – 1) + x = x^3$

Dunque la funzione richiesta è $y = g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 – 1} = x + \dfrac{x}{x^2 – 1}$

Si tratta di una funzione razionale fratta di III grado di tipo dispari continua ovunque entro il dominio; infatti $g(– x) = \dfrac{(–x)^3}{(–x)^2 – 1} = –\dfrac{x^3}{x^2 – 1} = – g(x)$

Il dominio $\mathscr{D}$ richiede che sia $x \neq \pm 1$ ma trattandosi di una funzione simmetrica il nostro studio avverrà su metà dominio. D'ora in poi sarà dunque $x \geq 0 \wedge x \neq 1$

b1) comportamento agli estremi del campo di studio

$g(0) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \left(\dfrac{1}{0}\right) = \infty$ asintoto verticale in x = 1

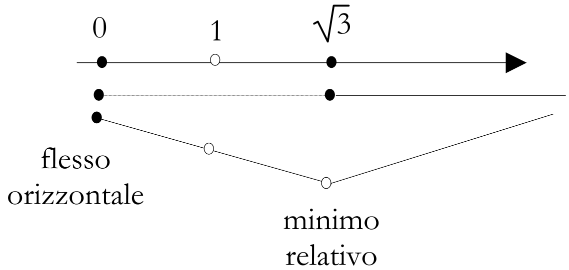
$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = + \infty$ poiché g(x) = x + e la quantità $\dfrac{x}{x^2 – 1} \to 0$ la retta y = x è un asintoto obliquo

b2) segno della funzione e interesezioni con gli assi

La funzione interseca in x = 0 ed è positiva quando lo è il denominatore cioè per x > 1

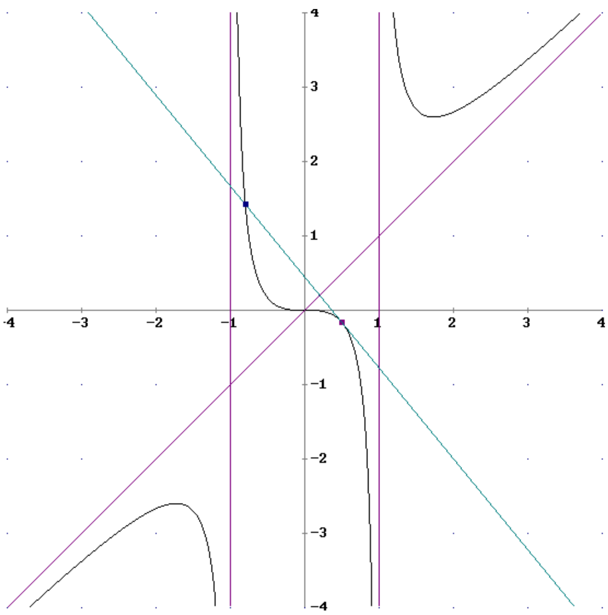
b3) segno della derivata prima (crescere e decrescere)

$g'(x) = \dfrac{3x^2(x^2 – 1) –x^3(2x)}{(x^2 – 1)^2} = x^2\dfrac{3(x^2 – 1) – 2x^2}{(x^2 – 1)^2} = x^2\dfrac{x^2 – 3}{(x^2 – 1)^2}$



La derivata prima si annulla in x = 0 e $x = \sqrt{3}$ (punti a tangente orizzontale) mentre è positiva per $x > \sqrt{3}$ si ha dunque il seguente andamento

Si ricordi che in x = 1 si ha l'asintoto verticale e che il x= 0 il flesso è dovuto alla presenza della simmetria rispetto alla origine. Se la funzione anziché dispari fosse stata pari avremmo avuto un massimo.



$f(\sqrt{3}) = 3/2\sqrt{3} \approx 2.60$

b4) segno della derivata seconda e concavità

Per comodità di derivazione conviene scrivere $g'(x) = \dfrac{x^4 – 3x^2}{(x^2 – 1)^2}$ e si ha dunque:

$g''(x) = \dfrac{(4x^3 – 6x)\,(x^2 – 1)^2 – (x^4 – 3x^2)2(x^2 – 1)2x}{(x^2 – 1)^4} = 2x\dfrac{(2x^2 – 3)(x^2 – 1) – (2x^4 – 6x^2)}{(x^2 – 1)^3} = 2x\dfrac{x^2 +3}{(x^2 – 1)^3}$

La derivata seconda si annulla in x = 0 e qui si ha il cambio di concavità con flesso già segnalato (l'unico). Cambia ancora segno in x = 1 dove si presenta un altro cambio di concavità in corrispondenza dell'asintoto verticale.

Ne risulta il seguente diagramma (che disegnamo anche nella parte simmetrica per ragioni di completezza di tracciamento).

Nel punto x = ½ si ha: g(½) = 1/8 / (–3/4) = –1/6

La retta tangente t ha come coefficiente angolare $g'(½)) = x^2\dfrac{x^2 – 3}{(x^2 – 1)^2} = 1/4\,\dfrac{–11/4}{9/16} = – 11/9$

e la sua equazione è pertanto:

t: y + 1/6 = – 11/9 (x – ½) da cui si ottiene y = – 11/9 x + 4/9 la interesezione corrisponde a risolvere il sistema tra la curva e la sua retta tangente ed arriveremo ad una equazione di III grado di cui sono note a priori 2 radici ($x = ½$ è radice doppia)

Eseguendo con il metodo di Ruffini la doppia divisione si arriva alla terza radice.

$\frac{x^3}{x^2 - 1} = y = - 11/9\ x + 4/9$ porta alla equazione:

$20\ x^3 - 4x^2 - 11x + 4 = 0$ e da essa eseguendo la doppia divisione per $x - ½$ si arriva a:

$(x - ½)^2(5x + 4) = 0$. L'ulteriore punto di intersezione ha ascissa $-4/5$ e ordinata (ottenuta per sostituzione) 64/45.

Nel diagramma sono state tracciate anche la retta tangente t e l'ulteriore punto di intersezione.

5F PNI integrali indefiniti 28/09/04

Consegne: la griglia di correzione contiene i punteggi riferiti ad esercizi completi e corretti sia dal punto di vista formale sia del calcolo. Il voto avviene per somma di punteggi privilegiando comunque gli esercizi terminati.

1) Calcolare il seguente integrale immediato dopo avere fattorizzato e ricondotto ad una sola variabile la espressione della funzione integranda:

$$I_1 = \int\left(\frac{\sin^3 x}{(1-\sin^2 x)\cos x} + \tan^4 x\,\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$\frac{\sin^3 x}{(1-\sin^2 x)\cos x} + \tan^4 x\,\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \tan^5 x = \tan^3 x + \tan^5 x = \tan^3 x(1+\tan^2 x)$$

Pertanto: $I_1 = \int \tan^3 x\, d(\tan x) = 1/4\, \tan^4 x + k$

Note di correzione: difficoltà a riconoscere in $(\tan^2 x + 1)dx$ il differenziale di tan x

2) Calcolare $I_2 = \int \tan x\, dx$

$$I_2 = \int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int\frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + k$$

3) Tenendo presente il risultato precedente calcolare $I_3 = \int \tan^3 x\, dx$. Suggerimento $\tan^2 x = (\tan^2 x + 1) - 1$

$$I_3 = \int \tan^3 x\, dx = \int \tan x \tan^2 x\, dx = \int \tan x(\tan^2 x + 1 - 1)\, dx = \int \tan x\, d(\tan x) - \int \tan x\, dx = ½ \tan^2 x + \ln|\cos x| + k$$

Note di correzione: difficoltà a comprendere il suggerimento (vedi nota del primo esercizio)

4) Calcolare per parti $I_4 = \int \ln^2 x\, dx$

Si integra per parti assumendo $\ln^2 x$ come fattore finito.

$$I_4 = \int \ln^2 x\, dx = x\ln^2 x - \int x\, d(\ln^2 x) = x\ln^2 x - \int\frac{x\, 2\ln x}{x}dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\, dx = x\ln^2 x - 2\left[x\ln x - \int\frac{x}{x}dx\right] = x\ln^2 x - 2[x\ln x - x] + k = x[\ln^2 x - 2\ln x + 2] + k$$

5) Tenendo presente che $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|\ x + \sqrt{x^2-1}\ |$ calcolare per parti l'integrale $I_5 = \int\sqrt{x^2-1}\, dx$.

Suggerimento: $\int\frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{x^2-1}}dx$

$$I_5 = \int\sqrt{x^2-1}\, dx = \sqrt{x^2-1}\, x - \int\frac{x\, 2x}{2\sqrt{x^2-1}}dx = \sqrt{x^2-1}\, x - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

Ma come da suggerimento $\int\frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{x^2-1}}dx = I_5 + \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

Dunque $I_5 = \sqrt{x^2-1}\, x - \left[I_5 + \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\right]$ e infine $I_5 = ½\left[\sqrt{x^2-1}\, x - \ln|\, x + \sqrt{x^2-1}\, |\right] + k$

Nota di correzione: poco gradito

6) Calcolare l'integrale $I_6 = \int\frac{3x+4}{x^2-4x+4}dx$

Il denominatore è un quadrato perfetto e pertanto la decomposizione della frazione algebrica è del tipo:

$\frac{3x+4}{x^2-4x+4} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A + B(x-2)}{(x-2)^2}$ e per il principio di identità dei polinomi si ottiene:

$B = 3$ e $A = 4 + 2\cdot 3 = 10$

Dunque $I_6 = \int\frac{3x+4}{x^2-4x+4}dx = \int\frac{10}{(x-2)^2}dx + \int\frac{3}{x-2}dx = -\frac{10}{x-2} + 3\ln|x-2| + k$

Nota di correzione: molto diffuso l'errore di chi non interpreta $\int\frac{10}{(x-2)^2}dx$ come una potenza e lo scambia per un logaritmo. Blah!

7) Calcolare l'integrale $I_7 = \int\frac{3x+1}{x^2+9}dx$

Si tratta di un integrale che porta ad un arcotangente ma occorre prima decomporre la frazione facendo comparire la derivata del denominatore.

$$\frac{3x+1}{x^2+9} = \frac{\frac{3}{2}2x+1}{x^2+9} = \frac{\frac{3}{2}2x}{x^2+9} + \frac{1}{x^2+9}$$

$$I_7 = \int\frac{3x+1}{x^2+9}dx = \int\frac{\frac{3}{2}2x}{x^2+9}dx + \int\frac{1}{x^2+9}dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+9) + \frac{1}{3}\arctan(x/3) + k$$

Nota di correzione: vista la difficoltà calcolo $\int\frac{1}{x^2+9}dx = \frac{1}{9}\int\frac{1}{(1/3\ x)^2+1}dx = \frac{1}{3}\int\frac{1}{(1/3\ x)^2+1}d(1/3\ x) = \frac{1}{3}\arctan(x/3)$

8) Calcolare l'integrale $I_8 = \int\cos^4 x\ dx$

Poiché l'esponente è di grado pari bisogna procedere a successivi abbassamenti di grado tramite le formule di bisezione:

$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}[1 + \cos^2 2x + 2\cos 2x] = \frac{1}{4}[1 + \frac{1+\cos 4x}{2} + 2\cos 2x]$$

Ora si tratta di funzioni di I grado e si può integrare direttamente:

$$I_8 = \int\cos^4 x\ dx = \frac{1}{4}[x + \frac{x+\frac{1}{4}\sin 4x}{2} + 2\ ½\sin 2x] + k = \frac{3}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + k$$

Nota di correzione: errori ed orrori di vario tipo nell'uso dell'algebra e delle identità goniometriche. Ricordo che le potenze di grado pari in seno e coseno si abbassano di grado sempre così. L'alternativa è una lunga e noiosa integrazione per parti ripetuta.

9) Calcolare l'integrale $I_9 = \int\cos^5 x\ \sin^4 x\ dx$

Basta mettere in evidenza cos x per ottenere un polinomio nella sola funzione seno con la presenza della sua derivata (coseno)

$I_9 = \int\cos^5 x \sin^4 x\ dx = \int\cos x\,(1-\sin^2 x)^2\sin^4 x\ dx = \int(1-2\sin^2 x+\sin^4)\sin^4 x\ d(\sin x) = \int(\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x)\ d(\sin x) = 1/5$
$\sin^5 x - 2/7\sin^7 x + 1/9\sin^9 x + k$

Nota di correzione: uno dei due è di grado dispari e pertanto si riduce all'integrale di un polinomio.

10) Calcolare per sostituzione l'integrale $I_{10} = \int\sqrt{x^2-1}\ dx$ ponendo $x = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$. Per eseguire il calcolo oltre alle solite determinazioni di $\sqrt{x^2-1}$ e dx servono anche e^t e poi e^{2t}. Si assuma, per comodità di calcolo, $x\geq 1$

$x^2 = \frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}$ e dunque $x^2-1 = \frac{e^{2t}+e^{-2t}+2-4}{4} = \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2$ da cui $\sqrt{x^2-1} = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$

differenziando x si ha: $dx = ½(e^t - e^{-t})\,dt$. Possiamo ora applicare la sostituzione al calcolo dell'integrale:

$I_{10} = \int\sqrt{x^2-1}\ dx = \int\frac{e^t-e^{-t}}{2}\,½(e^t-e^{-t})dt = 1/4\int(e^t-e^{-t})^2dt = 1/4\int(e^{2t}+e^{-2t}-2)dt = 1/4\,[½e^{2t} - ½e^{-2t} - 2t] = 1/8\,[e^{2t} - e^{-2t}] -$
$½\,t$

Bisogna ora tornare a x e ciò richiede il calcolo di e^t e di e^{-t} che si ottiene invertendo la sostituzione $x = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$

$2x = e^t + 1/e^t \Leftrightarrow e^{2t} - 2x\,e^t + 1 = 0 \Leftrightarrow \Delta/4 = x^2 - 1$ con $e^t = x + \sqrt{x^2-1}$ (la soluzione con il meno non è accettabile perché l'esponenziale è positivo sempre). Si ha anche $t = \ln|x + \sqrt{x^2-1}\,|$

$e^{-t} = 1/(x + \sqrt{x^2-1}\,) = x - \sqrt{x^2-1}$ (razionalizzazione). Possiamo finalmente tornare al calcolo di I_{10} e sfruttare la semplificazione che si genera nel quadrato:

$I_{10} = 1/8\,[(x+\sqrt{x^2-1}\,)^2 - (x-\sqrt{x^2-1}\,)^2] - ½\ln|x+\sqrt{x^2-1}\,| = 1/8\,[(4x\sqrt{x^2-1}\,)] - ½\ln|x+\sqrt{x^2-1}\,| = ½\,[\sqrt{x^2-1}\ x - \ln|\ x +$
$\sqrt{x^2-1}\ |] + k$

Nota bene: le particolari proprietà delle due funzioni $\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ e $\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ le hanno fatto meritare un nome, rispettivamente coseno e seno iperbolici per assonanza con le proprietà delle funzioni seno e coseno. In effetti:
(cosh t)' = sinh t (sinh t)' = cosh t non 'è il cambio di segno nella derivata del coseno
$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1/4\,[e^{2t} + e^{-2t} + 2 - (e^{2t} + e^{-2t} - 2)] = 1$
Si consiglia di rifare il calcolo utilizzando la notazione delle funzioni iperboliche.
Non ci ha provato nessuno.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.		

2		1		2		2		3		2.5		2.5		2.5		3		5			

22 ottobre 2004 problema tipo esame (2 ore)

Svolgere uno solo dei due problemi proposti trattando tutte le questioni in essi poste.

1) Sessione unica 1970 (modificato)

La funzione γ_1: $y = f_1(x)$ è costituita da un polinomio di III grado con le seguenti caratteristiche: $f_1(-1) = f_1'(-1) = f_1''(-1) = 0$ e $f_1(-2) = -1$. La funzione γ_2: $y = f_2(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$.

a) Determinare γ_1 e tracciarne il diagramma riducendo al minimo i conti.

b) Determinare $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{A,B\}$

c) Studiare la funzione γ_2 determinando: intersezioni con gli assi, comportamento all'infinito, crescere e decrescere, flesso

d) Tracciare i due diagrammi in un medesimo sistema di riferimento xOy

e) Dimostrare che il flesso F_2 è centro di simmetria di γ_2

f) Generalizzare la questione e spiegare come sia possibile determinare l'eventuale centro di simmetria $G \equiv (\alpha,\beta)$ di una funzione γ: $y = f(x)$

g) Trovare l'area σ della regione di piano compresa tra γ_1 e γ_2

h) Tracciate le 4 rette tangenti nei punti comuni t_{1A}, t_{2A}, t_{1B}, t_{2B} trovare l'area del quadrilatero da esse determinato (è richiesta la costruzione di una nuova figura con le 4 rette tangenti e la regione ben visibile).

a) Poiché si tratta di un polinomio di III grado la derivata seconda è di primo grado $y'' = k(x - \alpha)$ e integrando $y' = k/2\,(x - \alpha)^2 + h$ mentre $y = k/6\,(x - \alpha)^3 + hx + m$.

Dunque si ha, applicando le condizioni fornite per $x = -1$: $-1 - \alpha = 0$ da cui $\alpha = -1$; $0 = h$; $0 = m$

L'ultima condizione consente di trovare k; si ha infatti $-1 = k/6(-2 + 1)^3$ da cui $k = 6$. La funzione risulta pertanto $y = (x + 1)^3$

Si tratta della funzione potenza $y = x^3$ cui è stata applicata la traslazione di vettore (–1,0). La funzione presenta un flesso a tangente orizzontale nel punto (–1,0) che è anche centro di simmetria.

Nota di correzione: si poteva procedere anche a partire dal polinomio $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ottenendo lo stesso risultato con procedura più lunga che va scritta così:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$

$f(-1) = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 0$

$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c$

$f''(-1) = 0 \Rightarrow -6a + 2b = 0$

$f_1(-2) = -1 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = -1$

Si risolve il sistema e si arriva al risultato $a = 1$, $b = -3$; $c = 3$; $d = -1$

Lo studio di funzione andava comunque evitato (traslazione) o comunque ridotto all'essenziale.

b) da γ_1: $= f_1(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ e γ_2: $= f_2(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ si ottiene $\gamma_1 \cap \gamma_2 \Rightarrow 6x^2 + 6x = 0 \Rightarrow (x = -1 \vee x = 0) \wedge (y = 0 \vee y = 1)$ e i due punti sono $A \equiv (-1,0)$ e $B \equiv (0,1)$

c) La funzione γ_2 è una cubica con dominio $\Re$ e le sue caratteristiche richieste sono:

c1) intersezione con gli assi

asse x: $y = 0 \Rightarrow x^3 + 1 - 3x(x + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1 - 3x) = (x + 1)(x^2 - 4x + 1) = 0$ le radici sono $x = -1 \vee x = \alpha \vee x = \beta$ con $\alpha = 2 - \sqrt{3} \approx 0.27$ e $\beta = 2 + \sqrt{3} \approx 3.7$

asse y: $x = 0 \Rightarrow y = 1$ (punto B)

Nota di correzione : si poteva procedere anche con la decomposizione secondo Ruffini visto che era già nota la radice $x = -1$ (punto A)

c2) comportamento all'infinito

$f_2(x) \sim x^3$ e pertanto la funzione va all'infinito senza presentare asintoti obliqui ma come x^3

c3) crescere e decrescere

$f_2'(x) = 3x^2 - 6x - 3 = 3(x^2 - 2x - 1)$

$f_2'(x) \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 \geq 0$ valori esterni all'intervallo delle radici $x = 1 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} \gamma \approx -0.41 \\ \delta \approx 2.41 \end{cases}$ si ha dunque un massimo in $x = \gamma$ e un minimo in $x = \delta$

$f_2(\gamma) \approx 1.66 \quad f_2(\delta) \approx -9.66$

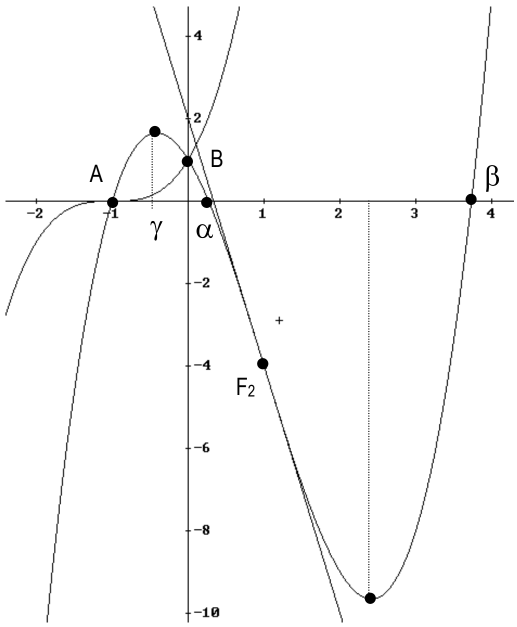
c4) flesso

$f_2''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$ si ha un flesso in $x = 1$ e la concavità è verso l'alto per $x > 1$. L'ordinata del flesso vale $y = 1 - 3 - 3 + 1 = -4$. La tangente inflessionale ha inclinazione $f_2'(1) = -6$

Nota di correzione: attenersi a quanto richiesto e, come detto più volte, evitare di dedicare più di 10' allo studio di un polinomio di III grado (sono tutti uguali).

d) I due diagrammi sono stati rappresentati sullo stesso sistema di riferimento scegliendo una scala che tenesse conto della necessità di rappresentare gli elementi essenziali (zeri, massimi e minimi, flessi, tangente inflessionale della seconda funzione). Nel tracciare i diagrammi è fondamentale rispettare le simmetrie nei diagrammi delle funzioni e curare (nei punti critici) la corretta inclinazione delle tangenti.

e) Per dimostrare che il flesso F_2 è centro di simmetria (proprietà generale di tutte le cubiche) bisogna applicare a γ_2 la simmetria centrale di centro F_2 e dimostrare che γ_2 si trasforma in se stessa.
La simmetria $\mathcal{S}_F$ ha come equazione $\frac{1}{2}(x + x') = 1 \wedge \frac{1}{2}(y + y') = -4$ da cui si ottiene $x = 2 - x'$ e $y = -8 - y'$
Sostituendo si ottiene:
$-8 - y' = (2 - x')^3 - 3(2 - x')^2 - 3(2 - x') + 1 \Leftrightarrow -8 - y' = 8 - 12x' + 6x'^2 - x'^3 - 12 + 12x' - 3x'^2 - 6 + 3x' + 1 \Leftrightarrow y' = x'^3 - 3x'^2 - 3x' + 1$
Pertanto $\gamma_2 \equiv \gamma_2'$ e F_2 è centro di simmetria.



f) In generale per cercare la eventuale esistenza di centri di simmetria si procede con lo stesso metodo, ma questa volta il centro di simmetria di coordinate (α,β) è ignoto. Si applica una generica simmetria centrale e si cerca di imporre la condizione $\gamma \equiv \gamma'$ il che equivale a scrivere delle equazioni nelle variabili (α,β). Se il sistema così ottenuto risulta compatibile e con una sola soluzione essa rappresenta il centro di simmetria.

g) L'area richiesta equivale al calcolo di un integrale definito; visto che la curva γ_2 è quella superiore nella zona richiesta si ha:

$$\sigma = \int_{-1}^{0}(y_2 - y_1)dx = \int_{-1}^{0}[\,x^3 - 3x^2 - 3x + 1 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)]dx =$$

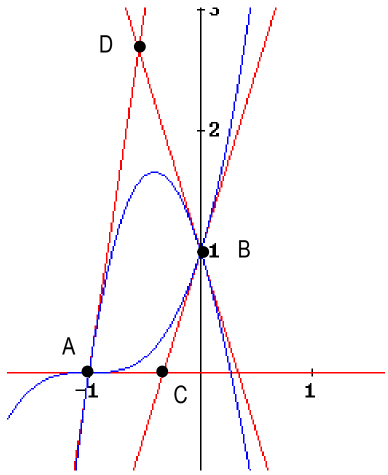
$$\int_{-1}^{0}[-6x^2 - 6x]dx = -6(x^3/3 + x^2/2)\Big|_{0}^{-1} = -6(-1/3 + \tfrac{1}{2}) = 1$$

Nota di correzione: prima si semplifica la funzione integranda e poi si integra, non viceversa.

h) Bisogna determinare le equazioni delle 4 rette tangenti:
$m_{1A} = 0$
$m_{2A} = f_2'(-1) = 3(1 + 2 - 1) = 6$ e la retta è $y = 6(x + 1)$
$m_{1B} = f_1'(0) = 3(0 + 1)^2 = 3$ e la retta è $y = 3x + 1$
$m_{2B} = f_2'(0) = 3(0^2 - 0 - 1) = -3$ e la retta è $y = -3x + 1$
Il punto C ha coordinate $y = 0 \wedge y = 3x + 1$ dunque $C\equiv(-1/3,0)$
Il punto D ha coordinate $y = 6(x + 1) \wedge y = -3x + 1$ dunque $0 = 9x + 5$ e $D\equiv(-5/9,8/3)$
L'area richiesta si ottiene dalle aree σ_1 e σ_2 dei triangoli ACB e ABD
$\sigma_1 = \frac{1}{2}(-1/3 + 1)1 = 1/3$
$\sigma_2 = \frac{1}{2}\,\overline{AD}\,\text{dist}(r_{AD},B)$ con $\overline{AD} = |x_D - x_A|\sqrt{m^2+1} = (-5/9+1)\sqrt{36+1} = 4/9\sqrt{37}$

$$\text{dist}(r_{AD},B)) = \frac{|1 - 6\cdot 0 - 6|}{\sqrt{37}} = \frac{5}{\sqrt{37}} \text{ e } \sigma_2 = 10/9$$

Infine $\sigma = 1/3 + 10/9 = 13/9$



Nota di correzione: ricordo che i calcoli sulle aree vanno completati con i risultati in forma esatta e che la metodologia di calcolo scelta va descritta nell'elaborato.

2) Prima sessione 1967 (modificato)
Si consideri la famiglia di parabole $\mathcal{P}_m : y = mx^2 + x + 3 - 4m$ con $m\in\Re-\{0\}$.

a) Dimostrare che $\forall m$ si ha $A\in \mathcal{P}_m$ e $B\in \mathcal{P}_m$ determinando contestualmente A e B.

b) Indicato con V il vertice di $\mathcal{P}_m$ determinare γ: $y = f(x)$ luogo di V al variare di m.

c) La funzione così determinata ha equazione $y = \dfrac{x^2 + 6x + 4}{2x}$ e si tratta di una curva particolare nota indipendentemente da conoscenze di analisi matematica. Dimostrare che si tratta di una iperbole determinando per via elementare il codominio.

d) Tracciare il diagramma precisando asintoti, massimo e minimo relativo M e m ed osservare che $M\equiv A$ e $m\equiv B$. Se non si riesce per via elementare procedere con le ordinarie tecniche di derivazione.

e) Dimostrare che il punto C di intersezione degli asintoti è centro di simmetria.

f) Senza fare i conti descrivere una strategia che consenta di determinare la rototraslazione in grado di ridurre l'equazione alla forma $X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 1$ (suggerimento: con quale retta deve coincidere l'asse X?)

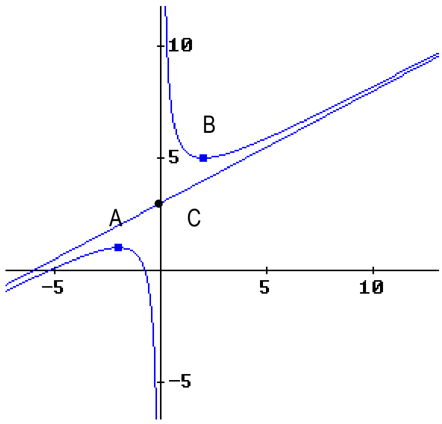
g) Considerare le due parabole della famiglia di vertici A e B dimostrando che esse sono simmetriche rispetto al punto C. Tracciarle sullo stesso diagramma di γ.

h) Trovare l'area σ della regione comune alle due parabole e il volume $\mathcal{V}$ del solido generato dalla rotazione dell'arco AB della parabola di vertice A intorno all'asse delle ascisse.

a) L'equazione è equivalente a $mx^2 + x + 3 - 4m - y = 0$ che può essere scritta in funzione di m come $m(x^2 - 4) + (x + 3 - y) = 0$ e, per il teorema di annullamento dei polinomi, tale equazione risulta vera $\forall m \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \wedge x + 3 - y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \wedge (y = 1 \vee y = 5)$. Dunque i punti $A \equiv (-2,1)$ e $B \equiv (2,5)$ hanno coordinate che soddisfano l'equazione parametriche $\forall m$ e pertanto sono punti fissi della famiglia (fascio di parabole).
Nota di correzione: la metodologia seguita va descritta e commentata anche nel compito d'esame non è obbligatoria solo in terza.

b) Nelle parabole ad asse verticale della forma $y = ax^2 + bx + c$ l'ascissa del vertice $x_V = -b/2a$ e nel nostro caso si ha:
$x_V = -\frac{1}{2m}$ e $y_V = mx_V^2 + x_V + 3 - 4m$. Per trovare il luogo basta eliminare la dipendenza da m e si ha dunque:
$m = -\frac{1}{2x}$ e $y = -\frac{1}{2x}x^2 + x + 3 + \frac{4}{2x} = -\frac{1}{2}x + x + 3 + \frac{4}{2x} = \frac{x^2 + 6x + 4}{2x}$

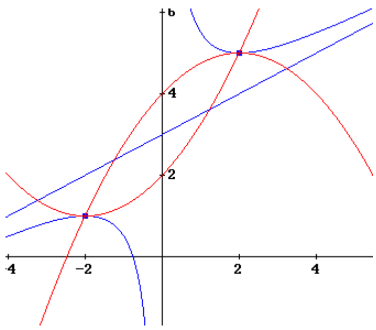
c) La funzione trovata scritta in forma polinomiale ha equazione $2xy = x^2 + 6x + 4$ e si tratta pertanto di una conica (polinomio di II grado nelle variabili x e y). Poiché per $x \to 0$ si ha $y \to \infty$ siamo in presenza di un asintoto verticale e si tratta pertanto o di una iperbole o della unione di due rette. Se però determiniamo il codominio risolvendo l'equazione in x vedremo che esso non corrisponde all'intero asse reale e dunque si tratta di una iperbole.
$x^2 - 2(y-3)x + 4 = 0$ con $\Delta/4 = (y-3)^2 - 4 = y^2 - 6y + 5$
L'equazione ammette soluzioni solo se $\Delta/4 \geq 0$ e cioè se $y \leq 1 \vee y \geq 5$. Dunque $y = 1$ e $y = 5$ sono le ordinate di un massimo e di un minimo relativi.
Possiamo ora affermare con certezza che la funzione data è una iperbole con dominio $\Re - \{0\}$ e codominio $y \leq 1 \vee y \geq 5$



d) L'asintoto obliquo può essere determinato immediatamente svolgendo la divisione da cui si ottiene $y = ½\, x + 3 + 2/x = ½\, x + 3 + o(1)$ e pertanto la retta $y = ½\, x + 3$ è asintoto obliquo. Il punto di incontro degli asintoti (0,3) è centro di simmetria. Per trovare le ascisse degli estremi basta trovare le controimmagini di $y = 1$ e $y = 5$. Ciò equivale a risolvere l'equazione in x nel caso in cui $\Delta = 0$ e si ottiene $x = y - 3 = \left\{\begin{array}{l}-2\\ 2\end{array}\right.$. Come già detto nel testo $M \equiv A$ e $m \equiv B$

e) La dimostrazione del fatto che C è centro di simmetria è identica a quella dell'esercizio precedente e non viene pertanto ripetuta.

f) Per scrivere l'equazione dell'iperbole in forma normale bisogna scrivere una rototraslazione di centro C e di angolo $\theta = -½ \arctan(1/2)$.
Così facendo la bisettrice dell'angolo tra i due asintoti viene a coincidere con l'asse X su cui finiscono sia i fuochi sia i vertici della iperbole.
Per svolgere il calcolo si devono calcolare $\cos(\arctan ½) = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e da qui, con le formule di bisezione, $\cos\theta$ e $\sin\theta$ che consentono di scrivere la rotazione.
Il modo più rapido per determinare la bisettrice è quello di cercarla come luogo geometrico dei punti equidistanti dai due asintoti perché così facendo si arriva direttamente alla equazione. Intersecando tale retta con la funzione si determinano anche le coordinate dei due vertici dell'iperbole che, come si vede bene dalla figura, non corrispondono al massimo e minimo della funzione.



g) La parabola di vertice A ha parametro $m = -\frac{1}{2x} = ¼$ e equazione $y = ¼\, x^2 + x + 2$ mentre quella di vertice B ha $m = -1/4$ ed equazione: $y = -¼\, x^2 + x + 4$. Le due parabole passano per i punti (0,2) e (0,4) e si può pertanto tracciarne l'andamento.
Anche in questo caso la dimostrazione della simmetria è banale e non viene ripetuta.
Trattandosi di parabole si può anche osservare che sono simmetrici i due vertici e che le due curve sono congruenti avendo come coefficiente di II grado due numeri opposti.

h) L'area richiesta si ottiene tramite l'integrale definito della differenza. $\sigma = 2\int_0^2 (y_2 - y_1)dx =$

$2\int_0^2 [-\frac{1}{4}x^2 + x + 4 - (\frac{1}{4}x^2 + x + 2)]dx = 2\int_0^2 (-1/2\, x^2 + 2)dx = (-x^3/3 + 4x)\Big|_0^2 = 16/3$

Per il calcolo del volume si ha:

$\mathcal{V} = \pi \int_{-2}^{2} [-\frac{1}{4}x^2 + x + 4 - (\frac{1}{4}x^2 + x + 2)]^2\, dx = \pi \int_{-2}^{2} [-1/2\, x^2 + 2]^2\, dx = 2\pi \int_0^2 [\,1/4\, x^4 - 2x^2 + 4]^2\, dx = 2\pi\, [1/20\, x^5 - 2/3\, x^3$

$+ 4\, x]\Big|_0^2 = 2\,\pi\,(8/5 - 16/3 + 8) = 2\,\pi\, \frac{24 - 80 + 120}{15} = \frac{128}{15}\,\pi$

27/01/2005 4 F Pni tecniche di calcolo dei limiti

I seguenti limiti sono forniti senza indicazione del fatto che si tratti o meno di forme di indecisione o che il limite esista o meno. Calcolare il limite (se esiste) e in caso contrario spiegare perché non esiste. E' ammesso l'uso delle tecniche basate sui simboli di Landau o, ~ e di scritture improprie quali $(e^{+\infty}) = +\infty$ etc.

1a $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/|x\sin(1/x)|}$ 1b $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[4]{-x^5+x^2-1}$ 1c $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{-x^5+x^2-1}$

1a $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/|x\sin(1/x)|} = \frac{1}{2}^{(1/0+)} = \frac{1}{2}^{(+\infty)} = 0+$ La quantità x sin(1/x) → 0 per il teorema del confronto perché x= o(1) mentre sin(1/x) è limitata

1b $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[4]{-x^5+x^2-1} = \lim_{z\to+\infty}\sqrt[4]{z^5+x^2-1} = \lim_{z\to+\infty} z^{5/4}+o(z^{5/4}) = +\infty$

1c $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{-x^5+x^2-1}$ non esiste perché $+\infty$ non è un punto di accumulazione del dominio (radice di indice pari di una quantità negativa)

2a $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-x\right)$ 2b $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-x\right)$

2a $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-x\right) = (+\infty-\infty) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+1-x^2}{\sqrt{x^2-3x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{2x+o(x)} = -3/2$

2b $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-x\right) = (+\infty+\infty) = +\infty$

3 $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-3x^2+4}$

3 $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-3x^2+4} = \left(\frac{0}{0}\right)$ si decompone effettuando la divisione con il metodo di Ruffini e si ottiene:

$\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x^2-4x+3)}{(x-2)(x^2-x-2)} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x^2-4x+3)}{(x^2-x-2)} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x^2-4x+3)}{(x-2)(x+1)} = \left(\frac{-1}{3\cdot 0+}\right) = -\infty$

4 $\lim_{x\to\pi/8}\frac{\sin(2x-\pi/4)}{\cos(x+3/8\,\pi)}$

4 $\lim_{x\to\pi/8}\frac{\sin(2x-\pi/4)}{\cos(x+3/8\,\pi)} = \left(\frac{0}{0}\right)$ sostituzione $x + 3/8\,\pi = z \Leftrightarrow x = z - 3/8\,\pi \Leftrightarrow 2x - \pi/4 = 2z - \pi$

per $x \to \pi/8$ si ha $z \to \pi/2$ e $\lim_{x\to\pi/8}\frac{\sin(2x-\pi/4)}{\cos(x+3/8\,\pi)} = \lim_{z\to\pi/2}\frac{\sin(2z-\pi)}{\cos z} = \lim_{z\to\pi/2}\frac{-\sin 2z}{\cos z}$

sostituzione $z - \pi/2 = u \Rightarrow 2z = \pi + 2u \Rightarrow \sin 2z = \sin(\pi + 2u) = -\sin 2u \wedge \cos z = \cos(u + \pi/2) = -\sin u$

$\lim_{z\to\pi/2}\frac{-\sin 2z}{\cos z} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin 2u}{-\sin u} = -2$

5 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+2x)}{(2^{3x}-1)(3^{2x}-1)}$

5 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+2x)}{(2^{3x}-1)(3^{2x}-1)}$

$\ln(1+2x) \sim 2x$ $2^{3x} = e^{\ln 2\cdot(3x)}$ $3^{2x} = e^{\ln 3\cdot(2x)}$

pertanto $\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+2x)}{(2^{3x}-1)(3^{2x}-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{(2x+o(2x))^2}{\ln 2\cdot(3x)\ln 3\cdot(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^2+o(x^2)}{6x^2\ln 2\cdot\ln 3} = \frac{2}{3\cdot\ln 2\cdot\ln 3}$

6 Calcolare prendendo il ln del limite $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\sqrt{2x^2+3x-1}}$

$\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\sqrt{2x^2+3x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3x-1}\,\ln\left(1+\frac{3}{2x}\right) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3x-1}\cdot\lim_{z\to 0}(1+3/2\,z) = \lim_{z\to 0}$

$\sqrt{2}\,z\cdot\frac{3}{2x} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ e dunque il limite richiesto vale $\exp\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

7 Con strumenti di analisi che richiedono l'uso delle derivate si dimostra che per $x \to +\infty$ si ha $\forall\alpha, \alpha>0$ che $\ln(x) = o(x^\alpha)$ mentre $x^\alpha = o(e^x)$. Tenendo conto di ciò calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln^2 x+5}{\sqrt{x-3}}+\frac{\ln x^2}{e^x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln^2 x + 5}{\sqrt{x-3}} + \frac{\ln x^2}{e^x}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty} + \frac{\infty}{\infty}\right)$ ma in base ai comportamenti asintotici dati il logaritmo (e dunque le sue potenze) perde sulla potenza e l'esponeziale che vince sulla potenza vince a maggior ragione (proprietà transitiva di o) sul logaritmo.

Tecnicamente si scrive:

$\ln x = o(x^{1/4})$ e dunque $\ln^2 x = o(x^{1/2})$ mentre $\ln x^2 = 2 \ln x = o(x) = o(e^x)$

e si ha pertanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln^2 x + 5}{\sqrt{x-3}} + \frac{\ln x^2}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}\right) = 0$$

Punteggio base di 2punti. Gli esercizi danno il punteggio indicato in tabella

1a	1b	1c	2a	2b	3	4	5	6	7	
0.5	0.5	0.5	1	0.5	1.2	1.5	1.2	1.2	1	

01/02/05 4F Pni: insiemi e funzioni (teoria)

1. Sia $c \in \Re$: per intorno completo di c I_c si intende …

Qualsiasi intervallo aperto contenente c

2. Siano I_{1c} e I_{2c} due intorni di c di estremi (a_1,b_1) e (a_2,b_2). Dimostrare che $I_{1c} \cap I_{2c} = I_c$ scrivendo chi siano gli estremi di I_c. Indicare con Max e min la funzione che dà rispettivamente il massimo e il minimo di due numeri.

Si ha per ipotesi $a_1<c<b_1$ e $a_2<c<b_2$ e da ciò segue che $\mathrm{Max}(a_1,a_2) < c < \min(b_1,b_2)$ ma $I_{1c} \cap I_{2c} = \{x \mid \mathrm{Max}(a_1,a_2) < x < \min(b_1,b_2)\}$ e pertanto si tratta di un intorno di c.

3. Siano I_{1c} e I_{2c} due intorni di c con $I_{1c} \subset I_{2c}$. Cosa si può dire dell'insieme $I_{2c} - I_{1c}$?

È l'unione di due intervalli aperti disgiunti

4. Sia $A \subset \Re$ e si indichi con $\alpha = \mathcal{S}up A$. Scrivere in forma simbolica le due proprietà di cui gode α

$\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \le \alpha \qquad \forall \varepsilon, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x \mid \alpha - \varepsilon < x$

5. Sia $A \subseteq \Re$ cosa si intende scrivendo che $\mathcal{S}up A = +\infty$?

$\forall k,\ k \in \Re \Rightarrow \exists x,\ x \in A \mid x>k$ ovvero si intende dire che A non è limitato superiormente

6. Siano date le funzioni y = f(x) e y = g(x) di dominio e codominio indicati rispettivamente $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{D}_g$, $\mathcal{C}_g$ quale relazione insiemistica deve valere affinche abbia senso la funzione $h = g \bullet f$ con $\mathcal{D}_h = \mathcal{D}_f$

Deve essere $\mathcal{D}_g \subseteq \mathcal{C}_f$

7. Se la relazione precedente non è verificata che relazione deve esistere per poter definire la funzione ristretta $h = g \bullet f$? In tale caso quanto vale $\mathcal{D}_h$?

Per poter definire la funzione composta occorre poter fare il passo intermedio tra f e g e cioè che $\mathcal{A} = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{C}_f \neq \varnothing$. In tale caso $\mathcal{D}_h = f^{-1}(\mathcal{A})$

8. Siano f: $\mathcal{D}_f \to \mathcal{C}_f$ e g: $\mathcal{D}_g \to \mathcal{C}_g$. Cosa significa affermare che f è una restrizione di g?

$\mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_g \wedge \forall x,\ x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow f(x) = g(x)$

9. Si consideri la funzione y = f(x) = sin(x) con $x \in \Re$; fare un esempio di restrizione relativa a tale funzione spiegando perché la si fa.

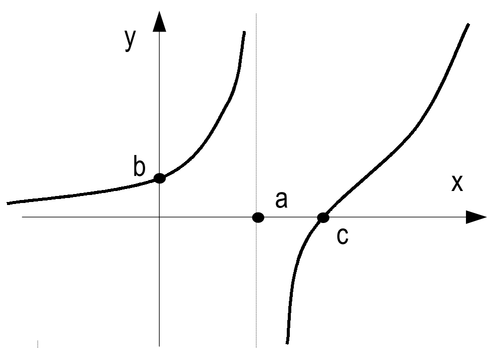
Si assume come dominio l'insieme $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ nel quale la funzione sin(x) è monotona crescente e si usa tale restrizione per definire la funzione inversa x = arcsin(y)

10. Sia y = f(x) una funzione invertibile di dominio $\mathcal{D}_f$ e codominio $\mathcal{C}_f$. Spiegare perché $f^{-1} \bullet f$ e $f \bullet f^{-1}$ sono due funzioni diverse. Che tipo di restrizione occorre fare per renderle coincidenti?

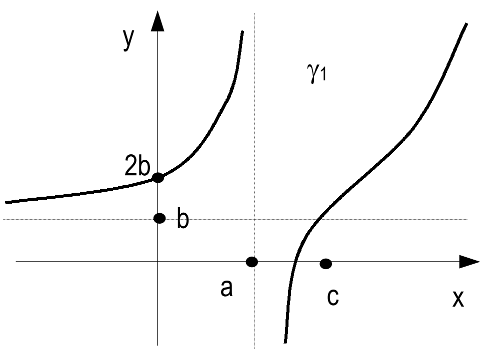
Entrambe le funzioni corrispondono alla funzione identica y = x ma la prima ha come dominio $\mathcal{D}_f$ mentre la seconda $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{C}_f$. Per renderle uguali bisogna operare una restrizione assumendo come dominio la zona comune $\mathcal{A} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{C}_f$ ammesso che tale insieme non sia vuoto.

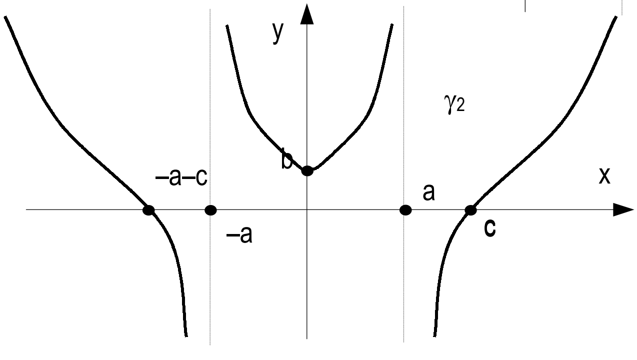
11. Si consideri la funzione $\gamma : y = f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x - 3}$. Senza svolgere i calcoli spiegare come si potrebbe determinare il codominio senza ricorrere a calcoli di analisi matematica ma utilizzando solo strumenti di matematica elementare.

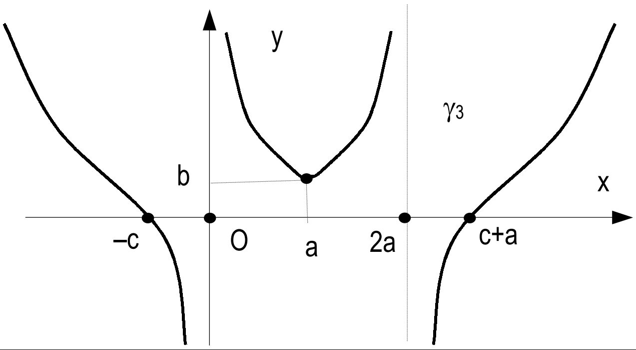
Basta scrivere la funzione come polinomio di II grado in x eguagliato a zero (assumendo y come parametro). Per trovare il codominio basta imporre che l'equazione abbia soluzioni e cioè che fissato y esista un corrispondente valore di x. Ciò porta a risolvere la disequazione in y, $\Delta \ge 0$ le cui soluzioni corrispondono al codominio.



12. Si consideri la funzione y = f(x) il cui diagramma γ è rappresentato in figura. Tracciare i diagrammi delle funzioni qui di seguito richieste rispettando le indicazioni dimensionali fornite da a, b, c
   a) Il diagramma γ_1 di $y = f(x) + b$ è
   b) Il diagramma γ_2 di $y = f(|x|)$ è
   c) Il diagramma γ_3 di $y = f(|x - a|)$ è







1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12a	12b	12c			
0.5	1	0.5	1	0.7	1	1	1	1	1	1	0.5	1	0.5			

Nome e cognome: ____________________________ 3/02/05 4F Pni Limiti e continuità (teoria)

1. Quando si scrive $\lim_{x \to c} f(x) = l$ si fanno delle precisazioni su c. Quali ?

c deve essere un punto di accumulazione del dominio ovvero, anche se c non appartiene al dominio, ogni suo intorno deve contenere almeno un punto del dominio. Ciò è funzionale a ciò che si ricerca con il concetto di limite: una regolarità di comportamento della funzione nelle vicinanze di c.

2. Che differenza c'è nel dire, a proposito di un elemento c di un insieme, che *esiste almeno un suo intorno fatto esclusivamente di punti dell'insieme* o dire che *in ogni suo intorno esistono punti dell'insieme*? Spiega la differenza con un esempio in cui sia vera la seconda e non la prima.

La prima è la definizione di punto interno e stabilisce che esiste una zona dell'insieme originario che circonda completamente c. E se c'è un intorno ce ne sono infiniti (tutti gli intorni che siano sottoinsiemi propri del primo). La seconda dice solo che nelle vicinanze di c esistono punti dell'insieme che potrebbero però coesistere con punti non appartenenti all'insieme. Consideriamo in $\mathfrak{R}$ l'insieme A = {1, ½, 1/3, ¼, …}. Lo 0 è un punto di accumulazione per A ma non è un punto interno perché tra due numeri razionali esistono sempre infiniti numeri irrazionali.

3. Quando si vuole trattare il concetto di limite in maniera unitaria si fa riferimento alla *retta reale estesa* $\mathfrak{R}^*$. Cosa si intende con ciò?

La retta reale estesa è l'insieme dei numeri reali completato con l'aggiunta di due concetti ($\pm\infty$) per i quali è stato definito il concetto di intorno con le stesse proprietà degli intorni dei numeri reali (intervallo illimitato superiormente o inferiormente). Ciò permette di trattare i concetti basati sugli intorni in maniera unitaria.

4. Dare in $\mathfrak{R}^*$ la definizione topologica di limite $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ precisando quindi cosa si debba intendere per α e per β.

Per ogni intorno di β I_β è possibile determinare un intorno di α I_α dipendente da I_β tale che per tutti gli elementi x di I_α con $x \neq \alpha$ si ha $f(x) \in I_\beta$. Per α e β si intendono numeri reali e/o i concetti di $\pm\infty$ che sono assimilati ai numeri perché per essi si può definire il concetto di intorno con le stesse proprietà.

5. Dare in forma metrica la definizione di $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l_+$

$\forall \varepsilon, \varepsilon>0, \exists K, K(\varepsilon)>0 \mid \forall x, x < -K \Rightarrow l \leq f(x) < l + \varepsilon$

6. Perché anche nella definizione metrica di limite si parte affermando $\forall \varepsilon, \varepsilon>0$ … e poi quando la si applica concretamente ci si riferisce a valori di ε piccoli a piacere?

Perché se la proprietà da verificare nella definizione risulta vera per un intorno piccolo $I(\varepsilon_1)$ essa è a maggior ragione vera per un intorno grande $I(\varepsilon_2) \supseteq I(\varepsilon_1)$. Infatti se $f(x) \in I(\varepsilon_1)$ sarà anche $f(x) \in I(\varepsilon_2)$ che contiene il precedente.

7. Enunciare il teorema del confronto. Precisare dove deve valere la disuguaglianza contenuta nell'ipotesi.

Si considerino tre funzioni f(x), g(x) e h(x) per le quali sia definitivamente $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ cioè la proprietà valga per almeno un intorno di α. Se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lim_{x \to \alpha} h(x) = \beta$ allora esiste anche $\lim_{x \to \alpha} g(x) = \beta$

8. Si completi la seguente dimostrazione del fatto che $\lim_{x \to \alpha} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \alpha} \frac{1}{f(x)} = \infty$

Per ipotesi si ha che $\forall \varepsilon, \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)>0$_ $\mid \forall x, |x-\alpha| < \delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$___ Ma $|f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|f(x)|} > 1/\varepsilon = k$ e pertanto 1/f(x) risulta definitivamente illimitata e ciò equivale alla tesi

9. Cosa si intende dicendo che per $x \to \alpha$, (1^∞) è una forma di indecisione?

Se si hanno due funzioni f(x) e g(x) tali che $\lim_{x \to \alpha} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to \alpha} g(x) = \infty$ non esiste alcuna condizione sufficiente in grado di garantirci l'esistenza o il valore di $\lim_{x \to \alpha} f(x)^{g(x)}$ e si deve pertanto operare caso per caso.

10. La seguente affermazione è sbagliata; spiegare perché e dare un controesempio: *se nell'intorno di c la funzione f(x) non è limitata superiormente allora* $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$

Dire che la funzione non è limitata superiormente significa affermare che esistono degli x tali che f(x) > K mentre dire che $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ significa dire che la proprietà f(x) > K è vera definitivamente cioè per tutti gli elementi di un particolare intorno (e per gli infiniti intorni in esso contenuti). Per esempio la funzione 1/sin(1/x) nell'intorno dello zero non è limitata ma il limite non è infinito perché la funzione oscilla tra $+\infty$ e $-\infty$ prendendo tutti i valori intermedi.

11. Dimostrare che per $x \to 0$ si ha $\cos x \sim 1 - \frac{1}{2} x^2$

$\cos x \sim 1 - \frac{1}{2} x^2 \Leftrightarrow 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$ ma $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x) x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \frac{1}{2}$

12. La funzione $y = x^2$ nell'intorno dello zero è definitivamente positiva eppure ad essa non si può applicare il teorema di permanenza del segno. Commentare il fatto che il teorema non è applicabile ma la tesi del teorema risulta vera.

Nulla di strano; la condizione sufficiente garantisce che dalla verità della ipotesi scaturisce la verità della tesi nel senso che non è possibile che sia vera l'ipotesi e falsa la tesi. Nulla si afferma circa la falsità della ipotesi. Dalla falsità della ipotesi può discendere sia la verità sia la falsità della tesi.

13. Utilizzando la proprietà di asintoticità nel calcolo dei limiti le funzioni complicate f(x) vengono sostituite da funzioni più semplici g(x) ad esse asintotiche. C'è un solo caso in cui tale tecnica non risulta applicabile. Quando?

La sostituzione si rivela improduttiva quando nel calcolo la funzione g(x) si elide per l'azione di altre funzioni e rimane da valutare la quantità o(g(x)) della quale nulla si sa salvo il fatto di essere trascurabile rispetto ad una grandezza che non c'è più e la cui assenza fa assurgere o(g(x)) al rango di termine fondamentale.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13			

5F Pni 16/02/05 Questionario tipo esame

Svolgere 5 quesiti tra i 12 proposti. Per i diversi quesiti proposti si deve sempre scegliere tra l'opzione a e la b.

a) Integrali definiti

a) Calcolare il valore medio nell'intervallo $[0,\pi]$ della funzione $y = \sin^3 x$

Per definizione di valor medio si ha $\tilde{y} = \dfrac{\int_0^\pi \sin^3 x\, dx}{(\pi - 0)}$ e dobbiamo pertanto calcolare

$F(x) = \int \sin^3 x\, dx = \int -\sin^2 x\, d(\cos x) = \int (\cos^2 x - 1)\, d(\cos x) = 1/3 \cos^3 x - \cos x$

$\tilde{y} = 1/\pi\, [F(\pi) - F(0)] = 1/\pi\, \{[-1/3 - (-1)] - [1/3 - 1]\} = \dfrac{4}{3\pi}$

Nota di correzione: errori di segno nella scrittura del differenziale, errori nella variazione di F(x). Ricordo che tuttte le potenze di grado dispari di seno e coseno si integrano così.

b) Determinare il valore di a per il quale $\int_1^a \ln^2 x = 2(\ln 2 - 1)^2$

Dobbiamo calcolare $F(x) = \int \ln^2 x\, dx$ che si calcola tramite due integrazioni per parti.

$F(x) = \int \ln^2 x\, dx = \ln^2 x\, x - \int 2\ln x\, (1/x)\, x dx = x \ln^2 x - 2\int \ln x\, dx = x \ln^2 x - 2[x \ln x - \int x\, (1/x)\, dx\,] = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$

$F(a) - F(1) = a\ln^2 a - 2a \ln a + 2a - 2$ poiché il risultato da compare contiene un quadrato conviene continuare $= a(\ln^2 a - 2 \ln a + 1) + a - 2 = a(\ln a - 1)^2 + a - 2$

$a(\ln a - 1)^2 + a - 2 = 2(\ln 2 - 1)^2 \Leftrightarrow a = 2$

Nota di correzione: Errori nella integrazione per parti; passaggi omessi; e … $\ln^2 x = \ln x^2 = 2 \ln x$ una cosa che speravo di non vedere mai. UN errore del genere in sede di prova d'esame determina una penalizzazione notevole.

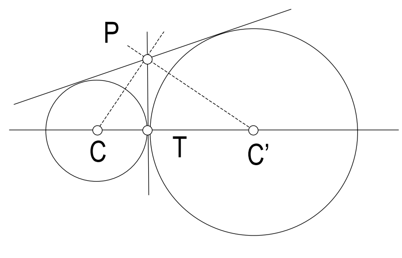
b) Geometria

a) Il triangolo ABC è rettangolo in A mentre $C\hat{B}A = \alpha$. Si costruisca la semicirconferenza di diametro BC non contenente A e si prenda un punto D sull'arco BC. Quanto vale $A\hat{D}B$? Motivare la risposta.

Condizione necessaria e sufficiente affinché BC veda A sotto un angolo retto è che A appartenga alla circonferenza di diametro BC e dunque anche A appartiene alla circonferenza che passa per D. Ne segue che $A\hat{C}B = A\hat{D}B$ perché angoli alla circonferenza della corda AB. Ma $A\hat{C}B = ½\, \pi - \alpha$ e dunque $A\hat{D}B = ½\, \pi - \alpha$

Nota di correzione: per la corretta risposta era necessario dimostrare il passaggio della circonferenza per A.

b) Due circonferenze di centri C e C' sono tangenti esternamente in T con tangente comune t. Sia t' una delle tangenti comuni alle due circonferenze diversa da t e si indichi con P il punto di intersezione tra t e t'. Dimostrare che l'angolo $C\hat{P}C'$ è retto.



Le due tangenti da un punto esterno ad una circonferenza formano un angolo che è bisecato dalla congiungente con il centro (la dimostrazione è banale per la congruenza dei due triangoli coinvolti). Poiché l'angolo in P è piatto ne segue che $C\hat{P}C'$ è retto essendo metà di un angolo piatto.

c) Campi numerici

a) Dimostrare tramite il principio di induzione matematica che

$$\sum_{i=1}^{n} i(i + 1) = \frac{n(n + 1)(n+2)}{3}$$

Il principio di induzione afferma che indicata con P_n una proprietà dipendente da un naturale n essa è vera se la si dimostra vera in un caso e se si dimostra che $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Si tratta della verità dimostrata tramite la catena $P_1 \Rightarrow P_2$ ma $P_2 \Rightarrow P_3$ e così via.

$S_1 =_{def} 1\cdot 2 = 2$ e applicando la formula $S_1 = \dfrac{1(1 + 1)(1+2)}{3} = 2$ pertanto P_1 è vera.

$S_{n+1} =_{def} S_n + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} =$

$\frac{[(n+1)][(n+1)+1][(n+1)+2]}{3}$ e dunque $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

b) Scrivere in forma trigonometrica i numeri complessi z tali che $z^3 = \rho^3(\cos\alpha + i \sin\alpha)$. Motivare la risposta.

Per la formula di De Moivre che generalizza una proprietà della moltiplicazione elevando a potenza un numero complesso in forma goniometrica si eleva a potenza il modulo e si moltiplica per n l'anomalia. Dunque una radice è sicuramente $\rho(\cos\alpha/3 + i \sin\alpha/3)$ ma oltre ad essa bisogna considerare anche i numeri complessi sfasati di $2/3\,\pi$ perché elevandoli a potenza si ottiene una anomalia che differisce da α di $2k\pi$

Si ha dunque: $z = \rho[\cos(\alpha/3 + 2/3\,k\pi) + i \sin(\alpha/3 + 2/3\,k\pi)]$ con k = 0, 1, 2

Nota di correzione: entrambi gli esercizi sono stati ignorati

d) Statistica e calcolo delle probabilità

a) Una macchina impacchetta confezioni di prosciutto crudo a peso predetrminato con un $\sigma = 10$ g. Si estrae un campione da 100 confezioni e per esso si trova un peso medio $\mu = 102$ g. Fare una stima per intervallo del peso medio della popolazione con un grado di fiducia del 95 %. Argomentare e motivare.

La variabile casuale media campionaria X per n > 30 presenta una distribuzione gaussiana con un valore medio μ e uno scarto $\sigma' = \sigma/\sqrt{n} = 10/10 = 1$ g. Parlare di grado di fiducia del 95% significa determinare i valori di X, X_1 e X_2 simmetrici rispettop a μ per i quali l'area della curva compresa tra questi valori è pari a 0.95. Per poter utilizzare i valori tabulati della variabile gaussiana si passa alla variabile normalizzata (di valor medio 0 e scarto 1) attraverso la trasformazione $z = \frac{x-\mu}{\sigma'}$ cui corrispondono due valori di z simmetrici $\pm a$. Dunque $p(-a<z<a) = 0.95 = F(a) - F(-a) = = F(a) - (1 - F(a)) = 2F(a) - 1$. Da qui si ha $F(a) = ½\ 1.95 = 0.975$.

Dalle tavole della funzione gaussiana si ottiene cercando il valore 0.975 che a = 1.96. Lo scarto sulla variabile X è pertanto $1.96 \cdot 1 \approx 2$ e per quanto riguarda il valor medio della popolazione si potra dire che esso è compreso tra 101 e 103 g.

Nota di correzione: attenzione alle cifre significative (μ era stato dato preciso al grammo). In un compito d'esame (ma anche nella vita) bisogna evitare di motivare formule immotivate che saranno dimenticate nel giro di pochi giorni o mesi.

b) Gli eventi H_1, H_2, H_3, H_4 costituiscono un sistema completo di alternative con probabilità 0.15, 0.25, 0.38 e 0.22. Le probabilità che si verifichi l'evento A condizionato dalle ipotesi H_1, H_2, H_3, H_4 sono rispettivamente 0.20, 0.40, 0.35 e 0.50. Calcolare la probabilità $p(H_2 | A)$ e quella che l'evento non sia stato condizionato dalla ipotesi H_1. Argomentare

Conviene ricordare che in generale $P(A|B)\,p(B) = p(B|A)\,p(A) = p(A \cap B)$. E' questa la proprietà che consente di valutare la credibilità di una ipotesi a posteriori.

Nel nostro caso $p(H_2|A) = \frac{p(A|H_2)\,p(H_2)}{p(A)}$. Si tratta ora di determinare P(A). Ciò si fa analizzando l'evento A come somma di eventi incompatibili e cioè $p(A) = p(A \cap H_1) + p(A \cap H_2) + p(A \cap H_3) + p(A \cap H_4) = p(A|H_1)p(H_1) + p(A|H_2)p(H_2) + p(A|H_3)p(H_3) + p(A|H_4)p(H_4)$

Dunque $p(A) = 0.15 \cdot 0.20 + 0.25 \cdot 0.40 + 0.38 \cdot 0.35 + 0.22 \cdot 0.50 = 0.37$

$p(H_2|A) = \frac{p(A|H_2)\,p(H_2)}{p(A)} = \frac{0.25 \cdot 0.40}{0.37} = 0.27$

Analogamente per l'altro caso salvo il fatto di valutare l'evento contrario.

Nota di correzione: nessuno ci ha messo mano

e) Trasformazioni e geometria analitica

a) La parabola $y = x^2 - 4x + 6$ viene trasformata dalla affinità $x' = \frac{\sqrt{3}}{2}\,x + ½\,y$ e $y' = -½\,x + \frac{\sqrt{3}}{2}\,y$. Come cambia la lunghezza di un generico arco AB della parabola? (motivare analizzando le caratteristiche della affinità). Determinare l'equazione della trasformata in forma polinomiale.

La matrice della trasformazione è del tipo $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ con rapporto di affinità $a^2 + b^2 = 1$ si tratta pertanto di una isometria diretta e cioè di una rotazione $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ di angolo $\alpha = -\pi/6$ e di centro O.

Nelle isometrie la lunghezza delle linee non cambia.
Per determinare l'equazione della trasformata è necessario calcolare $\mathcal{A}^{-1}$ ma poiché si tratta di una rotazione non è necessario invertire il sistema e basta scrivere la rotazione di angolo α. Si ha così:

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'$ e $y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$

Applicando la trasformazione all'equazione della parabola si ottiene :

$$\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right) + 6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{4}x'^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{1}{4}y'^2 + x'(-2\sqrt{3} - 1/2) + y'\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + y'^2 + x'(-8\sqrt{3} - 2) + y'(8 - 2\sqrt{3}) + 24 = 0$$

Nota di correzione: le equazioni della rotazione di centro O possono essere dedotte in vari modi (con il ccalcolo vettoriale, per via geometrica o semplicemente osservando che quando P va in P' l'angolo cambia di α e pertanto $x' = \rho\cos(\theta+\alpha) = \rho\cos\theta\cos\alpha - \rho\sin\theta\sin\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha$; analogamente per y.
Quei pochi che hanno individuato il valore di α hanno sbagliato il segno.

b) In una affinità $A\equiv(4,0)\rightarrow A'\equiv(0,4)$ mentre la retta $r : x - 3y + 6 = 0$ è unita. Determinare l'equazione della affinità.
Le affinità sono definite tramite 6 coefficienti e dunque per determinarne occorrono 6 condizioni: 2 sono ottenute dalla trasformazione del punto A e le altre 4 derivano dalla condizione per cui la retta è totalmente unita (l'unità globale ne determina solo 2).

Posto $\mathcal{A}: \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$ si ha

$A' = \mathcal{A}(A) \Rightarrow 0 = 4a + c \wedge 4 = 4d + f$

$r = \mathcal{A}(r)$ punto a punto $\Rightarrow \mathcal{A}(P\equiv(x, 1/3\, x + 2)) = P\equiv(x, 1/3\, x + 2)$ e cioè

$ax + b(1/3\, x + 2) + x = x \wedge dx + e(1/3\, x + 2) + f = 1/3\, x + 2 \Leftrightarrow$

$x(a + 1/3\, b - 1) + (2b + c) = 0 \wedge x(d + 1/3\, e - 1/3) + (2e + f - 2) = 0$ queste equazioni devono valere $\forall x$ e si ottiene

dunque: $\begin{cases} 4a + c = 0 \\ 4d + f = 4 \\ a + 1/3\, b - 1 = 0 \\ 2b + c = 0 \\ d + 1/3\, e - 1/3 = 0 \\ 2e + f - 2 = 0 \end{cases}$ sistema che si risolve in 2 o 3 passaggi per sostituzione ottenendo:

$a = 3/5$; $b = 6/5$; $c = -12/5$; $d = 2/5$; $e = -1/5$; $f = 12/5$

Note di correzione: si tratta di una generica affinità non riconducibile né ad una simmetria assiale (perché A' non è il simmetrico di A) né ad una glissosimmetria perché il vettore che porta dal simmetrico di A ad A' non è parallelo alla retta.

f) Analisi

a) Se $\int_a^b f(x)\,dx = k$ per quali valori di (a',b') e (a'',b'') si possono calcolare $\int_{a'}^{b'} f(2x)\,dx$ e $\int_{a''}^{b''} f(\frac{1}{2}x + 3)\,dx$ e quanto valgono tali integrali? Motivare con i riferimenti ai teoremi coinvolti.
Il teorema sulla sostituzione negli integrali definiti dice che se si effettua la sostituzione $x = \varphi(z)$ si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{z_a}^{z_b} f(\varphi(z))\varphi'(z)\,dz \text{ dove } z_a = \varphi^{-1}(a)$$

Nel caso proposto le trasformazioni sono molto semplici; si ha infatti:
nel primo caso $z = 2x$ da cui $dz = 2\,dx$

$$\int_{a'}^{b'} f(2x)\,dx = \int_{2a'}^{2b'} f(z)\,1/2\,dz = \frac{1}{2}\int_a^b f(z)\,dz = \frac{1}{2}k \text{ se } b = 2b' \text{ e cioè se } b' = \frac{1}{2}b \text{ e } a' = \frac{1}{2}a$$

nel secondo caso $z = \frac{1}{2}x + 3$ da cui $dz = \frac{1}{2}dx$

$$\int_{a''}^{b''} f(\tfrac{1}{2}x + 3)\,dx = \int_{\frac{1}{2}a''+3}^{\frac{1}{2}b''+3} f(z)\,2\,dz = 2\int_{a}^{b} f(z)\,dz = 2k$$ se $b = \frac{1}{2}b''+3$ e cioè se $b'' = 2(b-3)$ e $a'' = 2(a-3)$

Nota di correzione: attenzione perché esercizi di questo tipo si sono intensificati negli ultimi anni sia per i corsi di ordinamento, sia di Pni.

b) Data la funzione $f(x) = \ln(x/a) \arcsin\frac{x-b}{b} + \frac{x^2}{ab}$. Citando i teoremi coinvolti dimostrare che se a e b sono numeri positivi qualsiasi $\exists\, \tilde{x} \mid f(\tilde{x}) = 1$. Suggerimento valutare f(a) e f(b).

$f(a) = 0 + a^2/(ab) = a/b$ mentre $f(b) = 0 + b^2/(ab) = b/a$

La funzione data è continua nell'intervallo di estremi a e b ed assume i valori a/b e b/a che si scambiano il ruolo di estremo destro e sinistro a seconda che sia a>b o b>a. In entrambi i casi 1 è interno all'intervallo. Per il teorema dei valori intermedi una funzione continua assume almeno una volta tutti i valori compresi tra f(a) e f(b) e tra essi il valore 1.

Nota di correzione: il teorema citato (di Bolzano Darboux) è un corollario di quello di Bolzano Weierstrass che riguarda l'esistenza del massimo e del minimo e fa da lemma a quello di esistenza degli zeri.

1		2		3		4		5		6		

22/3/2005 4F Pni tecniche di derivazione

I seguenti esercizi sono tutti presi da porzioni di temi d'esame. Viene richiesto il calcolo della derivata prima e della derivata seconda e, in 2 casi su 4 a scelta dell'alunno, la determinazione dei valori di x per i quali esse si annullano (non è richiesto lo studio del segno).

1) $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - x^3}{2x - 2}$

$y' = \frac{1}{2}\dfrac{(4x - 3x^2)(x - 1) - (2x^2 - x^3)1}{(x - 1)^2} = \frac{1}{2}\dfrac{-2x^3 + 5x^2 - 4x}{(x - 1)^2} = \frac{1}{2}\dfrac{x(-2x^2 + 5x - 4)}{(x - 1)^2}$

Il Δ del termine di II grado al numeratore è negativo e pertanto si ha $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$y'' = \frac{1}{2}\dfrac{(-6x^2 + 10x - 4)(x - 1)^2 - (-2x^3 + 5x^2 - 4x)2(x - 1)}{(x - 1)^4} = \dfrac{(-3x^2 + 5x - 2)(x - 1) + (2x^3 - 5x^2 + 4x)}{(x - 1)^3} = \dfrac{-x^3 + 3x^2 - 3x + 2}{(x - 1)^3}$

Osserviamo che N(2) = – 8 + 12 –6 + 2 = 0 pertanto il numeratore ammette il divisore x – 2 ed eseguendo la divisione si ottiene:

$y'' = \dfrac{(x - 2)(-x^2 + x - 1)}{(x - 1)^3}$ che si annulla per x = 2 (il Δ del trinomio è negativo).

Nota di correzione: non derivare il 2; errorri algebrici; mancata fattorizzazione (doppia) sulla derivata seconda

2) $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln|x + 1|$. Dimostrare prioritariamente (facendo i due casi) che $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

per x>0 si ha $(\ln x)' = 1/x$ mentre per x<0 si ha $(\ln(-x))' = 1/(-x)(-1) = 1/x$

$y' = \frac{1}{2}2x + \dfrac{1}{x+1} = x + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x^2 + x + 1}{x+1}$

Poiche $\Delta < 0$ si ha $y' \neq 0 \ \forall x$

Per y" conviene derivare la penultima espressione, più semplice da derivare (ricordare che $(1/z)' = -1/z^2\, z'$)

$y'' = 1 - \dfrac{1}{(x + 1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} = \dfrac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$

3) $y = \sin x + \dfrac{1}{4 \sin x}$

$y' = \cos x + \frac{1}{4}\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{\cos x(4\sin^2 x - 1)}{\sin^2 x}$ (vedi nota precedente)

$y'' = -\sin x + \frac{1}{4}\dfrac{\sin x \sin^2 x + \cos x\, 2 \sin x \cos x}{\sin^4 x} = -\sin x + \frac{1}{4}\dfrac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{1}{4}\dfrac{-4\sin^4 x - \sin^2 x + 2}{\sin^3 x}$

4) $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$

$y = (x^3 + 3x^2)^{1/3}$ e $y' = 1/3(x^3 + 3x^2)^{-2/3}(3x^2 + 6x) = (x^3 + 3x^2)^{-2/3}(x^2 + 2x) = \dfrac{x(x + 2)}{\sqrt{(x^3 + 3x^2)^2}}$

Conviene derivare il prodotto :

$y'' = -2/3\,(x^3 + 3x^2)^{-5/3}(3x^2 + 6x)(x^2 + 2x) + (x^3 + 3x^2)^{-2/3}(2x + 2) = -2\,(x^3 + 3x^2)^{-5/3}(x^2 + 2x)^2 + 2(x^3 + 3x^2)^{-2/3}(x + 1) =$

$-2\,(x^3 + 3x^2)^{-5/3}[(x^2 + 2x)^2 - (x^3 + 3x^2)(x + 1)] = -2(x^3 + 3x^2)^{-5/3}\ x^2 = \dfrac{-2x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^5}}$ volendo si può ancora semplificare per x^2

(provare).

5F Pni 8 aprile 2005 : problema 2 ore

Il triangolo isoscele ABC, rettangolo in C fa da base ad una piramide i cui spigoli AS, BS, CS sono congruenti. Indicare $\overline{AB}$ con *c* e $\overline{AS}$ con *v*.

a) Dimostrare che la proiezione di S sul piano di base è il punto medio O di AB.

b) Dimostrare che i tre spigoli formano con la base angoli congruenti e che cos $S\hat{A}O = \frac{c}{2v}$

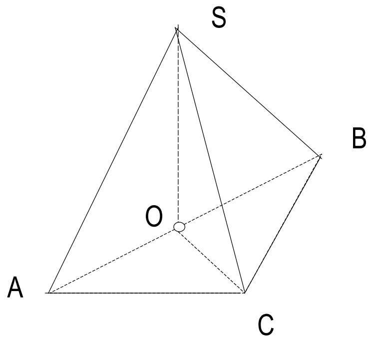
c) Indicata con D la proiezione di A su CS dimostrare che $\overset{\Delta}{ADS} \cong \overset{\Delta}{DSB}$

d) Utilizzare il risultato per dimostrare che l'angolo diedro di spigolo CS, $A\hat{D}B = 2 \arcsin \frac{2v}{\sqrt{8v^2 - c^2}}$

e) Posto $x = v/c$ si consideri la funzione $y = f(x) = \sin A\hat{D}O$ e se ne fissi il campo di studio con riferimento al problema. In particolare si interpreti geometricamente la condizione $x > ½$ che si ottiene da $y < 1$.

f) Si classifichi e si studi la funzione nel campo posto dal problema (comportamento agli estremi, crescere e decrescere, concavità)

g) Si completi lo studio determinando il valore dell'area compresa tra la curva e il suo asintoto orizzontale.



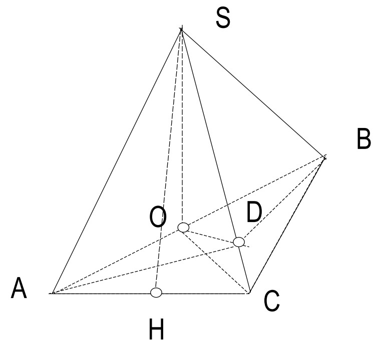
1) Poiché gli spigoli sono congruenti devono essere congruenti anche le proiezioni e pertanto $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$ cioè O è il centro della circonferenza passante per A, B e C. Ma poiché il triangolo ABC è rettangolo AB è un diametro e dunque O è il punto medio del segmento AB.

2) Poiché il punto O appartiene ad AB gli angoli richiesti sono quelli dei triangoli rettangoli congruenti $\overset{\Delta}{SOA}$, $\overset{\Delta}{SOC}$, $\overset{\Delta}{SOB}$ e pertanto $\cos S\hat{A}O = \frac{½\,\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{c}{2v}$

3) Poiché $\overset{\Delta}{ACS} \cong \overset{\Delta}{CSB}$ (III criterio) anche $\overset{\Delta}{ADS} \cong \overset{\Delta}{DSB}$ (I criterio) e ciò ci permette di affermare che $\overset{\Delta}{ADO} \cong \overset{\Delta}{BDO}$ oltre che $DB \perp SC$

4) Quanto visto al punto precedente ci consente di trovare $A\hat{D}B = 2\, A\hat{D}O$. Ma $\sin A\hat{D}O = \frac{AO}{AD}$

AO è noto e vale ½ *c* mentre AD può essere determinato osservando che AD SC = AC SH dove H è il piede della altezza del triangolo isoscele ACS.



Dunque: $AD = \frac{AC\ SH}{SC} = \frac{AC \sqrt{SC^2 - (½AC)^2}}{SC}$ con $AC = \frac{c}{\sqrt{2}}$ e pertanto

$$AD = \frac{\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{v^2 - \frac{c^2}{8}}}{b} = \frac{c}{4v}\sqrt{8v^2 - c^2}$$

Finalmente si ha: $\sin A\hat{D}O = \frac{AO}{AD} = \frac{2v}{\sqrt{8v^2 - c^2}}$ e $A\hat{D}B = 2 \arcsin \frac{2v}{\sqrt{8v^2 - c^2}}$

5) La funzione $y = \frac{2v}{\sqrt{8v^2 - c^2}}$, dopo aver posto x = v/c diventa $y = f(x) = \frac{2x}{\sqrt{8x^2 - 1}}$.

Ovviamente deve essere $x > 0$ (rapporto di due lunghezze) al variare della lunghezza relativa dello spigolo della piramide mentre il dominio della funzione ci porta a chiedere, per l'esistenza del denominatore $8x^2 > 1$ e cioè $x > \frac{1}{2\sqrt{2}}$

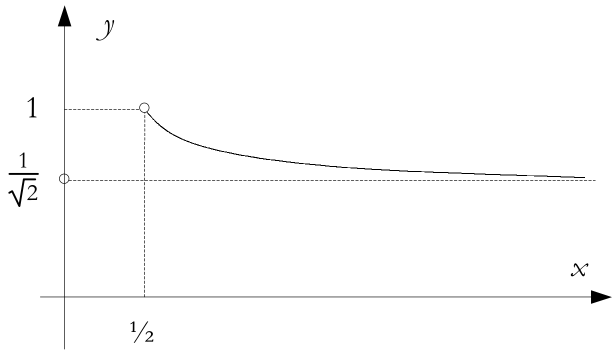
Osserviamo però che CO = AO = ½ c mentre lo spigolo CS = v è ipotenusa del triangolo COS e pertanto dovrà essere sempre v > ½ c ovvero x > ½ . Si arriva alla stessa conclusione osservando che y rappresenta il seno di un angolo e pertanto dovrà essere anche $y = \frac{2x}{\sqrt{8x^2 - 1}} < 1$ il che ci porta a risolvere la disequazione $2x < \sqrt{8x^2 - 1}$ che equivale a $4x^2 < 8x^2 - 1$ o anche x > ½ . Dunque il campo di studio è più ristretto del dominio e ciò equivale a chiedere che l'angolo diedro esista.

6) Lo studio di funzione è particolarmente semplice; si tratta di una funzione sempre positiva, irrazionale fratta con cds x> ½

Per x→ + ∞ si ha $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{8x^2-1}} \sim \frac{2x}{2\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ asintoto orizzontale (osserviamo che la funzione tende a tale valore da valori più grandi)

Per x→ ½ – si ha $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{8x^2-1}} \to 1$ (la funzione è continua e l'estremo è stato escluso solo per ragioni geometriche).

$$f'(x) = 2\frac{\sqrt{8x^2-1} - x\frac{1}{\sqrt{8x^2-1}}}{8x^2-1} = 2\frac{8x^2-1-8x^2}{(8x^2-1)^{3/2}} = -2(8x^2-1)^{-3/2}$$



La derivata prima è sempre negativa (funzione decrescente) e inoltre f '(½) = –2

$f''(x) = 3\,(8x^2-1)^{-5/2}\,(16\,x)$ la derivata seconda è sempre positiva (concavità verso l'alto).

Non occorrono altri elementi e si può tracciare il diagramma della funzione.

7) L'area richiesta corrisponde al calcolo dell'integrale definito della differenza tra la funzione e la retta $y = 1/\sqrt{2}$. Calcoliamo pertanto preventivamente

$$I = F(x) = \int \frac{2x}{\sqrt{8x^2-1}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{2}}dx = 1/8 \int (8x^2-1)^{-1/2}d(8x^2-1) - \frac{x}{\sqrt{2}} = ¼\,(8x^2-1)^{1/2} - ½\sqrt{2}\,x = ¼\left(\sqrt{8x^2-1} - 2\sqrt{2}x\right)$$

$F(½) = ¼\,(1 - \sqrt{2})$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} ¼\frac{8x^2-1-8x^2}{\sqrt{8x^2-1}+2\sqrt{2}x} = = \lim_{x\to+\infty} ¼\frac{-1}{4\sqrt{2}x + o(x)} = 0^-$$

L'area σ richiesta corrisponde al calcolo del $\lim_{t\to+\infty} (F(t) - F(1/2)) = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{4}\right)$

11 aprile 2005 4F PNI Studio di funzione (2 ore)

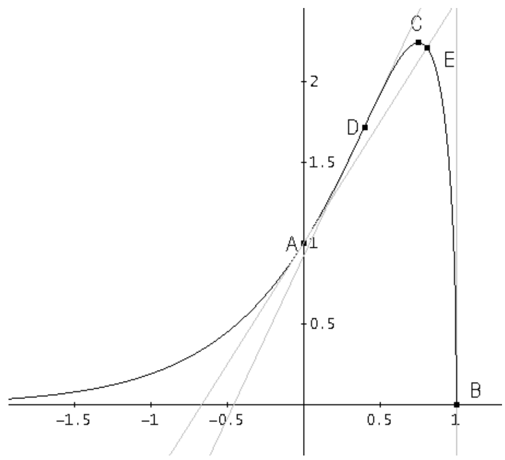
In un sistema di riferimento ortonormale xOy è assegnata la funzione $y = f(x) = \sqrt{1-x}\, e^{2x}$.

1) Classificare la funzione, individuare il dominio e, preso atto che si tratta di una funzione sempre positiva o nulla, individuare i due punti A e B di intersezione con gli assi y e x.
2) Discutere il comportamento per $x \to -\infty$ fornendo anche una breve giustificazione del risultato.
3) Calcolare la derivata prima e scriverla in forma fattorizzata
4) Studiare il crescere e decrescere della funzione individuando in particolare il punto di massimo relativo C e il punto di non derivabilità.
5) Calcolare la derivata seconda e scriverla in forma fattorizzata
6) Studiare la concavità della funzione calcolando in particolare le coordinate (in forma approssimata) del punto di flesso D e del coefficiente angolare m della tangente inflessionale t_D
7) Disegnare il diagramma γ in scala 1 = 2 cm
8) Scrivere l'equazione della retta tangente t_A
9) La retta t_A interseca γ oltre che in A in un punto E. Applicare il metodo delle tangenti per determinare la soluzione approssimata corrispondente al punto E. Per la determinazione utilizzare l'intervallo 0.7÷0.9 in cui la funzione corrispondente all'equazione è decrescente e concava verso il basso. Si richiede la determinazione con 4 cifre significative (bastano 3 iterazioni). Nel rispondere si prega di essere molto ordinati e di rendere comprensibile e controllabile il metodo usato spiegando la formula che si usa e compilando la tabella.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1	1	2	2	2	1	1	3	

soluzione sommaria

1) Funzione irrazionale trascendente continua che taglia gli assi in $A \equiv (0,1)$ e $B \equiv (1,0)$
2) Per $x \to -\infty$ si ha $f(x) \sim \sqrt{-x}\, e^{2x} = (\infty \cdot 0) = 0^+$ perché (come per tutte le funzioni potenza) si ha $(-x)^{-1/2} = o(e^{2x})$. L'asse x fa da asintoto orizzontale.
3) Si ottiene $\frac{1}{2} \frac{e^{2x}(3-4x)}{\sqrt{1-x}}$
4) si ha $f'(x) \geq 0$ per $x \leq \frac{3}{4}$ e si ha pertanto un massimo relativo in $C \equiv (3/4; \frac{1}{2} e^{3/2})$ con $\frac{1}{2} e^{3/2} \approx 2.24$. Inoltre in x = 1 si ha un punto a tangente verticale.
5) Si ottiene $f''(x) = \frac{e^{2x}(16x^2 - 24x + 7)}{4\sqrt{(1-x)^3}}$. Ricordarsi di tenere in evidenza la costante moltiplicativa. Convine derivare direttamente il rapporto ma si può derivare anche in altri modi
6) Si ha $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}(3 - \sqrt{2}) \approx 0.396$ con un punto di flesso in $D \approx (0.396, 1.717)$. Inoltre $m = f'(x_D) \approx 2.011$
7) Il diagramma è tracciato qui a lato



8) Per determinare t_A si calcola $f'(x_A) = 3/2$ e si ottiene $y = 3/2\, x + 1$
9) Si tratta di risolvere l'equazione $f(x) - (3/2\, x + 1) = 0$. Come si vede dal diagramma la funzione $F(x) = f(x) - (3/2\, x + 1)$ nell'intervallo 0.7÷0.9 risulta concava verso il basso (la derivata seconda ha il segno di $f''(x)$ perché la derivata seconda della funzione lineare è sempre 0)e decrescente (γ sta sopra la retta sino ad E. Dunque si può usare il metodo di Newton (tangenti) assumendo come seme x_0 il valore 0.9.
Il metodo delle tangenti si basa sulla iterazione: $x_{i+1} = x_i - F(x_i)/F'(x_i)$
Teniamo presente che $F'(x) = f'(x) - 3/2$. Si ha dunque:

x_i	$F(x_i)$	$F'(x_i)$	$x_i - F(x_i)/F'(x_i)$
0.9	-0.4369	-7.2392	0.8396
0.8396	-0.12215	-3.89885	0.80827
0.80827	-0.0074515	-2.84025	0.80565
0.80565	-0.0001094	-2.7647	0.80561

Ci si può arrestare perché non si ha variazione sulla quarta cifra di x.

16 maggio 2005 5F compito recupero: questionario

Svolgere 5 quesiti tra i 10 proposti.

1) Data una funzione continua $y = f(x)$, posto $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ e indicata con $\varphi(x)$ una generica primitiva come si dimostra che $\int_a^b f(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a)$? Citare i due teoremi che si utilizzano per la dimostrazione.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che $F'(x) = f(x)$ e poiche due funzioni con la stessa derivata differiscono a meno di una costante (corollario del teorema di Lagrange) si ha $\varphi(x) = F(x) + k$

Ma, per definizione di integrale definito, $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ e pertanto $\varphi(a) = k$. Allora:

$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = \varphi(b) - k = \varphi(b) - \varphi(a)$

2) Determinare la progressione aritmetica a_1, $a_2 = a_1 + q$, $a_3 = a_2 + q$, … tale che la somma dei suoi primi n termini sia sempre uguale al triplo del quadrato del numero di termini sommati.

Indicata con $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + (a_1 + q) + \ldots + (a_1 + (n-1)q) = n\,a_1 + q(1 + 2 + \ldots + n - 1) = n\,a_1 + q\,\tfrac{1}{2}\,n\,(n-1)$

Ma in base all'ipotesi $n\,a_1 + q\,\tfrac{1}{2}\,n\,(n-1) = 3n^2 \Leftrightarrow a_1 + q\,\tfrac{1}{2}\,(n-1) = 3n \Leftrightarrow n(1/2\,q - 3) + (a_1 - \tfrac{1}{2}\,q) = 0$

Questa relazione deve valere $\forall n$ e pertanto deve essere $1/2\,q - 3 = 0$ e $a_1 - \tfrac{1}{2}\,q = 0$ cioè $a_1 = 3$ e $q = 6$

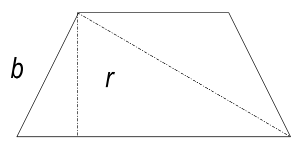
La progressione richiesta che, come si controlla immediatamente, gode della proprietà prevista è 3, 9, 15, 21, …

3) Dimostrare che $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi$

Per simmetria della funzione $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2} = = 2\lim_{t\to+\infty} \arctan x\Big|_0^t = 2\,\tfrac{1}{2}\,\pi = \pi$

4) Dato un trapezio isoscele il cui lato obliquo di lunghezza b forma un angolo α con la base maggiore e un angolo di 90° con la diagonale determinare il volume del solido che viene ottenuto da una rotazione completa intorno alla base maggiore.

Si ottiene una figura composta da un cilindro e due coni con lo stesso raggio r ed altezze pari rispettivamente a $b \sin\alpha$ e alla base minore. Poiche l'angolo con la diagonale è di 90° si ha che la base maggiore vale $\frac{b}{\cos\alpha}$ mentre la proiezione del lato obliquo è $b\cos\alpha$. Dunque la base minore è $\frac{b}{\cos\alpha} - 2\,b\cos\alpha$.



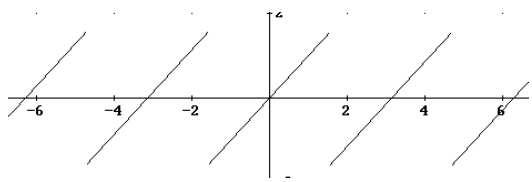
Il volume richiesto risulta dunque:

$v = \pi r^2\left(\frac{2}{3}\,b\cos\alpha + \frac{b}{\cos\alpha} - 2\,b\cos\alpha\right) = \pi b^2 \sin^2\alpha\left(\frac{b}{\cos\alpha} - \frac{4}{3}\,b\cos\alpha\right) = \pi b^3 \frac{\sin^2\alpha}{3\cos\alpha}\,(3 - 4\cos^2\alpha) = 1/3\,\pi\,b^3 \sin\alpha\,\tan\alpha\,(3 - 4\cos^2\alpha)$

5) Risolvere l'equazione $4\arctan(x^2 - 3x - 3) = \pi$ e quindi disegnare il diagramma di artan tan x precisando dove la funzione non è definita.

$\arctan(x^2 - 3x - 3) = \pi/4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 3 = \tan\pi/4 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$

La funzione è periodica di periodo π; non è definita per $x = \tfrac{1}{2}\,\pi + (2k + 1)\,\pi$ e presenta il classico diagramma a dente di sega



6) Determinare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice è di tipo 3X4 e pertanto il rango può essere al più pari a 3.

Isoliamo pertanto la sottomatrice 3X3 $A' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$ e calcoliamone il determinate.

$\det A' = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 10 & 0 \end{vmatrix} = (3\lambda + 1) - 10 = 3\lambda - 9 \neq 0$ per $\lambda \neq 3$.

Per $\lambda = 3$ il determinante si annulla e bisognerebbe verificare che si annullano anche quelli delle altre matrici 3×3 contenenti λ). Ciò si verifica e dunque il rango è 3 per $\lambda \neq 3$. Per $\lambda = 3$ si ottiene da A' la sottomatrice $A'' = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 10 & 0 \end{vmatrix}$

da cui si estrae $A''' = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ e poiché det A''' = –7 ciò è sufficiente ad affermare che per $\lambda = 3$ si ha r(A) = 2

7) Si tirano tre colpi in successione verso un bersaglio. Indicate con p_1, p_2, p_3 le probabilità di colpire il bersaglio al primo, secondo e terzo colpo si ha $p_1 = 0.3, p_1 = 0.6, p_3 = 0.8$. Indicare con $B_0, B_1, \ldots$ le probabilità di mandare 0, 1, … colpi a bersaglio. Determinare $p(B_0)$ e $p(B_1)$.

Se si indica con A_1 l'evento che corrisponde a p_1 e così via si ha (tenuto conto che gli eventi sono indipendenti)

$p(B_0) = p(\overline{A_1})\cdot p(\overline{A_2})\cdot p(\overline{A_3}) = (1 - p_1)\cdot (1 - p_2)\cdot (1 - p_3) = 0.7\cdot0.4\cdot0.2 = 0.056$

$p(B_1) = p(A_1)\cdot p(\overline{A_2})\cdot p(\overline{A_3}) + p(\overline{A_1})\cdot p(A_2)\cdot p(\overline{A_3}) + p(\overline{A_1})\cdot p(\overline{A_2})\cdot p(A_3) = p_1\cdot (1 - p_2)\cdot (1 - p_3) + (1 - p_1)\cdot p_2\cdot (1 - p_3) + (1 - p_1)\cdot (1 - p_2)\cdot p_3 = 0.3\cdot0.4\cdot0.2 = 0.332$

8) Si consideri la distribuzione gaussiana standardizzata $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-½\, x^2)$. Dimostrare che $\mu(|x|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Per definizione di valor medio, tenuto conto della simmetria della funzione standardizzata per cui f(|x|) = f(x) si ha: $\mu(|x|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \exp(-½\, x^2)\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x \exp(-½\, x^2)\, dx = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-½\, x^2)\, d(-½\, x^2) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^z\, dz = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{t\to+\infty} e^z \Big|_0^t = = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}(0 - 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

9) Scrivere la formula di Taylor nell'intorno di un punto $(a,f(a))$ per una funzione $y = f(x)$ che sia derivabile infinite volte. Utilizzarla per scomporre il polinomio $P(x) = 2x^5 + 3x^3 - 4x + 1$ nell'intorno di $x = -1$

$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \ldots$

P(–1) = –2 – 3 + 4 + 1 = 0 (il polinomio risulterà fattorizzabile)

Calcoliamo dunque le derivate successive del polinomio fino ad ottenere l'annullamento della derivata

$P'(x) = 10x^4 + 9x^2 - 4 \Rightarrow P'(-1) = 19 - 4 = 15$

$P''(x) = 40x^3 - 18x \Rightarrow P''(-1) = -40 + 18 = -22$

$P'''(x) = 120x^2 - 18 \Rightarrow P'''(-1) = 120 - 18 = 102$

$P^{IV}(x) = 240x \Rightarrow P^{IV}(-1) = -240$

$P^{V}(x) = 240 \Rightarrow P^{V}(-1) = 240$

Applichiamo la formula di Taylor e avremo:

$P(x) = 15(x+1) - 22/2\,(x+1)^2 + 102/6\,(x+1)^3 - 240/24\,(x+1)^4 + 240/120\,(x+1)^5 = (x+1)[(15 - 11(x+1) + 17(x+1)^2 - 10(x+1)^3 + 2(x+1)^4]$

10) Si consideri la funzione $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^2$ dove $x_1, x_2, \dots x_n$ sono delle costanti. dimostrare che f(x) presenta un minimo per $x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ e interpretare il risultato trovato.

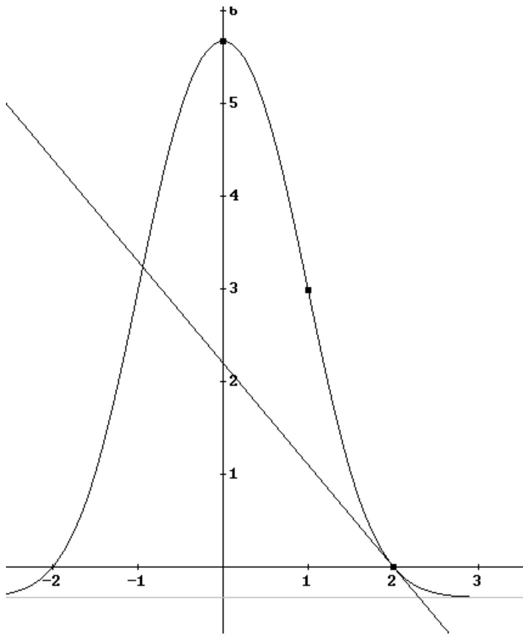
$f'(x) = 2\sum_{i=1}^{n}(x - x_i) = 2(nx - \sum_{i=1}^{n} x_i) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ dunque la funzione è decrescente e poi crescente e presenta un minimo per

$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ Il valore trovato è il valor medio degli x_i e dunque il teorema afferma che la funzione che somma gli scarti quadratici è minima quando essi vengono calcolati rispetto al valor medio. Si tratta di una ben nota proprietà utilizzata in statistica e nelle interpolazioni.

16 maggio 2005 4F recupero studi di funzione

Si consideri la funzione γ: $y = f(x) = 3(2 + x^2)\exp(-x^2) - 18e^{-4}$.

1) Classificarla, verificare se presenta simmetrie evidenti ed individuare il campo di studio.
2) Determinarne le intersezioni con gli assi A e B e il segno.
3) Studiare il comportamento agli estremi del c.d.s.
4) Calcolare la derivata prima ed utilizzarla per lo studio del crescere e decresce. Individuando e classificando gli eventuali punti a tangente orizzontale
5) Calcolare la derivata seconda ed utilizzarla per studiare la concavità. Indicare con C il punto di flesso. E' richiesta la inclinazione della tangente inflessionale.
6) Disegnare il diagramma in scala 1 = 2 cm
7) Scrivere l'equazione della retta tangente passante per B
8) Utilizzare il metodo delle tangenti per determinare l'interesezione D tra t_B e γ con almeno 3 cifre significative. Scrivere la funzione F(x) che si utilizza e applicare il metodo delle tangenti nell'intervallo (–3/2, –1/2).



1) Funzione simmetrica rispetto all'asse y continua e derivabile con campo di studio [0,∞]
2) $A \equiv (0, 6 - 18\,e^{-4}) \approx (6, 5.67)$; $B \equiv (2,0)$
3) asintoto orizzontale $y = -18e^{-4} \approx -0.330$
4) $y' = -6x\exp(-x^2)(x^2 + 1)$ punto di massimo in x = 0 (punto A)
5) $y'' = 6\exp(-x^2)(2x^4 - x^2 + 1)$ punto di flesso in $C \equiv (1, 9(1/e - 2/e^4)) \approx (1, 2.981)$ la tangente inflessionale ha inclinazione $m \approx -4.41$
6) vedi figura
7) la tangente t_B ha equazione: $y = -60e^{-4}(x - 2) \approx -1.099(x - 2)$
8) La funzione è data dalla differenza tra γ e la retta tangente e il punto di intersezione è $x \approx -0.9427$

16 maggio 2005 4F recupero limiti

I seguenti limiti sono forniti senza indicazione del fatto che si tratti o meno di forme di indecisione o che il limite esista o meno. Calcolare il limite (se esiste) e in caso contrario spiegare perché non esiste. E' ammesso l'uso delle tecniche basate sui simboli di Landau o, ~ e di scritture improprie quali $(e^{+\infty}) = +\infty$ etc.

$\boxed{1a}\ \lim\limits_{x\to 0} 2^{1/|x \sin(1/x)|}$ $\boxed{1b}\ \lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[5]{-x^5 + x^2 - 1}$ $\boxed{1c}\ \lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[2]{-x^5 + x^2 - 1}$

1a) $(2^{+\infty}) = +\infty$ $|x\sin(1/x)| \to 0^+$ per il teorema del confronto

1b) $f(x) \sim \sqrt[5]{-x^5} \to \sqrt[5]{+\infty} = +\infty$

1c) $f(x) \sim \sqrt[2]{-x^5} \to \sqrt[2]{+\infty} = +\infty$

$\boxed{2a}\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 - 3x + 1} - \sqrt{2}x\right)$ $\boxed{2b}\ \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 1} + 3x\right)$

2a) $(+\infty - \infty)$ si razionalizza e si arriva a $\dfrac{-3x + 1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \sqrt{2}x} \sim \dfrac{-3}{2\sqrt{2}}$

2b) $(+\infty - \infty)$ si razionalizza e si arriva a $\dfrac{-8x^2 + 3x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} - 3x} \sim \dfrac{-8x^2}{-2x} \to -\infty$

$\boxed{3}\ \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^4 - 9x^2 + 4x + 12}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8}$

3) $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ il numeratore e il denominatore si scompongono e si ha $f(x) = \dfrac{(x-2)^2(x^2 + 4x + 3)}{(x-2)^3(x-1)} = \dfrac{(x^2 + 4x + 3)}{(x-2)\,(x-1)} \to \left(\dfrac{15}{1\cdot 0^-}\right) = -\infty$

$\boxed{4}\ \lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sqrt{2}\sin(\pi/2 - x) - 1}{\tan x/2 - \sqrt{2} + 1}$ conviene portare in x la tan (x/2) attraverso le formule di bisezione

4) conviene esprimere tan(1/2 x) in funzione di x e poi portarsi nell'intorno dello 0. Esercizio istruttivo e complesso

$\boxed{5}\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln^2(2x - 1)}{(2^x - 2)(4^{3x} - 64)}$ può essere utile ricordare che nell'intorno dello 0 si ha $e^x \sim 1 + x$ e che $a^x = e^{x \ln a}$

5) limite $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ $\ln(2x - 1) = \ln(1 + (2x - 2)) \sim (2x - 2)$

$\boxed{6}$ Calcolare prendendo il ln del limite $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 + 2}{2x^2 - 3}\right)^{(3x^2 - 2x + 1)}$

6) limite (1^∞) fare la divisione della frazione e scriverla come 1 + g(x) e utilizzare poi le asintoticità del logaritmo

$\boxed{7}$ Con strumenti di analisi che richiedono l'uso delle derivate (teorema di de l'Hopital) si dimostra che per $x \to +\infty$ si ha $\forall \alpha, \alpha > 0$ che $\ln(x) = o(x^\alpha)$. Tenendo conto di ciò calcolare $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2\ln^2 x + 5x}{\sqrt{x - 3}} - 5\sqrt{x - 3}\right)$

7) $\left(\dfrac{2\ln^2 x + 5x}{\sqrt{x - 3}} - 5\sqrt{x - 3}\right) = \left(\dfrac{2\ln^2 x}{\sqrt{x - 3}} + \dfrac{5x}{\sqrt{x - 3}} - 5\sqrt{x - 3}\right) \sim o(1) + \dfrac{5x - 5x + 15}{\sqrt{x - 3}} \to 0^+$

1a		1b		1c		2a		2b		3		4		5		6		7	

20/5/2005 5F PNI compito 2 ore problema esame

Il testo seguente corrisponde ad una versione modificata (solo nella forma) del testo ministeriale della sessione suppletiva 2000/2001 PNI. La forma è stata modificata per esplicitare i criteri di svolgimento (ciò che è atteso in sede di correzione). E' richiesto lo svolgimento completo di uno e uno solo dei due problemi proposti. Attenzione: il compito è concettualmente semplice e il punteggio si gioca sulla completezza, sulla correttezza, sull'ordine e sulla precisione espressiva.

Problema 1

Le misure *a, b, c* di un triangolo ABC sono in progressione aritmetica di ragione *k*.

1) Scrivere l'espressione che consente, in generale, di determinare il raggio *r* della circonferenza inscritta e dare una breve motivazione della formula utilizzata.
2) Applicarla al caso in esame assumendo come variabili *b* e *k*. Specificare il campo di variabilità su *k* fissato *b*.
3) Determinare il valore di *k* per il quale *r* è massimo. Individuare le caratteristiche di tale triangolo.
4) Si fissi nel piano del triangolo un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, monometrici e, per il valore di *k* determinato al punto precedente, si scrivano le coordinate dei vertici A, B, C, del centro delle circonferenze inscritta e circoscritta e le equazioni in forma normale delle due circonferenze $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ inscritta e circoscritta.
5) Si calcoli (motivando) il rapporto tra i volumi delle due sfere che ammettono le circonferenze precedenti come sezioni diametrali.

1) Un qualsiasi poligono che sia circoscrivibile ad una circonferenza si scompone in n triangoli aventi come base i singoli lati e come altezza il raggio r. Dunque $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} l_i r = \frac{1}{2} r \sum_{i=1}^{n} l_i = p\, r$
2) Indichiamo con a, b, c le misure dei tre lati del triangolo messi in ordine crescente (cioò non corrisponde ad una perdita di generalità). Se indichiamo con k la ragione dovrà essere a = b – k e c = b + k con le ulteriori condizioni: $k \geq 0$ e $b - k + b > b + k$ (disuguaglianza triangolare) ovvero $0 \leq k < 1/2\, b$.
   Per determinare σ possiamo utilizzare o la formula di Erone (sono noti i lati e $\sigma = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}$) oppure determinare l'altezza attraverso il teorema del coseno. Le due procedure sono del tutto equivalenti (visto che la formula di Erone si dimostra tramite il teorema di Pitagora generalizzato, versione non trigonometrica del teorema di Carnot).
   $p = \frac{1}{2}(a + b + c) = 3/2\, b$ $\quad p - a = 3/2\, b - (b - k) = \frac{1}{2}(b + 2k)$
   $p - b = 3/2\, b - b = \frac{1}{2} b$ $\quad p - c = 3/2\, b - (b + k) = \frac{1}{2}(b - 2k)$
   $r = \frac{\sigma}{p} = \frac{\sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{3/2\, b\ \frac{1}{2}(b+2k)\ \frac{1}{2} b\ \frac{1}{2}(b-2k)}}{3/2\, b} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{b^2 - 4k^2}$ con la limitazione di origine geometrica $0 \leq k < 1/2\, b$
3) Non è neanche necessario derivare trattandosi della radice di una parabola con la concavità verso il basso che presenta dunque il massimo nel vertice cioè per k = 0. In questo caso il triangolo si riduce ad un triangolo equilatero di raggio $r = \frac{1}{2\sqrt{3}} b$.
4) Il modo più conveniente per collocare un triangolo equilatero di lato b in un sistema ortonormale xOy consiste nel collocare un lato lungo l'asse x ponendo il terzo vertice sull'asse y. Inoltre si può fissare l'unità di misura ponendi b = 1. Dunque il triangolo presenta i vertici $A \equiv (-\frac{1}{2}, 0)$ $B \equiv (\frac{1}{2}, 0)$ $C \equiv (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$. L'ordinata di C si trova osservando che l'altezza e $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Per trovare il centro G delle due circonferenze osserviamo preliminarmente che essi coincidono (come in ogni poligono regolare) e poiche il baricentro divide la mediana in rapporto 2:1 si ha $y_G = 1/3 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ (si può anche dire che è pari al raggio) mentre il raggio è già stato trovato in precedenza.
   $\mathcal{C}_1 : x^2 + (y - \frac{1}{2\sqrt{3}})^2 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} y = 0$

Per trovare r_2 osserviamo che $r_2 = y_C - y_G = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e dunque $\mathcal{C}_2 : x^2 + (y - \frac{1}{2\sqrt{3}})^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} y - \frac{1}{4} = 0$

5) Poiché $r_1/r_2 = ½$ e poiché il volume della sfera è proporzionale a r^3 si avrà $V_1/V_2 = 1/8$

Nota di correzione: nella ipotesi in cui si voglia derivare:

$r' = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4k^2}}(-8k)$. Si ha $r' \geq 0 \Leftrightarrow k \leq 0$ e dunque abbiamo a che fare con una funzione decrescente e continua (nel campo di studio) che presenta un massimo assoluto per k = 0.

Curiosità: se si assume come lato di partenza il lato a, b = a + k, c = a + 2k, senza stare a rifare tutti i conti si arriva a

$r = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{b^2 - 4k^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{(a+k)^2 - 4k^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + 2ak - 3k^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{(a+3k)(a-k)}$.

In questo caso abbiamo una parabola concava verso il basso che taglia l'asse k in a e – 1/3 a ed dunque ha il vertice in k = 1/3 a. Se k = 1/3 a gli altri lati valgono 4/3 a e 5/3 a. Si ottiene allora una terna pitagorica e il triangolo risulta rettangolo di cateti a e 4/3 a ed ipotenusa 5/3 a.

In quel caso $r' = \frac{2/3\ a^2}{2a} = 1/3\ a$ che come si nota è maggiore di $\frac{1}{2\sqrt{3}} a = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} a \approx 0.866\ r'$ valore precedentemente trovato.

Ho provato a lavorarci sopra ma per ora non ne sono venuto a capo. Il ragionamento fila; non mi pare che ci siano errori. Vediamo se qualcuno di voi ne viene a capo.

Problema 2

Una industria commercializza un suo prodotto confezionandolo in lattine realizzate utilizzando fogli di lamierino sottile. Ciascuna lattina, di assegnata capacità $\mathcal{V}$ ha la forma di un cilindro circolare retto. Trascurando lo spessore il candidato determini:

1) le dimensioni della lattina per la quale occorre la minima quantità di materiale per realizzarla. Si indichino con *r* il raggio di base e con *h* l'altezza e si tenga presente che la capacità è assegnata.
2) Successivamente posto $\mathcal{V}$ = 2 decilitri, se ne esplicitino le misure specificando l'unità utilizzata per il caso di cui al punto precedente. I valori vanno espressi in forma simbolica e poi approssimati alla III cifra decimale.
3) Dare la definizione di sezione aurea di un segmento e determinare il rapporto tra la sezione aurea e il segmento stesso.
4) Sempre nella ipotesi che sia $\mathcal{V}$ = 2 decilitri, se ne esplicitino le misure nel caso in cui il diametro della base sia sezione aurea della altezza.
5) Si spieghi come mai il lato del decagono regolare è la sezione aurea del raggio della circonferenza circoscritta.

1) Poiché lo spessore è trascurabile il minimo di materiale utilizzato si ha quando la superficie totale è minima. Per questa ragione calcoliamo $\sigma_t = \sigma_l + \sigma_b = 2\pi rh + 2\pi r^2$ con le condizioni r > 0 e h > 0. Ma poiché $\mathcal{V}$ è fissato sarà $\pi r^2 h = \mathcal{V}$ e dunque $h = \frac{\mathcal{V}}{\pi r^2}$.

   Pertanto la funzione da minimizzare è $\sigma_t = 2\pi r \frac{\mathcal{V}}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2\mathcal{V}}{r} + 2\pi r^2$ con la condizione r > 0.

   $\sigma'_t = -\frac{2\mathcal{V}}{r^2} + 4\pi r = 2\frac{-\mathcal{V} + 2\pi r^3}{r^2}$

   Si ha $\sigma'_t \geq 0 \Leftrightarrow r \geq \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}}{2\pi}}$ abbiamo dunque una funzione continua che presenta un minimo relativo per $r = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}}{2\pi}}$.

   Tale minimo relativo è assoluto per l'assenza di altri punti critici all'interno del campo di studio.

   Il corrispondente valore di h è $\frac{\mathcal{V}}{\pi r^2} = \frac{\mathcal{V}}{\pi\, \mathcal{V}^{2/3}/(2\pi)^{2/3}} = \sqrt[3]{\frac{4\mathcal{V}}{\pi}} = 2\ r$

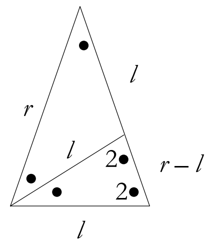
   Si tratta dunque del cilindro equilatero e il valore di $\sigma_t = 2\pi r\ 2r + 2\pi r^2 = 6\ \pi\ r^2 = 6\ \pi \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}^2}{4\pi^2}} = 3\sqrt[3]{2\mathcal{V}^2\pi}$

2) I valori di r, h e σ_t sono già stati determinati in forma simbolica; i corrispondenti valori numerici si ottengono dopo aver osservato che 2 dl = 0.2 dm^3 = 200 cm^3. Calcoleremo i valori richiesti in cm e cm^2. r = $\sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{200}{2\pi}} \approx 3.169$ cm h $\approx$ 6.338 cm e $\sigma_t \approx 189.3$ cm^2

3) Dato un segmento r si chiama sezione aurea la porzione x del segmento che è media proporzionale tra il segmento e la parte rimanente e cioè r : x = x : (r – x). Risolvendo la proporzione (con 0<x<r) si ha $x^2 + rx - r^2 = 0$ che risolta porta all'unica soluzione accettabile x = $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ r

4) Deve essere 2r = $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ h e cioè r/h = $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. D'altra parte r/h (dato il problema) è $\frac{\pi r^3}{\mathcal{V}}$ e pertanto r = $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{4\pi}} \approx$ 2.700 cm mentre h = $\frac{4r}{\sqrt{5}-1} \approx 8.74$ cm

5) Il lato del decagono regolare forma con il raggio un triangolo isoscele di angolo al centro di 36° ed angoli alla base pari a ½ (180 – 36) = 72°. Pertanto se si traccia la bisettrice dell'angolo alla base si viene nuovamente a formare un triangolo isoscele dello stesso tipo (simile). La situazione risulta quella rappresentata in figura: e pertanto si ha (sfruttando la similitudine)



(r – l) : l = l : r e cioè la proporzione aurea; dunque il lato *l* è la sezione aurea del raggio.

30 settembre 2005 5F PNI Integrali indefiniti

1) Calcolare almeno due dei seguenti tre integrali immediati:

a) $\int \sin(2-3x)dx$

b) $\int \sqrt[5]{(3+4x)^2}dx$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$

a) Posto $2 - 3x = z$ si ha $-3dx = dz$ e pertanto $I = -1/3 \int \sin z\, dz = 1/3 \cos(2-3x) + k$

b) Posto $3 + 4x = z$ si ha $4\, dx = dz$ e pertanto $I = ¼ \int (3+4x)^{2/5}dx = ¼ \frac{(3+4x)^{7/5}}{7/5} = \frac{5}{28}\sqrt[5]{(3+4x)^7} + k$

c) Bisogna ricondursi all'arcoseno e pertanto, dopo aver evidenziato il 3 si ha:

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{1-2/3\, x^2}}$ dopo aver posto $\sqrt{\frac{2}{3}}x = z$ si ha $\sqrt{\frac{2}{3}}dx = dz$

pertanto $I = \int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}dz}{\sqrt{3}\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}x + k$

Nota di correzione: consiglio, anche negli integrali immediati, di esplicitare la sostituzione, visti i numerosi errori legati a trascuratezze riferite alle costanti additive.

2) Calcolare il seguente integrale immediato: $\int (\sin^3x - \sin x)\, dx$

$I = \int \sin x(\sin^2x - 1)\, dx = -\int \sin x \cos^2x\, dx = \int z^2\, dz = 1/3 \cos^3x + k$

Nota di correzione: era inutile spezzarlo in due

3) Calcolare il seguente integrale immediato $\int \frac{x+1}{3x^2+6x+4}dx$

A meno di una costante moltiplicativa (6) il numeratore è la derivata del denominatore pertanto

$I = 1/6 \int \frac{dz}{z} = 1/6 \ln|3x^2 + 6x + 4| + k$. Il valore assoluto è inutile perché il trinomio considerato è sempre positivo ($\Delta<0$)

4) Attraverso l'aggiunta di opportune costanti integrare $\int \tan^2x dx$

$I = \int (\tan^2x + 1 - 1)\, dx = \int d(\tan x) - \int dx = \tan x - x + k$

Nota di correzione: prestare attenzione all'uso delle paresentesi

5) Integrare per sostituzione $\int x^2\sqrt{3x-1}\, dx$; sostituzione consigliata $z = \sqrt{3x-1}$

$z^2 = 3x - 1 \Rightarrow x = \frac{z^2+1}{3} \Rightarrow dx = 2/3\ z\, dz$

$I = \int 1/9\, (z^2 + 1)^2\, z\, 2/3\, z\, dz = 2/27 \int z^2(z^4 + 2z^2 + 1)dz = 2/27 \int (z^6 + 2z^4 + z^2)dz = 2/27\, [1/7\, z^7 + 2/5\, z^5 + 1/3\, z^3] + k$

Basta ora sostituire il valore di z.

6) Dopo aver osservato che una delle funzioni goniometriche presenti è di grado dispari integrare $\int \sin^2x \cos^3x\, dx$

$I = \int \sin^2x \cos^2x\, d(\sin x) = \int (\sin^2x - \sin^4x)\, d(\sin x) = 1/3 \sin^3x - 1/5 \sin^5x + k$

7) Integrare la funzione razionale fratta $\int \frac{5x-2}{4x^2-12x+9}dx$

Osservato che il numeratore non è riconducibile alla derivata del denominatore e che esso è un quadrato perfetto $(2x-3)^2$ si esegue la scomposizione della frazione

$\frac{5x-2}{(2x-3)^2} = \frac{A}{(2x-3)^2} + \frac{B}{(2x-3)}$ da cui per il principio di identità dei polinomi si ha:

$A + B(2x - 3) = 5x - 2$ che equivale a $2B = 5 \wedge A - 3B = -2$ e quindi $B = 5/2$ e $A = -2 + 15/2 = 11/2$

Dunque I = 11/2 $\int \frac{dx}{(2x-3)^2}$ + 5/2 $\int \frac{dx}{(2x-3)}$ = –11/4 $\frac{1}{2x-3}$ + 5/4 ln |2x – 3| + k

Nota di correzione: inutile mettere in evidenza il 4; presenza di numerosi errori nell'integrare il primo dei due integrali finali (è una funzione potenza)

8) Calcolare $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$. Il calcolo di questo integrale, da eseguire per parti, richiede il calcolo ulteriore dei seguenti integrali:

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx$ integrale che si calcola immediatamente con una semplice sostituzione

b) $\int \frac{x}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$ integrale che si calcola facendo riferimento al precedente tramite la sostituzione $x - x^2 = z$ dopo aver fatto comparire al numeratore z' tramite somma e sottrazione.

I = $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$ = x arcsin $\sqrt{x}$ – $\int x \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ = x arcsin $\sqrt{x}$ – ½ $\int \frac{x}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$ = x arcsin $\sqrt{x}$ – ½ I_b

Per calcolare I_b eseguiamo la sostituzione $x - x^2 = z$ la cui derivata è 1 – 2x e facciamo comparire la derivata:

I_b = – ½ $\int \frac{-2x+1-1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$ = –1/2 $\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$ + ½ I_a = $-\sqrt{x-x^2}$ + ½ I_a

$I_a = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx$ si calcola con la sostituzione $\sqrt{x} = z$ da cui $\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dz$ che porta a :

½ $I_a = \int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$ = arcsin z = arcsin$\sqrt{x}$ + k

Si ha dunque unendo tutti i risultati precedenti che:

I = x arcsin $\sqrt{x}$ – ½ I_b = x arcsin $\sqrt{x}$ – ½ [$-\sqrt{x-x^2}$ + ½ I_a] = x arcsin $\sqrt{x}$ + ½ $\sqrt{x-x^2}$ – ½ arcsin$\sqrt{x}$ + k = arcsin$\sqrt{x}$ (x – ½) + ½ $\sqrt{x-x^2}$ + k

Nota di correzione: se in I_a si usa $\sqrt{x-1}$ = z si arriva ad un integrale equivalente. Il calcolo di I_a e I_b va eseguito dopo aver evidenziato a cosa servono e cioè dopo aver integrato per parti la funzione iniziale.

L'intero integrale può essere calcolato anche con la sostituzione arcsin$\sqrt{x}$ = z che consente di ricondursi alle ordinarie funzioni goniometriche:

$\sqrt{x}$ = sin z, x = sin²z, dx = 2 sin z cos z dz

I = $\int z\,2 \sin z \cos z\,dz = \int z \sin 2z\,dz$ e questo è un semplice integrale da eseguire per parti.

1	2	3	4	5	6	7	8a	8b	8compl	
2	2	1.5	1.5	2	1.5	2.5	2	3	7	

5F PNI 26/10/05: problema tipo esame (funzioni, aree, calcolo differenziale e integrale)

(Pni sessione suppletiva 2002 modificato)

Nel piano ortonormale xOy è assegnata la funzione γ: $y = f(x) = \dfrac{a + b \ln x}{x}$ con a e b reali non nulli.

a) Si trovino i valori di a e b per cui $A\equiv(e^{-1},0)\in\gamma$ e $B\equiv(e^2,3e^{-2})\in\gamma$

b) Si studi la funzione così determinata e si disegni γ. Vengono richiesti lo studio del segno, il comportamento agli estremi del dominio, crescere e decresce, concavità e flessi.

c) Si determini l'equazione della curva γ' simmetrica di γ rispetto alla retta r: $y = 1$

d) Si determini l'area σ della regione compresa tra γ e γ' nell'intervallo $1 \le x \le 2$

e) Si dimostri che nella ipotesi in cui un'area sottesa da una funzione venga approssimata mediante n trapezi di altezza $\Delta x = \dfrac{b - a}{n}$ se si indica la successione dei punti che definiscono gli intervalli con $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $\dots x_n = n$ si ha:

$$\sigma_n = \Delta x \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \right)$$

Si utilizzi la formula scegliendo n = 4 e si confronti il risultato con quello di σ precedentemente trovata

f) Si disegnino, per i valori di a e b precedentemente trovati i diagrammi γ_1: $y = f(|x|)$ e γ_2: $y = |f(x)|$

NB: In sostituzione di qualche punto intermedio delle richieste rispondere a uno o due dei seguenti quesiti (se si usano dei teoremi citarli).

$\boxed{q1}$ Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4}$

$\boxed{q2}$ Verificare che la funzione $y = f(x) = \dfrac{1 - e^{1-x}}{1 + e^{1-x}}$ è invertibile e detta $x = g(y)$ la funzione inversa calcolare $g'(0)$

$\boxed{q3}$ Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $y = f(x) = \ln x$ nell'intervallo $]1,x[$ dimostrare che $1 - \dfrac{1}{x} < \ln x < x - 1$ e dare una interpretazione grafica del risultato

problema

a) parametri	b) studio funzione	c) simmetria	d) integrale definito	e) trapezi	f) diagrammi
0.5	4.5	0.5	1.5	1.5	1.5

questionario
2 punti ciascuno

5F PNI 1 febbraio 2006 problema tipo esame (s.o. 92 pni modificato)

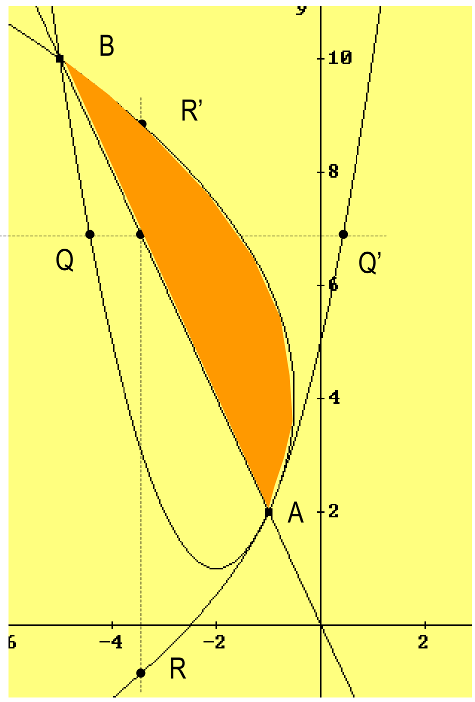
1. Determinare le equazioni delle parabole $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ con le seguenti caratteristiche: A≡(–1,2)∈ $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$; $\mathcal{P}_1$ ha asse verticale e vertice V_1≡(–2,1); $\mathcal{P}_2$ ha asse orizzontale, ha vertice V_2 di ordinata 4 e inoltre indicata con x = g(y) l'equazione della parabola si ha g'(2) = ½.
2. Le due parabole risultano tangenti in A e si intersecano in un secondo punto B. Dopo aver trovato l'equazione risolvente determinare le coordinate di B e costruire la figura.
3. Indicato con P (di ascissa k) un generico punto del segmento AB si traccino per esso le due rette parallele agli assi e si indichino con Q, Q' e R, R' i punti di intersezione della parallela all'asse x con $\mathcal{P}_1$ e della parallela all'asse y con $\mathcal{P}_2$. Determinare la funzione γ: $y = f(k) = \dfrac{8(x_P + y_P)}{\overline{QQ'}\ \overline{RR'}}$
4. Tracciare il diagramma γ ed evidenziarne il tratto corrispondente ai limiti del problema.
5. Determinare l'area σ_1 compresa tra γ e il suo asintoto orizzontale nei limiti posti dal problema
6. Determinare l'area σ_2 compresa tra la parabola $\mathcal{P}_2$ e il segmento AB.

Valutazione in quindicesimi secondo il seguente schema

base	parabole	intersezione	funzione	diagramma	I area	II area
3	3	2.5	2.5	1.5	1.5	1

1. Posto $\mathcal{P}_1$: $y = ax^2 + bx + c$ si ha:
   A≡(–1,2)∈ $\mathcal{P}_1 \Rightarrow 2 = a - b + c$ $\qquad x_{V1} = -2 \Rightarrow -b/2a = -2$ $\qquad V_1$≡(–2,1)∈ $\mathcal{P}_1 \Rightarrow 1 = 4a - 2b + c$
   Da cui si ottiene a = 1, b = 4, c = 5
   Posto $\mathcal{P}_2$: $x = my^2 + ny + p$ si ha:
   A≡(–1,2)∈ $\mathcal{P}_2 \Rightarrow -1 = 4m + 2n + p$ $\qquad x'(2) = 2m\cdot 2 + n = ½$ $\qquad y_{V2} = 4 \Rightarrow -n/2m = 4$
   da cui si ottiene m = –1/8, n = 1, p = – 5/2
   Dunque le due curve hanno equazioni:
   $\mathcal{P}_1$: $y = x^2 + 4x + 5$ e $\mathcal{P}_2$: $x = -1/8y^2 + y - 5/2$
   Nota di correzione: la relazione che si usa va citata esplicitamente; le condizioni applicate vanno espresse simbolicamente; la soluzione deve essere ordinata e razionale; non è opportuno usare gli stessi nomi per i parametri delle due parabole.
2. Per trovare l'equazione risolvente si mettono a sistema le due equazioni e si ottiene:
   $y = (-y^2/8 + y - 5/2)^2 + 4(-y^2/8 + y - 5/2) + 5$ da cui si ottiene l'equazione risolvente:
   $y^4 - 16y^3 + 72y^2 - 128\,y + 80 = 0$ Per verificare la tangenza tra le due curve basta dividere ripetutamente, usando l'algoritmo di Ruffini, per la radice nota y = 2 (che ha molteplicità ≥ 2)

	1	–16	72	–128	80
2		2	–28	88	80
	1	–14	44	–40	0
2		2	–24	40	
	1	–12	20	0	
2		2	–20		
	1	–10	0		



   Si ottiene così $(y-2)^3(y-10) = 0$ e dunque abbiamo una tangenza con radice tripla in y = 2 e una intersezione in y = 10.
   Poiché $y_B = x^2 + 4x + 5 = 25 - 20 + 5 = 10$ si ha B≡(–5,10)
   La ragione per cui in A si ha una radice tripla è legata al fatto che in tale punto le due curve si attraversano.
   Nota di correzione: prendere nota dei commenti alla procedura e di come si parla della fattorizzazione della equazione risolvente.
3. La determinazione delle corde QQ' e RR' richiede prioritariamente di determinare le coordinate di P e ciò richiede l'equazione della retta r_{AB}.
   $r_{AB}: y - 2 = \dfrac{8}{-4}(x + 1)$ da cui $y = -2x$
   Dunque il punto P ha coordinate P≡(k, – 2k) con k∈[–5,–1]
   La determinazione delle due corde richieste si fa mettendo a sistema le equazioni delle due parabole con le due rette r_k e q_k di equazioni

rispettivamente $x = k$ e $y = -2k$

Si ottiene:

$\overline{QQ'} = |\Delta x|$ dove con x si indicano le soluzioni dell'equazione

$-2k = x^2 + 4x + 5 \Rightarrow x^2 + 4x + 5 + 2k = 0$

Si calcola il discriminante $\Delta/4 = 4 - (5 + 2k) = -1 - 2k \geq 0 \Leftrightarrow k \leq -½$ condizione ampiamente verificata nel dominio del problema e che corrisponde a richiedere che $y_P \geq y_{\wp}$ (analogamente per l'altra parabola)

Dunque $\overline{QQ'} = \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{-1-2k}$

Analogamente si calcola $\overline{RR'}$ e si ottiene $4\sqrt{-1-2k}$

Dunque $y = f(k) = \dfrac{8(x_P + y_P)}{\overline{QQ'}\ \overline{RR'}} = \dfrac{8(-k)}{8|-1-2k|} = \dfrac{k}{1+2k}$ per $k \leq -½$

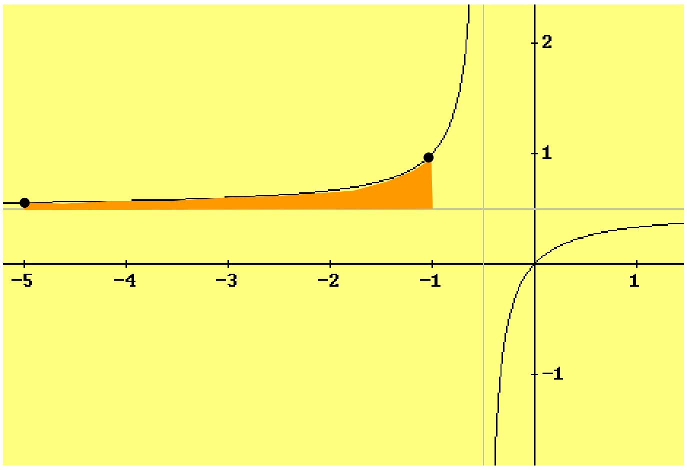
Per $k > ½$ verrebbe la stessa funzione cambiata di segno

Nota di correzione: è la parte meno soddisfacente sia sul piano formale sia sul piano sostanziale: mancanza delle limitazioni, pasticci nel determinare la misura della corde, mancate semplificazioni, …

4. Viene eseguito lo studio della funzione $y = \dfrac{k}{1+2k}$ prescindendo dalle limitazioni poste dal problema visto che il tratto di nostro interesse è un sottoinsieme del diagramma di questa funzione.

Si tratta di una funzione omografica (iperbole riferita agli asintoti e traslata)

Gli asintoti si hanno per $k = -½$ e per $y = ½$ e dunque il centro di simmetria è $C \equiv (-½, ½)$. La curva passa per l'origine e per i punti $(-1,1)$ e $(-5, 5/9)$ e il diagramma è quello qui sotto rappresentato.



Note di correzione: fornire gli elementi essenziali per il tracciamento e i necessari riferimenti generali (funzioni orografiche).

5. Per determinare σ_1 si tratta di calcolare l'integrale della differenza tra l'ordinata della funzione e quella dell'asintoto:

$$\sigma_1 = \int_{-5}^{-1}\left(\frac{k}{1+2k} - ½\right)dk = \int_{-5}^{-1}\frac{2k - 1 - 2k}{2 + 4k}dk =$$

$$-¼ \ln|2 + 4k| \Big|_{-5}^{-1} = -¼ (\ln 2 - \ln 18) = ¼ \ln 9 \approx 0.549$$

Nota di correzione: conto esatto sino alla fine e poi valore approssimato

6. La determinazione di σ_2 richiede di integrare assumendo come variabile y anziché x.

$$\sigma_2 = \int_2^{10}(x_{\wp} - x_r)dy = \int_2^{10}(-1/8y^2 + y - 5/2 + 1/2\,y)dy = \int_2^{10}(-1/8y^2 + 3/2\,y - 5/2)dy = ½\int_2^{10}(-1/4y^2 + 3y - 5)dy$$

$$= ½\left(-1/12\,y^3 + 3/2\,y^2 - 5y\right)\Big|_2^{10} = ½[-1/12(1000 - 8) + 3/2(100-4) - 5(10-2)] = = ½[-992/12 + 144 - 40] = ½\ 256/12 = 32/3$$

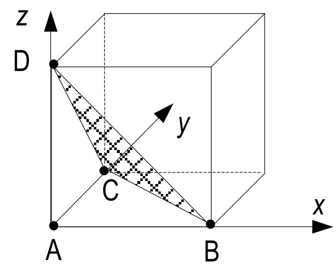
Nota di correzione: conto esatto sino alla fine visto che il risultato è razionale.

22 febbraio 2006 5F PNI questionario (simulazione esame)

Consegne: svolgere 5 quesiti scegliendo liberamente tra esercizio A e B. E' consentito svolgere in via facoltativa e con funzione parzialmente compensatoria un sesto quesito. Riportare nella casella grigia della griglia il codice dei quesiti affrontati

1A Si consideri un cubo di spigolo unitario; si indichino con AB, AC e AD tre spigoli ortogonali con il vertice A in comune. Dopo aver collocato a propria scelta un sistema ortonormale di riferimento si determini, utilizzando il calcolo vettoriale (prodotto scalare e prodotto misto), la distanza tra il vertice A e il piano DBC.

Consideriamo il sistema ortonormale di centro A con gli assi collocati come gli spigoli. Per determinare la distanza richiesta utilizzeremo il prodotto misto $\overrightarrow{CA} \cdot \left(\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD}\right)$ che, come è noto rappresenta il volume del prisma retto avente come base il parallelogramma definito da BCD e come altezza la distanza richiesta.



Basterà calcolare la base del prisma e la distanza si otterrà come rapporto tra il volume e l'area di base.

$\overrightarrow{CA} = -\vec{j}$; $\overrightarrow{CB} = \vec{i} - \vec{j}$; $\overrightarrow{CD} = -\vec{j} + \vec{k}$

Il prodotto misto corrisponde al calcolo del determinante avente come righe le componenti dei 3 vettori. Dunque

$$\left|\overrightarrow{CA} \cdot \left(\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD}\right)\right| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = |-1(-1+0)| = 1$$

La superficie del parallelogramma di base corrisponde al modulo del prodotto vettore $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ ed esso vale $\sqrt{3}$

Pertanto la distanza richiesta vale $1/\sqrt{3}$

1B Dimostrare che i vettori $\vec{e_1} \equiv (1,1,1)$, $\vec{e_2} \equiv (1,1,2)$, $\vec{e_3} \equiv (1,2,3)$ sono linearmente indipendenti e determinare, rispetto a questa base le componenti del vettore $\vec{x} \equiv (6,9,14)$

Dei vettori si dicono linearmente indipendenti se la loro combinazione lineare produce il vettore nullo solo quando si annullano tutti i coefficienti della combinazione:

$\alpha\, \vec{e_1} + \beta\, \vec{e_2} + \gamma\, \vec{e_3} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \wedge \gamma = 0$

La equazione vettoriale corrisponde al sistema omogeneo ottenuto tramite la matrice dei 3 vettori colonna $A = \left[\vec{e_1}\ \vec{e_2}\ \vec{e_3}\right]$

$$\det(A) = \left|\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1(2-1) = -1 \neq 0$$

ciò significa che la soluzione è unica e vale (0,0,0); dunque i vettori sono linearmente indipendenti

Per determinare le componenti di $\vec{x} \equiv (6,9,14)$ bisogna risolvere l'equazione $\alpha\vec{e_1} + \beta\, \vec{e_2} + \gamma\, \vec{e_3} = 6\,\vec{i} + 9\,\vec{j} + 14\,\vec{k}$ e cioè il sistema:

$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 6 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 9 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 14 \end{cases}$ il sistema si risolve in maniera semplicissima per somma e sottrazione si ottiene $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$

Nota di correzione: è essenziale esplicitare la motivazione per cui si chiede det A ≠ 0 mettendo in relazione la definizione di indipendenza lineare (che riguarda un insieme di vettori e non un vettore) con la teoria dei sistemi lineari omogenei.

2A La funzione $y = f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$ rappresenta per un preciso valore di a una densità di probabilità su $\Re$. Trovare tale valore. Senza eseguire il calcolo spiegare coma mai $\mu_X = 0$. Calcolare infine la funzione di ripartizione F(x).

Perché una funzione possa rappresentare una densità di probabilità deve essere continua, positiva e integrabile sull'intero asse reale. Calcoliamo pertanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}dx = 2a \arctan x \Big|_0^{+\infty} = 2a\, ½\, \pi = a\pi$$

Deve dunque essere (condizione di normalizzazione) $a = \frac{1}{\pi}$

Poiché la funzione è pari il valor medio è lo zero.
La funzione di ripartizione è:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{\pi} \arctan t \Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi} (\arctan x + ½\, \pi) = \frac{\arctan x}{\pi} + ½$$

$\boxed{2B}$ Enunciare il teorema di "de L'Hopital" per il caso $\left(\frac{0}{0}\right)$ e citare il teorema che consente di dimostrarlo. Quindi calcolare $\lim_{x\to 0} (\cos(3x))^{5/x^2}$. Ricondursi alla forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ attraverso il passaggio al logaritmo.

Siano f(x) e g(x) due funzioni derivabili nell'intorno di c con derivata $\neq 0$ infinitesime per $x\to c$. Se esiste $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ allora esiste anche il limite del rapporto delle due funzioni ed essi sono uguali.
La dimostrazione del teorema si fonda sul teorema di Cauchy (teorema degli incrementi finiti) nel quale il rapporto tra gli incrementi di due funzioni è calcolabile come rapporto delle derivate in un punto particolare.

$\lim_{x\to 0} (\cos(3x))^{5/x^2} = (1^\infty)$ e per ricondurci alla forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ basta considerare $\ln \lim_{x\to 0} (\cos(3x))^{5/x^2} = \lim_{x\to 0} \ln (\cos(3x))^{5/x^2} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{5}{x^2} \ln \cos(3x)) = \left(\frac{0}{0}\right)$

Applichiamo il teorema di "de L'Hopital":

$$\ln \lim_{x\to 0} (\cos(3x))^{5/x^2} = 5 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 3x} \frac{(-\sin 3x)3}{2x} = \frac{45}{2} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 3x} \frac{(-\sin 3x)}{3x} = -\frac{45}{2}$$

Dunque $\lim_{x\to 0} (\cos(3x))^{5/x^2} = e^{-45/2}$

Nota di correzione: ricordo che $\sin 3x \sim 3x$ e che dunque non serve derivare una seconda volta. Ricordo che il teorema stabilisce una condizione sufficiente cioè che il limite può esistere anche quando non esiste quello del rapporto delle derivate.

$\boxed{3A}$ Si consideri l'affinità definita dalle equazioni x' = 2x + my – 1 e y' = mx – 2y – 2. Classificarla attraverso la matrice dei coefficienti e determinare il rapporto di affinità. Determinare quindi i punti uniti della affinità e dedurre da essi il luogo geometrico da essi descritto al variare di m. Classificare la conica così ottenuta riconducendola a forma normale.

La matrice dei coefficienti $A = \begin{bmatrix} 2 & m \\ m & -2 \end{bmatrix}$ ha determinante $-4 - m^2$ e presenta la forma tipica delle similitudini; poiché il determinante è negativo si tratta di una similitudine inversa.
I punti uniti sono le eventuali soluzioni del sistema:

$\begin{cases} x = 2x + my - 1 \\ y = mx - 2y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3y = 2 \end{cases}$ il sistema è crameriano e ammette come soluzioni:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{-(m^2+3)} = \frac{3+2m}{m^2+3} \text{ e } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 2 \end{vmatrix}}{-(m^2+3)} = \frac{m-2}{m^2+3}$$

Se si ricava m dalla prima e dalla seconda equazione del sistema:

$m = \frac{1-x}{y} \wedge m = \frac{2+3y}{x}$ da cui $x(1-x) = y(2+3y)$ ovvero: $x^2 + 3y^2 - x + 2y = 0$

La curva potrebbe essere una ellisse per la presenza dei termini di II grado con lo stesso segno. Per ridurla a forma normale facciamo comparire una somma di quadrati:

$x^2 - x + ¼ - ¼ + 3(y^2 + 2/3\, y + 1/9) - 1/3 = 0 \Leftrightarrow (x - ½)^2 + 3(y + 1/3)^2 = 7/12$

Si tratta di una ellisse con centro in (1/2,–1/3).

Nota di correzione: non ho avuto il piacere di vederlo terminare da nessuno.

$\boxed{3B}$ In un'urna ci sono due palline bianche, in una seconda urna ci sono due palline nere e in una terza urna ci sono una pallina bianca e una pallina nera. Scegli a caso un'urna ed estrai sempre a caso, una delle palline in essa contenute: è bianca. Calcola la probabilità di questo evento. Calcola la probabilità che in questo caso anche la seconda pallina rimasta nell'urna sia bianca. Alla luce del risultato saresti disposto a scommetterci alla pari?

Indichiamo le tre urne con le lettere A, B e C e con b e n i colori delle palline.

$p(b) = p(b \cap A) + p(b \cap B) + p(b \cap C)$ visto che la estrazione di una pallina bianca può avvenire per disgiunzione di 3 eventi incompatibili.

Ma $p(b \cap A) = p(b|A)\, p(A) = 1 \cdot 1/3 = 1/3$

$p(b \cap B) = p(b|B)\, p(B) = 0 \cdot 1/3 = 0$

$p(b \cap C) = p(b|C)\, p(C) = ½ \cdot 1/3 = 1/6$

Dunque $p(b) = 1/3 + 1/6 = ½$

Se è stata estratta una pallina bianca, la probabilità che anche la seconda sia bianca equivale a valutare che la estrazione sia avvenuta dalla urna A (l'unica che consente il caso bb) e dunque (usando la formula di Bayes)

$$p(A|b) = \frac{p(A)\, p(b|A)}{p(b)} = \frac{1/3 \cdot 1}{1/2} = 2/3$$

Poiché $p(A|b) = 2/3$ vale decisamente la pena di scommettere alla pari (probabilità ½)

Nota di correzione: o si lavorava con la relazione di Bayse analizzando gli eventi o si lavorava con la definizione classica. In questo caso:

a) p(b) Casi favorevoli 3; casi possibili 6, $p(b) = 3/6 = ½$

b) p(A|b) Casi favorevoli 2; casi possibili 3 quindi $p(A|b) = 2/3$

Sconsiglio di operare così perché è facile sbagliare. Ma se non si fa così bisogna usare i teoremi sulla probabilità totale, la formula di Bayes e definire bene i simboli.

$\boxed{4A}$ Risolvere la seguente disequazione: $\int_0^a (2 - 4x + 3x^2)dx \le a$

$$\int_0^a (2 - 4x + 3x^2)dx = [2x - 2x^2 + x^3]\Big|_0^a = 2a - 2a^2 + a^3 \le a \Leftrightarrow a^3 - 2a^2 + a \le 0 \Leftrightarrow a(a-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow a \le 0 \vee a = 1$$

Nota di correzione: errori algebrici gravi di tutti i tipi. Ho dovuto essere cattivo contro chi ha dimostrato di non saper risolvere disequazione elementari, verso chi semplifica per a nei due membri (cosa vietata dal II principio di equivalenza) e magari fa pure venire 0 invece di 1.

$\boxed{4B}$ Dimostrare (non verificare) che per $\alpha \in [2,3]$ la seguente equazione $\int_0^\alpha \cos(x + \alpha^2)dx = \text{sen}\ \alpha$ ha come soluzioni $\alpha = \sqrt{2\pi} \vee \alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 8\pi}}{2}$. Si consiglia di fattorizzare il risultato dell'integrale con la formula di prostaferesi.

$$\int_0^\alpha \cos(x + \alpha^2)dx = \sin(x + \alpha^2)\Big|_0^\alpha = \sin(\alpha + \alpha^2) - \sin\alpha^2$$

Poiché al II membro è presente un terzo termine in seno cerchiamo di fattorizzare il I membro:

$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ e dunque l'equazione diventa:

$2 \cos(\alpha^2 + ½ \alpha) \sin ½ \alpha = \sin \alpha \Leftrightarrow 2 \cos(\alpha^2 + ½ \alpha) \sin ½ \alpha = 2\sin ½ \alpha \cos ½ \alpha$

La soluzione $\sin ½ \alpha = 0$ non è accettabile (fuori dal campo di studio)e l'equazione si riduce a

$\cos(\alpha^2 + ½ \alpha) = \cos ½ \alpha$

Due angoli hanno lo stesso coseno se sono uguali od opposti + $2k\pi$. Si hanno dunque due casi:

$\alpha^2 + ½ \alpha = ½ \alpha + 2k\pi$ che porta a $\alpha^2 = 2k\pi$ ovvero $\alpha = \sqrt{2k\pi}$ con soluzione accettabile per k = 1 ovvero $\alpha = \sqrt{2\pi}$

$\alpha^2 + ½ \alpha = -½ \alpha + 2k\pi$ che porta all'equazione di II grado $\alpha^2 + \alpha - 2k\pi = 0$ con $\Delta = 1 + 8k\pi$

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\pi}}{2} \approx 2.056$$ soluzione accettabile

Nota di correzione: bello, ma non ci ha provato nessuno

$\boxed{5A}$ Scrivere lo sviluppo di Taylor arrestato al III ordine nell'intorno di 1 per la funzione $y = f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Scrivere il resto R_3 e dimostrare che, nell'intervallo [1,2], si ha $R_3 < 11/96$

$f(1) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1/x \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ $\qquad f'(1) = 1$

$f''(x) = \dfrac{-1/x \cdot x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \dfrac{-1 - 2 + 2\ln x}{x^3} = \dfrac{-3 + 2\ln x}{x^3}$ $\quad f''(1) = -3$

$f'''(x) = \dfrac{2/x \cdot x^3 - (-3 + 2\ln x)3x^2}{x^6} = \dfrac{2 + 9 - 6\ln x}{x^4} = \dfrac{11 - 6\ln x}{x^4}$ $\quad f'''(1) = 11$

$f(x) = \dfrac{1}{1!}(x-1)^1 + \dfrac{-3}{2!}(x-1)^2 + \dfrac{11}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3) = (x-1) - \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \dfrac{11}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$

$R_3(x) = \dfrac{1}{3!} f'''(\xi)(x-1)^3$ con $\xi \in]1,x[$

Per $x \in [1,2]$ si ha $(x-1)^3 \le 1$ mentre $f'''(\xi) = \dfrac{11 - 6\ln\xi}{\xi^4} \le \dfrac{11 - 0}{2^4} = 11/16$

Dunque $R_3(x) \le \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{11}{16} = 11/96$

Nota di correzione: qualcuno lo chiama $R_2(x)$ basta intendersi

$\boxed{5B}$ Calcolare i primi quattro termini dello sviluppo di Mac Laurin per la funzione $y = e^{\sin x}$. Quindi ottenere lo stesso risultato operando sugli sviluppi noti delle funzioni sin x ed e^x.

$f(0) = 1$

$f'(x) = e^{\sin x}\cos x = f(x)\cos x$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = f'(x)\cos x - f(x)\sin x$ $\quad f''(0) = 1$

$f'''(x) = f''(x)\cos x - f'(x)\sin x - f'(x)\sin x - f(x)\cos x = f''(x)\cos x - 2f'(x)\sin x - f(x)\cos x$ $\quad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = f'''(x)\cos x - f''(x)\sin x - 2[f''(x)\sin x + f'(x)\cos x] - [f'(x)\cos x - f(x)\sin x]$ $\quad f^{IV}(0) = -2 - 1 = -3$

$e^{\sin x} = 1 + x + ½ x^2 + 0\,x^3 - \dfrac{3}{24}x^4 + o(x^4) = 1 + x + ½ x^2 - 1/8\, x^4 + o(x^4)$

Invece di fare noiosamente le derivate si possono usare gli sviluppi noti di e^x e di sin x a condizione di imparare a calcolare i termini principali (se ci vogliamo arrestare a x^4 dovremo trascurare tutti i termini di ordine superiore)

$y = e^z = 1 + z + ½ z^2 + 1/6\, z^3 + 1/24\, z^4 + \dots$

$z = \sin x = x - x^3/6 + \dots$

Dunque $y = 1 + x - x^3/6 + \dots + ½ (x - x^3/6 + \dots)^2 + 1/6(x - x^3/6 + \dots)^3 + 1/24(x - x^3/6 + \dots)^4 + \dots$

$y = 1 + x + ½ x^2 + x^3(-1/6 + 1/6) + x^4(-1/2 \cdot 2/6 + 1/24) + \dots = 1 + x + ½ x^2 + 0x^3 - 1/8\, x^4 + \dots$

Nota di correzione: come già sottolineato a lezione saper costruire lo sviluppo di una funzione di funzione a partire dalla conoscenza degli sviluppi elementari.

21 marzo 2006 5F PNI simulazione esame (2 ore)

Consegne: scegliere o il problema (che va svolto integralmente) o 5 quesiti. In caso di mancata risposta ad una delle domande del problema si può svolgere uno dei quesiti proposti.

quesiti

1) Data la famiglia di funzioni $y = (k-1)x^2 + (k-2)x + k - 3$ determinare il valore di k per il quale il *minimo assoluto* della funzione è uguale alla *somma delle radici* dell'equazione y = 0

Trattandosi di una famiglia di parabole ad asse verticale si ha un minimo assoluto solo se la concavità è verso l'alto (k>1). E' indispensabile discutere la condizione di realtà delle radici ($\Delta \geq 0$).

Poiché $\Delta = -3k^2 + 12k - 8$ si trova la condizione:

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow k \in \left[2 - \frac{2}{\sqrt{3}}, 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right] \approx [0.845, 3.15]$

Dopo aver calcolato l'ordinata del vertice ed averla eguagliata alla somma delle radici si arriva alla equazione $3k^2 - 8k = 0$ la cui unica soluzione accettabile è k = 8/3 (k = 0 è esclusa da due limitazioni, quella sulla concavità e quella sulla realtà delle radici)

Nota di correzione: scarso rigore nello scrivere le condizioni man mano che si usano, confusione tra massimo ed ascissa del massimo

2) Nello spazio sono assegnati i punti A≡(1,–1,1), B≡(2,2,–1), C≡(2,1,1) le cui coordinate sono riferite ad un sistema d'assi cartesiani ortonormale xyz di origine O. Determinare le coordinate del punto D che determina con A, B, C un parallelogramma. Dopo aver determinato D trovare inoltre il perimetro 2p e l'area σ di tale parallelogramma.

Il punto D è vertice di un parallelogrammo se e solo se $\vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BD}$ e ciò permette di calcolare le componenti di $\vec{BD} \equiv (-1,-4,5)$ da cui si risale alle coordinate di D≡(1,–2,4). Con il teorema di Pitagora si trovano le lunghezze dei lati e il perimetro $2p = 2\left(\sqrt{14} + \sqrt{5}\right)$.

Per trovare l'area si trova dapprima il coseno dell'angolo compreso mediante il prodotto scalare $\cos\varphi = \frac{6}{\sqrt{70}}$ e dopo aver calcolati $\sin \varphi = \sqrt{\frac{17}{35}}$ si arriva all'area $\sigma = \sqrt{34}$

Nota di correzione: continua l'abitudine a non utilizzare il calcolo vettoriale anche su esercizi moto semplici come questo

3) Dimostrare per induzione che $S_n = \sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ e che $A_n = \sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. Quindi dimostrare direttamente che $r^3 = r(r+1)(r+2) - 3r(r+1) + r$ ed utilizzare questo risultato per trovare $B_n = \sum_{r=1}^{n} r^3$. Dopo aver trovato B_n calcolare B_{100}

Le prime due dimostrazioni sono identiche e si basano sulla constatazione (per sostituzione) che P_1 è vera e che $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ per applicazione della formula fornita.

La dimostrazione della identità su r^3 consiste nello svolgere il calcolo ed essa può essere usata applicando le due prime formule e quella della somma da 1 a n di naturali consecutivi ½ n(n+1 per arrivare al calcolo diretto di $B_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Dunque $B_{100} = \frac{100^2 101^2}{4} = 25'502'500$

4) Calcolare $I_n(x) = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^n}\right)dx$ con n naturale diverso da 1. Indicata con $\sigma_\alpha = \int_1^\alpha \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$ calcolare in forma esatta e approssimata $\sigma_3 - \sigma_2$

$I_n(x) = \ln|x| - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k$. Mentre $\sigma_\alpha = \ln\alpha - \frac{1}{\alpha} + 1$

$\sigma_3 - \sigma_2 = \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{6} \approx 0.572$

5) Enunciare il metodo di Simpson per il calcolo approssimato di $\int_a^b f(x)dx$ ed applicarlo al calcolo di $\int_0^2 \exp(-x^2)dx$ suddividendo l'intervallo di integrazione in 6 parti (2n = 6). Confrontare il risultato trovato con quello ottenibile dalla gaussiana normalizzata (prestare attenzione alle costanti coinvolte nei cambi di variabile).

Il metodo di Simpson si basa sulla interpolazione di terne di punti della funzione con archi di parabole. Ciò richiede di suddividere l'intervallo di integrazione in un numero pari di intervallini (nel nostro caso 2n = 6):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3\cdot 2n}[f(x_0) + f(x_{2n}) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1}))]$$

La formula di Simpson per 2n = 6 risulta: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3\cdot 6}[f(x_0) + f(x_6) + 2(f(x_2) + f(x_4)) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5))]$ con $x_0 = a$ e $x_6 = b$

Con la calcolatrice si produce la seguente tabella

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	1/3	2/3	1	4/3	5/3	2
$f(x_i)$	1.00000	0.894839	0.641180	0.367879	0.169013	0.062176	0.018316

Pertanto $\int_0^2 \exp(-x^2)dx \approx \frac{2}{18}[1.00000 + 0.018316 + 2(0.641180 + 0.169013) + 4(0.894839 + 0.367879 + 0.062176)] = 0.882031$

La funzione richiesta, a meno di costanti moltiplicative è la gaussiana standardizzata, infatti:

$$\int_0^2 \exp(-x^2)dx = \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\sqrt{2}} \exp(-½ z^2)dz = \sqrt{\pi}\left(F(2\sqrt{2}) - F(0)\right) = \sqrt{\pi}(0.997661069 - 0.5) = 0.882081$$

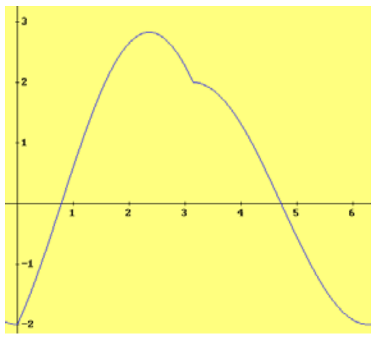
Si è eseguita la trasformazione $x^2 = ½ z^2$ per ricondursi alla gaussiana standardizzata (il valore di $F(2\sqrt{2})$ è stato calcolato in forma molto precisa con excel.

Nota di correzione: la domanda finale è stata inserita volutamente per verificare la capacità di ricondurre tramite cambio di variabile un risultato ignoto ad una funzione nota.

6) Data la funzione y = sen x – 2 cos x + |sen x| determinare periodo, massimo e minimo assoluti M e m e punti angolosi. Non è richiesto lo studio di funzione (anche perché si tratta di combinazione lineare) ma solo quanto richiesto.

Si tratta di somma di funzioni goniometriche di periodo 2π e π. Il periodo è il mcm e cioè 2π

La funzione corrisponde al raccordo delle due funzioni di cui forniamo qui a lato il diagramma:



γ_1: $y = 2 \sin x - 2 \cos x = 2\sqrt{2} \sin (x - \pi/4)$ per $x \in [0,\pi] \vee x = 2\pi$

γ_2: $y = -2 \cos x$ per $x \in [\pi,2\pi]$

Il massimo assoluto M si ottiene per $x - \pi/4 = \pi/2$ e dunque $x = 3/4\pi$ mentre la sua ordinata vale $2\sqrt{2}$ e pertanto $M \equiv (3/4\pi;2\sqrt{2})$

Il minimo si ha nel punto di raccordo x = 0 o x = 2π, la sua ordinata è – 2 e, trattandosi di un punto di raccordo si ha la non derivabilità; infatti $f_1'(0+) = 2$ mentre $f_2'(0-) = 0$

L'altro punto di non derivabilità è il secondo punto di raccordo $x = \pi$ per il quale si ha $f_1'(\pi) = -2$ mentre $f_2'(\pi) = 0$

Nota di correzione: senza arrivare al livello di precisione qui rappresentato mi aspettavo almeno un tentativo di confronto dei due tratti di funzione.

7) Due punti A e B appartengono rispettivamente agli assi y e x nel primo quadrante. Inoltre la loro distanza $\overline{AB}$ = costante = *d*. Dimostrare che il luogo geometrico percorso dal punto medio M di AB è un arco di circonferenza di cui si chiede l'equazione.

Siano $A \equiv (0,\beta)$ e $B \equiv (\alpha,0)$ con α e β entrambi positivi. Per ipotesi è $\alpha^2 + \beta^2 = d^2$

Il punto M ha coordinate $(x,y)\equiv(\frac{1}{2}\alpha,\frac{1}{2}\beta)$ e dunque $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2) = \frac{1}{4}d^2$ giace su un arco di circonferenza di centro O e di raggio ½ d.

Nota di correzione: esercizio molto semplice; ma qualcuno non è riuscito a tradurre in equazioni le condizioni date. Come detto sin dalla prima imparare a lavorare sulle espressioni al quadrato.

8) In una azienda i dipendenti sono 12 uomini e 18 donne. Tra gli uomini in 3 si chiamano Mario e tra le donne in 3 si chiamano Lucia. Si deve formare una delegazione di 3 dipendenti che vengono scelti prendendo un uomo a caso, una donna a caso e un dipendente a caso tra i rimanenti. Determinare la probabilità di formare una delegazione composta da un solo Mario e una sola Lucia. Dopo aver trovato tale probabilità determinare nel caso di 30 estrazioni il numero medio μ e lo scarto quadratico medio σ.

Se esaminiamo l'universo degli eventi osserviamo che l'evento richiesto corrisponde alla unione di 3 eventi incompatibili (per i quali sommeremo le probabilità:

E_1 = Mario, Lucia, né Mario né Lucia

E_2 = non Mario, Lucia, Mario

E_3 = Mario, non Lucia, Lucia

Ciascuno dei tre eventi corrisponde al verificarsi simultaneo di 3 eventi indipendenti:

$p(E_1) = \frac{3}{12}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{24}{28} = \frac{1}{28}$

$p(E_2) = \frac{9}{12}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{3}{28} = \frac{3}{224}$

$p(E_3) = \frac{3}{12}\cdot\frac{15}{18}\cdot\frac{3}{28} = \frac{5}{224}$

$p = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = \frac{1}{14} \approx 0.0714$

Il fenomeno è di tipo bernoulliano e pertanto preso n = 30 si ha

$\mu = n\,p = 2.14$

$\sigma = \sqrt{n\,p(1-p)} = \sqrt{30\cdot 0.074\cdot(1-0.074)} = 1.41$

Nota di correzione: come più volte ribadito effettuare l'analisi dei casi e spiegare cosa si fa.

Problema (Brocca 97 1° problema)

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sia data la parabola γ di equazione $y = x^2$ e sia P un suo punto di ascissa $\lambda\neq 0$ e *r* la parallela per P all'asse y. Siano γ_1 e γ_2 le parabole aventi come asse la retta r, vertice in P e stessa distanza focale di γ (si rammenta che per la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ la distanza fuoco direttrice vale $\frac{1}{2|a|}$).

Il candidato:

a) scriva in funzione di λ le equazioni di γ_1 e γ_2 essendo γ_1 la parabola che incontra γ solo in P.

Il punto P ha coordinate $P\equiv(\lambda,\lambda^2)$ mentre la retta r ha equazione $x = \lambda$

Se le parabole hanno identica distanza focale dovrà essere $\frac{1}{2|a|} = \frac{1}{2}$ e dunque $|a| = 1$ ovvero $a = \pm 1$

Data la parabola con centro nell'origine di equazione $y = ax^2$ la parabola di vertice (x_V,y_V) di medesimo parametro ha equazione $y - y_V = a(x - x_V)^2$ pertanto le parabole richieste avranno equazione $y - \lambda^2 = \pm 1(x - \lambda)^2$

$y = x^2 - 2\lambda x + 2\lambda^2$ oppure $y = -x^2 + 2\lambda x$

Poiché la seconda equazione rappresenta una parabola passante per l'origine da cui passa anche γ essa sarà γ_2.

Nota di correzione: era lecito, ma meno conveniente utilizzare le relazioni che danno le coordinate del vertice.

b) scriva le equazioni delle trasformazioni che mutano γ in γ_1 e γ in γ_2

Per passare da γ a γ_1 (alla luce di quanto detto) basta operare una traslazione di vettore (λ,λ^2) e dunque:

$\mathcal{A}_1$: $x' = x + \lambda \wedge y' = y + \lambda^2$. In effetti $x = x' - \lambda$ e $y = y' - \lambda^2$ e sostituendo nella equazione di γ si ottiene $y' - \lambda^2 = (x' - \lambda)^2$ che porta a $y' = x'^2 - 2\lambda x' + 2\lambda^2$ cioè a γ_1. Dunque: $\gamma_1 = \mathcal{A}_1\gamma$

Visto che γ_2 si ottiene ribaltando γ_1 rispetto alla retta $y = \lambda^2$ o a scelta ribaltando γ e poi traslando scriveremo:

$\gamma_2 = (\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3)\gamma = \mathcal{A}_2\gamma$ dove $\mathcal{A}_3$ è la simmetria assiale di equazione $x' = x$ e $y' = -y$

Dunque: $x'' = x' = x + \lambda$ mentre $y'' = y' + \lambda^2 = -y + \lambda^2$

Se si eseguono in sequenza le due trasformazioni si ottiene proprio γ_2 a partire da γ

Nota di correzione: un minimo di giustificazione andava data.

c) dica la natura di dette trasformazioni precisando se si tratta di trasformazioni dirette o inverse e se hanno elementi che si trasformano in se stessi.

Le due trasformazioni sono delle isometrie (modulo del rapporto di affinità pari a 1)

La prima è una traslazione (isometria diretta) di matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ con determinante 1

La seconda è una glissosimmetria (isometria indiretta) di matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ con determinante –1

La prima, essendo una traslazione per la quale è stato escluso il vettore nullo non ammette punti uniti.

In effetti il sistema $\begin{cases} x = x + \lambda \\ y = y + \lambda^2 \end{cases}$ non ha soluzione per $\lambda \neq 0$

La ricerca di rette unite porta a $y' - \lambda^2 = m(x' - \lambda) + q \Leftrightarrow y' = mx' + (-m\lambda + q + \lambda^2)$ e ciò comporta che sia $-m\lambda + q + \lambda^2 = q$ ovvero $m = \lambda$. Sono unite globalmente tutte le rette che hanno coefficiente angolare pari alla inclinazione del vettore.

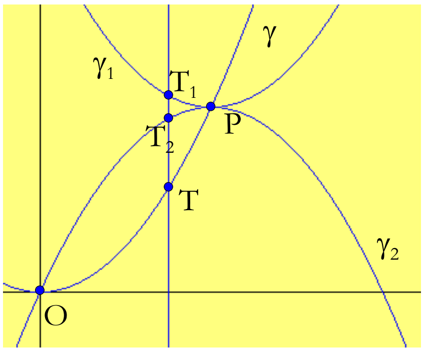
Si verifica facilmente che anche la glissosimmetria non ha punti uniti mentre per quanto riguarda le rette si ha:

$-y'' + \lambda^2 = m(x'' - \lambda) + q$ che porta a $y'' = -m x'' + \lambda^2 - q + m\lambda$. La eguaglianza di coefficiente angolare porta alla condizione $m = 0$ da cui $q = ½ \lambda^2$

Dunque la retta $y = ½ \lambda^2$ è globalmente unita.

Nota di correzione: molte superficialità e indebite conclusioni.

d) fissato $\lambda = 1$ e dette T, T_1 e T_2 le rispettive intersezioni di γ, γ_1 e γ_2 con la retta di equazione $x - h = 0$, studi la funzione: $z = \dfrac{\overline{TT_1} + \overline{T_1T_2}}{\overline{TT_2}}$ al variare di h e se ne tracci il relativo grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali O'hz (le misure dei segmenti vanno intese in senso assoluto)



Riscriviamo per comodità le equazioni delle tre parabole:

γ: $y = x^2$ γ_1: $y = x^2 - 2x + 2$ γ_2: $y = -x^2 + 2x$

Posto $x = h$ le corde hanno lunghezza Δy e pertanto:

$\overline{TT_1} = |y_T - y_{T1}| = |2h - 2| = 2|h - 1|$

$\overline{T_1T_2} = |y_{T2} - y_{T1}| = |2h^2 + 4h - 2| = 2|h - 1|^2$

$\overline{TT_2} = |y_{T2} - y_T| = |-2h^2 + 2h| = 2|h^2 - h| = 2|h - 1|\,|h|$

Dunque $z = \dfrac{|h-1| + |h-1|^2}{|h-1|\,|h|} = \dfrac{1 + |h-1|}{|h|}$

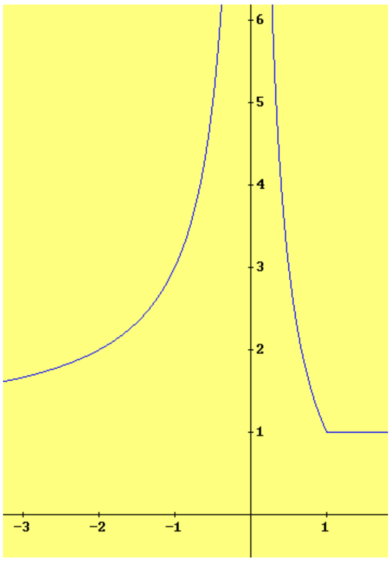
Si tratta di tratti di funzione omografica che per h> 1 si traducono in una semiretta.

Si ha:

Per $h < 0$ $z = \dfrac{h-2}{h}$

Per $0<h<1$ $z = \dfrac{2-h}{h}$

Per $h > 1$ $z = 1$



Il tracciamento richiede di riconoscere le funzioni omografiche e di tracciare correttamente i rami richiesti aiutandosi con la determinazione di qualche punto significativo.

Nota di correzione: pagine di conti per arrivare alla funzione. Difficoltà a semplificare i moduli. Difficoltà a disegnare le funzioni orografiche.

e) Determinare l'area racchiusa tra la funzione z e l'asse h nell'intervallo $-3 \leq h \leq 1$

Si trattava di una domanda trabocchetto per verificare la conoscenza della definizione di integrale generalizzato. Poiché per x = 0 si ha una discontinuità di II specie (la funzione va all'infinito) il calcolo dell'area richiedeva di spezzare in due intervalli tra – 3 e 0 e tra 0 e 1.

In entrambi i casi i due integrali danno infinito perché integrando (in forma indefinita) si ottiene il logaritmo ed esso per $x \to 0$ va all'infinito.

26 maggio 2006 5F PNI simulazione esame (2 ore)

Consegne: Il compito è dimensionato sul tempo disponibile; rispondere possibilmente in sequenza

Si consideri la funzione $\gamma : y = f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$ in un sistema ortonormale xOy

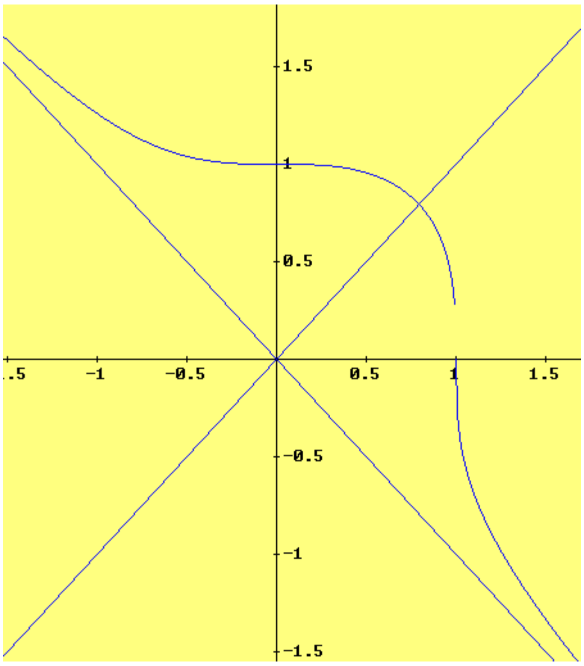
a) Classificarla e studiarne l'andamento agli estremi del dominio (inclusi gli eventuali asintoti)
b) Eseguire la trasformazione $x \rightarrow y \wedge y \rightarrow x$. Cosa si può concludere circa l'andamento di γ (motivare le conclusioni)
c) Trovare le intersezioni con gli assi cartesiani
d) Studiare crescere e decrescere della funzione e individuare le caratteristiche dei punti critici della derivata prima (di annullamento o non esistenza della derivata)
e) Calcolare la derivata seconda; studiarne le caratteristiche e tracciare il diagramma in scala 1 = 4 cm
f) Calcolare il polinomio di Mac Laurin di $(1 + x)^\alpha$ arrestato al IV termine ed applicarlo al calcolo dello sviluppo della funzione data.
g) Utilizzare il risultato precedente per determinare il valore approssimato dell'area racchiusa tra γ e i due semiassi positivi (trovare la frazione e il valore approssimato alla III cifra decimale).

a	b	c	d	e	f	g	

Risposte

a) funzione irrazionale intera con asintoto obliquo y = –x. Poiché è sempre $\sqrt[3]{1 - x^3} > -x$ la funzione è sempre al di sopra dell'asintoto
Nella determinazione dell'asintoto obliquo è richiesto il calcolo di un limite da fare tramite i prodotti notevoli (eliminazione della indeterminazione $(+\infty - \infty)$)

b) si ottiene $x = \sqrt[3]{1 - y^3} \Leftrightarrow x^3 = (1 - y^3) \Leftrightarrow y^3 = 1 - x^3 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ dunque la funzione è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo quadrante. Infatti abbiamo dimostrato che se $P \equiv (\alpha,\beta) \in \gamma$ anche $P' \equiv (\beta,\alpha) \in \gamma$. La funzione taglia l'asse di simmetria in $x = \sqrt[3]{1 - x^3} \Leftrightarrow 2x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.79$



c) intersezioni in (0,1) e (1,0)
d) $f'(x) = x^2(1 - x^3)^{-2/3}$ monotona non crescente punto a tangente orizzontale in x = 0 e punto a tangente verticale in x = 1 (sono entrambi dei flessi per raccordo con gli asintoti).
e) $f''(x) = -2x(1 - x^3)^{-5/3}$ cambio di concavità in x = 0 e x = 1 come previsto
Conviene eseguire la derivata come prodotto e poi passare al denominatore comune
f) Sia $g(x) = (1 + x)^\alpha$. Si ha $g'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}$, $g''(x) = \alpha(\alpha-1)(1 + x)^{\alpha-2}$, $g'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1 + x)^{\alpha-3}$
Pertanto si ha $g'(0) = \alpha$, $g''(0) = \alpha(\alpha-1)$, $g'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$ e dunque $g(x) \approx 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)x^2 + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3 + o(x^3)$.
Con riferimento alla funzione data si ha $\alpha = 1/3$ e $x \rightarrow -x^3$ e si ottiene pertanto:
$f(x) \approx 1 - 1/3\ x^3 - 1/9\ x^6 - 5/81\ x^9$
g) L'area richiesta si ottiene integrando tra 0 e 1 il polinomio trovato e ciò equivale a valutare F(1) dove $F(x) = x - 1/12\ x^4 - 1/63\ x^7 - 5/810\ x^{10}$. Si ottiene $F(1) = 2029/2268 \approx 0.895$

Nome e cognome: ______________________________27 febbraio 2007 – 4F PNI – calcolo dei limiti

Tendenzialmente la soglia di sufficienza è intorno ai quattro esercizi completi e corretti. Gli esercizi hanno gradi di difficoltà diversi. Ricordo di indicare le sostituzioni utilizzate. Quando si usano i simboli di Landau il modo più rapido e corretto è quello di sostituire aggiungendo gli o(–)

1) Quella che segue è la traccia della dimostrazione secondo cui per $x \to +\infty$ e $c > 0$ si ha $\ln x = o(x^c)$ ovvero il logaritmo va all'infinito più lentamente di qualsiasi funzione potenza. Sul tuo foglio devi riportare le frasi corrispondenti a (1), (2), (3), …

Dal confronto dei diagrammi si ha per $x > 1$ che $x > \ln x > 0 \Rightarrow$

$x^{c/2} > \ln x^{c/2} > 0$ per (1) $\Rightarrow x^{c/2} > \frac{1}{2} c \ln x > 0$ per (2) $\Rightarrow x^{-c/2} > \frac{1}{2} c \frac{\ln x}{x^c} > 0$ per (3) $\Rightarrow \frac{2}{c} x^{-c/2} > \frac{\ln x}{x^c} >$ 0 per (4) da qui segue l'asserto applicando (5) infatti $\frac{2}{c} x^{-c/2}$ (6)

(1) proprietà di monotonia
(2) proprietà dei logaritmi (potenza dell'argomento)
(3) si divide per $x^c > 0$
(4) si moltiplica per $\frac{2}{c}$
(5) il teorema del confronto perché sia 0 sia $\frac{2}{c}$ $x^{-c/2}$ tendono a 0

2) Sapendo che $x \to +\infty$ e $c > 0$ si ha $\ln x = o(x^c)$ sapresti dimostrare che per $x \to 0^+$ si ha $\ln x = o(x^{-c})$?

posto $t = 1/x$ ne segue che $t \to 0^+$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^c} = 0$ e dunque $\lim_{t\to 0^+} \frac{-\ln t}{t^{-c}} = 0$ ovvero $\ln x = o(x^{-c})$

3) Calcola $\lim_{x\to -3} \frac{\tan \pi x}{x + 3}$

posto $t = x + 3$ si ha che $\lim_{x\to -3} \frac{\tan \pi x}{x+3} = \lim_{t\to 0} \frac{\tan(\pi t - 3\pi)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\tan \pi t}{t} = \pi$

Nota di correzione: sono allibito vedendo che nessuno sa più che la tangente ha periodo π. In questi contesti in ordine di gravità crescente le manchevolezze sono: usare la riduzione al I quadrante, usare la formula della tangente della differenza, fare la moltiplicazione tra la funzione e il suo argomento.

4) Calcola $\lim_{x\to 0} \frac{\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{x}$ puoi trattare la radice come una potenza $(1 + ?)^\alpha$ oppure puoi porre $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1 + z$ e invertire per trovare x.

$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \left(\frac{1-x+2x}{1-x}\right)^{1/2} = \left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)^{1/2} \sim 1 + \frac{1}{2}\frac{2x}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$ (quando $x\to 0$ anche $\frac{2x}{1-x} \to 0$)

inoltre $\ln(1 + z) \sim z$ e dunque

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(1-x)} = 1$

Strategia alternativa

$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1 + z \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} = (1 + z)^2 \Leftrightarrow (1+ x) = (1 + 2z + z^2)(1 - x) \Leftrightarrow x(1 + 2z + z^2 + 1) = 1 + 2z + z^2 - 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{2z + z^2}{2 + 2z + z^2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{x} = \lim_{z\to 0} \frac{2 + 2z + z^2}{2z + z^2} \ln(1 + z) = \lim_{z\to 0} \frac{2 + o(1)}{2z + o(z)} (z + o(z)) = 1$

5) Calcola $\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1 - \cos x} + 3 \sin x}{x}$ (attento all'intorno destro e sinistro)

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$ e dunque $2\sqrt{1 - \cos x} \sim \sqrt{2}\,|x|$

Bisogna dunque distinguere i due casi $x \to 0^\pm$

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{2\sqrt{1-\cos x}+3\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{2}\,|x|+3x}{x} = 3 \pm \sqrt{2}$$

Nota di correzione: se sbagliate anche quando voi metto il suggerimento nel testo, cosa farete quando l'esercizio richiederà il calcolo del limite senza specificare nulla? Qui abbiamo una bella discontinuità di I specie!

6) Sfruttando il fatto che per $x\to 0$ si ha $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + o(x)$ e ricordando il prodotto notevole $(a^3 - b^3) = (a-b)(\ \dots\ )$ calcola $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-5x}-\sqrt[4]{1+3x}}{\sqrt[3]{3-2x}-\sqrt[3]{3}}$

Se non si vuole usare il prodotto notevole bisogna porre $\sqrt[3]{3-2x}$ nella forma $(1+z)^\alpha$ e dunque: $\sqrt[3]{3-2x} = \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}x}$

Ora si può usare la formula del binomio di Newton:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-5x}-\sqrt[4]{1+3x}}{\sqrt[3]{3-2x}-\sqrt[3]{3}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{2}5x-(1+\frac{1}{4}3x)}{\sqrt[3]{3}(1-\frac{1}{3}\frac{2}{3}x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{2}5x-(1+\frac{1}{4}3x)}{\sqrt[3]{3}(1-\frac{1}{3}\frac{2}{3}x)-\sqrt[3]{3}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{13}{4}x}{-\sqrt[3]{3}\frac{2}{9}x} = \frac{117}{8\sqrt[3]{3}} = \frac{39}{8}\sqrt[3]{9}$$

In alternativa si può usare il prodotto notevole al denominatore e si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-5x}-\sqrt[4]{1+3x}}{\sqrt[3]{3-2x}-\sqrt[3]{3}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{2}5x-(1+\frac{1}{4}3x)}{3-2x-3}\left(\sqrt[3]{(3-2x)^2}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3-2x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{13}{4}x}{-2x}\,3\sqrt[3]{9} = \frac{39}{8}\sqrt[3]{9}$$

7) Calcola $\lim_{x\to 2} \frac{-x^3+7x^2-16x+12}{2x^3-5x^2-4x+12}$

Si fa una doppia divisione con il metodo di Ruffini e si ottiene

$$\lim_{x\to 2} \frac{-x^3+7x^2-16x+12}{2x^3-5x^2-4x+12} = \lim_{x\to 2} \frac{3-x}{2x+3} = 1/7$$

8) Cerca di dimostrare che per $x\to 0$ si ha $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + o(x)$ attraverso il calcolo del limite $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x}$ che si può eseguire (come ti suggerisce il testo) passando dalla base $1 + x$ alla base e.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(\alpha\ln(1+x))-1}{\alpha x} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(\alpha\ln(1+x))-1}{\alpha x}$$

Posto $\alpha\ln(x+1) = z$ e cioè $\ln(x+1) = z/\alpha$ e $x = \exp(z/\alpha) - 1$ si ha $x\to 0 \Rightarrow z\to 0$ e inoltre

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(\alpha\ln(1+x))-1}{\alpha x} = \lim_{z\to 0} \frac{\exp(z)-1}{\alpha(\exp(z/\alpha)-1)} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\alpha\,(z/\alpha)} = 1$$

Dunque $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1 + o(1) \Leftrightarrow (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(1)\alpha x = = 1 + \alpha x + o(x)$

9) $\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin^2 x - \sin^2\alpha}{\tan(x-\alpha)}$

posto $x - \alpha = z$ si ha:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin^2 x - \sin^2\alpha}{\tan(x-\alpha)} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin^2(z+\alpha)-\sin^2\alpha}{\tan z} = \lim_{z\to 0}\left(\sin(z+\alpha)+\sin\alpha\right) \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z+\alpha)-\sin\alpha}{\tan z} =$$

$$2\sin\alpha \lim_{z\to 0} \frac{\sin z\cos\alpha - \cos z\sin\alpha - \sin\alpha}{\tan z} = 2\sin\alpha \lim_{z\to 0} \frac{z\cos\alpha + \sin\alpha\, o(z)}{z + o(z)} = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Naturalmente si poteva procedere anche per prostaferesi

4F PNI 5 marzo 2007: generalità sulle funzioni

Indicazioni: gli esercizi, se svolti in maniera efficiente ci stanno tutti in 1 ora (tempo mio di scrittura a mano circa 25'). Cercare di scrivere tutto e solo l'essenziale (per alcuni esercizi la risposta è lunga 1 o 2 righe)

1) E' data la funzione $f(x + 1/x) = x^2 + 1/x^2$. Determinare la espressione di $y = f(z)$ con $z = x + 1/x$

$x^2 + 1/x^2$ si produce da $x + 1/x$ attraverso un semplice elevamento al quadrato; infatti $(x + 1/x)^2 = x^2 + 1/x^2 + 2$ da cui $z^2 – 2 = f(z)$

2) Sono date le funzioni $f(x) = x^2 + 6$ e $g(x) = 5x$. Trovare le soluzioni dell'equazione $f(x) = |g(x)|$

$x^2 + 6 = \pm 5x \Leftrightarrow x^2 \pm 5x – 6 = \Leftrightarrow x = \pm 2 \vee x = \pm 3$

Nota: banale

3) Discutere dominio, simmetrie e monotonia della funzione $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

Poiché $x^2+1 \neq 0\ \forall x$ e poiché $f(–x) = f(x)$ la funzione è definita in $\Re$ ed è simmetrica.

$f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x^2}}$ Per x>0 il denominatore decresce al crescere di x (iperbole di II grado) e poiché il numeratore è costante la funzione cresce.

Per simmetria accade il contrario per x<0.

Nota: non sapete discutere la monotonia

4) Quanto valgono le ordinate del Max e Min della funzione $y = a \sin x + b \cos x + c$?

La combinazione lineare di seni e coseni corrisponde ad una sinusoide traslata di ampiezza $\sqrt{a^2 + b^2}$ e pertanto la funzione oscilla tra $–\sqrt{a^2 + b^2} + c$ e $\sqrt{a^2 + b^2} + c$ che corrispondono alle ordinate del minimo e del massimo

Nota: il programma fondamentale del triennio va conosciuto sempre

5) Trovare ascissa e ordinata del massimo della funzione $y = f(x) \dfrac{2}{\sqrt{2x^2 – 4x + 3}}$

La funzione è massima quando è minima $\sqrt{2x^2 – 4x + 3}$ la quale è minima quando lo è $2x^2 – 4x + 3$ a condizione che sia positiva (dominio della funzione originaria). La parabola è minima per $x = \dfrac{4}{4} = 1$ e per tale valore la funzione vale $y = \dfrac{2}{\sqrt{2 –4 + 3}} = 2$ dunque il massimo è il punto (1,2)

Nota: scarsa flessibilità; il fascio di rette conviene usarlo se c'è la variabile anche al numeratore. In questo caso ci si complicava inutilmente la vita e venivano richieste puntualizzazioni di dominio che nessuno ha segnalato

6) Trovare il periodo delle seguenti funzioni
a) $y = \sin^2 x \cos^2 x$ b) $y = |\sin 2x|$ c) $y = \tan(x/3) + \cos(x/2)$

a) $y = \sin^2 x \cos^2 x = (½ \sin 2x)^2 = ¼ \sin^2 2x = ¼ \dfrac{1 – \cos 4x}{2}$ La funzione cos 4x è periodica di periodo $4x = 2\pi$ e cioè $x = ½ \pi$
b) sin 2x è periodica di periodo π ma |sin 2x| lo è di periodo $½ \pi$ perché è anche pari.
c) tan(x/3) è periodica di periodo $x/3 = \pi$ e cioè $x = 3\pi$; cos (x/2) lo è di 4π e la prima ripetizione si ha nel mcm pari a 12π

Vedi nota 4

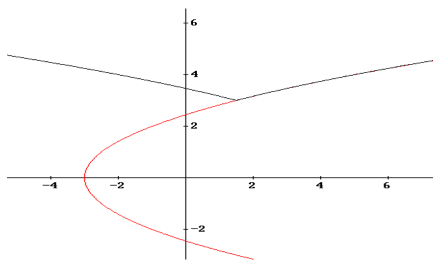
7) Tracciare il grafico di $y = \sqrt{|2x – 3| + 9}$

Si tratta di una funzione simmetrica rispetto alla retta x = 3/2 e pertanto la studieremo solo per $x \geq 3/2$

$y = \sqrt{2x + 6} \Leftrightarrow y \geq 0 \wedge y^2 = 2(x + 3) \Leftrightarrow x = ½ y^2 – 3 \wedge y \geq 0$ (ramo superiore di parabola ad asse orizzontale con concavità verso destra.

f(3/2) = 3 e si può ora tracciare il diagramma.

Vedi nota 4



8) Trovare il dominio della funzione $y = \sqrt{\dfrac{5 – 2x}{3x^2– 2x} + \dfrac{x –4}{x} - \dfrac{3x +2}{3x –2}}$

Deve essere $\dfrac{5 – 2x}{3x^2– 2x} + \dfrac{x –4}{x} – \dfrac{3x +2}{3x –2} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{5 – 2x + (x – 4)(3x – 2) –x(3x + 2)}{x(3x – 2)} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{–18x + 13}{x(3x – 2)} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{A}{BC} \geq 0$

$A \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 13/18$ $B > 0 \Leftrightarrow x > 0$ $C > 0 \Leftrightarrow x > 2/3$

Si fa lo schema grafico e si trova $x < 0 \vee 2/3 < x \leq 13/18$

Vedi nota 4 ma riferita al programma di I e II

9) Trovare il dominio della funzione $y = \exp\left(\sqrt{2x – \sqrt{3 –x}}\right)$

Deve essere $2x - \sqrt{3-x} \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq \sqrt{3-x} \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge 4x^2 \geq 3 - x \geq 0$ (il caso $x<0$ porta all'insieme vuoto perché la radice, quando esiste non può essere minore di un numero negativo).
Si arriva così a $x\geq 0 \wedge (x\leq 0 \vee x\geq 3/4) \wedge x \leq 3$ che porta a $3/4\leq x\leq 3$
Vedi nota 4

10) Data la funzione $y = 5 - 27 \ln^3(x + 3)$ stabilire che si tratta di una funzione monotona ragionando sulle funzioni componenti e quindi trovare l'espressione della funzione inversa.

La funzione è composta da $y = 5 - z$ (decrescente), $z = 27u^3$ (crescente), $u = \ln w$ (crescente), $w = x + 3$ (crescente) dunque si tratta di una funzione monotona decrescente
Troviamo ora l'inversa:

$27 \ln^3(x + 3) = 5 - y \Leftrightarrow \ln^3(x + 3) = 1/27\ (5 - y) \Leftrightarrow \ln(x + 3) = 1/3 \sqrt[3]{5-y} \Leftrightarrow x + 3 = \exp\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{5-y}\right) \Leftrightarrow$

$x = -3 + \exp\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{5-y}\right)$

Nota: leggere il testo

4F PNI 20 aprile 2007 tecniche di derivazione e segno della derivata

1) Derivare e studiare zeri e segno della derivata di $y = f(x) = (1 - x)^3(1 + 2x)^2$

$f'(x) = 3(1 - x)^2(-1)(1 + 2x)^2 + (1 - x)^3 2(1 + 2x)(2) = (1 - x)^2(1 + 2x)(-3 - 6x + 4 - 4x) = (1 - x)^2(1 + 2x)(-10x + 1) = A^2BC$

$f' \geq 0$ eq $A^2BC \geq 0$ eq $A = 0 \vee BC \geq 0$ eq $x = 1 \vee x \in [-\tfrac{1}{2}, 1/10]$ (parabola concava verso il basso)

Nota di correzione: la derivata, prima di essere discussa va sempre fattorizzata nella forma più semplice. Attenzione agli zeri provenienti dal termine quadratico.

2) Dopo aver trovato il dominio della funzione $y = f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{2-x}}$ calcolarne la derivata prima e studiarne zeri e segno nel dominio

Dominio: $\frac{x^3}{2-x} \geq 0$ eq $x^2\frac{x}{2-x} \geq 0$ eq $x = 0 \vee$ valori interni all'intervallo delle radici (parabola concava verso il basso) eq $x \in [0,2[$

$f'(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2-x}{x^3}}\,\frac{3x^2(2-x) - x^3(-1)}{(2-x)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2-x}{x^3}}\,x^2\,\frac{6 - 3x + x}{(2-x)^2} = \sqrt{\frac{2-x}{x^3}}\,x^2\,\frac{3-x}{(2-x)^2} = (3 - x)\sqrt{\frac{x}{(2-x)^3}}$

$f'(x) \geq 0$ eq $AB \geq 0$ ma B è sempre positivo o nullo e si annulla per $x = 0$ mentre $A \geq 0$ per $x \leq 3$ (cioè sempre nel dominio) dunque la derivata è sempre positiva e si annulla per $x = 0$.

Nota di correzione: scrivere poco, pensare molto, essere rigorosi nelle scritture, concludere.

3) Dopo aver trovato il dominio della funzione $y = f(x) = \ln\frac{\sqrt{2x - x^2}}{x}$ calcolarne la derivata prima e studiarne zeri e segno nel dominio

Dominio: per l'esistenza del logaritmo deve essere $\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} > 0$ eq $\frac{\sqrt{A}}{x} > 0$ eq $A>0 \wedge x > 0$. Ma $A > 0$ eq $x \in]0,2[$ e dunque questo è anche il dominio. Si osservi che (non va discusso il caso di denominatore negativo perché il numeratore quando esiste è positivo o nullo).

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}\,\frac{\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}(2-2x)x - \sqrt{2x-x^2}(1)}{x^2} = \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}\,\frac{\frac{x(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}} - \sqrt{2x-x^2}}{x^2} = \frac{x}{2x-x^2}\,\frac{x - x^2 - 2x + x^2}{x^2} = \frac{x}{x(2-x)}\,\frac{-x}{x^2}$

$= \frac{-1}{x(2-x)} = \frac{1}{x^2 - 2x}$ e dunque $f'(x) < 0 \ \forall x$

Nota di correzione: vedi nota precedente.

4) Calcolare, nell'intervallo $[0,2\pi]$ il dominio della funzione $y = f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$. Calcolare quindi la derivata seconda e nell'ambito del campo di studio precisare quando essa si annulla e quando è positiva.

Dominio: deve essere $\sin x + \cos x \neq 0$. Osservato che per $\cos x = 0$ è vera (il che porterà ad accettare i valori in cui la tan non esiste) si divide per cos x e si ha $\tan x \neq -1$ e cioè $x \neq \tfrac{3}{4}\pi$ e $x \neq 7/4\,\pi$

$f'(x) = \frac{\cos x(\sin x + \cos x) - \sin x(\cos x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} = (\sin x + \cos x)^{-2}$

$f''(x) = -2(\sin x + \cos x)^{-3}(\cos x - \sin x) = -2\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} = 2\frac{-\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x}\,\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

L'unico fattore interessante nello studio del segno è quello intermedio (anche in questo caso si dividerà per $\cos x \neq 0$ dopo aver osservato che per $\cos x = 0$ la derivata è positiva e vale 2.

$f''(x) \geq 0$ eq $\frac{-\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x} \geq 0$ eq $\frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} \geq 0$. Si tratta di una parabola con la concavità verso l'alto che è positiva per valori esterni all'intervallo delle radici cioè per $\tan x \leq 1 \vee \tan x \geq 1$ il che, sul cerchio goniometrico ci porta agli intervalli $x \in [\pi/4, 3/4\pi[\vee x \in [5/4\pi, 7/4\pi[$

Nota di correzione: molto dolente. Rimosse quasi tutte le conoscenze di goniometria. Naturalmente si poteva passare all'angolo doppio e operare al I grado invece che al II con i medesimi risultati

5) La funzione $y = f(x) = \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$ ha come dominio R_0. Calcolarne la derivata prima e seconda in R_0^+ e infine precisare cosa accade in R_0^-

Questo esercizio è più complicato dal punto di vista tecnico ma in compenso porta a risultati molto semplici. Il conto sarà svolto simultaneamente in R utilizzando il $\pm$ quando si dovranno eliminare quantità in modulo. Appena possibile converrà semplificare le radici eliminando da esse i denominatori (al quadrato).

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) - \frac{1}{\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1\,(-2x^{-3})}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}\pm 1}\left(\frac{1}{x^2} \pm \frac{1}{x^3\,\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}\right) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}\pm 1}\frac{1}{x^2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\pm 1}\frac{1}{x}\frac{\sqrt{x^2+1}\pm 1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

Dunque la derivata prima ha la stessa espressione nell'intero dominio. Nel calcolare la derivata seconda trattiamo il rapporto come un prodotto per testare l'utilità di questa possibilità:

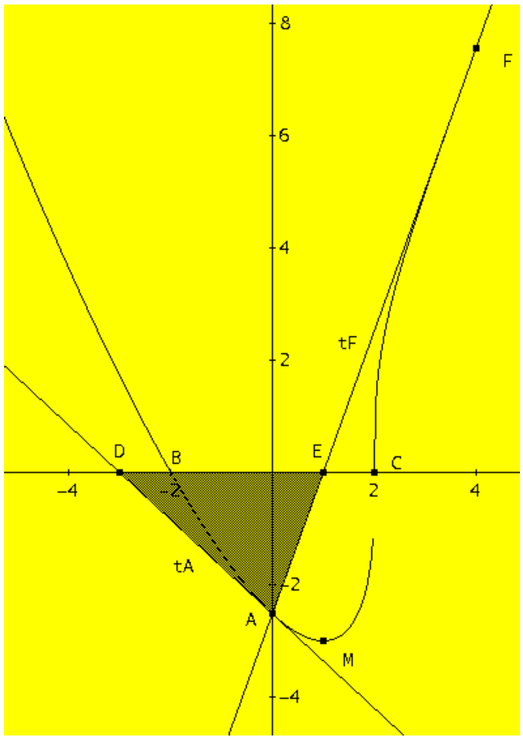
$$D\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) = D\left(\sqrt{x^2+1}\cdot x^{-1}\right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,x^{-1} + \sqrt{x^2+1}\,(-x^{-2}) = \frac{x^2-(x^2+1)}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

Punteggi a partire da una base di 3 punti

$1 \Rightarrow 1$	$2 \Rightarrow 1.5$	$3 \Rightarrow 1.5$	$4 \Rightarrow 2$	$5 \Rightarrow 3$

7 maggio 2007 4F PNI analisi: 3 ore
Problema

Si consideri la funzione γ: $y = f(x) = (x + 2)\cdot(x - 2)^{1/3}$ e si affrontino le seguenti questioni:



a) classificazione della funzione, dominio e continuità
b) intersezioni con gli assi y e x (rispettivamente punti A, B, C) e zona di positività
c) comportamento all'infinito e corrispondente funzione asintotica
d) studio del segno della derivata prima, crescere e decrescere con individuazione del minimo M e del punto di non derivabilità.
e) studio della derivata seconda con precisazione della concavità, dei due punti di flesso (indicare con F quello non critico).
f) determinazione delle equazioni delle due rette tangenti t_A e t_F. Per le due rette tangenti si trovino le coordinate dei due punti D ed E di intersezione con l'asse x
g) tracciamento del diagramma in un sistema ortonormale con scala 1 = 1 cm e calcolo dell'area del triangolo individuato da t_A, t_F e dall'asse x.
h) si consideri infine il fascio di rette r_m di centro A e coefficiente angolare m. Discutere graficamente al variare di m il numero e la posizione delle intersezioni tra γ e r_m

Questionario

1) Data la funzione $y = \varphi(x) = f(x)^{g(x)}$ con g(x) definita su tutto R quale condizione definisce il dominio di φ (motivare). Quale trasformazione bisogna applicare a φ per poterne studiare le caratteristiche? Su cosa si basa questa trasformazione?
2) Aiutandosi con i diagrammi stabilire il numero delle radici della equazione 2 sin x + 2 cos x – ln(1 – 2x) = 0. Determinare con 2 cifre significative la radice più a sinistra.
3) Consideriamo in $\Re^3$ i vettori $\vec{a_1} \equiv (a_{11}, a_{12}, a_{13},)$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ riferiti alla base ortonormale canonica $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$. Precisare cosa significa che i 3 vettori sono linearmente indipendenti. A cosa corrisponde questa condizione dal punto di vista algebrico? E dal punto di vista geometrico? Come si può stabilire la indipendenza lineare sfruttando la interpretazione geometrica? I vettori $\vec{a_1} = (5,4,3)$ $\vec{a_2} = (3,3,2)$ $\vec{a_3} = (8,1,3)$ sono linearmente dipendenti come puoi verificare immediatamente. Trova la relazione che li lega.
4) Dare la definizione di funzione limitata sia superiormente sia inferiormente nell'intorno di un punto di accumulazione c del dominio. La definizione va prima esposta in modo discorsivo e poi espressa in maniera simbolica. Una funzione limitata ammette limite? (motivare la risposta). Una funzione che ammette limite finito è limitata?(motivare la risposta).
5) E' data la funzione goniometrica $y = f(x) = 2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x – 5 \cos^2 x + 1$. Viene richiesto di determinarne il periodo e il codominio per via elementare (cioè attraverso l'uso di trasformazioni goniometriche). Limitarsi a quanto richiesto e argomentare.

27 ottobre 2007 5F PNI Integrali indefiniti

1) Utilizzando la sostituzione fornita, che appartiene alla classe di sostituzioni classificate da Eulero, dimostrare che $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+c} \right|$.

Sostituzione $\sqrt{x^2+c} + x = t$

$x^2 + c = t^2 + x^2 - 2tx \Leftrightarrow x = \frac{t^2-c}{2t}$ $\quad dx = ½ \frac{2t^2 - t(t^2-c)}{t^2} dt = ½ \frac{t^2+c}{t^2} dt$ $\quad \sqrt{x^2+c} = t - x = t - \frac{t^2-c}{2t} = \frac{t^2+c}{2t}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \int ½ \frac{t^2+c}{t^2} \frac{2t}{t^2+c} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + k = \ln \left|x + \sqrt{x^2+c}\right| + k$

2) Tenendo conto dell'integrale di cui al punto precedente calcolare l'integrale $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$

$x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$ e poiché $d(x+1) = dx$ si ha $I = \ln |x + 1 + \sqrt{x^2+2x+4}| + k$

3) Calcolare l'integrale $I = \int \frac{dx}{\sqrt{3}\sin x + \cos x + 2}$ che si determina attraverso una ben nota sostituzione.

posto $t = \tan \frac{x}{2}$ si ha $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\arctan t$ e dunque $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{3}\sin x + \cos x + 2} = \int \frac{2dt}{t^2+1} \frac{1+t^2}{2\sqrt{3}t + 1 - t^2 + 2 + 2t^2} = \int \frac{2dt}{t^2 + 2\sqrt{3} + 1} = \int \frac{2dt}{(t+\sqrt{3})^2} = \frac{-2}{t+\sqrt{3}} + k$

4) Calcolare l'integrale $I = \int \frac{dx}{x^2+4x+8}$

$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \int \frac{dz}{z^2+2^2} = ½ \text{ artan}\frac{z}{2} + k = ½ \text{ artan}(x/2+1) + k$

5) Questo esercizio richiede il calcolo preventivo di :

$I_1 = \int \cos z\, dz$ $\qquad I_2 = \int \cos^2 z\, dz$ $\qquad I_3 = \int \cos^3 z\, dz$

Calcolare ora $I = \int \cos^4 x \sin^2 x\, dx$ che contiene tutte potenze di grado pari e che dunque obbliga ad operare con una sola funzione goniometrica

$I_1 = \int \cos z\, dz = \sin z + k$

$I_2 = \int \cos^2 z\, dz = \int \frac{1+\cos 2z}{2} dz = ½ (z + ½ \sin 2z) + k$

$I_3 = \int \cos^3 z\, dz = \int \cos^2 z\, d(\sin z) = = \int (1 - \sin^2 z)\, d(\sin z) = \sin z - 1/3 \sin^3 z + k$

$I = \int \cos^4 x \sin^2 x\, dx = \int \frac{(1+\cos 2x)^2}{4} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = 1/8 \int (1+\cos 2x)(1-\cos^2 2x)\, dx = =$

$1/8 \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx = 1/8\, [x + I_1 - I_2 - I_3]$ con argomento $z = 2x$

6) Calcolare per parti l'integrale $I = \int x \text{ artan}\sqrt{x^2-1}\, dx$

$I = \int x \text{ artan}\sqrt{x^2-1}\, dx = \int \text{artan}\sqrt{x^2-1}\, d(1/2\, x^2) = ½ x^2 \arctan\sqrt{x^2-1} - ½ \int x^2 \frac{1}{1+x^2-1} \frac{1\,(2x)}{2\sqrt{x^2-1}} dx = ½ x^2$

$\arctan\sqrt{x^2-1} - ½ \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = ½ x^2 \arctan\sqrt{x^2-1} - ¼ \int z^{-1/2} dz = ½ x^2 \arctan\sqrt{x^2-1} - ½ \sqrt{x^2-1} + k$

1	2	3	4	5	6					
4	2	3	2	4	2					

29 novembre 2007 5F PNI: analitica + analisi (2 ore)

Compito PNI 92 modificato nel testo – valutazione in quindicesimi

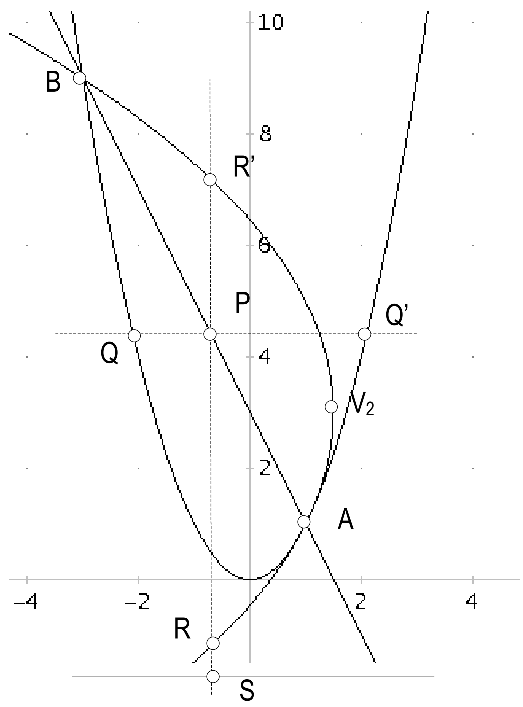
In un sistema di riferimento ortonormale xOy si considerino le due parabole:

$\mathscr{P}_1 : y - x^2 = 0$ e $\mathscr{P}_2 : y^2 + 8x - 6y - 3 = 0$

1) Si verifichi che $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ sono tangenti in A≡(1,1) e che hanno in comune un solo ulteriore punto B da determinare. Si tracci la figura
2) Qual è il significato del fatto che in A si ha una radice di molteplicità 3?
3) Detto P un punto di r_{AB} siano QQ' e RR' le due corde (orizzontale e verticale) di $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ passanti per P; sia S la proiezione di P sulla retta y + 2 = 0. Dopo aver trovato le coordinate dei punti coinvolti determinare la funzione $y = \dfrac{8\,\overline{PS}^2}{\overline{QQ'}\cdot\overline{RR'}}$ al variare di P
4) Spiegare come mai la curva trovata rappresenta una iperbole e determinarne gli asintoti
5) Operando opportunamente sui segmenti parabolici coinvolti dimostrare che l'area della regione di piano racchiusa tra le due parabole vale 64/3.

1	caratteristiche delle curve	2	
	intersezione	3	
	figura	1	
2	molteplicità di A	1	
3	scelta variabile	1	
	determinazione elementi	3	
	determinazione funzione	1	
4	riconoscimento funzione e asintoti	1	
5	primo segmento	1	
	secondo segmento	1	

1. $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ porta a una equazione di IV grado: $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$. Si scompone il polinomio con la divisione di Ruffini osservando che x = 1 è radice almeno doppia (indicatore di condizione di tangenza).
   Fatta la divisione si ottiene $(x - 1)^3(x + 3) = 0$ e dunque sia ha in x = 1 una radice tripla e una seconda intersezione in x = – 3.
   Per sostituzione B≡(–3,9)
   Dopo aver determinato il vertice della seconda parabola $x = -1/8\, y^2 + ¾\, y + 3/8$ si ha V_2≡ (3/2,3) si traccia la figura e si osserva che in A le due curve si attraversano.
   Può essere utile come completamento determinare le due rette tangenti in A
   $f'_1(x) = 2x$ e dunque $m_1 = f'_1(1) = 2$
   $f'_2(y) = -¼\, y + ¾$ e dunque $f'_2(1) = ½$ da cui $m_2 = \dfrac{1}{f'_2(1)} = 2$ (le due tangenti coincidono)
2. La equazione risolvente rappresenta concettualmente la differenza delle ordinate delle due parabole (provare ad esplicitare y nella seconda) e la presenza di $(x - 1)^3$ ci dice che nell'intorno di 1 tale differenza cambia segno. Ciò indica un cambiamento di segno di Δy e cioè un attraversamento.
3. Si calcola l'equazione di r_{AB} : y = – 2x + 3 e P≡(x,–2x + 3). Si possono ora determinare gli altri elementi.



Poiché Q e Q' stanno su $\mathscr{P}_1$ si ha $x_{Q'} = -x_Q = \sqrt{y_P} = \sqrt{-2x+3}$ con la condizione di esistenza $x \leq 3/2$.

$Q \equiv \left(-\sqrt{-2x+3}, -2x+3\right)$ e $Q' \equiv \left(\sqrt{-2x+3}, -2x+3\right)$

Pertanto $\overline{QQ'} = 2\,x_{Q'} = 2\sqrt{-2x+3}$

R e R' si determinano, fissato x, dalla esplicitazione di y nella equazione della seconda parabola $y^2 - 6y + 8x - 3 = 0$ porta a

$y = 3 \pm \sqrt{12-8x} = 3 \pm 2\sqrt{3-2x}$ e dunque $\overline{RR'} = \Delta y = 4\sqrt{3-2x}$

Infine $\overline{PS} = y_P - y_S = -2x + 3 -(-2) = -2x + 5$

La funzione richiesta ha dunque espressione: $y = \dfrac{8\,\overline{PS}^{\,2}}{\overline{QQ'} \cdot \overline{RR'}} = \dfrac{(5-2x)^2}{3-2x}$

4. Si tratta di una funzione razionale fratta di II grado cioè di una conica. La presenza di un punto di annullamento del denominatore indica la presenza di un asintoto verticale per $x = 3/2$
La determinazione del secondo asintoto avviene effettuando la divisione $(5-2x)^2 : (3-2x) = -2x + 7$ con resto 4 pertanto la funzione si può scrivere come $y = -2x + 7 + \dfrac{4}{3-2x} = -2x + 7 + o(1)$ e dunque $y = -2x + 7$ è l'asintoto obliquo.

5. Indichiamo con σ_1 e σ_2 i due segmenti parabolici definiti dalle due parabole con la retta r_{AB}
$\sigma_1 = \int_{-3}^{1} (y_r - y_{\mathscr{P}1})dx = \int_{-3}^{1} (-2x + 3 - x^2)\,dx$ si tratta di un segmento parabolico definito tra la parabola e l'asse x che viene intersecato in –3 e 1 pertanto $\sigma_1 = 2/3\ y_V\ \Delta x$
Ma $x_V = -1$ e dunque $y_V = 4$ e così $\sigma_1 = 2/3\ y_V\ \Delta x = 2/3 \cdot 4 \cdot 4 = 32/3$
In maniera assolutamente identica (salvo la necessità di operare in x) si opera per il secondo segmento (esercitarsi a scrivere le corrispondenti espressioni che non vengono qui esposte volutamente) e si ottiene nuovamente 32/3.
Dunque $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = 64/3$

5F 28 febbraio 2008 questionario (2 ore)

Rispondere a 5 quesiti scelti liberamente. In funzione compensativa viene ammessa la soluzione di un sesto quesito.

1) Risolvere per $x \in [0,\pi]$ l'equazione $\sin x \cos x + \cos^2 x = ½$ Esprimere il risultato sia in forma simbolica sia in forma approssimata con precisione alla quarta cifra decimale.
2) Si consideri per $x \in [0,\pi^2]$ la funzione $\gamma : y = f(x) = \sin\sqrt{x}$ a) Cosa si può dire della retta tangente in x = 0? b) Si può applicare il teorema di Rolle nell'intervallo assegnato? c) determinare l'ascissa del punto a tangente orizzontale.
3) Calcolare con il metodo preferito (De l'Hopital o Taylor_Mc Laurin) il seguente limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 - x^2}{\cos x^3 - 1}$
4) Cosa rappresenta la curva $\gamma : 2x^2 - 2y^2 - 3xy + 6x + 3y - 6 = 0$? In generale perché data la curva $y^2 + y(ax + b) + (cx^2 + dx + e) = 0$ se risulta $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow (x \le \alpha \vee y \ge \beta)$ si può affermare che si tratti di una iperbole? (cosa si può dire dei due punti di ascissa α e β?).
5) a) Trovare il minimo relativo della funzione $\gamma : y = f(x) = x^2 \ln x$. b) Spiegare perché si tratta di un minimo assoluto c) trovare l'area della regione di piano compresa tra γ e $\gamma_1 : y = g(x) = -x^2 + x$ esprimendo il risultato in forma esatta e dando il risultato approssimato con 3 cifre decimali.
6) a) Perché $\int_a^b \frac{\ln|x|\,dx}{x}$ ha senso solo se $a \cdot b > 0$? b) calcolare $I = \int \frac{\ln|x|\,dx}{x}$ c) dimostrare che $\int_a^b \frac{\ln|x|\,dx}{x} = ½ \ln(a \cdot b) \ln\frac{b}{a}$
7) Una piramide ha base rettangolare ABCD di lati $\overline{AB} = l$, $\overline{BC} = 2l$. Inoltre la proiezione del vertice V coincide con A e $\overline{VA} = 3l$. Calcolare a) l'angolo VCA b) l'angolo diedro tra le facce VCD e ABCD
8) Dimostrare che $\forall n$ naturale si ha: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
9) Quanto vale $f(n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$? Si consideri poi la funzione $y = g(x) = f(\mathrm{int}(x))$ dove f è la funzione precedente e int(x) rappresenta la parte intera di x. Quanto fa $\int_0^5 f(x)dx$?
10) Si consideri una generica iperbole equilatera. Dopo aver collocato gli assi nella maniera più semplice si indichi con a il parametro dell'iperbole e a) si dimostri che (tracciata una generica tangente in T) il segmento di tangente intercettato dagli asintoti è bisecato da T b) si calcoli l'area compresa tra l'iperbole, la tangente e il segmento che va dalla intersezione della tangente con un asintoto alla curva ed è parallelo all'altro asintoto.

Compito finale simulazione prova esame 6 ore 20/05/2008

Consegne: Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Non è ammesso allontanarsi dall'aula prima di 3 ore. Tempo a disposizione: dalla consegna del testo all'inizio della prima ora al termine della sesta ora.
E' ammesso solo l'utilizzo della calcolatrice scientifica non programmabile.
Numerare e intestare i propri fogli distinguendo bene tra bella e brutta copia e formare un unico fascicolo alla consegna. Non è consentito l'uso del "bianchetto". Tutti il materiale cartaceo utilizzato va riconsegnato. Nel caso si affrontino esercizi aggiuntivi precisare quali debbano essere valutati in ordine alla richiesta.

PROBLEMA 1

E' data la funzione γ: $y = f(x) = (20x + 10)\, e^{-1/2\, x}$

1) determinarne l'andamento calcolando anche l'inclinazione della tangente inflessionale e tracciarne il diagramma scegliendo opportunamente la scala
2) Tracciata la retta r : y = 10 spiegando, con riferimento alla continuità e al crescere e decrescere perché essa incontra γ una sola volta in $R^+ - \{0\}$
3) Giustificare la convenienza dell'utilizzo del metodo delle tangenti per determinare il valore della ascissa di intersezione e determinarlo con 4 cifre significative specificando con chiarezza la metodica usata e i conti.
4) Calcolare $\int_{-1/2}^{3/2} f(x)\, dx$
5) Determinare k in modo che la funzione data sia soluzione della equazione $y' + k\, y = 20\, e^{-1/2\, x}$

PROBLEMA 2

1) **Determina la funzione y = f(x) sapendo che** $f'(x) = \dfrac{8}{(x-1)^3} - 1$ **e che f(3) = 0.**
2) Verificato che $y = f(x) = 4 - x - \dfrac{4}{(x-1)^2}$, traccia il grafico γ della funzione.
3) Sia k un numero reale tale che k>4, determina l'area A(k) della regione finita di piano limitata da γ, dal suo asintoto e dalle rette x = 4 e x = k. Calcola $\lim\limits_{x \to +\infty} A(k)$
4) Determina i parametri a e b reali in modo che y = ln(a-x)+b sia tangente a γ nell'origine.
5) Determina la curva $y = f(x) = \int (ax + b)dx$ sapendo che è simmetrica rispetto all'asse y, ha un estremo relativo di ordinata 1 e passa per l'estremo relativo di γ

QUESTIONARIO:

q1) Sfruttando la formula del binomio di Newton e le tecniche di derivazione calcolare $\sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$

q2) Data la funzione $y = g(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + k$ determinare i valori di k per i quali la equazione g(x) = 0 ammette una sola radice reale.

q3) Disegnare l'andamento della funzione $y = 2x + \arctan \dfrac{x}{x^2 - 1}$ nell'intorno del suo punto di ascissa 1 (continuità, derivabilità) q4) Data la funzione $y = f(x) = x^{\alpha} \ln x$ con $\alpha>0$ calcolare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Non è ammesso premettere il confronto tra logaritmi e potenze ma bisogna eseguirlo

q5) Nel sistema parametrico lineare $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$ discutere cosa accade alle soluzioni al variare di λ facendo riferimento ai teoremi utilizzati.

q6) Calcolare $I = \int e^x \cos x dx$ e determinare contestualmente la relazione con $J = \int e^x \sin x\, dx$

q7) In un test con l'etilometro il signor X è risultato positivo e la percentuale di ubriachi nella sua fascia di età in quelle condizioni è statisticamente del 4%. Sapendo che la *sensibilità* del test (percentuale di positivi ubriachi) è del 95% mentre la *specificità* (percentuale di negativi sobri) è del 90% determinare la probabilità che il signor X fosse realmente ubriaco.

q8) Data la trasformazione T: $\begin{cases} X = 2x - 1 \\ Y = \dfrac{y}{2} \end{cases}$, stabilisci la natura di T e determina gli eventuali elementi uniti.

q9) Su 1000 studenti del Frisi si hanno in media 18 infortuni l'anno. La variabile casuale X "avere k infortuni al mese" descrive un evento raro. Qual è la probabilità che in un certo mese si abbiano 5 infortuni? E che se ne abbiano più di 5?

q10) Un dado a forma di tetraedro regolare ha una faccia blu, due facce rosse e una faccia verde. Dopo ogni lancio si registra il colore della faccia inferiore. Si considerino gli eventi di una partita fatta di due lanci successivi. E: "le due facce sono verdi"; F: " le due facce hanno lo stesso colore". Calcolare p(E), p(F), p(E|F). Nel caso di 10 partite qual è la probabilità che l'evento F si verifichi almeno 2 volte?