Zucchi II A Ottobre 98: introduzione alla g.a. e richiami sulle funzioni

$\boxed{1.}$ Indicare con una crocetta la risposta che si presume sia giusta.

• Fissata su una retta orientata una origine O e una unità di misura si chiama ascissa del punto P il segmento orientato OP	v	f
• I punti $P \equiv (\alpha, -\beta)$ e $Q \equiv (-\alpha, -\beta)$ sono simmetrici rispetto all'origine.	v	f
• La distanza dall'origine del punto $A \equiv (2,3)$ è pari a 2+3=5	v	f
• L'ascissa del baricentro di un triangolo di vertici A, B, C è data da ½ $(x_A + x_B + x_C)$	v	f
• Presi sull'asse x due punti A e B con $x_A < x_B$ sia C un punto dell'asse x tale che $\overline{AC} : \overline{CB} = \alpha$ con α reale qualsiasi. Se $\alpha < 0$ il punto C si trova sicuramente a destra di B.	v	f
• Il luogo geometrico di equazione $x^2 + y^2 = 0$ corrisponde all'insieme vuoto perché la somma di due quadrati non può mai dare zero.	v	f
• Il valore di k per il quale il luogo di equazione $k^2 (2x - 1) - 2k (-3y + 2) + (-2x + 3y) = 0$ passa per $P \equiv (1,1)$ è $k = 1$	v	f
• Il luogo geometrico di equazione $3x^2 - 5xy - 7y^2 - 3x - 2y - 21 = 0$ contiene il punto $P \equiv (2,-3)$	v	f

$\boxed{2.}$ I punti A, B, C, D sono collocati in un ordine qualsiasi lungo una retta orientata. Usando la identità di Chasles e le proprietà distributive dimostrare che: $\overline{AB}\ \overline{CD} + \overline{AC}\ \overline{DB} + \overline{AD}\ \overline{BC} = 0$

$\boxed{3.}$ I punti A, B, C si trovano su una retta orientata e hanno ascisse $x_A = 3$, $x_B = -2$, $x_C = -4$. Determinare il valore di k per cui $k\,\overline{AB} + (2k - 3)\,\overline{AC} + \overline{BC} = 0$

$\boxed{4.}$ Determinare nel piano il punto di ascissa 2 equidistante dai punti $A \equiv (3,-1)$ e $B \equiv (-1,4)$

$\boxed{5.}$ I punti $A \equiv (-5,-3)$ e $B \equiv (-4,0)$ sono due vertici del parallelogramma ABCD. Il punto di incontro delle diagonali è $M \equiv (-1,-2)$. Trovare gli altri vertici sfruttando una nota proprietà delle diagonali.

$\boxed{6.}$ È dato un triangolo rettangolo ABO di angolo retto nella origine O e con $A \equiv (1,\alpha)$ e $B \equiv (1,\beta)$. Sia H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa. Applicare il II teorema di Euclide per esprimere β in funzione di α. Calcolare poi m_{OA} e m_{OB} ed eseguire il prodotto che risulta essere –1. Cosa si può concludere sul coefficiente angolare di due rette perpendicolari?

$\boxed{7.}$ È dato il luogo $\mathcal{C} : 2x^2 + 2y^2 + 8x - 16y - 21 = 0$. Calcolare la equazione della curva $\mathcal{C}_1$ simmetrica di $\mathcal{C}$ rispetto al punto $A \equiv (-2, 4)$. Commentare il risultato trovato.

1⇒+½,0,–½	2 ⇒ 5	3 ⇒ 2	4 ⇒ 2.5	5 ⇒ 3	6 ⇒ 4	7 ⇒ 4	Totale

Zucchi II A Ottobre 97 richiami sulle funzioni

$\boxed{1.}$ Si consideri in $\mathscr{R} \times \mathscr{R}$ la funzione y = f(x) di dominio $\mathscr{D}$ e codominio $\mathscr{C}$: a) si dia la definizione di funzione e si spieghi chi è $\mathscr{D}$ b) se φ è la controimmagine di λ allora si scrive …c) supponiamo che f(x) sia invertibile; allora $y = f^{-1}[f(x)]$ e $y = f\,[f^{-1}(x)]$ in generale non coincidono; spiegare perché ragionando sul dominio. ⇒ 2.5

$\boxed{2.}$ Si tracci il diagramma delle due funzioni y= f(x) = 2x − 3 e $y = g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. a) Cosa suggerisce il diagramma (motivare la risposta)? b) Dimostrare quanto suggerito dal diagramma. ⇒ 2.5

$\boxed{3.}$ Data la funzione $y = f(x) = \begin{matrix} -x - 1 \text{ per } x \le 1 \\ x^2 - 3x \text{ per } x > 1 \end{matrix}$ a) tracciare il diagramma b) determinare in quali intervalli del dominio essa risulta invertibile. ⇒ 2.5

$\boxed{4.}$ Date le funzioni $y = f(x) = \sqrt{x-1}$ e $y = g(x) = x^2 + 1$ a) calcolare y = f[g(x)] e y = g[f(x)]; b) disegnare i loro diagrammi precisando dove coincidono. ⇒ 3

$\boxed{5.}$ Data la funzione y = f(x) definita dalla tabella qui a lato spiegare perché si tratti di una funzione non invertibile: ⇒ 1

x	0	1.2	2.4	3.6	4.8
y	1.2	2.4	3.6	2.4	1.2

$\boxed{6.}$ Perché se $y = F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ con f(x) e g(x) entrambe dispari F(x) è pari? Suggerimento: F(−x) = …
⇒ 2

Zucchi II F novembre 94: rette e parabole

1. Si determini l'equazione della parabola ad asse verticale $\mathscr{P}$: $y = ax^2+bx+c$ con le seguenti caratteristiche: $A \equiv (2,-4) \in \mathscr{P}$; $B \equiv (5,8) \in \mathscr{P}$; $x_V = 5/2$ e quindi si trovino i punti C e D di intersezione con l'asse x e si tracci il diagramma in scala $1 \leftrightarrow 1$ cm (R. $y = 2x^2 - 10x + 8$)
2. Scrivere l'equazione del fascio di rette r_m di centro $P \equiv (-1,2)$ e coefficiente angolare m (R. $y = mx + (m+2)$)
3. Scrivere l'equazione equivalente a $\mathscr{P} \cap r_m$ (R. $2x^2 - (10 + m)x + (6-m) = 0$)
4. Determinare le equazioni delle due tangenti t_1 e t_2 a $\mathscr{P}$ passanti per P e le coordinate dei due punti di tangenza T_1 e T_2 (R. $T_1 \equiv (-4,48)$ $T_2 \equiv A$)
5. Determinare l'area S del triangolo T_1T_2P (R. S=84)

Zucchi II A novembre 95: rette e parabole

1.1	Determinare l'equazione della parabola $\mathscr{P}$ ad asse verticale passante per A ≡ (2, 3/4), per B ≡ (3, 0) e per C ≡ (4, – 5/4)	$\mathscr{P}$: y = – 1/4 x² + 1/2 x + 3/4
1.2	Caratterizzare la curva individuando il vertice V, le intersezioni con gli assi e disegnando il diagramma in scala 1 = 1 cm	
1.3	Sia r_k il fascio di rette parallele di coefficiente angolare 1. Si determini l'equazione risolvente di $\mathscr{P} \cap r_k$ e si discutano le condizioni di intersezione	$x^2 + 2x + 4k - 3 = 0$
1.4	Posto: $\mathscr{P} \cap r_k = \{P_1,P_2\}$ si scriva la lunghezza della corda $\overline{P_1P_2} = f(k)$ e si determini il valore per cui $\overline{P_1P_2} = 2$	$\overline{P_1P_2} = 4\sqrt{2(1-k)}$
1.5	Si indichi con t la retta di r_k per cui $\mathscr{P} \cap t = \{T\}$. Si trovino t e T.	T ≡ (– 1, 0)
1.6	Indicata con n la retta passante per T e tale che n ⊥ t sia $\mathscr{P} \cap n = \{T,S\}$ si determini l'area σ del triangolo $\overset{\Delta}{STV}$	σ = 12

Zucchi II A novembre 96: rette e introduzione alla g.a.

Rispondere prima di tutto alle domande dell'esercizio 2 (mancanti 0, errate –0.5)

1. Sono dati i punti P≡(a,b) e Q≡(c,d). Determinare la condizione in base alla quale la retta r_{PQ} passa per l'origine (risulta ad + bc = 0). Determinare poi il coefficiente angolare della retta r_{OM} dove M è il punto medio di PQ e scrivere la condizione per cui r_{PQ} e r_{OM} sono perpendicolari (risulta $d^2 + c^2 = a^2 + b^2$). Dare la interpretazione geometrica del risultato trovato. Punteggio: 3, 3, 2
2. Sono date le due rette distinte *r: y = mx + q*, *s: y = m'x + q'* e il punto $P\equiv(\tilde{x},\tilde{y})\notin r$. Scrivere nello spazio a fianco *v* (vero), *f* (falso) o completare le seguenti affermazioni o questioni. Punteggio: 1, 1, 1, 1.5, 1, 1, 1, 1.5

$q = q' \wedge m \neq m' \Rightarrow r \cap s = \{Q\} \wedge Q\equiv (0,q)$		$r \perp s \Rightarrow m\,m' + 1 = 0$	
Dato un luogo γ di equazione F(x,y)=0 $P\equiv(\tilde{x},\tilde{y})\in\gamma \Leftrightarrow F(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$ identicamente		sulla retta r $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \lvert\Delta x\rvert \sqrt{m^2 + 1}$	
dist(P, r) = …		dist(P, $\vec{y}$) = …	
dist(P, s) = …		m = m' ⇒ dist(r, s) = …	

3. Determinare la retta r passante per P≡(–1,–2) perpendicolare a s: 2x – y + 5 = 0. Determinare quindi {H} = r∩s. Determinare $\overline{PH}$ e dist(s,P). Come mai sono uguali? Disegnare la figura in scala 1 = 1 cm Punteggio: 4

Zucchi II F dicembre 94: rette e circonferenze

1. Stabilire le caratteristiche della curva $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 2kx - 2ky + k^2 = 0$ con $k>0$. Successivamente, basandosi su conoscenze di geometria elementare, si determini l'area S della regione compresa tra la circonferenza e gli assi. ⇒ Risposte: centro C≡ (...,....) raggio r = ... , $S=k^2 (1-\pi/4)$
2. Dopo aver trovato l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per M≡(0,-1), N≡(3,-4), P≡(3,2), si determinino il centro C≡(α,β) e il raggio r.
   a) Si consideri poi il fascio di rette $\mathcal{R}_m$ passante per il punto Q≡(3,6), se ne determini l'equazione e si costruisca la figura in scala 1 = 1cm.
   b) Si discuta per quali valori di m si ha $\mathcal{R}_m \cap \mathcal{C} = \{A,B\}$ senza determinare A e B.
   c) Si scriva l'equazione della retta tangente t con coefficiente angolare positivo.
   d) Si scrivano nella forma più conveniente le equazioni delle due circonferenze tangenti a $\mathcal{C}$ e all'asse x con ascissa del centro = 3.
   e) Si calcoli l'area S della regione di piano racchiusa tra le tre circonferenze.

⇒ Risposte intermedie: C≡(3,-1); r = 3; t: $y = \frac{\sqrt{40}}{3}x + 6 - \sqrt{40}$; $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ si determinano banalmente osservando la figura; $S=4\pi$

Zucchi II F dicembre 95: parabole

1.1	Determinare l'equazione della parabola $\mathscr{P}_1$ ad asse verticale di vertice $V_1 \equiv (3; -2)$ e tangente alla retta t_1: $y = 3x - \frac{31}{2}$. Disegnare la figura in scala 1 = 1cm dopo aver individuato $\mathscr{P}_1 \cap \mathbf{x}$	$\mathscr{P}_1 : y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$ $\Rightarrow 4$
1.2	Determinare l'equazione della parabola $\mathscr{P}_2$ ad asse verticale di fuoco $F_2 \equiv (4; \ldots)$, di vertice $V_2 \equiv (\ldots; 4)$, e passante per $A \equiv (2; \frac{20}{9})$. Disegnare la figura nel sistema precedente dopo aver individuato $\mathscr{P}_2 \cap \mathbf{x}$	$\mathscr{P}_2 : y = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{32}{9}x - \frac{28}{9}$ $\Rightarrow 4$
1.3	Considerata la generica parallela r_k all'asse x si determini $\mathscr{P}_1 \cap r_k = \{P_1; P_2\}$ e si trovi il valore di k per cui si ha: $\overline{P_1P_2} = 8$.	$k = 6$ $\Rightarrow 3$

2.1	Si consideri la curva $\mathscr{P}$: $y = ax^2$ ed il suo generico punto $P \equiv (\alpha; a\alpha^2)$. Si scriva la generica retta r_m: $\forall m, P \in r_m$	$y = mx - m\alpha + a\alpha^2$ $\Rightarrow 2$
2.2	Si determini $\mathscr{P} \cap r_m = \{P; Q_m\}$ spiegando come mai $\forall m, \mathscr{P} \cap r_m \neq \emptyset$	$Q_m \equiv \left(\frac{m - a\alpha}{a} ; \frac{(m - a\alpha)^2}{a} \right)$ $\Rightarrow 4$
2.3	Dalla condizione $P \equiv Q_m$ si ricava ...... e questo risultato consente di determinare	$\Rightarrow 2$
2.4	La distanza tra il fuoco e la direttrice vale: Il vertice è definito come:	$\Rightarrow 2$

Zucchi II A 5/12/97: introduzione alla geometria analitica

1. Sono dati i luoghi geometrici $\gamma_1 : f(x,y) = 0$ e $\gamma_2 : g(x,y) = 0$.

1.1. La intersezione $\gamma_1 \cap \gamma_2$ dei due luoghi si trova analiticamente risolvendo (usare i simboli logici):

1.2. La unione $\gamma_1 \cup \gamma_2$ dei due luoghi si trova analiticamente risolvendo la equazione:

1.3. La equazione $f(x,y) + \lambda\, g(x,y) = 0$ con λ numero reale qualsiasi è un nuovo luogo γ_λ. Supponendo che $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{P\}$ di quale proprietà gode P rispetto a γ_λ ?

2. Data una retta $r : y = mx + q$ e due punti $A \equiv (x_A, \ldots) \in r$ e $B \equiv (x_B, \ldots) \in r$ la corda AB ha lunghezza:

(scrivere la formula)

3. Sono assegnati tre punti del piano A, B, C attraverso le loro coordinate.

3.1. Si vuole verificare se $A\hat{B}C = 90°$. Il modo più rapido consiste nel calcolare ______________________

e quindi verificare se ______________________________

3.2. Si vuole verificare se A, B, C sono allineati. Per farlo si procede così (descrivere i vari passi, sono 3)

3.3. Per trovare l'area σ del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ si procede così (descrivere i vari passi, sono 5):

4. Sono date le rette || $r : y = mx + q$ e $s : y = mx + q'$. Per determinare la distanza tra r e s si procede così (descrivere i vari passi, sono 3):

5. Data l'equazione $r_\lambda : (2\lambda + 3)x + (2\lambda - 3)y + (-\lambda + 1) = 0$

5.1 Trovare il centro G della famiglia di rette rappresentata dalla equazione

5.2 Dimostrare che $\forall\lambda$ si ha $G \in r_\lambda$

5.3 Trovare in r_λ la retta $r : A \equiv (1,1) \in r$

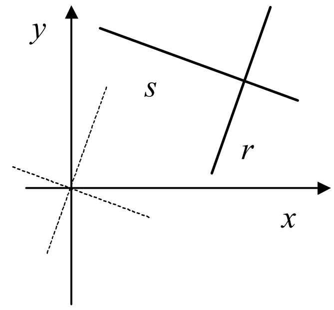
5.4 Verificare che data $s : 2x + 2y - 1 = 0$ si ha che $G \in r$ ma che $s \notin r_\lambda$

Zucchi II A 13/12/97 rette e introduzione alla geometria analitica

1. Sono dati i luoghi geometrici $\gamma_1 : f(x,y) = 0$ e $\gamma_2 : g(x,y) = 0$.

La equazione γ_λ: $f(x,y) + \lambda\, g(x,y) = 0$ con λ numero reale qualsiasi è un nuovo luogo. Spiegare perché γ_2 non può far parte di γ_λ ?

2. Data una retta $r : y = mx + q$ e due punti A e B su di essa si sa che la corda AB ha lunghezza $\overline{AB} = |\Delta x| \sqrt{m^2 + 1}$. Scrivere il risultato in funzione di m e Δy



3. Sono assegnate nel piano due rette perpendicolari $r : y = m\,x + q$ e $s : y = m'\,x + q'$

3.1. descrivere i passi che consentono di arrivare alla relazione $m\,m' = -1$

3.2. L'area del triangolo utilizzato nel calcolo precedente vale, alla fine, $\left|\dfrac{m^2 + 1}{2m}\right|$ dimostrarlo:

4. Sono date le rette $r : ax + by + c = 0$ e $s : a'x + b'y + c' = 0$. Si indica con γ_λ la loro combinazione lineare $ax + by + c + \lambda(a'x + b'y + c') = 0$.

4.1 Se $a : a' = b : b' \neq c : c'$ allora la famiglia γ_λ rappresenta:

4.2 Se $a : a' = b : b' = c : c' = k$ allora la famiglia γ_λ rappresenta:

5. Data l'equazione $r : \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$ si osservi che per $x = 0 \Rightarrow y = q$ mentre per $y = 0 \Rightarrow x = p$

5.1 Dunque, p e q rappresentano

5.2 Se la retta r è data nella forma $ax + by + c = 0$ allora p e q valgono rispettivamente

6. Dato il triangolo individuato dalle rette nel primo quadrante $y = mx$; $y = m'(x - k)$; $y = 0$

6.1 le coordinate dei 3 vertici sono A≡ B ≡ C ≡

6.2 l'area σ del triangolo vale ______________________________

II F Zucchi gennaio 94 circonferenze, parabole e funzioni

1. Si consideri l'equazione $\mathcal{C}_k$: $x^2+y^2+(k-2)x-ky-2k=0$ e
   a) si dimostri che $\forall k$ essa rappresenta una circonferenza di cui si chiede di determinare le coordinate del centro C_k il raggio $r^2=f(k)$ e le coordinate dei punti fissi A e B, cioè dei due punti per i quali passano tutte le circonferenze della famiglia (si consideri A il punto di ascissa minore).
   b) Si considerino poi le due circonferenze $\mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}_{-4}$ e si costruisca la figura in scala 1 = 2 cm.
   c) Si determini quindi l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ ad asse verticale passante per l'origine O e per i punti A e B.
   d) Si determini infine l'equazione delle due tangenti a $\mathcal{C}_{-4}$ e a $\mathcal{P}$ nel punto B e l'area σ del triangolo individuato dalle due tangenti e dall'asse y.
2. Stabilire le caratteristiche della curva $\mathcal{C}$: $y=f(x)=x/(x^2+1)$ per $x\geq 0$ soffermandosi in particolare sui seguenti elementi: simmetria rispetto all'origine, comportamento per $x\to+\infty$, f(0), segno della funzione e punto di massimo. Successivamente si consideri la parabola $\mathcal{P}$:$y=-x^2+x$ e si determini la intersezione $\mathcal{C}\cap\mathcal{P}$ cercando di interpretare la forma della equazione di 4º grado che si ottiene, soffermandosi in particolare sul significato della radice doppia ottenuta in x=0.

II A Zucchi gennaio 96: fasci di circonferenze

È consentito usufruire di risultati intermedi. Quando si salta un punto si incolla il testo e si scrive *assumo come valida la risposta*, quindi si incolla il successivo
Figura in scala 1 cm = 1 sulla prima pagina arricchita man mano che si procede. Mancanza della figura - 2

1	Data la retta r: $x + 2y - 4 = 0$ determinare i punti A e B di intersezione con gli assi y e x.	$\Rightarrow$ 0.5
2	Determinare la circonferenza $\mathcal{C}_{AB}$ che ammette AB come diametro e indicare il suo centro con P.	$\mathcal{C}_{AB} : x^2 + y^2 + - 4x - 2y = 0 \Rightarrow 1$
3	Considerata l'equazione $\mathcal{C}_\lambda : \mathcal{C}_{AB} + \lambda\, r = 0$ (con λ reale qualsiasi) scriverla in forma normale e spiegare come mai le circonferenze rappresentate dall'equazione passano tutte per A e B.	$\mathcal{C}_\lambda : x^2 + y^2 + (\lambda - 4)\, x + (2\lambda - 2)\, y - 4\lambda = 0 \Rightarrow 2$
4	Trovare il centro C_λ della generica circonferenza $\mathcal{C}_\lambda$ e verificare che $\forall\lambda$ si ha $C_\lambda \in n$ dove n: $y = 2x - 3$. Dare una giustificazione di questo fatto spiegando chi è n.	$C_\lambda \equiv (2 - \lambda/2,\ 1 - \lambda) \Rightarrow 3$
5	Indicata con $\mathcal{C}$ la circonferenza di $\mathcal{C}_\lambda$ con centro C di ordinata 3 se ne trovi l'equazione	$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + - 6x - 6y + 8 = 0 \Rightarrow 2$
6	Data la retta $r_k : y = k$ stabilire quando si ha $\mathcal{C} \cap r_k \neq \varnothing$ e interpretare il risultato	$3-\sqrt{10} \le k \le 3+\sqrt{10}$ $\Rightarrow 2$
7	Posto $\mathcal{C} \cap r_k = \{M,N\}$ si trovi $\overline{MN}$	$\overline{MN} = 2\sqrt{-k^2 + 6k +1}$ $\Rightarrow 2$
8	Si trovi il valore di k per cui $\overline{MN} = 6$	$k = 2 \vee k = 4 \Rightarrow 2$
9	Dopo aver osservato che per k = 2 M $\equiv$ A si trovino N e la tangente t_N a $\mathcal{C}$.	$N \equiv (6,2)$ $m = 3$ $\Rightarrow 3$

II A Zucchi gennaio 97; circonferenze, rette, parabole

$\boxed{1}$ Data la funzione in $\Re$ $\gamma : y = f(x) = (2x - 1)(x - 3)$ trovare il suo codominio $\mathcal{C}$. riflettendo sul fatto che si tratta di una parabola.

$\boxed{2}$ Perché la circonferenza non è una funzione ?

$\boxed{3}$ Perché la generica parabola ad asse verticale non è una funzione invertibile ?

$\boxed{4}$ Data la funzione in $\Re$ così definita $y = \begin{cases} 2x - 3 \mid \forall x, x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \mid \forall x, 1 < x \leq 2 \\ x + 1 \mid \forall x, x > 2 \end{cases}$ tracciarne il diagramma e stabilire se si tratta di una funzione invertibile.

$\boxed{5}$ Dati i punti $A \equiv (4,1)$, $B \equiv (2,8)$ e la retta $r: y = \frac{1}{2}x + 5$ si indichi con C un generico punto di r (si consiglia di indicarne con α la ascissa). Trovare il luogo geometrico del baricentro G del triangolo (è ammesso l'uso della relazione che fornisce le coordinate del baricentro).

II A Zucchi fasci di circonferenze marzo 98

Si consideri l'equazione $\mathcal{C}_k$: $x^2 + y^2 + (k - 2)x + (k - 2)y + (1 - 3k) = 0$

1. facendo riferimento al relativo teorema dimostrare che essa rappresenta $\forall k$ una circonferenza
2. determinare i punti A e B (con $x_A > x_B$) comuni alle infinite circonferenze giustificando le proprie affermazioni.

A≡(2,1) B≡(1,2)

3. Determinare nel fascio la circonferenza $\mathcal{C}$ ' tale che C≡(–1,2) $\in \mathcal{C}$ '

$\mathcal{C}$ ' : $x^2 + y^2 = 5$

4. Scrivere l'equazione della tangente t_A a $\mathcal{C}$ '

t_A : $y = -2x + 5$

5. Scrivere le coordinate del centro G_k della generica circonferenza di $\mathcal{C}_k$
6. Scrivere l'espressione dell'area σ_k del triangolo ABG_k

$\frac{1}{2}|1 - k|$

7. Determinare i due valori di k per i quali $\sigma_k = 5$ e spiegare con un ragionamento geometrico come mai le soluzioni sono 2.

II F Zucchi marzo 94: iperbole, ellisse e centri di simmetria

1) Da un punto qualsiasi P appartenente alla iperbole $\mathscr{I}$: $x^2-2y^2-4=0$ si conduca il segmento PH perpendicolare all'asse x. Dimostrare che $2PH^2=HA\cdot HA'$ dove A e A' rappresentano i vertici della iperbole.
2) Si consideri la conica $\mathscr{C}$: $3x^2+4y^2-12x-8y+4=0$ e la retta r: $y=2x$. Dopo aver determinato il centro di simmetria C della conica si scriva la equazione delle due curve nel sistema traslato YCX e si costruisca la figura in scala 1↔ 1cm
3) Scrivere l'equazione dell'ellisse riferita ai propri assi e passante per i punti A≡(3,2) e B≡(5,0). Detti P e P' i punti di intersezione della tangente alla curva in A con le tangenti condotte per gli estremi dell'asse maggiore, verificare che le rette r_{PF} e $r_{P'F'}$ si intersecano in un punto appartenente alla normale per A. Scrivere infine l'equazione della circonferenza di diametro P e P'e verificare che essa passa per i fuochi.

II F Zucchi aprile 94: circonferenze e rette

1) Si determini l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C≡(3,1) e raggio d=2. Si consideri poi il fascio di rette r_m: y=mx+3, se ne individuino le caratteristiche e si disegni la figura.
   a) Si discuta per quali valori di m si ha $r_m \cap \mathcal{C} = \{A,B\}$ e si determinino i valori di m per i quali si ha A≡B.
   b) Si scrivano le equazioni delle due rette tangenti t_1 e t_2 (t_1 con m maggiore).
   c) Si determinino i due punti di tangenza T_1 e T_2 (la determinazione di T_1 è banale)
   d) Si calcoli l'area del triangolo T_1T_2C
2) Stabilire le caratteristiche della curva $\mathcal{C}$: $x^2+y^2-2kx-2ky+k^2=0$ con k>0. Successivamente, basandosi su conoscenze di geometria elementare, si determini l'area S della regione compresa tra la circonferenza e gli assi.
3) Si determini l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per M≡(0,-1), N≡(3,-4), P≡(3,2) e si determinino il centro C≡(α,β) e il raggio d.
   a) Si consideri poi il fascio di rette r_m passante per il punto Q≡(3,6), se ne determini l'equazione e si costruisca la figura.
   b) Si discuta per quali valori di m si ha $r_m \cap \mathcal{C} = \{A,B\}$ e si determinino i valori di m per i quali si ha A≡B.
   c) Si scriva l'equazione della retta tangente t con coefficiente angolare positivo.
   d) Si scriva l'equazione delle due circonferenze tangenti a $\mathcal{C}$ e all'asse x con ascissa del centro 3.
   e) Si calcoli l'area S della regione di piano racchiusa tra le tre circonferenze.
4) Basandosi su considerazioni di simmetria scrivere l'equazione della circonferenza con centro nella origine e che risulta tangente a entrambi i rami dell'iperbole y=1/x.
   a) Mettere a sistema le due equazioni e commentare le caratteristiche della equazione di IV grado cui si perviene.
   b) Generalizzare la soluzione al caso della iperbole di equazione y=k/x.
   c) Se viene proposto un problema del genere per una generica funzione del tipo y=(mx+n)/(px+q) e per una circonferenza con centro nel centro di simmetria, come conviene procedere?

II F Zucchi circonferenze ed ellissi aprile 95

1) Si consideri l'equazione γ: $(a^2 - 10a)\,x^2 + (a - 28)\,y^2 - 2x - 3y - 5 = 0$. Determinare i valori a_1 e a_2 di a per i quali l'equazione rappresenta una circonferenza cercando di ricondursi alla forma normale e spiegare perché quando $c' < 0$, l'equazione $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$ rappresenta sicuramente una circonferenza.
2) Si determini l'equazione della tangente alla circonferenza γ: $x^2 + y^2 - 4x = 0$ nel suo punto T di ordinata positiva ed ascissa $x_T = \frac{18}{5}$
3) Si risolva graficamente la disequazione $\sqrt{x^2 - 4} > 4 - x$
4) Si scriva l'equazione della ellisse γ di centro C≡(2,3) e con semiassi di lunghezza 1 e 4. Si scrivano infine le coordinate dei due fuochi F_1 e F_2

II F Zucchi maggio 96: ellisse, circonferenza, iperbole

1	Si determini l'equazione dell'ellisse $\mathcal{E}$ con centro in $O\equiv(0,0)$, passante per $A\equiv(1,\frac{3\sqrt{3}}{2})$ e avente fuoco $F_2\equiv(0,\sqrt{5})$. Siano $\{B\} = \mathcal{E} \cap \overline{x}$ e $\{C\} = \mathcal{E} \cap \overline{y}$	$\Rightarrow 2$ $\mathcal{E} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
2	Si trovi l'equazione della retta r_{BC} e si scriva l'equazione dell'ellisse in forma esplicita, cioè come $y = \pm f(x)$.	$\Rightarrow 1$ r_{BC}: $y = -\frac{3}{2}x + 3$
3	Si determini l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ con coordinate del centro identiche e passante per C e B e si tracci il diagramma di $\mathcal{C}$ e r_{BC}	$\Rightarrow 2$ $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 5x - 5y + 6 = 0$
4	Si scriva, attraverso la combinazione lineare di parametro λ, l'equazione del fascio di circonferenze $\mathcal{C}_\lambda$ determinato da $\mathcal{C}$ e r_{BC}	$\Rightarrow 1$ $\mathcal{C}_\lambda$: $x^2 + y^2\ (3\lambda - 5)x + (2\lambda - 5)y + (6 - 6\lambda) = 0$
5	All'interno del fascio $\mathcal{C}_\lambda$ si determini $\mathcal{C}'$: $D\equiv(4,0) \in \mathcal{C}'$	$\Rightarrow 1$ $\lambda = -\frac{1}{3}$ $\mathcal{C}'$: $x^2 + y^2 - 6x - \frac{17}{3}y + 8 = 0$
6	Esemplificando con $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ si dica di quale proprietà gode un generico punto dell'asse radicale rispetto ad una qualsiasi circonferenza del fascio e si spieghi come mai con considerazioni geometriche	$\Rightarrow 2$
7	Determinare infine la circonferenza del fascio $\mathcal{C}''$ che interseca l'ellisse perpendicolarmente (motivare la risposta)	$\Rightarrow 2$ $\lambda = -\frac{1}{2}$ $\mathcal{C}''$: $x^2 + y^2 - \frac{13}{2}x - 6y + 9 = 0$
8	Si rappresentino su un unico diagramma la funzione omografica $y = \frac{2x-9}{x-3}$ e l'ellisse di cui al punto 1	$\Rightarrow 2$
9	Si spieghi come mai il diagramma di cui al punto precedente possa essere utilizzato per determinare le soluzioni della equazione di 4° grado: $9x^2 + 4\left(\frac{2x-9}{x-3}\right)^2 - 36 = 0$ Si determini il numero di soluzioni e, per quelle non determinabili in forma esatta si dia un possibile valore approssimato	$\Rightarrow 4$ Le soluzioni sono 2 e solo 2. $x_1 = 0$ e $x_2 \cong - \dots$

II A Zucchi maggio 97 parabole e discussioni

1) Determinare l'equazione della parabola $\mathscr{P}$ ad asse verticale con vertice V≡(1;–1) e passante per C≡(5;3).
2) Determinare quindi le intersezioni A e B della parabola con l'asse x e costruire la figura in scala 1 = 1 cm.
3) Data la generica retta orizzontale y = k determinare le ascisse dei due punti di intersezione D e E con $\mathscr{P}$ e determinare il valore di k per cui $\overline{DE} = 4\sqrt{6}$
4) Trovare quindi il simmetrico C' di C e la lunghezza della corda CC'. Dopo aver trovato C' scrivere l'equazione delle due rette tangenti t_C e $t_{C'}$
5) Scrivere l'equazione della circonferenza di centro C e passante per V
6) Descrivere il procedimento che consentirebbe di calcolare l'area del triangolo individuato dalle rette t_C, $t_{C'}$ e $r_{CC'}$ (ragionare sulla simmetria evidente ed argomentare).

Risposte: 1) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}$ 3) $x_{D\text{-}E} = 1 \pm 2\sqrt{k+1}$ 4) t_C : y = 2x – 7

II A Zucchi maggio 98: riepilogo geometria analitica

1 ⇒ 2	2 ⇒ 2	3 ⇒ 2	4 ⇒ 1.5	5 ⇒ 1	6 ⇒ 1.5	7 ⇒ 1.5	totale 11.5

Si consideri l'equazione $\mathcal{C}_k$: $x^2 + y^2 + (k - 3)x + (3k - 3)y + (2 - 6k) = 0$

1) facendo riferimento al relativo teorema dimostrare che essa rappresenta ∀k una circonferenza e calcolare il raggio R_k e il centro C_k corrispondenti.
2) determinare i punti A e B (con $x_A > x_B$) comuni alle infinite circonferenze giustificando le proprie affermazioni.
3) con un metodo a piacere, ma giustificato, determinare la retta *n* comune ai centri di tutte le circonferenze del fascio; determinare inoltre la circonferenza $\mathcal{C}$ ' appartenente al fascio e con centro C' sull'asse y.
4) Scrivere l'equazione della tangente t_A a $\mathcal{C}$ '
5) Determinate il punto D di intersezione tra t_A e *n*.
6) Trovare l'area del triangolo ADC' sfruttando le particolarità del triangolo
7) Trovare le coordinate del punto di $\mathcal{C}$ ' che presenta la massima distanza da A senza utilizzare l'equazione di $\mathcal{C}$ '. Spiegare il ragionamento seguito.

Risposte: $R_k = \sqrt{k^2 + 5/2}$ $C_k \equiv \left(\frac{3-k}{2}, \frac{3-3k}{2}\right)$ A ≡ (3,1) B ≡ (0,2) *n*: $y = 3x - 3$ $\mathcal{C}$ ': $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$

t_A: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$ D ≡ $(\frac{5}{3}, 2)$ $\sigma_{ADC'} = \frac{25}{6}$ A' ≡ (–3,–7)

II A Zucchi maggio 98: riepilogo parabole e circonferenze

In un sistema di assi cartesiani xOy sono assegnati i punti A≡(3,4) e B≡(5,0).

1) Determinare l'equazione del fascio di parabole ad asse verticale $\mathscr{P}_a$ passanti per A e per B.
2) Determinare l'ascissa del vertice della generica parabola del fascio.
3) Determinare tra le parabole del fascio l'equazione di quella $\mathscr{P}$ con vertice sull'asse y e di quella $\mathscr{P}$ ' passante per C≡(0,-5)
4) Determinare l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per A, B, C e costruire la figura con $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}$ ' e $\mathcal{C}$
5) Determinare l'insieme $\mathscr{P}' \cap \mathcal{C}$ = {A, B, C, D}
6) Spiegare attraverso considerazioni di simmetria perché $\mathscr{P} \cap \mathcal{C}$ = {A, B, E, F} può essere determinato immediatamente
7) Data l'equazione corrispondente a $\mathscr{P}_a$ spiegare come si possano determinarne i punti fissi e trovarli prescindendo dalle risposte precedenti.

Risposte: $\mathscr{P}_a$: $y = a x^2 + (-2 - 8a) x + (15a + 10)$; $\mathscr{P}$: $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{4}$; $\mathscr{P}$ ' : $y = -x^2 + 6x - 5$; $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = 25$; D≡(4,3)

1 ⇒ 1.5	2 ⇒ 0.5	3 ⇒ 0.5 + 0.5	4 ⇒ 1 + 1	5 ⇒ 1 + 1	6 ⇒ 1.5	7 ⇒ 2

II A Zucchi Maggio 99 riepilogo geometria analitica

Rispondere alla domanda 1 e ad una sola delle due successive

1. La parabola $\mathscr{P}$ ha equazione $y = -3x^2 + 5x - 4$. Dopo avere scritto la generica retta r_m passante per il punto $P \equiv (-3,2)$ si determinino le due rette tangenti a $\mathscr{P}$ t_1 e t_2 passanti per P. Si trovino infine, opzionalmente, le ascisse dei due punti di tangenza T_1 e T_2. Risposta $m_1 = 47$, $m_2 = -1$, $x_{T1} = -7$, $x_{T2} = 1$

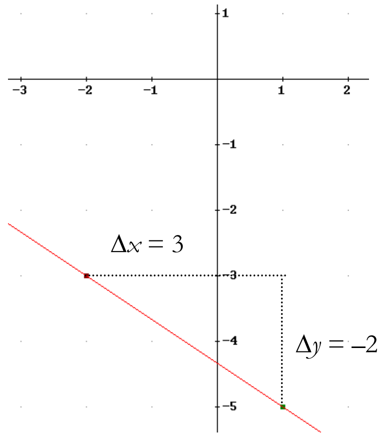
2. Supponiamo che due circonferenze $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ siano secanti e sia $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A,B\}$. Come è noto dalla differenza delle equazioni delle circonferenze si ottiene l'equazione di una retta. Spiegare perché tale retta passa sia per A, sia per B. Rispondere o in linguaggio naturale o in linguaggio simbolico

II A Zucchi giugno 97 Ellisse e parabola

1) Scrivere l'equazione della parabola ad asse verticale di vertice V ≡ $(2,\frac{8}{3})$ e passante per il punto R≡(1,2).

   Quindi, attraverso una generica parallela all'asse x, inscrivere nella regione di piano compresa tra la parabola e l'asse delle x un rettangolo con un lato sull'asse x e di perimetro 8. Scrivere l'equazione della circonferenza circoscritta a detto rettangolo
2) Una ellisse centrata nell'origine e una parabola ad asse verticale con la concavità verso l'alto sono tangenti nel punto (0,–b). Senza eseguire calcoli giustificare la figura e quindi spiegare, ragionando sulle caratteristiche della intersezione, perché l'equazione risolvente che si ricava dalla intersezione delle due curve è del tipo $x^4 + k\,x^2 = 0$ dove k è un numero negativo.

retta e luoghi geometrici 3F PNI 4/10/02



1. In un sistema ortonormale xOy con scala 1 = 1cm disegnare la retta passante per P≡(–2,–3) di coefficiente angolare $m = -\frac{2}{3}$. Dal disegno deve essere leggibile il metodo seguito.

Si disegna (in scala) il punto richiesto e quindi preso un Δx comodo (per esempio Δx = 3) si calcola $\Delta y = m\,\Delta x = -\frac{2}{3}3 = -2$. Ciò consente di individuare il secondo punto e tracciare la retta.

Note: quando il testo precisa la scala è obbligatorio usarla (in ogni caso non si usano i quadretti perché se si deve fare una misura la cosa diventa inutilmente complicata).
Non era richiesta la determinazione della equazione e l'esercizio serviva a verificare la comprensione del significato del coefficiente angolare. Non andava bene una determinazione dii tipo tabellare

2. Scrivere l'equazione della retta r passante per {P}= $s_1 \cap s_2$ e parallela a s: 2x – 3y + 5 = 0. Si sa che s_1: y = 5x – 4 e s_2: y = –5x – 3.

$s_1 \cap s_2$: per differenza 10 x – 1 = 0 da cui x = 1/10 e y = 5/10 – 4 = ½ – 4 = –7/2 quindi P ≡(1/10,–7/2).
$m_r = m_s = 2/3$ (si esplicita)
Pertanto r: y + 7/2 = 2/3 (x – 1/10) ⇔ y = 2/3 x – 2/30 – 7/2 = 2/3 x – 107/30

Note: quando è noto un punto e il coefficiente angolare la retta si trova usando l'apposito teorema che è anche il nostro punto di partenza nella costruzione della teoria della retta.
I sistemi si risolvono semplicemente per differenza
Avevo sperato che qualcuno dei bravi lo facesse con i fasci (si fa la combinazione lineare e poi si trova il k con la condizione di parallelismo e il problema è finito).

3. Usando l'apposito teorema determinare l'area del triangolo ABC sapendo che A≡(–1,–2), B≡(–2,5), C≡(1,3)

$\sigma = ½ \sum|x\,\Delta y| = ½|(-1)(5-3) + (-2)(3+2) + 1(-2-5)| = ½\,|-2-10-7| = 19/2$

Note: Il modulo non è opzionale e lo si calcola al termine della sommatoria e non termine a termine (ricordo che il modulo di una somma è diverso dalla somma dei moduli).

4. Scrivere l'equazione delle due rette r_1 e r_2 aventi distanza $d = 3\sqrt{5}$ dalla retta s: 2x + y – 1 = 0

Basta applicare la formula della distanza e indicare genericamente con (x,y) le coordinate del luogo richiesto; si ha $\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2+ b^2}} =$

$$\frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{2^2+ 1^2}} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |2x + y - 1| = 15 \Leftrightarrow 2x + y - 16 = 0 \vee 2x + y + 14 = 0$$

Note: ho visto molti errori di calcolo, prevalentemente di segno; non cambiava nulla se si esplicitava la equazione e si usava la corrispondente relazione (si faceva un passaggio in più) e molti hanno sbagliato i segni esplicitando l'equazione.

5. Dato P≡(1,2) determinare il trasformato P' di P attraverso una simmetria definita dalla retta r: y = 4x +1

Per trovare P' bisogna trovare l'equazione della normale n per P; quindi si trova il punto H di incontro con r e infine si trova P' con una simmetria centrale di centro H.
$m_n = -1/m = -1/4$; pertanto n: y – 2 = –1/4(x – 1) ⇔ y = –1/4 x +1/4 + 2 = –1/4 x + 9/4
$n \cap r$: 4x + 1 = –1/4 x + 9/4 ⇔ 17/4 x = 5/4 ⇔ x = 5/17 ∧ y = 4x + 1 = 20/17 + 1 = 37/17
$x_{P'} = 2\,x_H - x_P = 10/17 - 1 = -7/17$ e analogamente $y_{P'} = 2\,y_H - y_P = 74/17 - 2 = 40/17$. Dunque P' ≡ (–7/17,40,17)

Note: molto pochi hanno capito cosa fare e in genere hanno sbagliato i conti. Non serviva determinare la distanza tra P e r

6. Un parallelogramma ABCD è definito dai punti A≡(0,0), B≡(α,0), C≡(γ,δ). Determinare le coordinate del punto D.

Indichiamo genericamente con (x,y) le coordinate di D. Dovremo imporre il parallelismo a coppie dei due lati; pertanto:

$$m_{AB} = 0 = m_{CD} = \frac{y - \delta}{x - \gamma} \text{ da cui } y = \delta$$

$$m_{BC} = \frac{\delta - 0}{\gamma - \alpha} = m_{AD} = \frac{y}{x} \text{ da cui } x = y\,\frac{\gamma - \alpha}{\delta} = \gamma - \alpha$$

Note: come ho ripetutamente chiarito a lezione e anche durante il compito la determinazione deve essere analitica usare cioè la definizione di parallelogramma.

7. Si considerino le due famiglie di rette r_k : (2 + k)x + (3 – k)y + (1 + k) = 0 e s_k : (1 – k)x + (2 + k) y + (2 – k) = 0. Determinare il valore di k per il quale $r_k \parallel s_k$.

Per la condizione di parallelismo per rette eespresse in forma di equazione generale si ha:
$a_r\, b_s - a_s\, b_r = 0 \Leftrightarrow (2 + k)^2 - (1 - k)(3 - k) = 0 \Leftrightarrow 4 + 4k + 4k^2 - 3 + 4k - k^2 = 0 \Leftrightarrow 8k = -1 \Leftrightarrow k = -1/8$

Note: meglio usare la condizione che non usa il coefficiente angolare (cosa sarebbe successo se la retta parallele era verticale?)

8. Trovare i due centri delle famiglie di cui al punto precedente.

Si scrivono le due equazioni nella variabile k e si impone che esse siano sempre vere (ciò richiede l'annullamento dei coefficienti) r_K : (2x + 3y + 1) +k (x – y +1) = 0 è vera $\forall k \Leftrightarrow$ 2x + 3y + 1= 0 $\wedge$ x – y +1 = 0 $\Leftrightarrow$ (si moltiplica per 3 la seconda e si somma) 5x + 4 = 0 da cui x = –4/5 mentre y = x +1 = –4/5 +1 = 1/5. Il centro C_r ha coordinate (–4/5,1/5). Si osservi che la retta di equazione x – y + 1 = 0 non è mai ottenibile da r_k pertanto si tratta di una retta del fascio (perché passa per C_r) non presente (mancante) nella famiglia.

Analogamente si trova che $C_S \equiv$ (–4/3,–1/3)

Note: il riferimento alla equazione in k è obbligatorio; si può anche ragionare con le due rette verticale ed orizzontale ma in tale caso si devono sostituire le coordinate ed osservare che si ottiene una identità). Era meglio la prima metodica perché la domanda successiva richiedeva il calcolo della retta mancante.

9. Determinare l'area del triangolo individuato dalle due rette mancanti e dai due centri.

Dall'esercizio 8 si osserva che le due famiglie presentano entrambe la stessa retta mancante r: x – y +1 la quale, di conseguenza, passa per i due centri; pertanto il triangolo richiesto è degenere essendo formato dal segmento C_rC_s e da un qualunque punto della retta mancante. L'area del triangolo degenere è sempre 0.

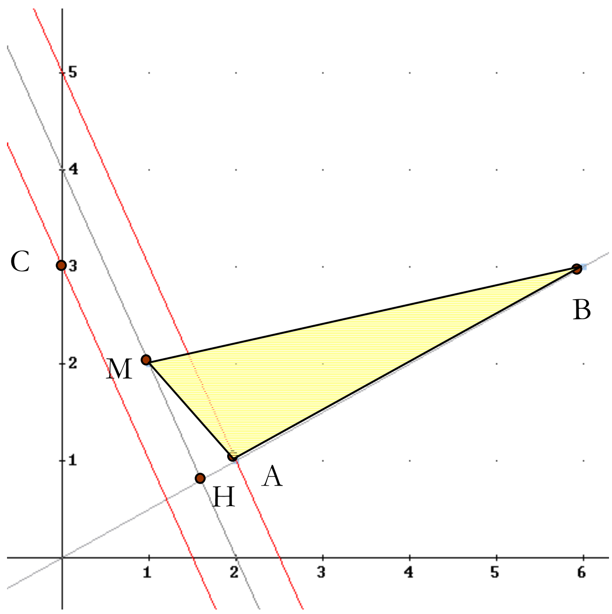
Note: la degenerazione della figura andava spiegata bene.

Commento finale: sfruttare di più la teoria e le metodiche esposte a lezione; disimbranarsi nella soluzione dei sistemi lineari con il metodo della combinazione lineare con eliminazione delle variabili; imparare ad essere opportunisti nella scelta della forma del teorema da usare; attenzione perché quando passeremo ai problemi complessi un solo errore algebrico, anche di segno, può compromettere la risolubilità dell'intero problema.

1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1	7,1	8,1	9,1	punti	●	●-	½●	×+

3F ordinamento 11/10/01 I luoghi geometrici e la retta

$\boxed{1.}$ Sono assegnati nel piano xOy i punti A ≡(2,1), B ≡(6,3), C ≡(0,3) e si indichino con M il punto medio di AC e con H il piede della perpendicolare per M a r_{AB}. Determinare: a) il perimetro 2p del triangolo ABM b) l'equazione di r_{HM} c) le coordinate di H d) il luogo dei punti aventi distanza $d = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dalla retta r_{HM} e) scrivere in forma analitica il luogo dei punti con distanza minore di $\frac{1}{\sqrt{5}}$ dalla retta r_{HM}



soluzione

a) $x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$ $y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \Rightarrow M \equiv (1;2)$

$\overline{AB} = |\Delta x|\sqrt{m^2+1}$ pertanto calcolo i diversi coefficienti angolari

$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad m_{MA} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{-1} = -1$ $\quad m_{MB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{5}$

$\overline{AB} = |\Delta x|\sqrt{m^2+1} = 4\frac{\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$ e analogamente $\overline{MA} = \sqrt{2}$ e $\overline{MB} = \sqrt{26}$

$2p = \overline{AB} + \overline{MA} + \overline{MB} = 2\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{26}$

b) poiché r_{HM} è perpendicolare a r_{AB} si ha $m_{HM} = -\frac{1}{m_{AB}} = -2$

pertanto r_{HM}: $y - 2 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 4$

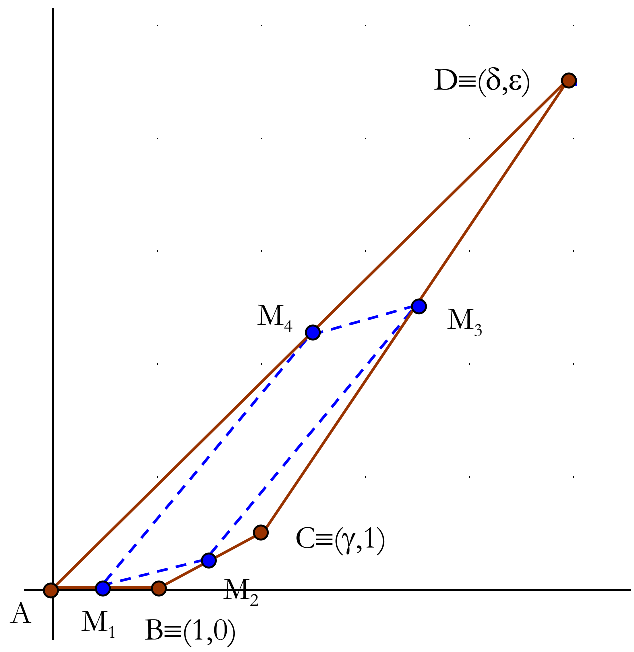
c) H si determina tramite la intersezione delle due rette e bisogna determinare $r_{AB}: y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$

Mettendo a sistema si ottiene: $-2x + 4 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5} \wedge y = \frac{4}{5}$

d) $d = \text{dist}(r_{HM},P) = \frac{|y_P - mx_P - q|}{\sqrt{m^2+1}}$ e nel nostro caso P≡(x,y) consentirà di trovare il luogo richiesto.

$\frac{|y + 2x - 4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |y + 2x - 4| = 1 \Leftrightarrow y + 2x - 4 = \pm 1 \Leftrightarrow y = -2x + 5 \vee y = -2x + 3$

e) Si tratta di una striscia delimitata da due rette parallele che sono state appena determinate; il luogo richiesto si scrive così $\gamma = \{(x,y) \mid y < -2x + 5 \wedge y > -2x + 3\}$



$\boxed{2.}$ Si consideri un generico quadrilatero ABCD e si indichino con M_1, M_2, M_3, M_4 i punti medi di AB, BC, … Dimostrare che il quadrilatero $M_1M_2M_3M_4$ è un parallelogramma. Per non appesantire la trattazione si limiti la dimostrazione solo ad una coppia di lati.

Soluzione

Facciamo coincidere l'asse x con il lato AB e l'origine con il punto A. Quindi fissiamo le unità di misura in modo che l'ascissa di B e l'ordinata di C valgano 1.

I vertici del quadrilatero avranno coordinate: A≡(0,0), B≡(1,0), C≡(γ,1), D≡(δ,ε)

Usando la relazione che fornisce le coordinate del punto medio (semisomma) si ottengono le coordinate di M_1, M_2, M_3, M_4.

$M_1 \equiv (\frac{1}{2}, 0)$ $M_2 \equiv (\frac{\gamma+1}{2}, \frac{1}{2})$ $M_3 \equiv (\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{\varepsilon+1}{2})$, $M_4 \equiv (\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$

$$m_{M1M2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\gamma+1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{\gamma} \qquad m_{M3M4} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\varepsilon+1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\gamma+\delta}{2} - \frac{\delta}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{\gamma}$$

ne consegue che i due lati M_1M_2 e M_3M_4 sono paralleli. Analogamente si esegue la dimostrazione per l'altra coppia di lati.

Griglia di correzione

1a	1b	1c	1d	1e	2rifer	2punti	2parallel	•	•-	•$\frac{1}{2}$	X+	lin

2F PNI 05/10/2002 retta e primi elementi di analitica

1. In un sistema di riferimento ortonormale xOy con scala 1 = 1cm tracciare usando il significato di coefficiente le rette r_A con A≡(1,3) e $m_A = -2/3$ e r_B con B≡(2,3) e $m_B = -5/6$. Dal diagramma determinare per via grafica le coordinate approssimate del punto P di intersezione delle due rette.

Dopo aver tracciato i punti A e B si determina un secondo punto di ogni retta sfruttando il fatto che m = Δy/Δx e nel nostro caso abbiamo preso esattamente i valori del numeratore e del denominatore. Si tracciano le rette con la massima accuratezza e, con riferimento alla figura si può dire che il punto di incontro abbia coordinate approssimative (6.3,–0.4).
Il punto, calcolato per via analitica risulta essere (6,-1/3)
Quando le rette sono quasi parallele basta sbagliare di poco per avere grandi errori nel risultato.

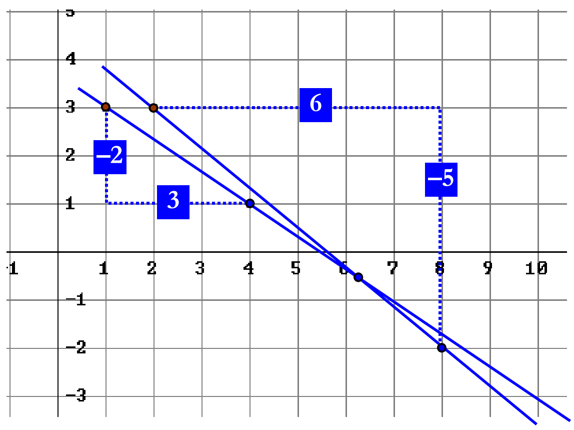
2. Data la retta r: 2x – 3y +4 = 0 scrivere la equazione della retta s || r passante per A≡(–1,–2)

Esplicitando la equazione si ha y = 2/3 x + 4/3 pertanto m_r = 2/3
Se ora si utilizza l'equazione della retta per un punto si ottiene:
y + 2 = 2/3 (x + 1) che diventa y = 2/3 x – 4/3

3. Dato il segmento AB con A≡(–1,–2) e B≡(2,3) scrivere l'equazione dell'asse n del segmento.

L'asse è la perpendicolare passante per il punto medio M.
$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3+2}{2+1} = 5/3$ Per la condizione di perpendicolarità: $m_n = -1/m_{AB} = -3/5$. Il punto medio M ha coordinate $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = ½$ e $y_M = ½$ pertanto: n: (y – ½) = –3/5 (x – ½) che porta a y = –3/5x + 4/5

4. Sono assegnati i punti A≡(1,3), B≡(3,5) e C≡(7,4). Determinare analiticamente le coordinate del punto D che definisce il parallelogramma ABCD.



Affinché il quadrilatero sia un parallelogramma devono eguagliarsi a coppie i coefficienti angolari. SE indichiamo genericamente con (α,β) le coordinate del punto D avremo:
$m_{AB} = 1$ $m_{BC} = -1/4$ $m_{CD} = (\beta - 4)/(\alpha - 7)$ $m_{DA} = (\beta - 3)/(\alpha - 1)$
Si ottiene così il sistema: (β – 4)/(α – 7) = 1 ∧ (β – 3)/(α – 1) = –1/4 ⇔ β – 4 = α – 7 ∧ 4β – 12 = –α + 1 ⇔ α – β = 3 ∧ α + 4β = 13 ⇔ 5β = 10 cioè β = 2 ∧ α = 3 + β = 5. Il punto D ha coordinate (5,2)

5. Sono dati i punti A≡(–1,–2) e B≡(2,3) e si sa che il triangolo ABC ha area σ = 11. Dopo aver determinato l'altezza *h* stabilire se il punto C≡(4,–1) soddisfa le condizioni poste dal problema.

$b = \overline{AB} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ $h_C = \frac{2\sigma}{b} = \frac{22}{\sqrt{34}}$

Calcoliamo dist(C,r_{AB}) se essa risulta pari all'altezza il punto C soddisfa la condizione.
r_{AB} : y + 2 = 5/3 (x +1) che porta a y = 5/3 x – 1/3

$$\text{dist}(C,r_{AB}) = \frac{|y_C - m_{AB}x_C - q|}{\sqrt{m_{AB}^2 + 1}} = \frac{|-1 - (5/3)\cdot 4 + 1/3|}{\sqrt{34/3}} = \frac{22}{3}\,\frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{22}{\sqrt{34}}$$

Poiché la distanza di C dalla base è pari all'altezza il punto dato soddisfa le condizioni poste.

6. Dati i punti A≡(–2,3) e B≡(1,–2) stabilire se il punto C≡(3,–17/3) è allineato ai primi due.

Basta verificare se $m_{AB} = m_{BC}$

$m_{AB} = \frac{3+2}{-2-1} = -5/3$ $m_{BC} = \frac{-17/3 + 2}{3-1} = -11/6 \Rightarrow$ i punti non sono allineati

7. Data la retta r: y = –½ x +3 e il punto P≡(2,3) trovare le coordinate del Punto P' simmetrico di P rispetto a r.

Basta trovare il punto H appartenente a r che sta sulla perpendicolare per P e poi sfruttare le proprietà del punto medio.
$m_n = -1/m_r = 2$ pertanto n: y – 3 = 2(x – 2) che porta a y = 2x – 1
n ∩ r : –½ x +3 = 2x – 1 ⇔ 5/2 x = 4 ⇔ x = 8/5 ∧ y = 16/5 – 1 = 11/5 pertanto H≡(8/5,11/5)

dovrà essere $\frac{x_P + x_{P'}}{2} = x_H$ e pertanto $x_{P'} = 2x_H - x_P = 16/5 - 2 = 6/5$

Analogamente $y_{P'} = 2y_H - y_P = 22/5 - 3 = 7/5$

1, 1.5	2,1.5	3,2	4,2	5,3	6,1	7,3	punti	●	●-	½●	×+

2F PNI 8/2/03 Parabola

In caso difficoltà gravi è possibile usare le risposte intermedie dopo averlo dichiarato. In un sistema di riferimento ortonormale xOy:

a) determinare i coefficienti a, b, c di una parabola $\mathcal{P}$ ad asse verticale sapendo che $A\equiv(2,-3/4)\in\mathcal{P}$, $B\equiv(-1,0)\in\mathcal{P}$ e che indicata con x_V l'ascissa del vertice si ha $x_V = 1$

b) Determinare le coordinate del vertice e le ascisse dei due punti P e Q della parabola per i quali si ha y = 5/4 (indicare con P quello più a sinistra).

c) Tracciare la figura in scala 1 = 1 cm

d) Scrivere l'equazione della generica retta r_m di coefficiente angolare m passante per P e determinare l'equazione risolvente della intersezione tra parabola e generica retta.

e) Risolvere l'equazione e determinare le ascisse dei due punti di intersezione P e R_m.

f) Dopo aver scritto l'espressione di $\overline{PR} = f(m)$ determinarne il valore che corrisponde a m = ½ e in corrispondenza di tale valore determinare anche l'equazione della retta r_{PR} e l'ascissa del punto R.

g) Utilizzare le informazioni del punto precedente per trovare l'area σ del triangolo PRA.

$a = 1/4$, $b = -½$, $c = -3/4$; $x_R = 4m + 4$; $\overline{PM} = |4m+6|\sqrt{m^2+1}$; $\sigma = 16$

coefficienti	
V, P e Q	
figura	
r_m equazione	
P e R_m	
PR	
σ	

a) La parabola ad asse verticale ha equazione $\mathcal{P}$: $y = ax^2 + bx + c$ e imponendo le condizioni date si ha:

$A\equiv(2,-3/4)\in\mathcal{P} \Rightarrow -3/4 = 4a + 2b + c$

$B\equiv(-1,0)\in\mathcal{P} \Rightarrow 0 = a - b + c$

$x_V = -b/2a = 1 \Rightarrow 2a + b = 0$

Si elimina c per differenza e si ha:

$$\begin{cases} 3a + 3b = -3/4 \\ b + 2a = 0 \\ c = b - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1/4 \\ 2a + b = 0 \\ c = b - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/4 \\ b = -2a = -½ \\ c = b - a = -½ - 1/4 = -3/4 \end{cases}$$

La parabola richiesta ha dunque equazione $\mathcal{P}$: $y = 1/4\, x^2 - ½\, x - 3/4$

Nota di correzione: nel primo passaggio si imposta il sistema precisando simbolicamente cosa si sta facendo; nel secondo si elimina c e si esplicita c; nel terzo e quarto si elimina a o b e si arriva alla soluzione; le equazioni devono essere scritte con i polinomi ordinati nello stesso ordine.

b) La ordinata del vertice si trova per sostituzione $y_V = 1/4 - ½ - 3/4 = -1$

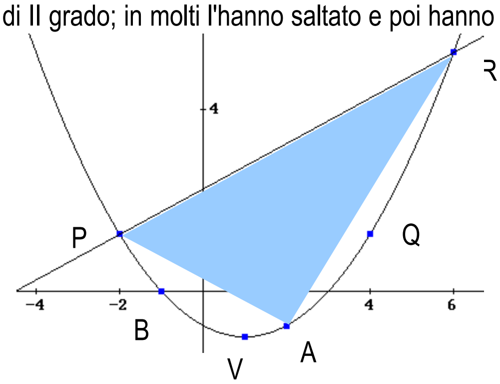
$x \mid y = 5/4 \Rightarrow 1/4\, x^2 - ½\, x - 3/4 = 5/4 \Leftrightarrow 1/4\, x^2 - ½\, x - 2 = 0$ $\quad \Delta = 1/4 + 2 = 9/4 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ $\quad x = \frac{½ \pm 3/2}{½} = 2(½ \pm 3/2) = \begin{matrix} -2 \\ +4 \end{matrix}$

Pertanto $P\equiv(-2,5/4)$ e $Q\equiv(4,5/4)$

Nota di correzione: osservare l'ultimo passaggio della soluzione dell'equazione di II grado; in molti l'hanno saltato e poi hanno sbagliato il conto.

c) La figura è messa qui a lato ed è stata completata con gli elementi trovati nei punti successivi.

Nota di correzione: 1 quadretto è 4 mm e pertanto la scala 2 quadretti = 1 non corrisponde a 1 cm tranne nei quadretti da 5 mm; il tracciamento della figura, se dà luogo ad incongruenze di tracciamento, è un'ottima occasione per ricercare gli errori (in molti hanno sbagliato il punto precedente ma solo uno si è posto il problema di una figura che non era più simmetrica



d) La generica retta per P di coefficiente angolare m ha equazione:

$r_m : y - y_P = m(x - x_P) \Leftrightarrow y - 5/4 = m(x + 2) \Leftrightarrow y = mx + 2m + 5/4$

Per trovare l'equazione risolvente della intersezione basta risolvere il sistema delle due equazioni e il modo più rapido per arrivarci consiste nel fare la differenza; il polinomio va scritto ordinando i diversi termini in modo di arrivare ad una equazione facilmente maneggiabile quando si passerà al calcolo del discriminante;

sottraendo ed ordinando si ottiene:

$0 = 1/4\, x^2 - (½ + m)\, x - 2 - 2m \Leftrightarrow 1/4\, x^2 - (m + ½)\, x - (2m + 2) = 0$

Note di correzione: difficoltà nel fare la differenza e nell'ordinare

e) L'equazione è una parametrica di II grado della quale è nota a priori la soluzione $x = -2$; per questa ragione il Δ della equazione dovrà essere un quadrato perfetto (condizione che, garantendo la estrazione di radice, consentirà di determinare una soluzione che non dipende da m).

$\Delta = (m + ½)^2 + 2 + 2m = m^2 + m + 1/4 + 2 + 2m = m^2 + 3m + 9/4 = (m + 3/2)^2$ (come previsto)

$$x = \frac{(m + ½) \pm (m + 3/2)}{½} = 2[(m+½) \pm (m + 3/2)] = \begin{matrix} -2 = x_P \\ 4m + 4 = x_R \end{matrix}$$

Note di correzione: anche in questo caso ci sono stati errori algebrici nel calcolo del discriminante e nella determinazione delle due radici.

f) $\overline{PR} = f(m) = |\Delta x| \sqrt{m^2 + 1} = |4m + 4 - (-2)| \sqrt{m^2 + 1} = |4m + 6| \sqrt{m^2 + 1}$

Per m= ½ si ottiene $\overline{PR} = 8\sqrt{\frac{5}{4}} = 4\sqrt{5}$ mentre r_{PR} si ottiene per sostituzione nella equazione del fascio:

$r_{PR}: y = mx + 2m + 5/4 = ½\, x + 1 + 5/4 = ½\, x + 9/4$

$x_R = 4m + 4 = 4·½ + 4 = 6$

Note di correzione: i dati richiesti, ad eccezione della lunghezza della lunghezza della corda in funzione di m (per il calcolo della quale è utile il teorema visto in generale sulla lunghezza di un segmento posto su una corda di coefficiente angolare noto) si ottenevano per semplice sostituzione

g) $\sigma_{PRA} = ½\, \overline{PR}\, \text{dist}(A, r_{PR})$

Mentre $\overline{PR}$ è già stato determinato dobbiamo calcolare l'altezza del triangolo utilizzando la formula della distanza tra un punto e una retta data

$$\text{dist}(A, r_{PR}) = \frac{|y_A - m\, x_A - q|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|-3/4 - ½\, 2 - 9/4|}{\sqrt{5}/2} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$\sigma_{PRA} = ½\, 4\sqrt{5}\, \frac{8}{\sqrt{5}} = 16$$

Note di correzione: chi arriva qui di solito non sbaglia; il problema sono quelli che non ci arrivano.

2F PNI 15/3/2003 circonferenza:

La circonferenza $\mathcal{C}$ passa per O≡(0,0), A≡(0,4) e B≡(6,0)

a) Tenendo conto della particolarità dei dati determinare centro C e raggio R nel modo più semplice possibile (ma se non si individua subito la strada procedere per sostituzione)
b) Sfruttando la appartenenza di A alla circonferenza determinare l'equazione della tangente t_A ed individuare su di essa il punto D con $x_D = 4$
c) Determinare (con un metodo a scelta) la seconda retta tangente passante per D ed indicarla con t_E (E è il secondo punto di tangenza)
d) Determinare caratteristiche area a perimetro del quadrilatero CADE.

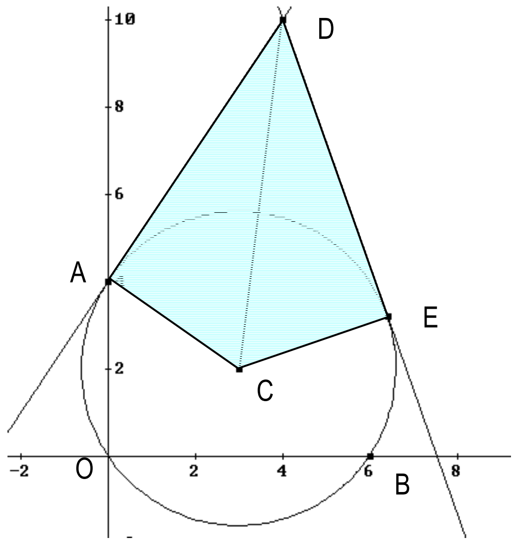
figura	C e R	t_A e D	t_E ed E	σ e 2p		

a) Poiché i 3 punti si trovano sugli assi cartesiani è immediato determinare il centro e il raggio attraverso la intersezione degli assi che sono verticale ed orizzontale:
asse di OA: y = 2
asse di OB: x = 3
pertanto il centro C≡(3,2) mentre R = $\overline{OC} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ e l'equazione è $(x - 3)^2+(y - 2)^2= 13$
Nota di correzione: si può anche osservare che poiché AOB è retto AB è un diametro e allora C è il punto medio di AB.
Se si opta per la sostituzione è obbligatorio richiamare la equazione della circonferenza in forma normale e poi operare le sostituzioni dichiarando cosa si fa: $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$; A ≡(0,4)∈$\mathcal{C}$ ⇒ 16 + 4b + c = 0 etc.

b) la tangente è perpendicolare al raggio CA con A≡(0,4) e pertanto $m_{tA} = -\frac{1}{m_{CA}} = -\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{3-0}{2-4} = \frac{3}{2}$

t_A: $y - 4 = \frac{3}{2}(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + 4$

Il punto D si trova per sostituzione e si ottiene da $x_D = 4$ che $y_D = 10$ e dunque D≡(4,10)
Nota di correzione: quando è noto il punto di tangenza questo è il metodo più rapido ed efficace; in alternativa si può trovare il fascio per A e usare la condizione per cui la distanza dal centro è uguale al raggio, ma si tratta di un metodo più lungo e da cui si evidenzia la non padronanza delle metodiche; lo stesso discorso vale (in forma esaltata) per chi calcola la equazione risolvente



c) per determinare la seconda retta tangente tracciata da D (che è esterno alla circonferenza) bisogna determinare l'equazione della generica retta per D e quindi usare o la intersezione (con annullamento del Δ) oppure imporre che la distanza dal centro sia uguale al raggio (il II metodo è più veloce ma non consente la determinazione immediata del punto di tangenza)
r_D: $y - 10 = m(x - 4) \Leftrightarrow y = mx - 4m + 10$

Si avrà la tangente quando dist(r_D,C) = R $\Leftrightarrow \frac{|2-m3+4m-10|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{13} \Leftrightarrow$

$|m - 8| = \sqrt{13(m^2 + 1)} \Leftrightarrow (m - 8)^2 = 13(m^2 + 1)$
$12m^2 + 16m - 51 = 0$ $\qquad \Delta/4 = 64 + 51\cdot 12 = 26^2$

$x = \frac{-8 \pm 26}{12} = \begin{cases} \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\ -\frac{34}{12} = -\frac{17}{6} \end{cases}$ il primo valore corrisponde al coefficiente angolare di t_A mentre il secondo fornisce la tangente t_E

la cui equazione si trova per sostituzione : $y = -\frac{17}{6}x + \frac{34}{3} + 10 = -\frac{17}{6}x + \frac{64}{3}$.

Nota di correzione: chi si è imbarcato nella equazione risolvente non è riuscito poi a districarsi dai conti che comportavano una equazione parametrica di II grado con coefficienti contenenti m^2.

d) Per determinare il quadrilatero non è necessario determinare il punto E. In effetti il quadrilatero ADEC ammette CD come asse di simmetria (per le proprietà delle tangenti da un punto esterno ad una circonferenza) e dunque sia il perimetro sia l'area possono essere trovate ragionando sul triangolo ACD che è completamente noto.

Il punto E si può trovare o intersecando t_E con la circonferenza o scrivendo la equazione di r_{CE} che passa per C e ha coefficiente angolare noto e intersecandola con t_E. Usiamo il secondo metodo:

r_{CE}: $y - 2 = \frac{6}{17}(x - 3) \Leftrightarrow y = \frac{6}{17}x + \frac{16}{17}$

$r_{CE} \cap t_E$: $-\frac{17}{6}x + \frac{64}{3} = \frac{6}{17}x + \frac{16}{17} \Leftrightarrow x\left(\frac{6}{17} + \frac{17}{6}\right) = \frac{64}{3} - \frac{16}{17} \Leftrightarrow x\frac{36+17^2}{17\cdot6} = \frac{64\cdot17 - 16\cdot3}{17\cdot3} \Leftrightarrow x = \frac{2\cdot1040}{325} = \frac{32}{5}$

si trova l'ordinata per sostituzione: $y_E = \frac{6}{17}\cdot\frac{32}{5} + \frac{16}{17} = \frac{272}{17\cdot5} = \frac{16}{5}$ dunque $E \equiv \left(\frac{32}{5}, \frac{16}{5}\right)$

$\overline{AD} = |\Delta x|\sqrt{m^2+1} = 4\sqrt{\frac{13}{4}} = 2\sqrt{13}$

$\sigma_{ADEC} = 2\sigma_{ACD} = \overline{AD}\ \overline{AC} = 2\sqrt{13}\sqrt{13} = 26$

$2p = 2(2\sqrt{13} + \sqrt{13}) = 6\sqrt{13}$

Nota di correzione: la determinazione di E attraverso la intersezione con la circonferenza avrebbe comportato calcoli più complessi.

2F PNI 9/4/2003 verifica finale corso di recupero

1. Dati i punti A≡(–2,3) e B≡(1,–1/4) la retta r_{AB} ha equazione (determinare prima m_{AB})
2. Se C≡(–3,–2) il triangolo ABC ha area σ =
3. La retta s parallela a r: 2x + 3y –5 = 0 e passante per A ha equazione s:
4. Determinare le caratteristiche principali della parabola $\mathscr{P}$: y = ½ (x – 2)(x – 4). Indicare con A, B, C le intersezioni con gli assi x e y e con V il vertice.
5. Determinare la tangente t parallela a r_{CB} e il punto di tangenza T
6. La circonferenza $\mathscr{C}$ ha equazione $x^2 + y^2 + 4x - 3y - 2 = 0$. Determinarne il centro C e il raggio R e quindi tracciare la figura.
7. Determinare l'equazione della tangente alla circonferenza di coefficiente angolare m = 2

retta per 2 punti	
altezza e area	
retta ||	
caratteristiche parabola	
tangente e punto di tangenza	
caratteristiche circonferenza	
tangente	

2F PNI 15/4/2003 recupero assenti compito circonferenza

Dopo aver trovato con il metodo preferito (purché la metodologia venga spiegata) l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per M≡(0,-1), N≡(3,-4), P≡(3,2), si determinino il centro C e il raggio *R*.

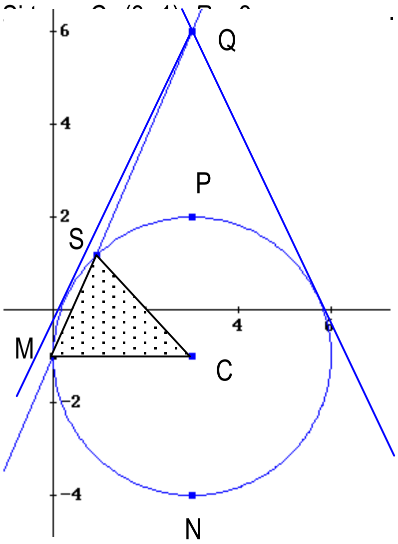
Si consideri poi il fascio di rette r_m passante per il punto Q≡(3,6), se ne determini l'equazione e si costruisca la figura in scala 1 = 1cm completando la figura man mano che si determinano i punti successivi.

Attraverso la formula della distanza si determinino in r_m le rette tangenti a $\mathcal{C}$ limitandosi al calcolo dei due coefficienti angolari.

Indicata con r_M la retta di r_m passante per M si trovi la sua equazione e attraverso essa le coordinate del punto S in cui essa interseca C oltre che in M.

Trovare l'area del triangolo MCS.

equazione	figura	tangenti	punto S	area	



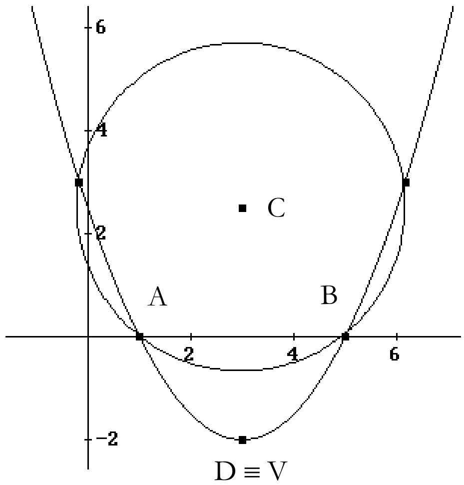
$\cdot 3 \cdot m + 6$; $m_{12} = \pm \frac{2\sqrt{10}}{3}$; $r_M : y = \frac{7}{3}x - 1$; $S \equiv \left(\frac{27}{29}, \frac{34}{29}\right)$ $\sigma = \frac{189}{58}$

2F PNI: 10/5/2003 verifica finale

a) Scrivere in forma normale l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ con centro C≡(3,5/2) e raggio R = $\frac{\sqrt{41}}{2}$
b) Scrivere l'equazione della parabola ad asse verticale $\mathcal{P}$ passante per A≡(1,0), B≡(5,0) e D≡(3,–2)
c) Disegnare le due curve in uno stesso sistema di riferimento ortonormale xOy usando la scala u = 1 cm
d) Intersecare le due curve e scrivere l'equazione risolvente in forma normale
e) In base a quanto suggerito dalla figura individuare una prima coppia di soluzioni
f) Determinare tramite il teorema di Ruffini e il corrispondente algoritmo per la divisione le ascisse dei 4 punti di intersezione

eq $\mathcal{C}$	eq $\mathcal{P}$	figura	eq risol.	2 radici	Ruffini	valutazione
1	3	1	2	1	2	

a) Applicando l'equazione generale della circonferenza si ha: $(x-3)^2 + (y-5/2)^2 = \frac{41}{4}$ e sviluppando: $x^2 + y^2 - 6x - 5y + 9 + 25/4 - 41/4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 5y + 5 = 0$
Nota di correzione: era richiesto l'uso della equazione in forma generale eppure 3 o 4 persone hanno pensato di partire da quella in forma normale e uno si è persino posto il problema di verificare se $a^2/4 + b^2/4 - c > 0$
Preciso inoltre che C≡(3,5/2) vuol dire ascissa 3 e ordinata 5/2 anche perché se si interpreta la virgola (che io non uso mai come separatore decimale adeguandomi alla notazione scientifica internazionale) come separatore decimale si ottiene una frazione e mancherebbe un dato.



b) Data l'equazione generale della parabola ad asse verticale $y = ax^2 + bx + c$ si ha imponendo il passaggio per i punti dati:
$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 25a+5b+c=0 \\ 9a+3b+c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24a+4b=0 \\ 16a+2b=2 \\ c=-(a+b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+b=0 \\ 8a+b=1 \\ c=-(a+b) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a=1 \Leftrightarrow a=1/2 \\ b=-6a=-3 \\ c=-(½-3)=5/2 \end{cases} \quad \text{pertanto } \mathcal{P}: y = ½x^2 - 3x + 5/2$$
Naturalmente si poteva arrivare molto più rapidamente al risultato usando l'equazione $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ visto che α e β erano noti. Si osservi che D è il vertice visto che $(\alpha + \beta)/2 = x_D$
Nota di correzione: citare l'equazione; eliminare c per differenza. Con i dati disponibili se si arriva ad a < 0 c'è necessariamente un errore (vedi figura); nel dubbio sostituire le coordinate fornite per una rapida e semplice verifica. Se c'è un errore è inutile proseguire. IL termine noto è l'ordinata della intersezione con l'asse y. Le figure devono essere armoniche e avere la forma della parabola.
c) vedi figura
d) Si sostituisce e si arriva alla equazione risolvente $x^4 - 12x^3 + 40x^2 - 24x - 5 = 0$;
Nota di correzione: vista la simmetria era più conveniente risolvere in y arrivando subito ad una equazione di II grado che consentiva dinon ricorrere alla scomposizione con il metodo di Ruffini.
e) Dalla figura si osserva che A e B sono comuni alle due curve e pertanto si può eseguire una doppia divisione per x – 1 e per x – 3 ottenendo una equazione di II grado:
f)

	1	–12	40	–24	–5
1		1	–11	29	5
	1	–11	29	5	0
5		5	–30	–5	
	1	–6	–1	0	

$x^4 - 12x^3 + 40x^2 - 24x - 5 = (x-1)(x-5)(x^2 - 6x - 1) = 0 \Leftrightarrow$ intersezioni $x=1 \vee x=5 \vee x=3-\sqrt{10} \vee x=3+\sqrt{10}$

3G ordinamento 18/10/99 I luoghi geometrici e la retta

Svolgere l'esercizio 3 e uno a scelta dei primi 2.

1. Dato il generico quadrilatero ABCD collocarlo opportunamente un sistema di riferimento xOy e precisare le coordinate dei diversi vertici. Dopo aver trovato le coordinate dei 4 punti medi M_1, M_2, M_3, M_4 dimostrare che il quadrilatero $M_1M_2M_3M_4$ è un parallelogramma. Limitare la dimostrazione a 2 soli lati per ragioni di tempo.

2. Date le rette r: $y = mx$ e s: $y = m'x$ dimostrare che $r \perp s \Rightarrow m \cdot m' = -1$. Spiegare quindi perché la condizione di perpendicolarità rimane valida anche se le sue rette non passano per l'origine.

3. Sono assegnati in un sistema di riferimento ortonormale xOy una retta r: $y = \frac{1}{2}x - 3$ e due punti $A \equiv (1,2)$ e $B \equiv (2,-1)$. Indicata con s la parallela a r passante per A si trovino su di essa i due punti C_1 e C_2 per i quali il triangolo ABC ha area $\sigma = \frac{21}{4}$

3G ordinamento 16/11/99 I fasci di rette e la circonferenza

$\boxed{1.}$ 1.1) Data l'equazione parametrica di I grado r_k : (k+1)x + (k-1)y + (1-3k) = 0 dimostrare che le infinite rette da essa rappresentate passano tutte per un punto fisso G e determinarne le coordinate. 1.2) Determinare il coefficiente angolare della generica retta r_k e quindi trovare la particolare retta di coefficiente angolare 2 1.3) Spiegare perché la retta *r* : y = -x + 3, nonostante passi per G, non fa parte di r_k

$\boxed{2.}$ Scrivere l'equazione della circonferenza γ passante per i punti A≡(-4,2) e B≡(2,2) e il cui centro appartiene alla retta *r* : 3x + 2y + 1 = 0.

$\boxed{3.}$ Data la circonferenza γ: $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 8 = 0$ e il suo punto T di ascissa 0 e ordinata positiva, determinare le coordinate di T e il valore del coefficiente angolare della retta tangente t_T. Indicato con C il centro della circonferenza e con D il punto di intersezione tra t_T e l'asse x trovare l'area del triangolo (rettangolo) CTD

Griglia di correzione

1 ⇒ 1.5+1+1	2 ⇒ 2.5	3 ⇒ 2 +2	Totale 10

3G ordinamento 20/11/01 I fasci di rette e la circonferenza

$\boxed{1.}$ Data il luogo geometrico r_k di equazione $(2k – 2)x + (k+1)y + (1 – k) = 0$ a) dimostrare spiegando il procedimento che si tratta di una famiglia di rette che ammette un punto fisso G e che una delle rette per G non è in r_k b) trovare il valore di k corrispondente alla retta del fascio parallela a s: $3x + 2y – 4$ c) determinare la retta del fascio passante per $A\equiv(–1,3)$ e spiegare la stranezza del risultato trovato.

Soluzione

a) Si tratta di una famiglia di rette (equazione parametrica di I grado). Per vedere che le rette ammettono un punto fisso osserviamo che:

$r_k : (2k – 2)x + (k+1)y + (1 – k) = 0 \Leftrightarrow k(2x+y–1) + (–2x+y+1) = 0 \Leftrightarrow k\, f(x,y) + g(x,y) = 0$ Questa equazione è vera $\forall k \Leftrightarrow 2x+y–1 = 0 \wedge –2x+y+1 = 0$. Si tratta di un sistema che corrisponde alla intersezione delle due rette di equazione corrispondenti alle equazioni del sistema. Si ottiene immediatamente la soluzione $x = ½$ e $y = 0$ e pertanto $\forall k$ si ha $G\equiv(½,0)\in r_k$ cioè tutte le rette della famiglia passano per G.

La retta s: $2x+y–1 = 0$ passa per G ma non si ottiene da r_k perché $k(2x+y–1) + (–2x+y+1) = 0 \Leftrightarrow (2x+y–1) + 1/k\,(–2x+y+1) = 0$ e per ottenere s si dovrebbe avere $1/k = 0$ cioè $k\,0 = 1$ (impossibile)

b) due rette espresse in forma generale sono parallele se hanno i coefficienti proporzionali: $(2k – 2) : 3 = (k + 1) : 2 \Leftrightarrow 4k – 4 = 3k + 3 \Leftrightarrow k = 7$

c) $A\equiv(–1,3)\in r_k \Leftrightarrow –2k + 2 + 3k + 3 + 1 –k = 0 \Leftrightarrow 0k + 6 = 0$ impossibile; in effetti il punto A appartiene alla retta s e come si è visto tale retta non si ottiene da r_k.

$\boxed{2.}$ Data la retta r: $y = 2x – 1$ a) determinare la famiglia di circonferenze $\mathcal{C}_\alpha$ di centro $C\equiv(\alpha,0)$ e raggio R con $\alpha>½$ tangenti alla retta r. b) Dopo aver dimostrato che si ha $R = \dfrac{2\alpha–1}{\sqrt{5}}$ determinare le coordinate del punto di tangenza T

a) Affinché $\mathcal{C}_\alpha$ sia tangente a r deve essere R = dist(C,R) e per il teorema sulla distanza si ha $R = \dfrac{|0 –2\alpha + 1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\alpha – 1}{\sqrt{5}}$ vista la condizione $\alpha > ½$. Dunque $\mathcal{C}_\alpha$: $(x – \alpha)^2 + y^2 = \dfrac{(2\alpha – 1)^2}{5}$

b) Il punto di tangenza appartiene a r e la retta tangente r è ortogonale al segmento CT. Pertanto deve essere $m_{CT} = – ½$. Se indichiamo con γ l'ascissa di T avremo $y_T = 2\gamma – 1$ e pertanto $m_{CT} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2\gamma – 1 –0}{\gamma – \alpha} = – ½ \Leftrightarrow$

$4\gamma – 2 = \alpha – \gamma \Leftrightarrow 5\gamma = \alpha + 2 \Leftrightarrow \gamma = \dfrac{\alpha + 2}{5}$. Pertanto $y_T = 2\gamma – 1 = \dfrac{2\alpha – 1}{5}$ e $T \equiv \left(\dfrac{\alpha + 2}{5}, \dfrac{2\alpha – 1}{5}\right)$

$\boxed{3.}$ a) Determinare l'equazione della circonferenza passante per $A\equiv(–2,2)$, $B\equiv(–1,3)$, $C\equiv(\frac{3}{2},1)$. b) Senza svolgere i conti spiegare perché se si interseca la circonferenza con la generica retta per B si ottiene una equazione risolvente con il discriminante corrispondente ad un quadrato perfetto.

a) Dalla equazione normale della circonferenza $x^2 + y^2 +ax + by + c = 0$ si ha imponendo la appartenenza dei 3 punti: $8 – 2a + 2b + c = 0 \wedge 10 – a + 3b + c = 0 \wedge \frac{13}{4} + \frac{3}{2}a + b + c = 0$. La soluzione del sistema si ottiene molto semplicemente per somma e sottrazione: $–2 – a – b = 0 \wedge \frac{19}{4} – \frac{7}{2}a + b = 0 \wedge c = 2a – 2b – 8 \Leftrightarrow \frac{11}{4} – \frac{9}{2}a = 0$ da cui $a = \frac{11}{18} \wedge b = –\frac{47}{18} \wedge c = –\frac{14}{9}$

b) La equazione risolvente deve essere di II grado e una delle soluzioni è la ascissa di B ($x = –1$). Affinché la equazione parametrica ammetta una soluzione intera la radice deve sparire e ciò implica che il discriminante sia un quadrato perfetto.

1a $\Rightarrow$ 3	1b $\Rightarrow$ 1	1c $\Rightarrow$ 1	2a $\Rightarrow$ 2	2b $\Rightarrow$ 2	3a $\Rightarrow$ 2	3b $\Rightarrow$ 2	Tot / 13

3F PNI 22/11/02: la parabola

1. Determinare l'equazione della parabola ad asse verticale $\mathscr{P}$ passante per A≡(2,–3/2), B≡(3,0), C≡(–1,0)

Si può impostare il sistema oppure sfruttare l'equazione nella forma $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$. In ogni caso si trova $y = ½ x^2 - x - 3/2$

Note di correzione

Il metodo migliore era quello di sfruttare la forma la forma $y = k(x - \alpha)(x - \beta)$ che permetteva di arrivare immediatamente al risultato. La motivazione si dà così: la parabola taglia l'asse delle x in B e C pertanto il trinomio che la rappresenta è scomponibile assume la forma $y = a(x - x_C)(x - x_B)$

In ogni caso se si opera per sostituzione bisogna indicare ciò che si fa e cioè: indicare l'equazione generale della parabola ad asse verticale $\mathscr{P}$: $y = ax^2 + bx + c$; indicare formalmente la condizione di appartenenza $A \equiv (2,-3/2) \in \mathscr{P} \Rightarrow -3/2 = 4a + 2b + c$; risolvere il sistema per eliminazione della variabile c con scrittura nel primo passaggio di 2 equazioni in a e b e di una terza nella forma c = f(a,b). In ogni caso la soluzione va data in 2 passaggi (eliminazione di c); determinazione di a e b con conseguente determinazione di c

Trovata l'equazione svolgere una breve e rapida verifica di compatibilità con i dati

2. Determinare le coordinate del vertice V e del fuoco F

V≡(1,–2) F≡(1,–3/2)

Note di correzione

Conviene determinare y_v per sostituzione e non con il calcolo del Δ visto che le radici della equazione sono già note. L'ordinata del fuoco $y_F = \dfrac{1-\Delta}{4a} = \dfrac{1}{4a} + y_v$

Trovato il vertice verificare con un rapido schizzo che non ci siano incongruenze (che potrebbero essere nel calcolo del vertice o nella equazione per difetti nella soluzione del sistema).

3. Scrivere le equazioni che definiscono la traslazione τ di vettore $\boldsymbol{u}$ ≡(2,2) invertire la traslazione ed utilizzarla per determinare l'equazione della parabola $\mathscr{P}_1$ traslata di $\mathscr{P}$.

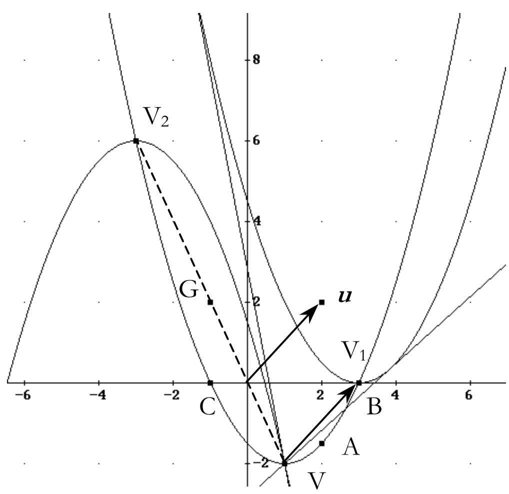
τ: $x' = x + 2 \wedge y' = y + 2$ da cui $x = x' - 2 \wedge y = y' - 2$; si sostituisce e si ottiene l'equazione in x', y' che viene poi riscritta in x,y. Si ottiene $\mathscr{P}_1$: $y = ½ x^2 - 3x + 9/2$

Note di correzione

Per eseguire una qualunque trasformazione bisogna scrivere l'equazione che fornisce P' dato P; bisogna poi invertirla perché il luogo geometrico di cui bisogna produrre il trasformato è nella forma f(x,y) = 0; applicando la trasformazione si trova una g(x',y') = 0 che costituisce l'equazione richiesta; tale equazione si scrive poi indicando le variabili non con x' e y' ma con x e y perché si sta operando in un unico sistema xOy rispetto al quale il generico punto di qualsiasi curva viene chiamato (x,y).

Qualcuno ha trasformato i punti A, B, C e rifatto un altro sistema: complimenti per la complicazione delle cose semplici.

4. Scrivere l'equazione della simmetria centrale $\mathscr{S}_G$ di centro G≡(–1,2) ed utilizzarla per trovare l'equazione della parabola $\mathscr{P}_2$ simmetrica di $\mathscr{P}$.



La simmetria $\mathscr{S}_G$ ha equazioni: $x' = -2 - x \wedge y' = 4 - y$. Operando come in precedenza si ottiene $\mathscr{P}_2$: $y = -½ x^2 - 3x + 3/2$

Note di correzione

Le simmetrie centrali ammettono se stesse come inverse e pertanto spesso si sostituisce direttamente x e y con x' e y'

5. Disegnare le 3 parabole in uno stesso sistema d'assi dopo aver individuato le coordinate dei vertici V_1 e V_2 grazie alle trasformazioni.

V_1: $x' = x + 2 = 1 + 2 = 3$ $y' = y + 2 = -2 + 2 = 0$ pertanto V_1≡(3,0).

analogamente si trova V_2≡(–3,6)

A questo punto si traccia il diagramma utilizzando i punti ricavati e rispettando la congruenza delle 3 parabole.

Nota di correzione

I due vertici devono essere espressamente trovati tramite la trasformazione e la loro determinazione costituisce il più diretto e immediato controllo della correttezza di quanto fatto (si devono riconoscere il vettore (2,2) che va da V a V_1 e V_2 come simmetrico di V rispetto a G) .

6. Determinare l'equazione della retta tangente t_B a $\mathscr{P}$

Il coefficiente angolare della tangente è dato dalla relazione (dimostrata a lezione) $m(t_B) = 2ax_B + b = 2(½)(3) - 1 = 2$

Pertanto usando il teorema sulla retta per un punto si ha: $y - 0 = 2(x - 3) \Leftrightarrow y = 2x - 6$

Nota di correzione

Evitare di imparare a memoria ulteriori relazioni; evitare anche di eseguire il calcolo con la ricerca della radice doppia (si perde tempo inutilmente).

7. Scrivere l'equazione del fascio di rette r_m di centro V

La retta r_m corrisponde alla applicazione della relazione che dà la retta per un punto: $y + 2 = m(x - 1) \Leftrightarrow y = mx - (m + 2)$

8. Scrivere l'equazione risolvente della intersezione tra $\mathscr{P}_1$ e r_m

Si fa la differenza delle due equazioni in forma esplicita il che fornisce immediatamente l'equazione risolvente:

$\mathscr{P}_1 : y = \frac{1}{2} x^2 - 3x + 9/2 \wedge r_m: y = mx - (m + 2) \Rightarrow \frac{1}{2} x^2 - (3 + m)x + 13/2 + m = 0$

Note di correzione

Si tratta di una equazione di II grado e va scritta in forma normale; = 0 non è un optional

9. Utilizzare l'equazione risolvente per trovare i valori di m corrispondenti alle tangenti a $\mathscr{P}_1$ da V

$\mathscr{P}_1 \cap r_m = \{T\} \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \Delta = (m + 3)^2 - 2(13/2 + m) = m^2 + 9 + 6m - 13 - 2m = m^2 + 4m - 4 = 0$

$\Delta'/4 = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$ e dunque: $m = -2 \pm 2\sqrt{2}$

Note di correzione

Controllare sulla figura che i valori trovati siano compatibili con le due tangenti tracciate graficamente

10. Dopo aver trovato tali valori come si potrebbero trovare le ascisse dei punti di intersezione senza dover sostituire nella equazione risolvente? Eseguire il calcolo in uno dei due casi.

Si potrebbe sfruttare la relazione $m = 2ax_T + b$ dove l'unica incognita è x_T. Per esempio se si prende la tangente con coefficiente angolare positivo si ha:

$-2 + 2\sqrt{2} = 2(\frac{1}{2})x_T - 3 \Leftrightarrow x_T = 1 + 2\sqrt{2} \approx 3.83$ (valore ben riscontrabile in figura)

Note di correzione

Quando ho discusso l'importanza della relazione $m = 2ax_T + b$ ho esplicitamente citato questa evenienza e qui l'avete vista all'opera.

1,1.5	2,1	3,1.5	4,1.5	5,1.5	6,1.5	7,1	8,1	9,1.2	10,1.2		

3G ordinamento 9/12/99 La circonferenza

1. A lezione stati proposti 3 metodi diversi per determinare l'equazione della circonferenza passante per tre punti A, B, C nel piano. Descriverne almeno 2 soffermandosi sugli elementi essenziali di essi (come si fa e cosa viene dal punto di vista algebrico)

2. Determinare l'equazione della circonferenza di centro $C \equiv (\alpha, \beta)$ e tangente all'asse y.

3. Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ concentrica alla circonferenza di equazione $2x^2 + 2y^2 - 6x + 5y - 4 = 0$ e passante per $A \equiv (-2,3)$

4. Scrivere l'equazione della circonferenza passante per $A \equiv (1,1)$, con il centro sulla retta r: $2x - y + 5$ e raggio $R = 3$

5. Data la circonferenza $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$ si indichino con A e B i suoi punti del I quadrante rispettivamente di ascissa 1 e ordinata 2. Determinare i punti P della circonferenza per i quali il triangolo ABP abbia area $\sigma = 6$

Griglia di correzione

$1 \Rightarrow 6$ (+ 2)	$2 \Rightarrow 4$	Teoria 10	$3 \Rightarrow 2$	$4 \Rightarrow 4$	$5 \Rightarrow 8$	Applic 14

3F ordinamento 20/12/01 Simmetrie applicate alla geometria analitica

Svolgere un problema tra 1 e 2; un problema tra 3 e 4; il 5 è opzionale per i bravi e i disperati

1) a) Attraverso una opportuna combinazione lineare determinare il fascio di circonferenze $\mathcal{C}_K$ tangenti alla retta t: 2x–3y+5=0 nel suo punto T di ascissa –1 (per la combinazione lineare scegliere la circonferenza con centro di ascissa nulla). Argomentare; b) All'interno del fascio individuare le equazioni delle circonferenze $\mathcal{C}_1$ passante per A≡(–1,0) e $\mathcal{C}_2$ di raggio $r_2 = \frac{\sqrt{13}}{2}$ con k>0; c) Scrivere la simmetrica di $\mathcal{C}_2$ rispetto al punto G≡(–2,5)

a) $T \in t \Rightarrow 2(-1)-3y+5=0 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$ dunque T≡(–1,1)

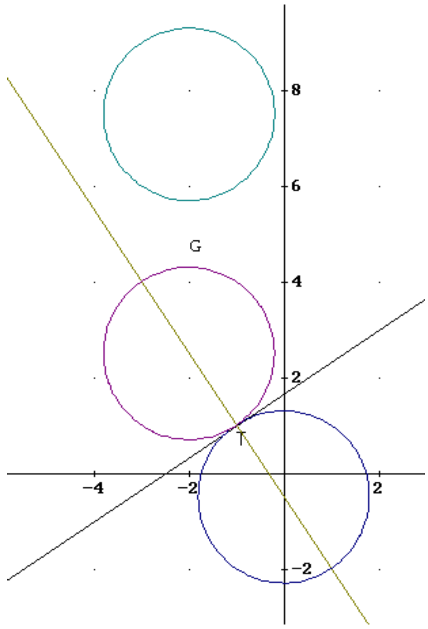
Il centro delle circonferenze del fascio appartiene alla retta n⊥t e passante per T. Pertanto n: $y-1 = -\frac{3}{2}(x+1) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

La circonferenza particolare con centro di ascissa nulla ha come ordinata del centro $y = = -\frac{3}{2}0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ dunque $C \equiv (0,-\frac{1}{2})$

e poiché passa per T si avrà dalla equazione in forma normale: $x^2+ y^2+ y+c=0 \Rightarrow 1+1+1+c=0$ da cui c =–3. Dunque la particolare circonferenza generatrice del fascio ha equazione $\mathcal{C}$: $x^2+ y^2+ y-3=0$.

Il fascio di circonferenze tangenti in T a t ha dunque equazione $\mathcal{C}_k : (x^2+ y^2+ y-3) + k(2x-3y+5)=0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2kx + (1-3k)y - 3+5k = 0$. Che si tratti di una famiglia di circonferenze è garantito dalla forma dell'equazione e dal calcolo del discriminante $\Delta = k^2+\frac{(1-3k)^2}{4} +3-5k = \frac{1}{4}(13k^2-26k+13) = \frac{13}{4}(k^2-2k+1)= \frac{13}{4}(k-1)^2 \geq 0 \ \forall k$. Per k = 1 la circonferenza degenera in un punto(somma di due quadrati eguagliata a zero). Il raggio delle circonferenze $r = \sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{13}}{2}|k-1|$.

La famiglia è un fascio perché per come è stato costruito il punto T soddisfa la equazione ∀k. Vedremo altre caratteristiche del fascio nel problema successivo.



b) $A \equiv (-1,0) \in \mathcal{C}_k$ da cui $(1^2+ 0^2+ 0-3) + k(-2-3\cdot 0+5)=0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

Per determinare la circonferenza di raggio $\frac{\sqrt{13}}{2}$ basta risolvere l'equazione $\frac{\sqrt{13}}{2} = |\frac{\sqrt{13}}{2}|k-1| \Leftrightarrow |k-1| = 1 \Leftrightarrow k-1 = \pm 1 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 2$. Dunque sostituendo il valore di k trovato $\mathcal{C}_2$: $x^2 + y^2 + 4x - 5y + 7 = 0$. La circonferenza trovata è la simmetrica rispetto a quella che ha generato il fascio come è ovvio visto che ha lo stesso raggio.

c) La circonferenza simmetrica di $\mathcal{C}_2$ si trova applicando a $\mathcal{C}_2$ la simmetria centrale di centro G≡(–2,5) e cioè $x \rightarrow -4 - x$ e $y \rightarrow 10 - y$ da cui si ha: $(-4-x)^2 + (10-y)^2 + 4(-4-x) -5(10-y) + 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x -15y+57=0$. La soluzione proposta nei suggerimenti era riferita al centro di simmetria (–3,5) erroneamente indicato nel testo (soliti problemi di taglia e incolla).

2) Data l'equazione $\mathcal{C}_K$: $x^2 + y^2 + 2kx + (1-3k)y -3+5k = 0$ a) chiarire perché essa rappresenta una circonferenza ∀k,k≠1 e determinare il raggio; precisare cosa accade per k = 1; b) determinare il luogo geometrico η dei centri delle circonferenze; c) determinare i punti fissi analizzando $\mathcal{C}_K$ come equazione in k; su questa base analizzare le caratteristiche del fascio confrontando il luogo η con la retta determinata al punto precedente.

a) l'equazione $\mathcal{C}_K$: $x^2 + y^2 + 2kx + (1-3k)y -3+5k = 0$ ha la forma dell'equazione di una circonferenza e rappresenta una famiglia di circonferenze per quei valori di k per i quali il discriminante $\Delta = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$. Nel nostro caso si ha (il calcolo è già stato svolto nel problema precedente: $\Delta = \frac{13}{4}(k-1)^2$ e pertanto la famiglia rappresenta una circonferenza ∀k, k≠1. Per k = 1 la equazione si riduce ad una circonferenza di raggio nullo rappresentata da una equazione del tipo $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0$.

b) I centri della famiglia hanno coordinate x = –k e $y = \frac{3k-1}{2}$ pertanto eliminando k si ottiene come luogo η: $y = \frac{-3x-1}{2}$ cioè la retta n dell'esercizio precedente.

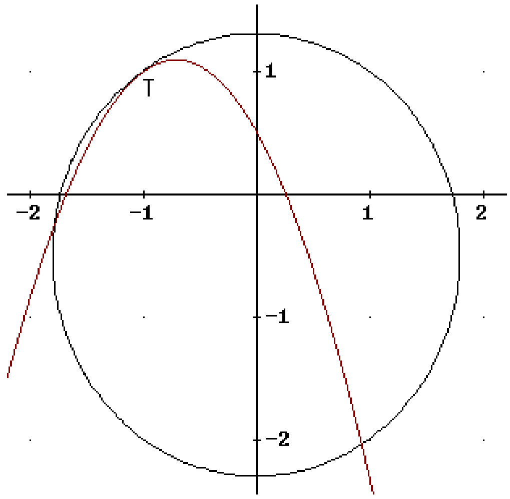
c) Per determinare i punti fissi della famiglia osserviamo che $\mathcal{C}_K$: $x^2 + y^2 + 2kx + (1-3k)y -3+5k = 0 \Leftrightarrow (x^2+ y^2+ y-3) + k(2x-3y+5)=0$ e questa equazione è vera $\forall k \Leftrightarrow x^2+ y^2+ y-3 = 0 \wedge 2x-3y+5 = 0$. Questa condizione corrisponde alla intersezione tra una circonferenza ed una retta (si tratta della circonferenza calcolata all'inizio dell'esercizio precedente e della retta t). Si risolve il sistema e si trova una soluzione doppia corrispondente al punto T. Inoltre la retta generatrice (asse radicale) risulta ortogonale al luogo η e dunque tutte le circonferenze della famiglia sono perpendicolari a t.

3) Si considerino la circonferenza $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + y - 3 = 0$ e la parabola $\mathcal{P}$: $y = -\frac{7}{6}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{2}$. a) Rappresentarle in scala 1 = 1cm dopo averne determinato gli elementi essenziali; b) determinare la equazione risolvente e, alla luce della figura, ipotizzare cosa possa accadere nel punto T di ascissa –1; c) Determinare le coordinate di $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$.

a) Caratterizzazione di $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + y - 3 = 0$; centro $C \equiv (0, -\frac{1}{2})$ e raggio $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} = \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1.8$

Caratterizzazione di $\mathcal{P}$: $y = -\frac{7}{6}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{2}$. $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{5/3}{7/3} = -\frac{5}{7} \approx 0.71$ $\Delta = b^2 - 4ac = \frac{25}{9} + \frac{7}{3} = \frac{46}{9}$ $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{46/9}{14/3} = \frac{23}{21} \approx 1.1$

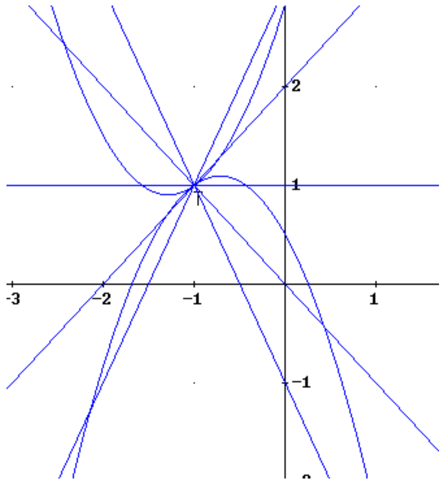
Inoltre il testo parla del punto T di ascissa 1 e conviene pertanto verificare cosa accade in T. Si vede subito che la parabola e la circonferenza hanno in T ordinata 1. Inoltre la parabola passa per (0,½). Dopo aver costruito con una certa accuratezza la figura si osserva che, probabilmente T≡(–1,1) è un punto di tangenza. La verifica di questa ipotesi richiede la determinazione algebrica delle intersezioni.



b) e c) $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ richiede di risolvere il sistema $x^2 + y^2 + y - 3 = 0 \wedge y = -\frac{7}{6}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{2}$ che dopo la sostituzione porta dopo un paio di passaggi di puro calcolo alla equazione $P(x) = 49x^4 + 140x^3 + 52x^2 - 120x - 81 = 0$.

Sicuramente $P(-1) \equiv 0$ ma ci aspettiamo che la radice sia doppia. Per questa ragione dividiamo due volte il polinomio per x+1 con il metodo di Ruffini ottenendo $P(x) = (x+1)^2(49x^2 + 42x - 81)$. Ciò permette di determinare le altre due intersezioni $x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{10}}{7}$ che, per controllo possono essere caratterizzate in forma approssimata. $x_1 \approx -1.78$ e $x_2 \approx 0.93$ in ottimo accordo con la figura

4) Si consideri la parabola $\mathcal{P}$: $y = -\frac{7}{6}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{2}$ e a) si determini $\mathcal{P}'$ simmetrica di $\mathcal{P}$ rispetto al punto T≡(–1,1); si costruisca la figura in scala 1 = 1cm; b) considerata la generica retta r_m passante per T si determini $r_m \cap \mathcal{P}'$; come mai una delle due soluzioni è T? Scrivere le coordinate dell'altro punto R di intersezione. c) Come mai viene come discriminante un quadrato perfetto? Determinare la equazione della retta tangente t.



a) La parabola $\mathcal{P}$: $y = -\frac{7}{6}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{2}$ è già stata caratterizzata nell'esercizio precedente. Se ora si applica ad essa la simmetria centrale di centro di centro T≡(–1,1) e cioè $x \rightarrow -2 - x$ e $y \rightarrow 2 - y$ si ottiene dopo la sostituzione e l'ordinamento del polinomio $\mathcal{P}'$: $2 - y = -\frac{7}{6}(-2 - x)^2 - \frac{5}{3}(-2 - x) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{7}{6}x^2 + 3x + \frac{17}{6}$; anche per la seconda parabola occorre determinare il vertice (conviene trovarlo per simmetria) e si osserva che le due curve ammettono il punto T come punto comune che, data la simmetria sarà di tangenza per le due curve).

b) e c) La generica retta r_m per T ha equazione $y = m(x+1)+1$ e se si esegue la intersezione con $\mathcal{P}'$ si ottiene una equazione risolvente parametrica di II grado ma questa equazione ammette sempre come soluzione x = –1 e pertanto dovendo generare una soluzione non dipendente da m dovrà presentare un Δ quadrato perfetto (condizione per la eliminazione della radice che consente di eliminare la dipendenza da m). Se si sostituisce si arriva alla equazione: $\frac{7}{6}x^2 + (3-m)x + (\frac{11}{6} - m) = 0$ che porta alle soluzioni x=–1 e $x = \frac{6m-11}{7}$. La prima è fissa e corrisponde al punto T e la seconda varia al variare di m.

Per determinare la retta tangente basta trovare il valore di m per il quale si ha $\Delta = 0$. Un secondo metodo (interessante) consiste nell'imporre che le due radici coincidano cioè che $\frac{6m-11}{7} = -1 \Leftrightarrow 6m = 4 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$. Questo metodo può essere usato agevolmente nel caso in cui in una equazione sia nota a priori una radice. Si abbassa di grado per divisione con Ruffini e poi si trova la tangente imponendo la eguaglianza tra la prima e la seconda radice.

5) Con un metodo a scelta, ma argomentando, dimostrare che la funzione γ: $y = f(x) = \frac{2x^2+17x+29}{3(x+2)}$ ammette centro di simmetria e determinarlo.

O si esegue una traslazione di centro (h,k) ottenendo la funzione Y =g(X,h,k) e si impone che la funzione trovata sia dispari oppure si esegue una generica simmetria di centro (h,k) e si impone che la funzione simmetrica coincida con quella di partenza.

3F ordinamento 15/1/2002: riepilogo teoria

1) Dato il luogo geometrico $\gamma : f(x,y) = 0$ sia $P\equiv(\tilde{x},\tilde{y})\in\gamma \Rightarrow$ ______________________

$f(\tilde{x},\tilde{y})\equiv 0$

$\equiv$ sta per coincide

2) Dato il luogo geometrico $\gamma : f(x,y) = 0$ supponiamo che sia $f(x,y) = f(-x,y)$ cosa si può dire di γ in termini di simmetrie ______________________

γ è simmetrica rispetto all'asse y

la funzione è pari, il luogo è simmetrico

3) Dato i luoghi geometrici $\gamma : f(x,y) = 0$ e $\gamma' : g(x,y) = 0 \Rightarrow$ l'equazione $f(x,y)\cdot g(x,y) = 0$ rappresenta il luogo: □ $\gamma\cap\gamma'$ □ $\gamma\cup\gamma'$ □ $\gamma-\gamma'$ □ nessuna delle precedenti

$\gamma\cup\gamma'$

4) Dato i luoghi geometrici $\gamma : f(x,y) = 0$ e $\gamma' : g(x,y) = 0 \Rightarrow$ l'equazione $f(x,y)/g(x,y) = 0$ rappresenta il luogo: □ γ □ γ' □ $\gamma-\gamma'$ □ nessuna delle precedenti

$\gamma-\gamma'$

deve essere $g(x,y)\neq 0$; quasi tutti hanno dato la 4

5) Date le rette r: $ax+by+c=0$ e r': $a'x+b'y+c'=0$ scrivere la relazione tra i coefficienti che corrisponde alle condizioni date a) $r\cap r' = \{P\}$ ______________ b) $r\cap r' = r$ ______________ c) $r\cap r' = \varnothing$ ______________

$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

6) Data la retta r di coefficiente angolare m sia $P\in r\wedge$ $Q\in r\wedge$ $x_P- x_Q=\Delta x \Rightarrow \overline{PQ} =$ ______________________

$\overline{PQ} = |\Delta x| \sqrt{m^2+1}$

7) Date le rette $r : y = mx +q$ e $r' : y = m'x +q'$ la relazione che consente di trovare la bisettrice degli angoli individuati dalle due rette è ______________________

$\frac{|y-mx-q|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|y-m'x-q'|}{\sqrt{m'^2+1}}$ oppure $\frac{y-mx-q}{\sqrt{m^2+1}} = \pm\frac{y-m'x-q'}{\sqrt{m'^2+1}}$ che è equivalente

8) Data la equazione $(x+\beta)^2 + (y+\alpha)^2 = -\delta$ scrivere quale luogo γ essa rappresenta al variare di δ

a) $\delta=0 \Rightarrow \gamma =$ ______________ b) $\delta<0 \Rightarrow \gamma =$ ______________

b) $\delta>0 \Rightarrow \gamma =$ ______________________

$\gamma=\{C\}$ con $C\equiv(-\beta,-\alpha)$ γ circonferenza di centro $C\equiv(-\beta,-\alpha)$ e raggio $r = \sqrt{-\delta}$ $\gamma=\varnothing$

scritture incomplete, confusione tra α e β, segni mancanti, confusione tra δ e $-\delta$, …

9) Data la circonferenza γ di centro $C\equiv(\alpha,\beta)$ e raggio r scrivere le relazioni che corrispondono alle seguenti condizioni a) tangenza con gli assi nel II quadrante ______________ b) passaggio per l'origine ______________

$\beta = -\alpha$ $r = -\alpha$ (non serve α <0 perché implicito nella II) $r^2 = \alpha^2 + \beta^2$

10) Dati i luoghi geometrici $\gamma : f(x,y) = 0$ e $\gamma' : g(x,y) = 0$ si consideri il luogo $\gamma_k : f(x,y) + k\cdot g(x,y) = 0$. Sia $P\equiv(\tilde{x},\tilde{y})\in\gamma_k\ \forall k \Rightarrow$ (2 risposte: insiemistica e algebrica) ______________________

$P\in \gamma\cap\gamma'$ $f(\tilde{x},\tilde{y})\equiv 0 \wedge g(\tilde{x},\tilde{y})\equiv 0$

11) Con riferimento alla domanda precedente perché in generale non è detto che γ_k abbia dei punti fissi ?

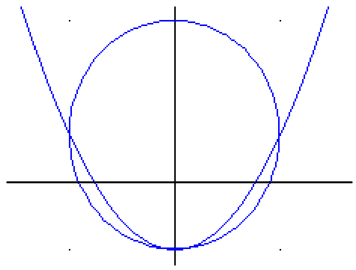
Perché non è detto che il sistema $f(x,y) = 0 \wedge g(x,y) = 0$ abbia soluzioni

12) Data la parabola $\gamma : y = x^2-2\tilde{x}x+\tilde{x}^2$ di quale proprietà rilevante gode ______________________

Il vertice è il punto $(\tilde{x},0)$ perché $y = (x - \tilde{x})^2$

13) Data la parabola $\gamma : y = ax^2+bx+c$ siano $P\equiv(\tilde{x},\tilde{y})\in\gamma$ e $P'\equiv(\tilde{x}',\tilde{y})\in\gamma$. Ragionando sulle simmetrie determinare $\tilde{x}' =$ ______________

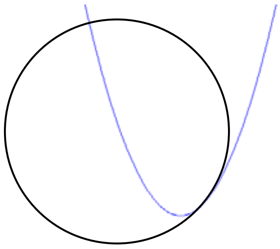
$\tilde{x}' = 2x_V - \tilde{x} = -\frac{b}{a} - \tilde{x}$



14) Data la parabola γ : $y = ax^2+bx+c$ scrivere l'equazione della simmetrica γ' rispetto alla bisettrice del secondo quadrante ________________

La simmetria ha forma $x \to -y$ e $y \to -x$ pertanto si ottiene la parabola ad asse orizzontale $x = -ay^2 + by - c$

15) Data una circonferenza e una parabola ad asse verticale la equazione risolvente risulta essere $x^2(x^2-k^2) = 0$ disegnare il possibile andamento delle due curve



in x=0 si deve avere una radice doppia e un'altra in x = k e x = –k. Per le simmetrie reciproche il punto x= 0 deve essere il vertice (altrimenti non si potrebbero avere le due intersezioni x = ±k. Era indispensabile nel disegno tracciare almeno l'asse y per evidenziare le simmetrie

16) Data una circonferenza e una parabola ad asse verticale la equazione risolvente risulta essere $(x-h)(x-k)^3 = 0$ disegnare il possibile andamento delle due curve

Si deve avere una intersezione in x = h e una intersezione con molteplicità 3 in x = k. Pertanto in x=k si deve avere un particolare punto di tangenza in cui la parabola attraversi la circonferenza in modo di dar luogo comunque a solo due radici. Era indispensabile nel disegno evidenziare la presenza di un solo punto di intersezione e 1 solo punto di tangenza

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	•	•-	•½

3G ordinamento 13/1/2000 La parabola

Il compito avrà due valutazioni distinte; la prima valida per lo scritto e la seconda per l'orale

applicazioni

1. Data la parabola ad asse verticale di equazione $\mathscr{P}: y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{17}{4}$ eseguire una traslazione ad un sistema XPY dove P≡(-3,2). Determinare la nuova equazione di $\mathscr{P}$ e alla luce del risultato trovato spiegare chi sia il punto P.

2. Data la parabola ad asse verticale di equazione $\mathscr{P}: y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{17}{4}$ determinare l'equazione della retta t tangente ad essa nel suo punto P di ascissa -1.

3. Data la parabola ad asse verticale di equazione $\mathscr{P}: y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{17}{4}$ determinare i punti di intersezione A e B con la retta $r: y = \frac{33}{4}$

teoria

4. Data la parabola ad asse verticale di equazione $\mathscr{P}$: $y = k(x - \alpha)(x - \beta)$ utilizzando le evidenti intersezioni con l'asse x dire quanto vale l'ascissa dell'asse di simmetria e usare il risultato per trovare il vertice.

5. Sono date le due curve $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y + \alpha^2 = 0$ e $\mathscr{P}$: $y = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha)^2$. Determinare la intersezione tra le due curve (nel fare il sistema $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = \ldots$) e al termine disegnare la figura.

6. Supponendo di aver dimostrato che una parabola con vertice nell'origine e asse verticale ha equazione (nel sistema XVY) $\mathscr{P}$: $Y = aX^2$ si consideri in un sistema xOy una parabola ad asse verticale di vertice $V \equiv (\tilde{x}, \tilde{y})$ e si dimostri, attraverso una traslazione che porti l'origine nel vertice, che la sua equazione è del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Trovare i valori di b e c in funzione delle coordinate del vertice, invertire la relazione e determinare le coordinate del vertice in funzione di a, b, c.

$1 \Rightarrow 3$	$2 \Rightarrow 4$	$3 \Rightarrow 3$	applicazioni	$4 \Rightarrow 3$	$5 \Rightarrow 4$	$6 \Rightarrow 3$	teoria

3F PNI 5 febbraio 2003: circonferenze e parabole intersezioni e teorema di Archimede

Una circonferenza $\mathcal{C}$ passa per i punti A≡(–1,0) e B≡$\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ e si sa inoltre che la retta tangente in B ha coefficiente angolare $m(t_B) = -\frac{3}{4}$. a) Determinare l'equazione di $\mathcal{C}$. b) Determinare l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ ad asse verticale passante per A e tangente in B alla circonferenza. c) Determinare scrivendola in forma normale l'equazione risolvente della intersezione $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$. d) Utilizzare tale equazione per determinare le coordinate del punto C | $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ ={A,B,C}e) Determinare l'area del segmento parabolico definito dalla corda AC. f) Scrivere (illustrando il procedimento seguito) l'equazione della parabola $\mathcal{P}$' simmetrica di $\mathcal{P}$ rispetto al punto B g) Dimostrare che data una generica parabola ad asse verticale $\mathcal{P}$: $y = ax^2 + bx + c$ e un punto P≡$(\tilde{x},\tilde{y})\in\mathcal{P}$ la parabola $\mathcal{P}$' generata da una simmetria centrale $\mathcal{S}_P$ di centro P ha la stessa retta tangente ovvero che le due curve sono tangenti in P (determinare l'equazione della simmetrica e …).

In caso di difficoltà è ammesso l'utilizzo dei risultati intermedi che risultano essere i seguenti:
$\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = 1$ b) $\mathcal{P}$: $y = -\frac{25}{32}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{31}{32}$ c) $625x^4 - 300x^3 - 490x^2 + 372x - 63 = 0$ d) C≡$\left(\frac{7}{25},\frac{24}{25}\right)$ e) $\sigma = \frac{512}{1875}$ f) $\mathcal{P}'$: $y = \frac{25}{32}x^2 - \frac{27}{16}x + \frac{49}{32}$ g) La parabola simmetrica risulta essere $\mathcal{P}'$: $y = -ax^2 + (4a\tilde{x} + b) + 2\tilde{y} - 4a\tilde{x}^2 - 2b\tilde{x} - c$

determinazione $\mathcal{C}$	impostazione	determinazione		
determinazione $\mathcal{P}$	impostazione	determinazione		
equazione risolvente				
determinazione di C				
area segmento parabolico	base	punto T	altezza	
simmetria centrale				
tangente nella simmetria				
aspetti grafici e linguistici				

a) Dalla equazione delle circonferenza in forma normale si ha, imponendo il passaggio per A e per B:
$1 - a + c = 0 \wedge 1 + \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b + c = 0$ e poiché la tangente è perpendicolare al raggio (indicato con G il centro) si ha $m_{BG} = \frac{4}{3}$ ma $m_{BG} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4/5 + b/2}{3/5 + a/2}$ e pertanto si ottiene $\frac{4}{3} = \frac{8 + 5b}{6 + 5a} \Leftrightarrow 24 + 20a = 24 + 15b \Leftrightarrow 4a = 3b$

Dalle prime due equazioni eliminando c si ottiene $c = a - 1 \wedge \frac{8}{5}a + \frac{4}{5}b = 0 \Leftrightarrow 4a = -2b$

Deve perciò essere b = 0 , a = 0 e c = –1 e la circonferenza risulta $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = 1$

Note di correzione: la determinazione della circonferenza si poteva fare anche: trovando le coordinate del centro G (punto di incontro dell'asse di AB con la normale alla tangente) e il raggio come misura di AG; scrivendo il fascio delle circonferenze tangenti a t_B (combinazione lineare tra una particolare circonferenza tangente in B e t_B che fa da asse radicale) e imponendo il passaggio per A; scrivendo il fascio di circonferenze di centri A e B e cercando poi quella tangente.

b) Per determinare l'equazione della parabola si ha con riferimento all equazione $y = ax^2 + bx + c$:
A≡(–1,0)$\in \mathcal{P} \Rightarrow 0 = a - b + c$
B≡$\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) \in \mathcal{P} \Rightarrow 4/5 = 9/25\,a + 3/5\,b + c$

Infine in base alla condizione di tangenza si ha $m_t = 2a\tilde{x} + b$ e dunque $2a\frac{3}{5} + b = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 6a + 5b = -15/4 \Leftrightarrow 24a + 20b = -15$

Eliminando c si ottiene: $-4/5 = 16/25\,a - 8/5\,b \Leftrightarrow -1 = 4/5\,a - 2b \Leftrightarrow -5 = 4a - 10b$

$\begin{cases} c = b - a \\ 24a + 20b = -15 \\ 24a - 60b = -30 \end{cases}$ da cui si ha:

$\begin{cases} 80b = 15 \Rightarrow b = 3/16 \\ a = 1/24(-15 - 20(3/16)) = 1/24(-15 - 15/4) = -15/24(5/4) = -25/32 \\ c = 3/16 + 25/32 = 31/32 \end{cases}$

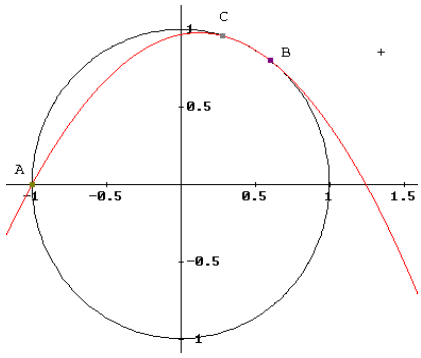
Dunque la parabola è: $\mathcal{P}$: $y = -\frac{25}{32}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{31}{32}$

Note di correzione: non esistono metodi alternativi e convenienti a quello proposto

c) $\mathscr{P}\cap\mathscr{C}$: $x^2 + \left(-\frac{25}{32}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{31}{32}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{625}{1024}x^4 + \frac{9}{256}x^2 + \frac{961}{1024} - \frac{150}{512}x^3 - \frac{775}{512}x^2 + \frac{93}{256}x = 1 \Leftrightarrow$

$625x^4 - 300x^3 - 490x^2 + 372x - 63 = 0$

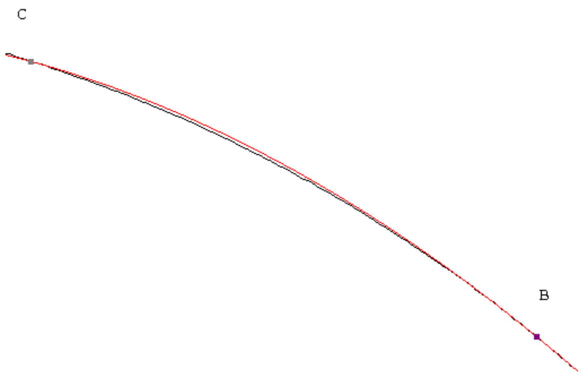
	625	–300	–490	372	–63
–1		–625	925	–435	63
	625	–925	435	–63	0
3/5		375	–330	63	
	625	–550	105	0	
3/5		375	–105		
	625	–175	0		



Note di correzione: procedere in modo ordinato nella riduzione del polinomio a forma normale per evitare errori di conto

d) Sono note e priori tre radici di cui una doppia e si può pertanto fattorizzare il polinomio con il metodo di Ruffini come si vede qui a lato.

Pertanto il polinomio è fattorizzabile come $25(x + 1)(x - 3/5)(25x - 7)$ e si ottiene la quarta radice $x_C = 7/25$ cui corrisponde per sostituzione $y_C = \sqrt{1 - 49/625} = 24/25$; il punto C risulta dunque $C\equiv(7/25;24/25)$.



A questo punto si deve tracciare con la maggiore precisione possibile il diagramma nel rispetto formale e sostanziale delle posizioni della circonferenza e dei 3 punti notevoli A, B, C. Non è invece indispensabile il tracciamento e la determinazione del vertice che non sono richiesti.

Note di correzione: La zona BC è difficilmente evidenziabile su una figura che non risulti molto ingrandita e per questa ragione oltre che fornire l'immagine in una scala che evidenzi parabola e circonferenza abbiamo ritenuto opportuno tracciare anche un ingrandimento da cui si veda l'andamento di parabola e circonferenza nelle zone di intersezione e tangenza. La parabola che a sinistra di C si trova entro la circonferenza la attraversa in C portandosi all'esterno e poi si riavvicina alla circonferenza, la tocca in B ma rimane sempre all'esterno.

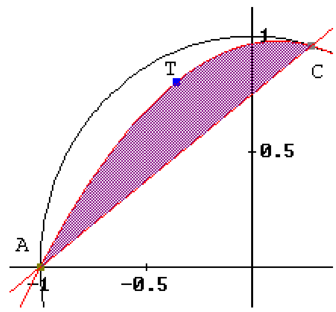
e) Per determinare l'area del segmento parabolico compreso tra la retta r_{AC} e la parabola utilizzeremo il teorema di Archimede in base al quale l'area del segmento parabolico $\sigma = 2/3\ \overline{AC}\ \text{dist}(T;r_{AC})$e ciò richiede di determinare la distanza tra la retta r_{AC} e la tangente alla parabola con la stessa inclinazione. Se indichiamo genericamente con T il punto di tangenza dovrà essere :

$m_t = 2ax_T + b$ con $m_t = m_{AC}$

$m_{AC} = \frac{24/25}{7/25 + 1} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$.

Applicando la relazione citata si ha: $\frac{3}{4} = 2\left(-\frac{25}{32}\right)x_T + \frac{3}{16}$ ciò permette di determinare il punto T

$-\frac{25}{16}x_T = \frac{9}{16}$ da cui $x_T = -\frac{9}{25}$ e sostituendo nella equazione della parabola si ha $y_T = 4/5$.



Dunque $T \equiv \left(-\frac{9}{25}, \frac{4}{5}\right)$

$r_{AC} : y - 0 = \frac{3}{4}(x + 1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$ mentre $\overline{AC} = |\Delta x|\sqrt{m^2 + 1} = \frac{32}{25}\sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{8}{5}$

$\text{dist}(T, r_{AC}) = \frac{|y_T - mx_T - q|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{\left|\frac{4}{5} + \frac{3}{4}\frac{9}{25} - \frac{3}{4}\right|}{\sqrt{\frac{9}{16} + 1}} = \frac{4}{5}\frac{32}{100} = \frac{32}{125}$ $\qquad \sigma = \frac{2}{3}\ \overline{AC}\ \text{dist}(T;r_{AC}) = \frac{2}{3}\,\frac{8}{5}\,\frac{32}{125} = \frac{512}{1875}$

Note di correzione: nella determinazione dell'area del segmento parabolico è fondamentale svolgere qualche considerazione di inquadramento sulla metodica utilizzata che è certamente la più rapida e conveniente ma non è l'unica e chi legge l'elaborato non è obbligato a conoscerla.

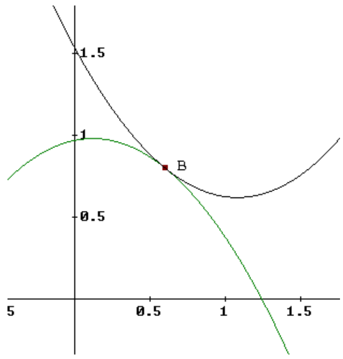
f) La simmetria di centro B indicata da $\mathcal{S}_B$ ha equazione $x' = 2x_B - x = \frac{6}{5} - x \wedge y' = \frac{8}{5} - y$

Anche la inversa ha lo stesso tipo di equazione $x = \frac{6}{5} - x' \wedge y = \frac{8}{5} - y'$. Sostituendo nella equazione di $\mathcal{P}$ si ottiene dunque la equazione dei punti simmetrici a quelli di $\mathcal{P}$ cioè i punti di $\mathcal{P}'$.

$\mathcal{P}'$: $8/5 - y' = -25/32(6/5 - x')^2 + 3/16(6/5 - x') + 31/32$; semplificando si ottiene:

$\mathcal{P}'$: $y' = 25/32x'^2 - 27/16x' + 49/32$ cui corrisponde l'immagine qui a lato.

Note di correzione: come ho ripetutamente chiarito in classe anche la metodica usata quando si applica una trasformazione del piano si devono dare gli elementi essenziali per la comprensione di cosa si è fatto.



g) Data $\mathcal{P}$: $y = ax^2 + bx + c$ e un punto $P \equiv (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{P}$ la parabola $\mathcal{P}'$ generata da una simmetria centrale $\mathcal{S}_P$ di centro P ha la equazione che si ottiene sviluppando in generale il metodo già usato al punto precedente:

$\mathcal{S}_P$: $x' = 2\tilde{x} - x$ e $y' = 2\tilde{y} - y$; la trasformazione inversa $\mathcal{S}_P^{-1}$: $x = 2\tilde{x} - x'$ e $y = 2\tilde{y} - y'$ consente di determinare $\mathcal{P}'$ per sostituzione; si ha così:

$2\tilde{y} - y' = a(2\tilde{x} - x')^2 + b(2\tilde{x} - x') + c = 4a\tilde{x}^2 + ax'^2 - 4a\tilde{x}x + 2b\tilde{x} - b\,x' + c \Leftrightarrow$

$y' = -ax'^2 + (4a\tilde{x} + b)\,x' + 2\tilde{y} - 4a\tilde{x}^2 - 2b\tilde{x} - c$

Se ora applichiamo il teorema sulla inclinazione della retta tangente avremo che:

$m'_t = -2a\tilde{x} + (4a\tilde{x} + b) = 2a\tilde{x} + b = m_t$

Le due parabole hanno retta tangente con lo stesso coefficiente angolare nello stesso punto e dunque hanno la stessa retta tangente.

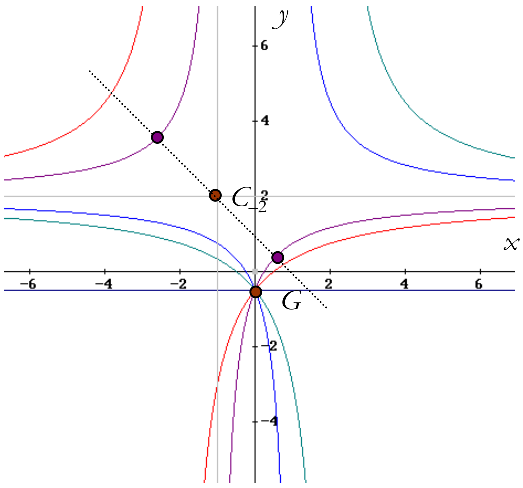
3F PNI: 21/3/2003 funzioni omografiche

E' data la famiglia di funzioni γ_m: $y = \dfrac{2mx + 1}{mx - 2}$

1. Eseguire la divisione $N(x) : D(x) = Q(x) + \dfrac{R}{D(x)}$ ed utilizzare il risultato per discutere le caratteristiche della famiglia al variare di m
2. Individuare e scrivere le equazioni degli asintoti, del centro di simmetria C_m, e degli eventuali punti fissi
3. Trovare la lunghezza del segmento MN determinato dalla intersezione di γ_m con la bisettrice del I e III quadrante precisando per quali valori di m tale intersezione esiste.
4. Determinare l'area σ del triangolo MNG
5. Stabilire per quale valore di m la retta r_m: $y = \dfrac{mx - 2}{m}$ con $m \neq 0$ è tangente alla corrispondente curva γ_m e trovare il punto di contatto.

divisione, caratteristiche	asintoti, centro simmetria, punti fissi	MN	σ	tangenza e T		

1. Eseguendo la divisione si ottiene Q(x) = 2 e R = 5 pertanto $y = 2 + \dfrac{5}{mx - 2} = 2 + \dfrac{5/m}{x - 2/m}$ e se si pone $y - 2 = Y$ e $x - 2/m = X$ la famiglia assume la forma: $Y = \dfrac{5/m}{X} = \dfrac{k}{X}$
   Dunque la famiglia rappresenta una famiglia di iperboli con gli assi riferiti agli asintoti e traslata.
   Inoltre per m = 0 si ottiene la retta y = –½
   Nota di correzione: è ignoto il significato del quoziente e del resto; ricordo che N(x) : D(x) = Q(x) con resto R(x) significa che N(x) = Q(x) D(x) + R(x) e che R(x) ha grado inferiore a quello di D(x). Nel caso in cui D(x) sia di primo grado il resto è un numero. Inoltre si può scrivere N(x) : D(x) = Q(x) + R/D(x)
   L'algoritmo della divisione è identico a quello che avete imparato alle elementari per i numeri
   Se si usa la divisione con il metodo di Ruffini si deve ridurre il divisore alla forma $x - \alpha$ il che richiedeva di scrivere il divisore come m(x – 2/m)
   Se il testo chiede di utilizzare il risultato per discutere le caratteristiche della famiglia bisogna esplicitamente mostrare che si tratta di una famiglia di iperboli traslate e, a quel punto, la ricerca degli asintoti e del centro di simmetria saltano fuori dalla traslazione.



2. Il centro di simmetria C_m è l'origine del sistema traslato X = 0 e Y = 0 che corrisponde a $C_m \equiv (2/m;2)$ e le equazioni degli asintoti sono x = 2/m e y = 2
   Se k > 0 (m > 0) i vertici della iperbole hanno ascisse ed ordinate $X_V = Y_V = \sqrt{k} = \sqrt{\dfrac{5}{m}}$
   Se m < 0 i vertici della iperbole hanno ascisse ed ordinate $X_V = -Y_V = -\sqrt{k} = -\sqrt{\dfrac{5}{-m}}$
   Per determinare se la famiglia presenta dei punti fissi bisogna scriverne l'equazione in forma implicita in funzione del parametro e verificare se esistono dei punti che rendono vera l'equazione per ogni m.
   $mxy - 2y = 2mx + 1 \Leftrightarrow m(xy - 2x) + (-2y - 1) = 0$ essa è vera $\forall$ m $\Leftrightarrow xy - 2x = 0 \wedge -2y - 1 = 0 \Leftrightarrow$
   $y = -½ \wedge x(y - 2) = 0 \Leftrightarrow y = -½ \wedge x = 0$
   Dunque tutte le iperboli passano per il punto $G \equiv (0,-½)$
   Nella immagine qui a lato vengono riportate a titolo esemplificativo le iperboli per m = 0, ± 1, ±2 e gli asintoti per la curva riportata in violetto che corrisponde a m = – 2. Sono stati evidenziati il punto fisso G, il centro ed i due vertici
   Nota di correzione: la indicazione dei vertici, anche se non richiesta era opportuna, così come uno straccio di figura da cui si vedesse il ruolo svolto da G (disegnare almeno due iperboli)

3. Se si interseca la famiglia con la retta y = x si ottiene la equazione:

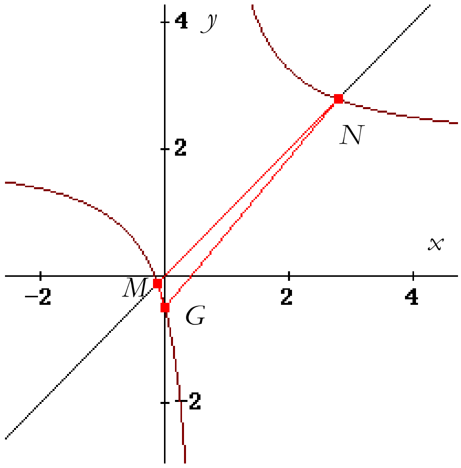
$x = \dfrac{2mx + 1}{mx - 2} \Leftrightarrow mx^2 - 2(1 + m)x - 1 = 0$

$\Delta/4 = (m + 1)^2 + m = m^2 + 3m + 1$

Si hanno intersezioni per $\Delta/4 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq m_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2} \vee m \geq m_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}$

In questo caso le soluzioni (che sono le ascisse di M e N) valgono

$x = \dfrac{(1 + m) \pm \sqrt{\Delta/4}}{m}$



Utilizzando la relazione che fornisce la lunghezza di una corda su una retta di coefficiente angolare p (con p = 1) avremo allora:

$\overline{MN} = |\Delta x|\sqrt{p^2 + 1} = \left|\dfrac{2\sqrt{\Delta/4}}{m}\right|\sqrt{2} = \left|\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{m^2 + 3m + 1}}{m}\right| = \dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{m^2 + 3m + 1}}{|m|}$

Per migliorare la leggibilità del procedimento si è rappresentata la intersezione relativa alla curva con m = 3 che fa parte della limitazione per cui le soluzioni esistono.

Nota di correzione: ricordo la opportunità di lavorare con la forma ridotta ($\Delta/4$) e che (sul piano formale ma anche su quello sostanziale) non bisogna confondere una espressione con una equazione e questa con una disequazione. In questo esercizio si vede la potenza della relazione $|\Delta x|\sqrt{p^2 + 1}$ più volte segnalata a lezione

Il modulo su m non è un optional perché come si vede dalla discussione sulla esistenza delle intersezioni m può assumere valori negativi.

4. L'area del triangolo MNG è facilmente determinabile perché $\overline{MN}$ è noto mentre l'altezza h del triangolo corrisponde alla distanza tra la retta y = x e il punto G≡(0,–½)

$h = \dfrac{|-½|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Dunque:

$\sigma = ½\ \overline{MN}\ h = ½\left|\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{m^2 + 3m + 1}}{m}\right|\dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m^2 + 3m + 1}{m^2}}$

Nota di correzione: se lo si gradisce |m| può essere scritto entro la radice ottenendo una espressione più compatta.

5. La retta r_m: $y = \dfrac{mx - 2}{m}$ e l'iperbole γ_m: $y = \dfrac{2mx + 1}{mx - 2}$ si intersecano quando :

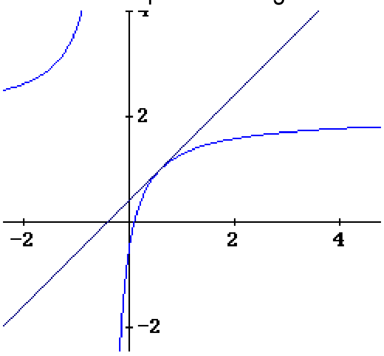
$\dfrac{mx - 2}{m} = \dfrac{2mx + 1}{mx - 2} \Leftrightarrow m(2mx + 1) = (mx - 2)^2 \Leftrightarrow m^2x^2 - 2m(2 + m)x + (4 - m) = 0$

esse sono tangenti quando le radici della equazione di II grado coincidono cioè quando $\Delta/4 = 0$

$\Delta/4 = m^2(2 + m)^2 - m^2(4 - m) = m^2(4 + m^2 + 4m - 4 + m) = m^2(m^2 + 5m)$

$\Delta/4 = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (radice non accettabile) $\vee\ m = -5$

L'ascissa del punto di tangenza è la soluzione della equazione in corrispondenza dell'annullamento del discriminante:



$x_T = \dfrac{m(m + 2)}{m^2} = \dfrac{-5(-3)}{25} = \dfrac{3}{5}$ $y_T = \dfrac{mx - 2}{m} = \dfrac{-5(3/5) - 2}{-5} = 1$ T≡(3/5,1)

La figura qui a lato rappresenta l'iperbole e la retta corrispondenti a m = – 5 con la tangenza delle due curve nel punto T.

Nota di correzione: per determinare le coordinate di T non si deve rifare il sistema che è già stato risolto in forma parametrica ma bisogna utilizzare l'equazione risolvente (messaggio più volte segnalato a lezione e regolarmente ignorato)

3F PNI 14/5/2003 riepilogo analitica

1) Nel fascio di parabole $\mathscr{P}_a$: $y = (2 – a)\, x^2 + (1 – a)\, x + (2a –1)$ determinare i punti fissi

Ricercare gli eventuali punti fissi vuol dire determinare se esistono delle coppie (x,y) che rendono vera l'equazione $\forall$a. Allo scopo riscriviamo l'equazione nella variabile a ottenendo:

$a(–x^2 – x + 2) + (2x^2 + x –1– y) = 0$

Questa equazione è vera $\forall$a $\Leftrightarrow$si annullano i coefficienti del polinomio di II grado e cioè se $x^2 + x – 2 = 0 \wedge y = 2x^2 + x –1 \Leftrightarrow$

$x = \frac{–1 \pm 3}{2} = \begin{cases} –2 \\ 1 \end{cases} \wedge y = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$ pertanto i due punti A≡(–2,5) e B≡(1,2) appartengono a tutte le parabole del fascio.

Nota di correzione: difficoltà a motivare la procedura; dimenticanza della variabile y; errori di conto

2) Scrivere il fascio $\mathscr{P}'_a$ simmetrico di $\mathscr{P}_a$ rispetto al punto C≡(1,–2)

La generica simmetria trasforma P≡(x,y) in P'≡(x',y') in modo che C sia il punto medio e cioè $\frac{x + x'}{2} = x_P \wedge \frac{y + y'}{2} = y_P$

Se esplicitiamo in x e y e sostituiamo nella equazione otterremo l'equazione dei punti trasformati e cioè $\mathscr{P}'_a$

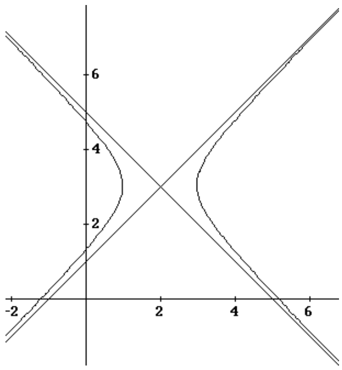
$x = 2 – x' \wedge y = –4 – y' \Rightarrow -4 - y' = (2 - a)\cdot(2 - x')^2 + (1 - a)\cdot(2 - x') + (2\cdot a - 1) \Leftrightarrow y' = x'^2 \cdot(a - 2) + x'\cdot(9 - 5\cdot a) + 4\cdot a - 13$ Se l'equazione viene scritta assumendo la generica coordinata (x,y) avremo $y = x^2 \cdot(a - 2) + x\cdot(9 - 5\cdot a) + 4\cdot a - 13$

Nota di correzione: errori di conto; mancata semplificazione del risultato, mancata scriittura del risultato con le variabili x e y.

3) Cosa rappresenta l'equazione $(x – 2)^2 – (y – 3)^2 = 0$? e l'equazione $(x – 2)^2 – (y – 3)^2 = 1$? Tracciare i due diagrammi.

$(x – 2)^2 – (y – 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x – 2 –y + 3)\,(x – 2 + y – 3) = 0 \Leftrightarrow x – y + 1 = 0 \vee x + y – 5 = 0$ si tratta della unione di 2 rette perpendicolari

se si effettua la traslazione d'assi $x – 2 = X \wedge y – 3 = Y$ si ha $X^2 – Y^2 = 1$ che rappresenta una iperbole equilatera di vertici (–1,0) e (1,0). Pertanto l'equazione data rappresenta una iperbole equilatera di centro (2,3) e le due rette precedentemente trovate sono proprio gli asintoti dell'iperbole.



Nota di correzione: il primo punto è stato sbagliato da quasi tutti (avevamo fatto esercizi del genere a inizio corso); gravissima la posizione di chi ha identificato le due curve con delle circonferenze.

4) Una parabola ad asse verticale di vertice V ed una circonferenza di centro C hanno $x_V = x_C$. Se è richiesta la determinazione dei punti di intersezione come conviene operare a partire dalle equazioni? (descrivere una delle due possibili tecniche).

prima soluzione: poiché sia la parabola sia la circonferenza ammettono la retta $x = x_V$ come asse di simmetria le intersezioni saranno simmetriche rispetto a questa retta e dunque dotate (a coppie) della stessa ordinata. Pertanto se si risolve il sistema di IV grado che si ottiene dalla intersezione nella variabile y si otterrà una equazione di II grado o di I grado. Ad ogni eventuale soluzione in y corrisponderà un massimo di 2 soluzioni in x (equazione della parabola) e pertanto si risolverà in modo semplice un sistema che, in origine porterebbe ad una equazione risolvente di IV grado.

seconda soluzione: poiché sia la parabola sia la circonferenza ammettono la retta $x = x_V$ come asse di simmetria le intersezioni saranno simmetriche rispetto a questa retta. Pertanto se effettua il cambio di variabile $x – x_V = X$ si ottiene una equazione risolvente di IV grado in cui le soluzioni devono essere simmetriche a coppie e cioè una biquadratica. Alla fine bisogna riportare i valori trovati alla variabile x.

5) Data l'equazione $\mathscr{I}$: $x^2 – 2y^2 –6x – 4y +3 = 0$ trasformarla in modo di ricondursi ad una iperbole traslata e determinare così gli asintoti e le coordinate dei vertici.

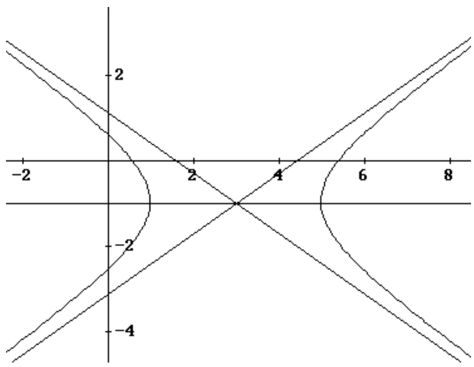
Per semplificare l'equazione dobbiamo ridurci ad una differenza di quadrati (equazione della iperbole centrata) e avremo dunque:

$\mathscr{I}$: $x^2 – 2y^2 –6x – 4y +3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 –6x + 9)– 2(y^2 + 2y) +3 – 9= 0 \Leftrightarrow (x – 3)^2– 2(y^2 + 2y + 1) +3 – 9 + 2= 0 \Leftrightarrow (x – 3)^2– 2(y + 1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \frac{(x – 3)^2}{4} – \frac{(y + 1)^2}{2} = 1$

Si tratta di una iperbole con centro C≡(3,–1) e con a = 2 e b = $\sqrt{2}$

Gli asintoti hanno coefficiente angolare $\pm \frac{b}{a} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ e passano per C con equazioni $y + 1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x – 3)$



I vertici hanno ordinata –1 e ascissa $(x – 3)^2 = 4 \Leftrightarrow x – 3 = \pm 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$

Nota di correzione: quando si riconduce una equazione a quella di una conica a centro il sistema di riferimento rimane xOy e rispetto ad esso vanno espresse le quantità richieste. Nonostante l'esercizio fosse tecnicamente molto semplice per la presenza di calcoli semplici ci sono stati numerosi errori: messa in evidenza di 2 davanti ai termini in y, confusione tra a e a^2; qualcuno confonde il centro con il vertice.

3G ordinamento 14/2/2000 Discussioni grafiche (teoria e abilità geometriche)

Data l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ con a, b, c non proporzionali e dipendenti da un parametro k mediante una espressione di I grado con la condizione aggiuntiva $x \in [\alpha,\beta]$

$\boxed{1.}$ Senza soffermarsi sui dettagli, illustrare i passi necessari alla effettuazione della discussione grafica con il metodo della parabola fissa e del fascio di rette (se lo si desidera aiutarsi con una figura, ma soprattutto spiegare cosa si fa).

$\boxed{2.}$ Perché si è richiesta la non proporzionalità? In quale caso si può usare il metodo del parametro isolato?

$\boxed{3.}$ Supponendo che il centro del fascio si trovi sull'asse x con ascissa negativa e che sia $0<\alpha<\beta$ a) spiegare perché non occorre determinare le rette tangenti b) Posto che si siano determinati i valori k_A e k_B come è possibile sapere se si ha una sola soluzione nell'intervallo interno o in quello esterno a k_A e k_B?

$\boxed{4.}$ Quando il centro del fascio è interno alla parabola la discussione del Δ è inutile. Comunque in quel caso cosa si ottiene per Δ? E quando il centro del fascio si trova sulla parabola?

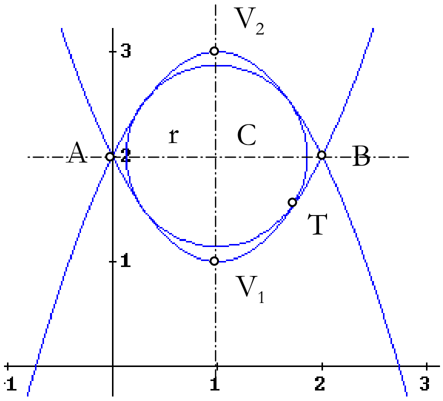
$\boxed{5.}$ Supponendo che il centro del fascio sia esterno alla parabola e che Δ risulti di I grado (cosa che succede quando i coefficienti di k hanno lo stesso valore in a, b, c) come si concilia il risultato con il fatto che esistono comunque due rette tangenti (chi è la seconda tangente e a quale k corrisponde?).

$\boxed{6.}$ Un trapezio isoscele è circoscritto ad una circonferenza e sono note la base maggiore b_1 e la base minore b_2. Dimostrare che il perimetro vale $2(b_1 + b_2)$ e che il raggio della circonferenza vale $\frac{1}{2}\sqrt{b_1\, b_2}$

$1 \Rightarrow 4$	$2 \Rightarrow 1$	$3 \Rightarrow 1 + 2$	$4 \Rightarrow 1 + 1.5$	$5 \Rightarrow 2$	$6 \Rightarrow 5$	

3F ordinamento 19/02/02 compito su simmetrie e teorema di Archimede

Il compito ha un testo lungo a causa della necessità di strutturare tutti i punti in sottoproblemi elementari; seguire strettamente e con sistematicità il testo.



1. Si considerino la parabola $\mathscr{P}_1$: $y = x^2 -2x +2$ e la retta r: $y = 2$. a) Dopo aver determinato il vertice V_1 e i due punti di intersezione A e B si tracci il diagramma $\mathscr{P}_1$. b) Si scriva la simmetria assiale relativa alla retta r e la si utilizzi per determinare la parabola $\mathscr{P}_2$ simmetrica di $\mathscr{P}_1$. Di tale parabola si determini il vertice V_2 e si tracci il diagramma. c) Attraverso il teorema di Archimede si calcoli l'area σ_1 della regione di piano racchiusa tra le due parabole. d) Si consideri un punto $T \equiv (\tilde{x}, \ldots) \in \mathscr{P}_1$ e dopo averne scritta anche l'ordinata si determini il coefficiente angolare m_t della retta tangente in T a $\mathscr{P}_1$. e) Attraverso un semplice ragionamento per simmetria che va motivato si trovi il punto C centro delle circonferenze $\mathscr{C}$ tangenti a $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ nella regione comune. f) Sfruttando la perpendicolarità tra raggio e tangente si scriva il coefficiente angolare m'_t della tangente t a $\mathscr{C}$ in T. g) Si utilizzi il risultato precedente per trovare il punto T diverso dal vertice in cui $\mathscr{C}$ e $\mathscr{P}_1$ sono tra loro tangenti h) Dopo aver determinato il raggio si scriva l'equazione in forma generale della circonferenza $\mathscr{C}$ e si determini la sua area σ_2 i) si determini infine l'area σ compresa tra le due parabole e la circonferenza tangente.

a) $x_{v1} = -\dfrac{b}{2a} = 1$ $y_{v1} = 1 - 2 + 2 = 1$. Dunque $V_1 \equiv (1,1)$. Per determinare A e B basta risolvere l'equazione $2 = x^2 -2x +2 \Leftrightarrow x^2 -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$. Dunque $A \equiv (0,2)$ e $B \equiv (2,2)$

Osservazioni: indicare la relazione usata; per trovare la ordinata è meglio sostituire (meno rischio di errore); riservare il calcolo di $-\dfrac{\Delta}{4a}$ al caso in cui è richiesta la determinazione delle intersezioni con l'asse x. I diagrammi devono essere disegnati in modo decente sia nel tratto sia nella scelta del fattore di scala (in questo caso si era interessati alla regione comune e tale regione si doveva vedere bene. Su queste cose si perdono punti. Mi sto incominciando a scocciare per gli eq scritti al posto di = e viceversa.

b) la simmetria assiale richiesta è $x \rightarrow x$ e $y \rightarrow 2\cdot 2 - y = 4 - y$: Se si applica questa trasformazione a $\mathscr{P}_1$ si ha $\mathscr{P}_2$: $4 - y = x^2 -2x +2 \Leftrightarrow y = -x^2 +2x +2$.

$x_{v2} = -\dfrac{b}{2a} = 1$ $\quad y_{v2} = -1 + 2 + 2 = 3$ $\quad$ Dunque $V_2 \equiv (1,3)$

Osservazioni: le simmetrie si possono scrivere o tramite eguaglianza $x' = x$ o tramite indicatore di sostituzione $x \rightarrow x$. Non vanno bene taroccamenti del tipo "trovo il vertice simmetrico e da quello trovo la parabola". Questi metodi non funzionano per le funzioni non simmetriche e dunque è bene avere un approccio generale al problema.

c) Tenuto conto della simmetria, in base al teorema di Archimede, l'area richiesta è il doppio dell'area del segmento parabolico pari a $\dfrac{2}{3}\,\overline{AB}\,(y_{v2} - y_r)$. Dunque $\sigma_1 = 2\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 2\cdot(3-2) = \dfrac{8}{3}$

Osservazioni: il teorema di Archimede riguarda l'area dei segmenti parabolici: Se l'area richiesta è il doppio bisogna scriverlo e motivarlo. La distanza tra la corda e il punto di tangenza è Δy perché la tangente nel vertice è orizzontale.

d) $\tilde{y} = \tilde{x}^2 - 2\tilde{x} + 2$ dunque $T \equiv (\tilde{x}, \tilde{x}^2 - 2\tilde{x} + 2)$. In base al teorema sulla inclinazione della retta tangente ad una parabola in un suo punto dato si ha $m_t = 2a\tilde{x} + b = 2\tilde{x} - 2$

Osservazioni: Il punto T va scritto e m_t va calcolato correttamente. Diverse persone hanno sbagliato qui e perso, dopo, un sacco di tempo. In caso di possibile errore fare qualche rapida verifica su punti particolari usando la figura.

e) Affinché una circonferenza possa essere tangente ad entrambe le parabole che presentano ciascuna lo stesso asse di simmetria bisogna che il centro stia sull'asse di simmetria comune. Per la simmetria delle due parabole il centro deve anche appartenere alla retta r e pertanto $C \equiv (1,2)$

Osservazioni: se $C \notin r$ la circonferenza tangente a $\mathscr{P}_1$ non è tangente a $\mathscr{P}_2$ e viceversa. Se C non sta sull'asse di simmetria delle parabole la circonferenza risulta tangente solo ad uno dei due rami di ciascuna parabola. Questo è il ragionamento da fare.

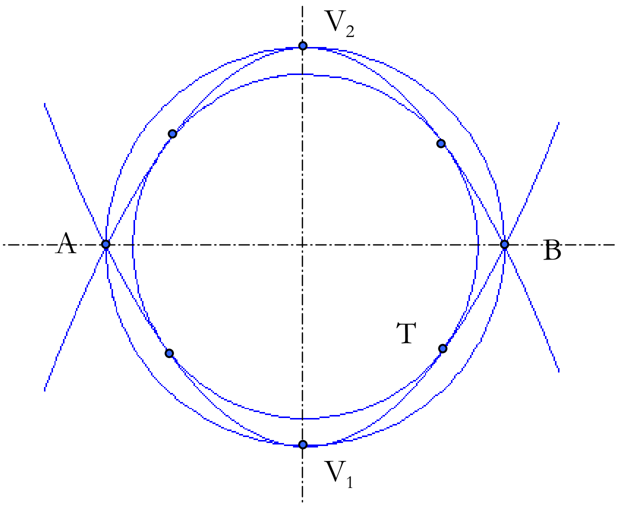
f) Per la perpendicolarità tra retta tangente e raggio deve essere $m'_t = -\dfrac{1}{m_{CT}} = -\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = -\dfrac{\tilde{x}-1}{\tilde{x}^2 - 2\tilde{x} + 2 - 2} = -\dfrac{\tilde{x}-1}{\tilde{x}^2 - 2\tilde{x}}$

Osservazioni: il metodo proposto è quello che consente di arrivare più rapidamente alla circonferenza tangente perché non richiede di imbarcarsi in equazioni di IV grado cosa che accade se si fa la intersezione tra circonferenza e parabola.

Il metodo alternativo è il seguente: si fa la intersezione tra la circonferenza $(x-1)^2 + (y-2)^2 = R^2$ e una delle due parabole (la tangenza con la seconda è garantita dalla simmetria che è già stata imposta con la scelta di C.

Si ha così: $(x-1)^2 + (x^2 - 2x)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1 - R^2 = 0$

Si deve ora imporre che la equazione così trovata si scomponga nel prodotto di due trinomi di II grado entrambi con $\Delta = 0$ e, come si vede la cosa è piuttosto ardua.



Se però si opera una traslazione che metta l'origine del nuovo sistema nel centro della circonferenza il problema risulta algebricamente semplificato perché allora basta imporre che si determini una equazione biquadratica.

In effetti se eseguo la traslazione $x=X+1$ e $y=Y+2$ la parabola $\mathscr{P}_1$ diventa $Y+2 = X^2 + 2X + 1 - 2X - 2 + 2 \Leftrightarrow Y = X^2 - 1$ mentre la circonferenza è $X^2 + Y^2 = R^2$ ed eseguendo la intersezione si arriva alla equazione $X^4 - X^2 + 1 - R^2 = 0$.

Questa equazione può dar luogo a due radici doppie quando $\Delta = 0$ e cioè $\Delta = 1 - 4(1 - R^2) = 4R^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow R^2 = \frac{3}{4}$ oppure a una radice doppia $X = 0$ quando $R = 1$; si ha infatti $X^2(X^2-1)=0$ con la soluzione doppia $X=0$ e le due soluzioni $X = \pm 1$ che corrispondono ai punti A e B.

g) Affinché $\mathscr{C}$ e $\mathscr{P}_1$ siano tra loro tangenti bisogna che ammettano la stessa retta tangente nello stesso punto e perciò dovrà essere

$m_t = m'_t$ cioè $2\tilde{x} - 2 = -\dfrac{\tilde{x}-1}{\tilde{x}^2 - 2\tilde{x}}$.

Semplificando per $\tilde{x} - 1 \neq 0$ ($\tilde{x} = 1$ corrisponde alla tangenza nel vertice) si ottiene $2(\tilde{x}^2 - 2\tilde{x}) = -1 \Leftrightarrow 2\tilde{x}^2 - 4\tilde{x} + 1 = 0$ $\Delta/4 = 4-2 = 2$ e pertanto $\tilde{x} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2} = 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

I punti T sono 2 (ovviamente simmetrici rispetto all'asse delle parabole) mentre per l'ordinata si ha lo stesso valore sempre per simmetria (prendendo, per esempio, il punto più a destra) $\tilde{y} = \tilde{x}^2 - 2\tilde{x} + 2 = 1 + \dfrac{1}{2} + \sqrt{2} - 2 - 2\dfrac{1}{\sqrt{2}} + 2 = \dfrac{3}{2}$

Dunque il punto di tangenza trovato è $T \equiv (1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{3}{2})$

Osservazioni: è fondamentale aver disegnato una figura decente per rendersi conto di come evolve la situazione. Con una figura decente si vede anche subito che si hanno due circonferenze una tangente nei vertici e l'altra interna. Facendo la figura decentemente si vede anche subito che la soluzione banale $\tilde{x} = 1$ deve evidenziarsi nella equazione (e non serve la divisione con Ruffini).

h) $R^2 = \overline{CT}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$

Pertanto $\mathscr{C}$: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = \dfrac{3}{4}$ mentre l'area $\sigma_2 = \pi R^2 = \dfrac{3}{4}\pi$

i) $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{3}{4}\pi \approx 0.310472$

Osservazioni: sono rimasto allucinato dalla domanda di alcuni "quanto vale l'area del cerchio?"

2. Si consideri la famiglia di parabole $\mathscr{P}_a$: $y = ax^2 + (1 - 3a)x - 3$. a) Determinare la retta r contenuta nella famiglia. b) Determinare i punti fissi della famiglia A e B c) Si consideri la parabola $\mathscr{P}_1$ corrispondente al valore $a = 1$ e, dopo averne determinato il vertice V_1 si tracci il diagramma d) Si determini il punto $T \in \mathscr{P}_1$ in cui la retta tangente è parallela a r. e) Attraverso il teorema di Archimede si determini l'area σ del segmento parabolico individuato da r e da $\mathscr{P}_1$ f) Attraverso un ragionamento per simmetria si determini il valore di a che corrisponde alla parabola della famiglia che determina un segmento parabolico della stessa area. g) Indicata con $\mathscr{P}_2$ tale parabola determinare il centro C della simmetria centrale che trasforma $\mathscr{P}_1$ in $\mathscr{P}_2$.

3G ordinamento 29/2/2000: problemi di a.a.g. con discussioni

$\boxed{1.}$ Discutere graficamente la seguente equazione parametrica di II grado entro i limiti indicati:

$(k+1)x^2$ -$(5k+3)x$ + $(6k+4)$ = 0 $\wedge$ $x\in$ [1,5]. Dati i valori dei limiti si consiglia di usare due scale diverse sui due assi.

$\boxed{2.}$ Il trapezio rettangolo ABCD di base maggiore AB e lato obliquo BC è circoscritto ad una circonferenza di centro O e raggio r . Dimostrare che l'angolo COB è retto. Sapendo che il perimetro del trapezio vale $9r$ determinare i lati del trapezio. Indicato con T il punto di contatto della circonferenza con la base maggiore sia P∈TB. Posto $\overline{TP}$ = x determinare il campo di variabilità di x e il valore del perimetro del triangolo POB in funzione di x.

1.1 ⇒ 2	**1.2 ⇒ 2**	**1.3 ⇒ 3**	**2.1 ⇒ 2**	**2.2 ⇒ 2**	**2.3 ⇒ 2**	

Risposte

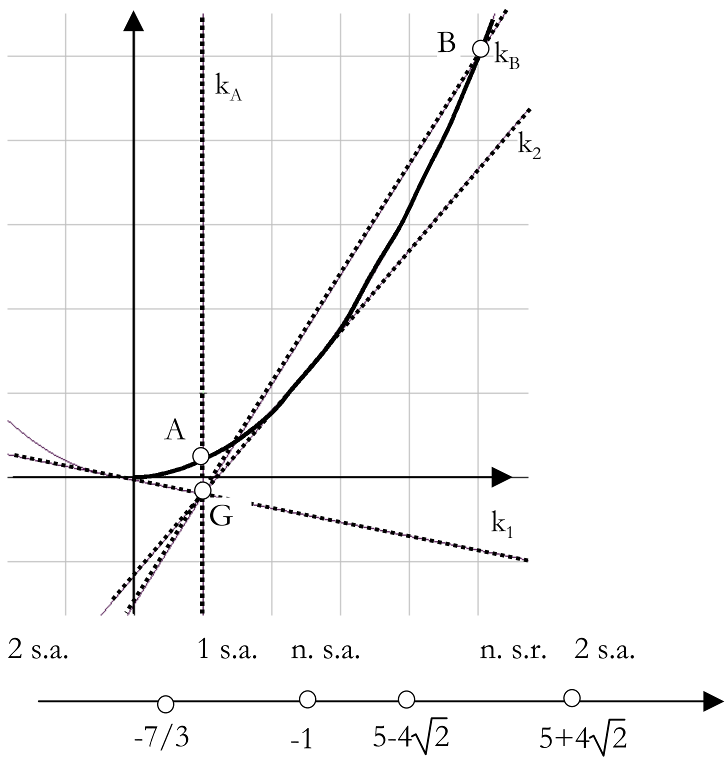
$\boxed{1.}$ Posto y = x^2 si ottiene la intersezione tra un fascio di rette r_k di centro G≡(1,-1) e la parabola. I riquadri in figura hanno ampiezza 1 e 5.

Posto A≡(1,1) e B≡(5,25) si ottiene k_A = -1 e k_B = -7/3.

La condizione di intersezione tra rette e parabole porta a k ≤ 5-4$\sqrt{2}$ ∨ k ≥ 5+4$\sqrt{2}$ mentre dalla figura si osserva che si hanno 1 soluzione accettabile tra k_A e k_B e due soluzioni tra k_B e la tangente.

Dopo aver riportato i capisaldi sull'asse k si osserva che la tangente accettabile è quella con il valore di k più a destra cui si giunge seguendo la sequenza A, B, tangente passando per l'infinito sull'asse k.

La retta corrispondente al valore di k →∞ è la retta mancante del fascio 5x-y-6=0 che passa per i punti (2,4) e (3,9) della parabola.



$\boxed{2.}$ CO e BO sono bisettrici di angoli coniugati interni. Sono bisettrici per le proprietà della bisettrice come luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo. Posto $\overline{TB}$ = x con $x > r$ si ottiene una equazione di II grado applicando il II teorema di Euclide al triangolo COB per trovare CB. Risolta l'equazione si ha $x = 2r$ (scartare la soluzione x = r/2 perché esterna al campo di variabilità e che corrisponde alla base minore). L'ultima parte del problema richiede l'uso del teorema di Pitagora per trovare $\overline{PO}$ e $\overline{BO}$.

3F ordinamento 21/03/2002 iperbole e funzioni omografiche: 2 ore

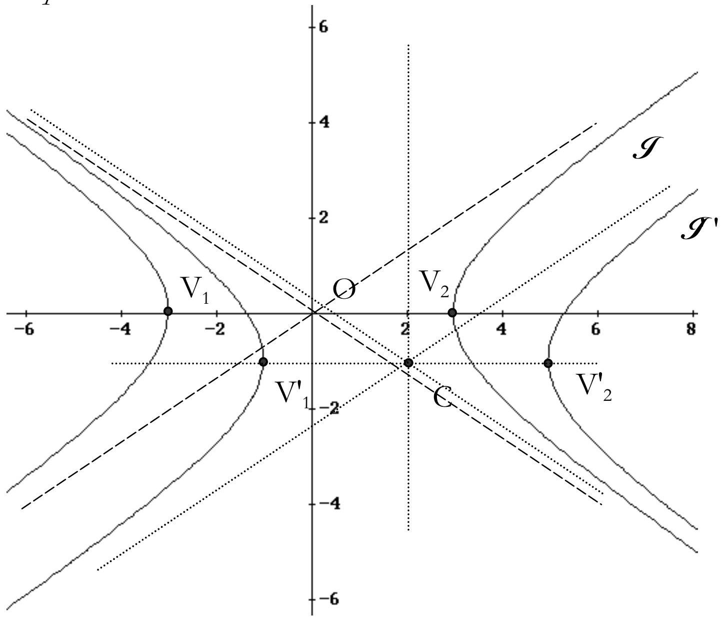
Svolgere gli esercizi (1 o 2) e (3 o 4) puntando a completare le richieste in essi contenute. Non saranno presi in esame pezzi non significativi di altri esercizi. Punteggio per la sufficienza 9 con i corrispondenti •.

1. Si consideri l'iperbole $\mathscr{I}$ di equazione $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

   (1)

   a) Determinare i vertici V_1 e V_2 e gli asintoti. Quindi tracciarne il diagramma in una scala opportuna. Il diagramma ordinato e chiaro è parte rilevante del punteggio.

   I vertici corrispondono a y = 0 da cui x = ±3. Pertanto $V_1 \equiv (-3,0)$ e $V_2 \equiv (3,0)$ mentre per gli asintoti $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{2}{3}x$

   Errori

   Difficoltà a tracciare correttamente l'asintoto (errori di inclinazione)

   b) Scrivere l'equazione della tangente t alla iperbole in un suo punto T di coordinate $(\tilde{x}, \tilde{y})$ determinando il coefficiente angolare *m* e il termine noto *q*. Si consiglia di usare la formula basata sulla semisostituzione di variabile

   Applicando la formula di semisostituzione si ha per la retta tangente: $\frac{x\tilde{x}}{9} - \frac{y\tilde{y}}{4} = 1$. Per determinare m e q bisogna esplicitare l'equazione e si ottiene immediatamente $y = \frac{4}{9}\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}x - \frac{4}{\tilde{y}}$

   Errori

   Diverse persone non hanno tenuto conto del fatto che l'iperbole era assegnata con equazione $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ e hanno lavorato in a e b.

   Alcuni non conoscono la formula di semisostituzione delle variabili che abbiamo anche dimostrato nei suoi elementi essenziali e assegnata come esercizio teorico sulle proprietà delle equazioni parametriche.. Qualcuno si è imbarcato nella intersezione con una generica retta (dimenticando che bisognava almeno usare un fascio passante per T. Infine, e questo è particolarmente censurabile, hanno trovato un coefficiente angolare numerico come se la generica tangente avesse sempre la stessa inclinazione.

   c) Dimostrare che il luogo geometrico descritto da m e q al variare del punto di tangenza T è una iperbole di equazione $9m^2 - q^2 = 4$

   $m = \frac{4}{9}\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$ e $q = \frac{4}{\tilde{y}}$ Per determinare il luogo bisogna eliminare dalle 2 equazioni $(\tilde{x},\tilde{y})$ e tenere conto del legame tra $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ dato dalla appartenenza del punto alla iperbole.

   $\tilde{y} = \frac{4}{q}$ e $\tilde{x} = \frac{9}{4}\tilde{y}m = -9\frac{m}{q}$. Se ora teniamo conto del fatto che $(\tilde{x},\tilde{y})$ appartiene alla iperbole e dunque ne soddisfa la equazione avremo sostituendo dopo qualche passaggio che consiglio di svolgere … $9m^2 - q^2 = 4$

   Errori

   Svolto da poche persone e in mezzo a irrazionali sostituzioni che puzzavano di tentativi più che di un progetto razionale.

   d) Dimostrare che, in un opportuno sistema traslato XCY la equazione $\mathscr{I}'$: $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$ si riduce alla (1). Detto ciò spiegare come si collocano le due curve $\mathscr{I}$ e $\mathscr{I}'$ nel sistema xOy e disegnarle.

   $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2 - 4x + \ldots) - 9(y^2 + 2y + \ldots) = 29 \Leftrightarrow 4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 + 2y + 1) = 29 + 16 - 9 \Leftrightarrow$
   $4(x-2)^2 - 9(y+1)^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$. Si tratta di una iperbole di centro (2,–1).

L'equazione rappresenta la (1) se si esegue la traslazione d'assi X = x – 2 e Y = y +1 o alternativamente $\mathcal{I}$' può essere vista come la trasformata di $\mathcal{I}$ attraverso una traslazione di vettore (2,–1) che sposta il centro di simmetria nel punto (2,–1).

Errori

Molto diffuso l'errore di segno – 9(y^2 – 2y +…) che porta a sbagliare il centro di simmetria. Qualche difficoltà ad argomentare sul legame tra $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}$' come era richiesto dal testo.

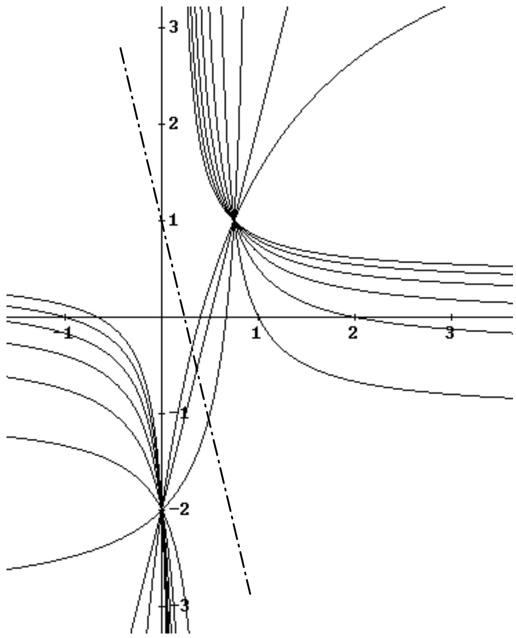
2. Data la famiglia di funzioni omografiche γ_m: $y = \dfrac{(m+1)x - 2}{(m-3)x + 1}$

a) Determinare i punti fissi A e B della famiglia ($x_A<x_B$)

Per determinare gli eventuali punti fissi bisogna considerare l'equazione in m ed imporre che essa ammetta soluzioni ∀ m. Si ha così:

$y = \dfrac{(m+1)x - 2}{(m-3)x + 1} \Leftrightarrow xym - 3xy + y = mx + x - 2 \Leftrightarrow m(xy - x) + (-3xy + y - x + 2) = 0 \Leftrightarrow (xy - x) = 0 \wedge (-3xy + y - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x(y - 1) = 0 \wedge (-3xy + y - x + 2) = 0 \Leftrightarrow$ a) $x = 0 \wedge y = -2$ b) $y = 1 \wedge -4x + 3 = 0$. Si hanno così i punti $A \equiv (0,-2)$ e $B \equiv (\frac{3}{4}, 1)$

In figura sono stati riportati i diagrammi delle curve con m=–4, –3, …4, da cui si vede bene il passaggio per A e B ed è stato anche rappresentato il luogo dei centri di simmetria di cui alla domanda c).



Errori

E' diffusa la tendenza a non motivare il procedimento. Presente qualche errore nella soluzione del sistema

b) Determinare il valore di m per il quale l'equazione rappresenta una retta e scrivere tale equazione.

γ_m si riduce ad una retta quando m = 3 perché in quel caso scompare la dipendenza da x al denominatore e in quel caso si ha: y = 4x – 2

Errori

E' sbagliato dire che si annulla x, anzi x prende qualsiasi valore (ma è moltiplicato per 0).

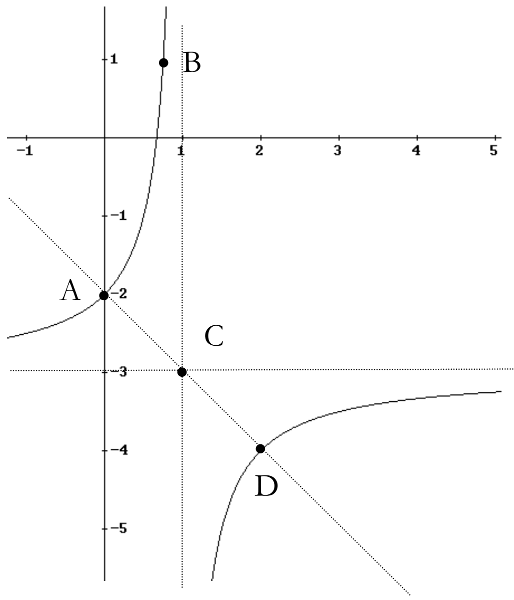
Un compito mi ha segnalato una cosa che mi era sfuggita e cioè l'esistenza anche di una retta orizzontale che si ottiene quando il numeratore e il denominatore sono proporzionali (in quel caso si semplifica e sparisce la dipendenza da x)

Ciò si verifica se $\dfrac{(m+1)}{(m-3)} = \dfrac{-2}{1}$ e cioè se $m+1 = -2m + 6 \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{3}$. In quel caso $y = \dfrac{(m+1)x - 2}{(m-3)x + 1} = \dfrac{\frac{8}{3}x - 2}{-\frac{4}{3}x + 1} = -2$ per $\forall x, x \neq \dfrac{3}{4}$

Si può arrivare allo stesso risultato svolgendo la divisione e imponendo che si annulli il resto della divisione. Per il valore di m che annulla il resto il quoziente vale – 2.

c) Determinare le equazioni degli asintoti di γ_m e il luogo geometrico dei centri di simmetria C di ciascuna funzione omografica.

Gli asintoti di γ_m (funzione omografica) si ottengono dall'annullamento del denominatore che porta a $x = \dfrac{1}{3-m}$ e dalla condizione $x \to \infty$ che porta a trascurare le costanti additive del numeratore e denominatore ottenendo $y = \dfrac{(m+1)x}{(m-3)x} = \dfrac{(m+1)}{(m-3)}$



Il luogo geometrico dei centri di simmetria richiede la eliminazione di m. Si ricava m dalla prima e si sostituisce nella seconda ottenendo y = – 4x + 1 . Il luogo è una retta

Errori

La determinazione degli asintoti deve contenere una breve motivazione. In caso contrario è obbligatorio eseguire la divisione che fa determinare direttamente il centro di simmetria e con lui gli asintoti.

L determinazione del luogo geometrico, anche questa volta ha dato problemi a molte persone: sia problemi concettuali (come si fa?) sia tecnici di tipo algebrico (difficoltà a manipolare semplici frazioni algebriche).

d) Trovare la curva γ passante per $D\equiv(2,-4)$ e tracciarne il diagramma in una scala opportuna da cui si devono vedere i due rami, l'asse di simmetria, gli asintoti e i punti A, B, C, D. Il corretto ed ordinato tracciamento del diagramma è parte integrante della valutazione.

Imponendo che $D\equiv(2,-4)\in\gamma_m$ si ha $-4 = \dfrac{2(m+1)-2}{2(m-3)+1}$ da cui m = 2 che ci porta alla funzione $y = \dfrac{3x-2}{-x+1}$ con centro di simmetria $C\equiv(1,-3)$

La figura qui a lato riporta il diagramma richiesto.

Errori

Diverse persone non hanno capito chi fossero A, B, C, D nonostante fossero dichiarati nel testo,

3. Dimostrare che data l'iperbole equilatera con gli asintoti sugli assi $\mathscr{I}$: $y = \dfrac{k}{x}$ la retta tangente nel suo punto T di ascissa $\tilde{x}$ ha coefficiente angolare $m = -\dfrac{k}{\tilde{x}^2}$

Il punto $T\equiv(\tilde{x},\dfrac{k}{\tilde{x}})$ e pertanto la generica retta per T è $y - \dfrac{k}{\tilde{x}} = m(x-\tilde{x})$. $\Leftrightarrow y = mx - m\tilde{x} + \dfrac{k}{\tilde{x}}$

Se si interseca con l'iperbole si ottiene una equazione risolvente che ammette come radice $\tilde{x}$: In effetti $\dfrac{k}{x} = mx + \dfrac{k}{\tilde{x}} - m\tilde{x}$. $\Leftrightarrow \dfrac{k}{x} - \dfrac{k}{\tilde{x}} = m(x-\tilde{x}) \Leftrightarrow \dfrac{k(\tilde{x}-x)}{x\tilde{x}} = m(x-\tilde{x}) \Leftrightarrow x=\tilde{x} \vee -\dfrac{k}{x\tilde{x}} = m \Leftrightarrow x=\tilde{x} \vee x = -\dfrac{k}{m\tilde{x}}$

Si ha la tangenza quando le due radici coincidono cioè quando $-\dfrac{k}{m\tilde{x}} = \tilde{x}$ ovvero $m = -\dfrac{k}{\tilde{x}^2}$

Errori

Si sono viste cose allucinanti inventate per far venire il risultato tipo interseco la retta generica per l'origine con l'iperbole … (faccio qualche trucco sbagliato e oohp).

L'esercizio nonostante fosse alla portata di tutti non è stato svolto quasi da nessuno e molti hanno preferito fare pezzi dell'1 e del 2 insieme nonostante fosse esplicitamente vietato,

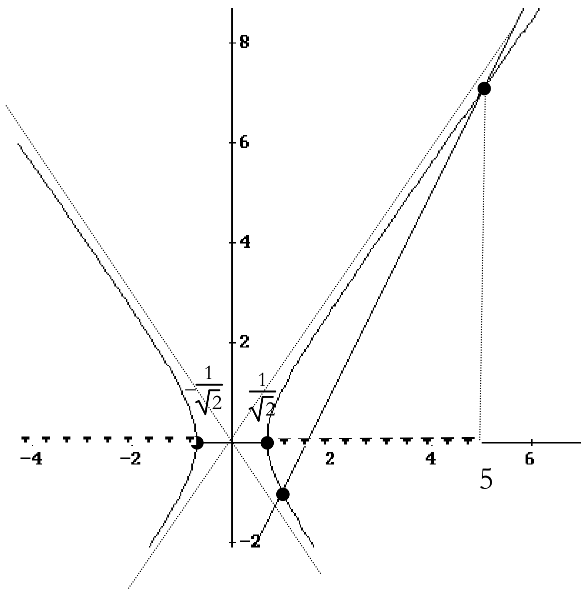
4. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{2x^2-1} > 2x - 3$

La disequazione corrisponde a discutere la posizione reciproca della retta r: y = 2x – 3 e della porzione di iperbole definita dalla condizione $y = \sqrt{2x^2-1} \Leftrightarrow y\geq 0 \wedge 2x^2 - y^2 = 1$.

L'iperbole ha come vertici i punti di ascissa $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e come asintoti le rette $y = \pm\sqrt{2}\,x$

L'iperbole e la retta si intersecano in $2x^2 - (2x-3)^2 = 1$ che porta alla equazione $x^2 - 6x + 5 = 0$ con soluzioni 1 e 5.

Si ottiene così il diagramma qui a lata rispetto al quale ci interessano le zone dell'asse x in cui l'iperbole ha ordinata positiva e si trova sopra la retta. Si hanno così le soluzioni $x \leq -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \vee \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 5$



Errori

Di tutti i colori; qualcuno ha elevato al quadrato senza preoccuparsi della condizione 2x – 3 ≥ 0 e poi è passato al confronto dei diagrammi di 2 parabole (ma senza le restrizioni venivano sbagliate le discussioni); qualcuno è arrivato alle circonferenze; qualcuno ha sbagliato gli asintoti perché ha deciso che a e a^2 sono la stessa cosa e facendo gli asintoti paralleli alla retta non ha cercato le intersezioni ; qualcuno ha sbagliato i vertici; molti si sono fermati prima della intersezione; qualcuno ha ignorato il ramo di sinistra della iperbole.

3G ordinamento 10/4/2000 simmetrie e funzioni omografiche

Svolgere in maniera completa uno solo dei due seguenti problemi curando grafica ed esposizione.

$\boxed{1.}$ L'equazione $9x^2 - 4y^2 + 18x + 16y - 43 = 0$ rappresenta una conica γ. a) Attraverso una opportuna traslazione $x = X + h$ e $y = Y + k$ determinare il centro di simmetria e la forma assunta dall'equazione nel sistema di riferimento XO'Y. b) Dopo aver osservato che si tratta di una iperbole determinare nel sistema xOy le coordinate dei due vertici V_1 e V_2, le equazioni dei due asintoti r ed s e tracciare in maniera accurata il diagramma. c) Si scriva l'equazione della parabola ad asse orizzontale con vertice in V_2 e che taglia l'asse delle x in C≡(-2,0). d) Dopo aver disegnato la figura e senza eseguire conti spiegare perché per effettuare la intersezione tra l'iperbole e la parabola sarebbe conveniente lavorare nel sistema XO'Y e che tipo di equazione si otterrebbe se si risolvesse il sistema nella variabile X e Y rispettivamente.

$\boxed{2.}$ Si consideri l'equazione di II grado nella variabile y: $(x - 2)^2y^2 - (3x - 2)(x - 2) y + (x + 1) (2x - 3) = 0$ con $x\neq 2$. a) Dopo aver calcolato (con intelligenza) il discriminante, che risulta un quadrato perfetto, si trovino le due soluzioni della equazione. b) Si ottengono così due funzioni omografiche γ_1 e γ_2 per entrambe si richiede di determinare le intersezioni con gli assi A, B, C e D gli asintoti e il punto E di intersezione. c) A questo punto si traccino i diagrammi *rispettando le simmetrie delle figure*. d) Si completi l'esercizio spiegando perché la funzione $y = \frac{a x + b}{c x + d}$ corrisponde sempre ad una iperbole equilatera con gli asintoti paralleli agli assi.

Risposte:

$\boxed{\textbf{1.}}$ Effettuata la sostituzione si arriva alla equazione: $9X^2 - 4Y^2 + x(18h + 18) + Y(-8k + 16) + (9h^2 + 18h - k^2 + 16K - 43) = 0$ che si riduce alla forma $9X^2 - 4Y^2 = 36$ per $h = -1$ e $k = 2$. Il punto O'≡(-1,2) è dunque il centro di simmetria di una iperbole la cui equazione nel sistema traslato è $X^2/4 - Y^2/9 = 1$. Dunque $a = 2$ e $b = 3$ e i coefficienti angolari dei due asintoti valgono ± 3/2. Le equazioni si ottengono imponendo il passaggio per O'.

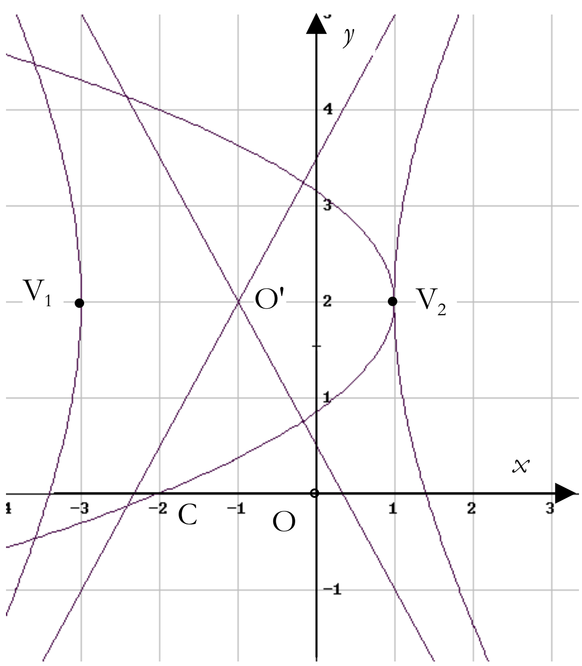
I due vertici hanno coordinate V_1≡(-3,2) e V_2≡(1,2)

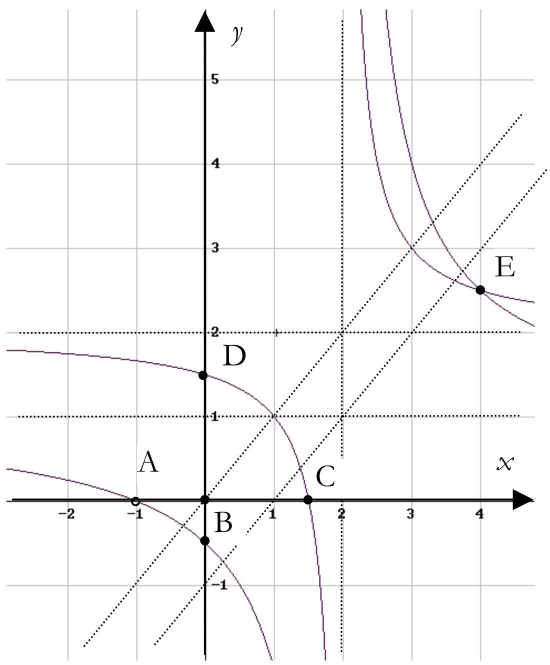
La parabola ha equazione $x = -3/4\, y^2 + 3\, y - 2$. Se le due curve vengono descritte nel sistema XO'Y a causa della simmetria la loro forma si semplifica e l'equazione risolvente del sistema in X risulta una equazione di II grado della quale è già nota una delle due soluzioni X = 2. Se si risolve il sistema in Y viene invece una equazione di IV grado biquadratica.

$\boxed{2.}$ Si ha $\Delta = (x - 2)^2(x - 4)^2$ e pertanto le due soluzioni risultano: γ_1: $y = \frac{x+1}{x - 2}$ e γ_2 : $y = \frac{2x - 3}{x - 2}$

I punti richiesti hanno coordinate A≡(-1,0), B≡(0,-1/2), C≡(3/2, 0), D≡(0,3/2), E≡(4,5/2)

Gli asintoti hanno equazione x=2 (comune), y = 1, y =2





Per rispondere all'ultima domanda basta eseguire la divisione e si ottiene $y = \frac{a}{c} + \frac{b - ad/c}{cx + d}$ e questa espressione attraverso una traslazione si riduce a $Y = k / X$

3F ordinamento Recupero geometria analitica 23/4/2002

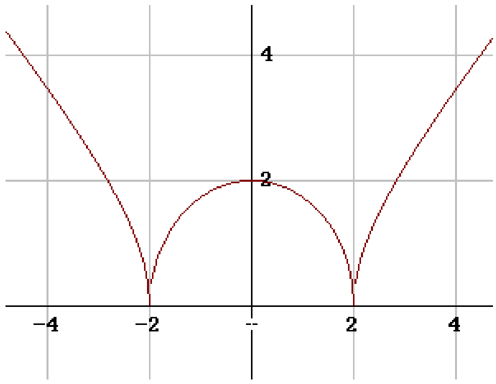
1. Cosa si può dire della curva γ: $y = (x - \alpha)(x - \beta)$?
2. Scrivere l'equazione della generica parabola ad asse verticale passante per $A \equiv (\alpha,0)$ e $B \equiv (\beta,0)$
3. Con riferimento alle due domande precedenti cosa si può dire della curva γ: $y = \frac{\delta}{\alpha\beta}(x - \alpha)(x - \beta)$?
4. Dato il luogo geometrico $\gamma : x^2 + y^2 + 3x(k+2) - y(1-3k) - 1 = 0$ a) determinare i valori di k per i quali la equazione rappresenta una circonferenza e determinare il raggio b) trovare il luogo dei centri c) determinare, se esistono i punti fissi della famiglia.
5. Data l'equazione $\gamma_k : k^2x^2 + y^2 + 4kx - 2y + 3k^2 + 1 = 0$ con $k > 0$ a) dimostrare che essa rappresenta una ellisse e trovare il centro di simmetria e la lunghezza dei semiassi b) Per quali valori di k i fuochi stanno su una parallela all'asse x?
6. Data la parabola $\mathscr{P} : y = \frac{1}{2}(x-1)(x-5)$ a) determinare i punti A, B, C di intersezione con gli assi y e x e il vertice V. b) Determinare il punto T in cui la tangente è parallela alla retta r_{AC}. c) Usare il risultato trovato per determinare attraverso il teorema di Archimede l'area del segmento parabolico individuato da A e C.
7. Data la parabola $\mathscr{P}$: $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$ determinare a) la parabola $\mathscr{P}_1$ ottenuta da $\mathscr{P}$ attraverso una traslazione di vettore (–2,–1) b) a) la parabola $\mathscr{P}_2$ ottenuta da $\mathscr{P}$ attraverso una simmetria di centro (2,3)

1	2	3	4a	4b	4c	5a	5b	6a	6b	6c	7a	7b		
1	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	2	2		

3G ordinamento 15/5/2000 geometria analitica

1. Disegnare il diagramma della funzione $y = f(x)\sqrt{|x^2 - a^2|}$ ed utilizzarlo per discutere il numero di soluzioni dell'equazione $\sqrt{|x^2 - a^2|} = k$ al variare del parametro k
2. Dimostrare che l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ esiste solo per $x \leq -a \vee x \geq a$ e spiegare quindi per quale ragione nello studiare le proprietà di questa curva ci si può limitare al I quadrante.
3. In un sistema di riferimento xOy sono assegnate una funzione omografica γ: $y = f(x)$ di centro di simmetria $C \equiv (1,-1)$ e passante per il punto $A\equiv(-1,-3)$ e $B\equiv(-2,-7/3)$. a) Determinare l'equazione della curva. b) Quindi determinare l'equazione della parabola $\mathscr{P}$ ad asse verticale passante per A e avente il vertice $V \equiv(3,3)$. c) Disegnare le due curve e determinare poi le ascisse dei tre punti di intersezione (uno è noto e si può pertanto risolvere l'equazione di III grado con il metodo di divisione di Ruffini). d) Scrivere l'equazione della parabola $\mathscr{P}'$ simmetrica di $\mathscr{P}$ rispetto a C. e) Trovare l'equazione della retta tangente alla funzione omografica in A e determinare l'area del triangolo AVD dove D è l'ulteriore punto di intersezione tra tale retta e la parabola.

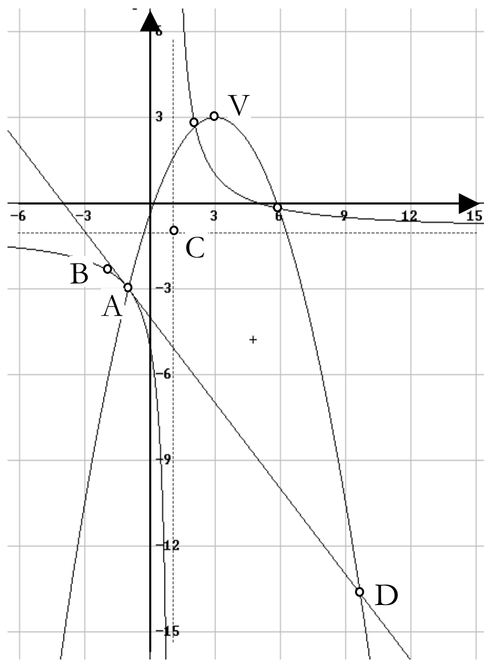
1. La funzione è formata da due mezzi rami di iperbole equilatera con vertici in a e -a e da una semicirconferenza di raggio a (vedi figura riferita al caso a=2).



La discussione è pertanto molto semplice e si hanno:
2 soluzioni per k>a
4 soluzioni per 0<k<a
nessuna soluzione per k<0

2. La curva è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi come si vede scambiando x con - x e y con -y ed osservando che l'equazione non cambia. Dunque ciò che vale in un quadrante vale anche negli altri. Inoltre da $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ segue $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$ e per la positività del termine di sinistra deve essere $\frac{x^2}{a^2} - 1 \geq 0$ da cui si ricava quanto richiesto.
3. La generica funzione omografica ha equazione $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ e le condizioni sul centro di simmetria consentono di affermare che deve essere c + d = 0 e a/c = -1. Da cui si ha d = -c e a=-c. La nostra funzione si riduce dunque alla forma $y = \frac{-cx + b}{cx - c}$. Da qui imponendo il passaggio per $A\equiv(-1,-3)$ e $B\equiv(-2,-7/3)$ si ottiene:

$-3 = \frac{c+b}{-2c}$ e $-7/3 = \frac{2c + b}{-3c}$. Questo sistema ha come soluzioni b=5 e c= 1. Dunque la funzione omografica è: $y= \frac{-x+5}{x-1}$



L'equazione della parabola $\mathscr{P}$ ad asse verticale è $y = ax^2 + bx + c$ ed imponendo le due condizioni si ottiene:
$-b/2a = 3 \wedge 3 = 9a + 3b + c \wedge -3 = a - b + c$
$c= -3 + b - a \wedge 8a + 4b = 6 \wedge b = -6a$
$-16a = 6$ da cui $a = -3/8$ $b = 18/8 = 9/4$ $c = -3 + 9/4 + 3/8 = -3/8$
Dunque $\mathscr{P}$ è $y = -3/8x^2 + 9/4x - 3/8$
Le due curve sono rappresentate nella figura qui a lato:
La loro intersezione porta ad un sistema di III grado la cui equazione risolvente è: $-3x^3+21x^2-13x-37=0$
Questa equazione ammette per ipotesi e lo si può verificare per sostituzione la soluzione x=-1 (punto A in comune) e dopo essere stata abbassata di grado con il metodo di Ruffini porta alle soluzioni:
$x = -1 \vee x = 4\pm\sqrt{33}/3$
La parabola simmetrica di $\mathscr{P}$ rispetto a C si trova attraverso la trasformazione della simmetria centrale:
$y \to 2y_C - y$ e $x \to 2x_C - y$. Nel nostro caso si ha pertanto:
$(-2 - y) = -3/8(2 -x)^2 + 9/4(2 -x) - 3/8$ ed eseguendo i conti si ottiene $\mathscr{P}'$: $y = 3/8 x^2 + 3/4 x - 37/8$
Il punto A è il vertice della funzione omografica e dunque il coefficiente angolare

della retta tangente vale -1. Anche senza questa considerazione il calcolo è elementare e corrisponde alla intersezione del fascio di retta per A con la funzione omografica (e in più si ottiene subito il punto D).
La retta tangente t_A ha dunque equazione: $y + 3 = -(x + 1)$ da cui $y = -x - 4$
Se si interseca con la funzione omografica si arriva a $x_D = 29/3$ e $y_D = -41/3$
Per trovare l'area basta ora determinare la distanza tra r_{AD} e il vertice $V\equiv(3,3)$.

$h_V = \text{dist}(r_{AD},V) = \dfrac{|3+3-4|}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$

$\overline{AD} = |\Delta x|\sqrt{m^2+1} = (29/3+1)\sqrt{2} = \dfrac{32\sqrt{2}}{3}$

Dunque l'area richiesta vale $1/2\, h_V\, \overline{AD} = 1/2 \dfrac{2}{\sqrt{2}} \dfrac{32\sqrt{2}}{3} = \dfrac{32}{3}$

21/5/2002 riepilogo conoscenze 3F ordinamento

1. Sono date la retta γ: $y = mx + q$ e il punto $P\equiv(\tilde{x},\tilde{y})$
   a) $\tilde{y} = m\tilde{x} + q$ b) $\dfrac{|y - mx - q|}{\sqrt{m^2+1}} = \text{dist}(P,\gamma)$ c) γ': $y= m'x + q' \wedge m = m' \Rightarrow \gamma \cap\gamma' = \varnothing$
   d) $\tilde{y} - m\tilde{x} - q > 0 \Rightarrow$ P appartiene al semipiano superiore individuato dalla retta
2. Sono date le rette $\gamma : y = mx + q$ e $\gamma' : y= m'x + q'$ con la condizione $m \neq m'$ e l'equazione $\gamma_k : (y - mx - q) + k(y -m'x - q') = 0$ con k reale
   a) $\gamma \subset \gamma_k$ b) $\gamma' \subset \gamma_k$ c) γ_k contiene tutte le rette per $\gamma \cap\gamma'$ d) $\gamma' \subseteq \gamma_k$
3. Siano $A\equiv(x_A,y_A)\in r \wedge B\equiv(x_B,y_B)\in r \wedge x_A - x_B \neq 0 \wedge y_A - y_B \neq 0$
   a) $m_{AB} = \dfrac{y_A - y_B}{x_B - x_A}$ b) $r : y - y_B = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_A)$ c) $\overline{AB} = \Delta x\sqrt{m^2 + 1}$
   d) $s_A \perp r_{AB} \Rightarrow s_A : y - y_A = \dfrac{x_A - x_B}{y_B - y_A}(x - x_A)$
4. Sono date le rette $\gamma : y = mx + q$ e $\gamma' : y= mx + q'$ con la condizione $q \neq q'$
   a) $\text{dist}(\gamma,\gamma') = \dfrac{|q - q'|}{\sqrt{m^2 + 1}}$ b) $\gamma \cup\gamma' \varnothing$ c) $\gamma' \cap \overrightarrow{y} =\{Q\}\Rightarrow y_Q = -\dfrac{q'}{m}$
   d) la retta che biseca la striscia individuata dalle due rette ha equazione $y = mx + \dfrac{q - q'}{2}$
5. Data la circonferenza γ di centro $C \equiv (\alpha,\beta)$ e raggio R
   a) $\gamma \cap \overrightarrow{x} =\{T\}\Rightarrow \beta = R$ b) $\alpha = \beta = R \Rightarrow \gamma$ è tangente ad entrambi gli assi
   c) γ è tangente ad entrambi gli assi $\Rightarrow \alpha = \beta = R$ d) $\alpha\beta > 0 \Rightarrow$ C è nel I quadrante.
6. Data l'equazione $\gamma : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ sia $\Delta = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} - c$
   a) Esiste sempre una circonferenza di equazione γ b) γ è una circonferenza $\Rightarrow R = \Delta$
   c) $\Delta > 0 \Rightarrow R = \sqrt{\Delta}$ d) $\Delta < 0 \Rightarrow R = \sqrt{-\Delta}$
7. Sia $\gamma : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = k^2$
   a) γ è una circonferenza di centro $C\equiv(\alpha,\beta)$ e raggio k b) $\gamma \cap \overrightarrow{x} \neq \varnothing \Leftrightarrow k^2 - \beta^2 \geq 0$
   c) $\gamma : x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\beta^2}{4} - k^2 = 0$ d) $\alpha = \beta = |k|$ la circonferenza è tangente agli assi e il centro può stare nel III quadrante.
8. Data la circonferenza γ di centro $C \equiv (\alpha,\beta)$ e raggio R sia $T\equiv(\tilde{x},\tilde{y})\in\gamma$
   a) t_T è tangente $\Rightarrow m_t = \dfrac{\alpha - \tilde{x}}{\beta - \tilde{y}}$ b) t_T è tangente $\Rightarrow t_T: y - \tilde{y} = m(x - \tilde{x}) \wedge m = \dfrac{\alpha - \tilde{x}}{\beta - \tilde{y}}$
   c) t_T è secante $\Rightarrow m_t \neq \dfrac{\tilde{x} - \alpha}{\beta - \tilde{y}}$ d) Il simmetrico di T rispetto a C è $T' \equiv (2\tilde{x} - \alpha, 2\tilde{y} - \beta)$
9. Data la parabola di vertice $V\equiv(\alpha,\beta)$ e fuoco $F\equiv(\gamma,\delta)$
   a) $\gamma = \alpha \Rightarrow$ la parabola ha asse parallelo all'asse x b) $\beta = \delta \Rightarrow$ la parabola ha asse parallelo all'asse y
   c) $\gamma = \alpha \Rightarrow$ la parabola ha asse parallelo all'asse $y \wedge a = \dfrac{1}{4(\beta - \delta)} \wedge b = -2a\alpha$
   d) $\gamma = \alpha \Rightarrow$ la parabola ha asse parallelo all'asse $y \wedge b = -2a\alpha \wedge c = -\beta + a\alpha^2 + b\alpha$
10. Data la parabola $\mathscr{P}$: $y = a(x - k)^2 + h$
    a) Il vertice è $V\equiv(k,-h)$ b) $\mathscr{P}\cap\overrightarrow{x} = \varnothing \Rightarrow h\cdot a > 0$ c) Il fuoco ha coordinate (k,h)
    d) $a>0 \Rightarrow \mathscr{P}\cap\overrightarrow{x} = \varnothing$
11. Sia γ un luogo tale che $f(x,y) = 0$, $C\equiv(\alpha,\beta)$, $r : y = \beta$

a) La traslazione di vettore (α,β) produce la curva $\gamma' : f(x + \alpha,y) + \beta = 0$
b) $f(\alpha,\beta) \equiv 0 \Rightarrow C\equiv(\alpha,\beta)$ è centro di simmetria
c) la simmetria centrale di centro C produce la curva $\gamma'' : f(2\alpha - x,2\beta - y) = 0$
d) La simmetria assiale rispetto a r produce la curva $\gamma''' : 2\beta - f(x,y) = 0$

12. E' data l'equazione $\gamma : h(x - \alpha)^2 + k(y - \beta)^2 = l^2$
a) $hk < 0 \wedge l \neq 0 \Rightarrow \gamma = \varnothing$ b) $hk < 0 \wedge l = 0 \Rightarrow \gamma$ è l'intersezione di due rette
c) $hk < 0 \wedge l = 0 \Rightarrow \gamma = \varnothing$ d) $hk < 0 \wedge l \neq 0 \Rightarrow \gamma$ è una iperbole di centro (α,β)

13. Proposizioni riferite all'iperbole centrata nell'origine
a) L'equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$è una iperbole con asintoti $y = \pm\frac{a}{b}x$
b) I vertici dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ hanno ascissa $\pm a$
c) I fuochi dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ sono sull'asse y e $c^2 = a^2 + b^2$
d) I fuochi dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ sono sull'asse y e $c^2 = a^2 - b^2$

14. Per verificare se una curva $\gamma : f(x,y) = 0$ ammette o meno centro di simmetria
a) E' necessario conoscere il suo diagramma
b) E' necessario conoscere le coordinate del presunto centro di simmetria
c) Bisogna costruire γ' simmetrica di γ rispetto a un generico punto $C\equiv(\alpha,\beta)$. Si impone poi che sia $\gamma \equiv \gamma'$ e ciò consente sempre di trovare (α,β)
d) Si può operare una traslazione d'assi con origine $C\equiv(\alpha,\beta)$ e imporre che la funzione generata dalla traslazione sia dispari. Se il sistema nelle variabili (α,β) che si genera ammette soluzione allora tale soluzione corrisponde al centro di simmetria.

15. Proposizioni riferite all'ellisse di equazione $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e tangente t.
a) $T\equiv(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathcal{E} \Rightarrow m_t = -\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\frac{b^2}{a^2}$ b) $F \in \overrightarrow{x} \Rightarrow b > a$
c) $F \in \overrightarrow{x} \Rightarrow c^2 = b^2 + a^2$ d) $T\equiv(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathcal{E} \Rightarrow t : \frac{x\,\tilde{y}}{a^2} + \frac{y\,\tilde{x}}{b^2} = 1$

16. Data la parabola ad asse verticale di vertice V, fuoco F, direttrice d e asse di simmetria r
a) $V\equiv(-\frac{b}{2a},\frac{\Delta}{4a})$ b) $F\equiv(-\frac{b}{2a},\frac{1-\Delta}{4a})$ c) d: $y = \frac{1}{4a}$ d) $r : y = -\frac{b}{2a}$

17. Parabola $\mathcal{P}$ ad asse verticale; ricerca di falso
a) $\mathcal{P}: y = (x - \alpha)^2 + \beta \Rightarrow V\equiv(\alpha,\beta)$ b) $T\equiv(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathcal{P} \Rightarrow m_t = 2a\tilde{x} + b$
c) $\mathcal{P}: y = a(x - \alpha)(x - \beta) \Rightarrow x_V = \frac{\alpha - \beta}{2}$ d) Fissato a al variare di b e di c si ottengono parabole congruenti a quella data

18. Equazioni parametriche ricerca di falso. Sia $\mathcal{C}$ una circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, r una retta $a'x + b'y + c' = 0$ e siano $\mathcal{C} \cap r = \{A,B\}$ e $\mathcal{C}_k : x^2 + y^2 + (a + k\,a')x + (b + kb')y + (c + kc') = 0$
a) $\mathcal{C}_k$ è sempre una circonferenza b) I centri di $\mathcal{C}_k$ giacciono sulla perpendicolare a r passante per il centro di $\mathcal{C}$ c) $\forall k \Rightarrow A \in \mathcal{C}_k \wedge B \in \mathcal{C}_k$ d) $r \subset \mathcal{C}_k$

19. Data l'equazione $\mathcal{C}: (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = k^2$ e $r_m : y - \beta = m\,(x - \alpha)$ ricerca di falso
a) $\mathcal{C}$ rappresenta una circonferenza di centro (α,β) e raggio $|k|$
b) $\mathcal{C}$ si può sempre ridurre alla forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
c) r_m interseca $\mathcal{C}$ in punti simmetrici rispetto a $C\equiv(\alpha,\beta)$
d) $A\equiv(\gamma,\delta) \in \mathcal{C} \wedge A \in r_m$ l'equazione risolvente del sistema è sicuramente divisibile per $x + \gamma$

20. Data la funzione omografica $\gamma: y = \frac{ax + b}{cx + d}$

a) per divisione si ottiene $y = \frac{a}{c} + \frac{b/d}{cx + d}$ b) γ ammette come centro di simmetria il punto $(\frac{c}{d};\frac{a}{c})$

d) dopo averla ridotta alla forma $y = h + \frac{k}{x + \alpha}$ si possono trovare i vertici intersecandola con la retta per $C \equiv (-\alpha, h)$ di coefficiente angolare 1

d) dopo averla ridotta alla forma $y = h + \frac{k}{x + \alpha}$ il centro di simmetria è $C \equiv (-\alpha, h)$.

21. Data la funzione γ: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ si trovi la proposizione falsa
   a) corrisponde ad una retta se $c = 0$ b) corrisponde ad una retta se $a = c = 0$
   c) corrisponde ad una retta se $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ d) ammette un asintoto verticale di equazione $y = \frac{a}{c}$
22. Si consideri la funzione $\gamma : y = f(x) = h + \frac{k}{x + \alpha}$
   a) Attraverso la traslazione $y + h = Y \wedge x + \alpha = X$ essa si riduce alla forma $Y = k/X$
   b) Per traslazione essa si può ridurre alla forma $Y = k/X$ e i vertici hanno ascissa $\pm\sqrt{|k|}$
   c) Qualsiasi retta diversa dagli asintoti interseca γ
   d) Il centro di simmetria appartiene sempre ad una delle rette $y = \pm x$
23. Sono date le equazioni $\mathcal{C}$: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = k^2$ e $\mathcal{P}$: $y = ax^2 + bx + c$. Determinare la proposizione falsa.
   a) $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ porta ad una equazione di 4° grado
   b) Se l'equazione risolvente è del tipo $(x - \gamma)^3(x - \delta)=0$ e $\gamma \neq \delta$ la parabola attraversa la circonferenza in $x = \gamma$ senza tagliarla
   c) Se l'equazione risolvente è del tipo $(x - \gamma)^2(x^2 + px + q)= 0 \wedge p^2 - 4q > 0$ si ha una tangenza e una doppia intersezione
   d) Se l'equazione risolvente è del tipo $(x - \gamma)\ (x + px^2 + qx + r)= 0$ allora γ è l'unica intersezione.
24. Proprietà dei logaritmi le eguaglianze si intendono vere se i due termini hanno anche lo stesso dominio:
   a) $\ln[ab] = [\ln a + \ln b] \wedge ab > 0$ b) $\ln[ab] = [\ln a + \ln b] \wedge ab > 0 \wedge b > 0$
   c) $\ln[ab] = \frac{\log ab}{\log 10} \wedge a > 0 \wedge b > 0$ d) $\ln[ab] = \frac{\log[ab]}{\ln e} \wedge ab > 0$
25. Sia data la funzione γ: $y = f(x) = x^{\ln x} \wedge x > 0$
   a) $y = e^{x \ln x}$ b) $y = 10^{\log^2 x / \log e}$ c) $y = e^{\ln x^{2}}$ d) $y = 2^{(\log_2 x)^{\ln x}}$
26. Proprietà dei logaritmi le eguaglianze si intendono vere se i due termini hanno anche lo stesso dominio:
   a) $\log_a b = \log_{1/a}(-b)$ b) $\log_a b = [\log_b a]^{-1}$ c) $\log(a) + \log(-a) = \log(-a^2)$ d) $\log_a b = \log_b a^{-1}$
27. Si consideri la funzione $\gamma : y = g(x) = \sqrt{\ln|f(x)|}$ Supponiamo inoltre che $f(x)$ sia definita su tutto $\mathfrak{R}$. Il dominio di $g(x)$ è dato da:
   a) $f(x) \geq 1$ b) $f(x) \neq 0$ c) $f(x) \geq 1 \vee f(x) \leq -1$ d) $f(x) \geq 1 \wedge f(x) \neq 0$
28. La disequazione $\frac{\ln\sqrt{f(x)}}{g(x)} > 0$ si imposta ponendo:
   a) $f(x) > 0 \wedge g(x) > 0$ b) $[f(x) > 1 \wedge g(x) > 0] \vee [f(x) < 1 \wedge g(x) < 0]$
   c) $[f(x) > 1 \wedge g(x) > 0] \vee [0<f(x) < 1 \wedge g(x) < 0]$ d) $[f(x) > 1 \wedge g(x) > 0]$

1	a	b	c	**d**	**7**	a	**b**	c	d	**13**	a	b	**c**	d	**19**	a	b	c	**d**	**25**	a	**b**	c	d
2	**a**	b	c	d	**8**	a	b	**c**	d	**14**	a	b	c	**d**	**20**	a	b	c	**d**	**26**	a	**b**	c	d
3	a	b	c	**d**	**9**	a	b	c	**d**	**15**	**a**	b	c	d	**21**	a	b	c	**d**	**27**	a	b	**c**	d
4	**a**	b	c	d	**10**	a	**b**	c	d	**16**	a	**b**	c	d	**22**	a	**b**	c	d	**28**	a	b	**c**	d
5	a	**b**	c	d	**11**	a	b	**c**	d	**17**	a	b	c	**d**	**23**	a	b	c	**d**					
6	a	b	**c**	d	**12**	a	b	c	**d**	**18**	a	b	c	**d**	**24**	a	**b**	c	d					

ex 3G ordinamento verifica superamento del debito 6/9/2000

$\boxed{\text{r1}}$ Sono assegnati in un sistema di riferimento ortonormale xOy una retta r: $y = \frac{1}{2}x - 3$ e due punti A≡(1,2) e B≡(2,-1). Indicata con s la parallela a r passante per A si trovino su di essa i due punti C_1 e C_2 per i quali il triangolo ABC ha area $\sigma = \frac{21}{4}$

$\boxed{\text{c1.}}$ Scrivere l'equazione della circonferenza passante per A≡(1,1), con il centro sulla retta r: 2x -y + 5 e raggio R = 3

$\boxed{\text{p1.}}$ Data la parabola ad asse verticale di equazione $\mathscr{P}: y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{17}{4}$ eseguire una traslazione ad un sistema XPY dove P≡(-3,2). Determinare l'equazione di $\mathscr{P}$ nel sistema XPY e alla luce del risultato trovato spiegare chi sia il punto P.

$\boxed{\text{p2.}}$ Supponendo di aver dimostrato che una parabola con vertice nell'origine e asse verticale ha equazione (nel sistema XVY) $\mathscr{P}: Y = a X^2$ si consideri in un sistema xOy una parabola ad asse verticale di vertice $V \equiv (\tilde{x}, \tilde{y})$ e si dimostri, attraverso una traslazione che porti l'origine nel vertice, che la sua equazione è del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Trovare i valori di b e c in funzione delle coordinate del vertice, invertire la relazione e determinare le coordinate del vertice in funzione di a, b, c.

$\boxed{\text{a1.}}$ Determinare l'equazione delle due parabole ad asse verticale passanti per i punti A≡(1,-3), B≡(-1, -5) e aventi il vertice di ordinata -11/4

$\boxed{\text{a2.}}$ Sono assegnate la parabola ad asse verticale $\mathscr{P}$: $y = -1/4\, x^2 + x - 15/4$ e la circonferenza $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 - 4x + 12y + 30 = 0$. Determinare l'equazione risolvente corrispondente alla intersezione e attraverso il teorema di Ruffini determinare le ascisse dei 4 punti di intersezione.

$\boxed{\text{a3.}}$ Si consideri l'equazione di II grado nella variabile y: $(x - 2)^2y^2 - (3x - 2)(x - 2)\, y + (x + 1)(2x - 3) = 0$ con $x \neq 2$. a) Dopo aver calcolato (con intelligenza) il discriminante, che risulta un quadrato perfetto, si trovino le due soluzioni della equazione. b) Si ottengono così due funzioni omografiche γ_1 e γ_2 per entrambe si richiede di determinare le intersezioni con gli assi A, B, C e D gli asintoti e il punto E di intersezione. c) A questo punto si traccino i diagrammi *rispettando le simmetrie delle figure.*

ex 3G ordinamento Verifica superamento del debito 15/12/2000

$\boxed{1.}$ 1.1) Data l'equazione parametrica di I grado r_k : (k+1)x + (k-1)y + (1-3k) = 0 dimostrare che le infinite rette da essa rappresentate passano tutte per un punto fisso G e determinarne le coordinate. 1.2) Determinare il coefficiente angolare della generica retta r_k e quindi trovare la particolare retta di coefficiente angolare 2 1.3) Spiegare perché la retta r : y = -x + 3, nonostante passi per G, non fa parte di r_k

$\boxed{2.}$ Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ concentrica alla circonferenza di equazione $2x^2 + 2y^2 - 6x + 5y - 4 = 0$ e passante per A≡(-2,3)

Si consideri l'equazione $\mathcal{C}_k$: $x^2 + y^2 + (k - 3)x + (3k - 3)y + (2 - 6k) = 0$

1) facendo riferimento al relativo teorema dimostrare che essa rappresenta ∀k una circonferenza e calcolare il raggio R_k e il centro C_k corrispondenti.
2) determinare i punti A e B (con $x_A > x_B$) comuni alle infinite circonferenze giustificando le proprie affermazioni.
3) con un metodo a piacere, ma giustificato, determinare la retta n comune ai centri di tutte le circonferenze del fascio; determinare inoltre la circonferenza $\mathcal{C}$ ' appartenente al fascio e con centro C' sull'asse y.
4) Scrivere l'equazione della tangente t_A a $\mathcal{C}$ '
5) Determinate il punto D di intersezione tra t_A e n.
6) Trovare l'area del triangolo ADC' sfruttando le particolarità del triangolo
7) Trovare le coordinate del punto di $\mathcal{C}$ ' che presenta la massima distanza da A senza utilizzare l'equazione di $\mathcal{C}$ '. Spiegare il ragionamento seguito.

ex 3G Verifica superamento del debito 11/5/2001

1. Determinare l'equazione della parabola ad asse verticale $\mathscr{P}_1$ passante per A≡(2,– ¾) e avente il vertice in V≡(5/4 , – 1). Disegnare il diagramma.
2. Data una generica retta orizzontale y = k e un punto P≡(α,β) determinare le coordinate del punto P' simmetrico di P rispetto alla retta
3. Utilizzare il risultato precedente per determinare l'equazione della parabola $\mathscr{P}_2$ simmetrica di $\mathscr{P}_1$ rispetto alla retta y = 5/4
4. Considerata la regione comune alle due parabole si tracci una generica retta verticale x = h e si determini il valore di h per il quale il segmento di secante vale 2. Che caratteristiche di simmetria hanno le soluzioni trovate? (motivare la risposta).

III F PNI Frisi settembre 2003 riepilogo parabola e teorema di Archimede

La parabola ad asse verticale $\mathscr{P}$ ha equazione y = -3x^2 + 5x -4.

a) Dopo avere scritto la generica retta r_m passante per il punto P≡(-3,2) si determinino i coefficienti angolari (m_1 e m_2) delle due rette tangenti a $\mathscr{P}$ passanti per P. Indicata con t la tangente di coefficiente angolare negativo se ne trovi l'equazione e si trovi inoltre il punto T di tangenza.

b) Rappresentare la parabola e la retta t.

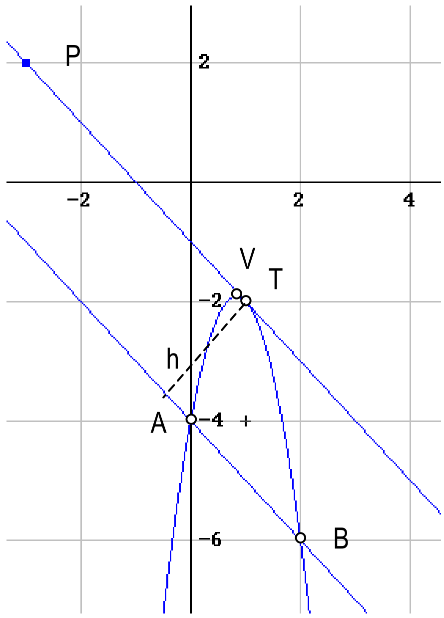
c) Si consideri ora la generica parallela a t e dopo aver scritto l'equazione risolvente che determina le intersezioni A e B con $\mathscr{P}$ si trovi la retta per la quale si ha $x_A = 0$. Si trovi x_B

d) Usando il teorema di Archimede determinare l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola e da questa retta.

t e T	figura	A, B, r_{AB}	σ		
4	1	2	3		

Soluzione sintetica

a) si trova dapprima l'equazione risolvente della intersezione tra parabola e fascio di rette r_m che risulta:
$3x^2 + (m – 5)x +(3m + 6) = 0$
A questo punto poiché si ha tangenza quando $x_1 = x_2$ si avrà $\mathscr{P} \cap r_m = \{T\} \Leftrightarrow \Delta = 0$
$\Delta = m^2 – 46 m – 47$ e da $\Delta = 0$ si ha $m_1 = –1$, $m_2 = 47$
La retta tangente si ottiene per sostituzione mentre il punto di tangenza può essere trovato o dalla relazione $m_t = 2ax_T + b$ oppure dalla equazione risolvente per sostituzione di m. E' una stupidaggine rifare il sistema (si dimostra di non aver capito ciò che si era fatto prima).
Si ha T≡(1,–2); t: y = –x – 1



b) La figura è rappresentata qui a lato e ribadisco la utilità di esercitarsi nel tracciamento perché se ne sono viste di ogni tipo

c) La generica parallela è r_q : y = – x + q e la equazione risolvente risulta essere
$3x^2 – 6x + q + 4 = 0$
Se ora si impone che sia $x_A = 0$ si ottiene per sostituzione q = – 4 ed è possibile trovare anche l'altra radice (sempre per sostituzione o sfruttando le proprietà di somma o prodotto delle radici) e si ha $x_B = 2$
Inoltre A≡(0,–4) e B≡(2,–6)

d) E' ora banale il calcolo di $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ e di $h = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (distanza tra t e il punto A). Si osservi che non è neanche necessario calcolare l'equazione della retta r_{AB}
In base al teorema di Archimede $\sigma = \frac{2}{3}\overline{AB}\ h = 4$

4F PNI 6/10/2003 prova di ingresso (analitica e goniometria)

1) Dato il luogo geometrico $\gamma : f(x,y) = 0$ sia $P \equiv (\tilde{x},\tilde{y}) \in \gamma \Rightarrow$

   a) $f(x,y) = 0$ b) $f(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$ c) $f(\tilde{x},\tilde{y}) \equiv 0$ d) $f(x,y) \equiv 0$

2) Dato il luogo geometrico $\gamma : f(x,y) = 0$ supponiamo che sia $f(x,y) = f(-x,-y)$ cosa si può dire di γ in termini di simmetrie?

   a) non si possono trarre conclusioni b) γ è simmetrico rispetto all'asse x
   c) γ è simmetrico rispetto all'asse y d) γ è simmetrico rispetto all'origine

3) Dato i luoghi geometrici $\gamma_1 : f(x,y) = 0$ e $\gamma_2 : g(x,y) = 0 \Rightarrow$ l'equazione $f(x,y)\cdot g(x,y) = 0$ rappresenta il luogo:

   a) $\gamma_1 \cap \gamma_2$ b) $\gamma_1 \cup \gamma_2$ c) $\gamma_1 - \gamma_2$ d) nessuna delle precedenti

4) Date le rette generiche r: $ax+by+c=0$ e r': $a'x+b'y+c'=0$ allora

   a) $r \cap r' = \{P\} \Leftrightarrow ab' - a'b \neq 0$ b) $r \equiv r' \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$
   c) $r \cap r' = \{P\} \Leftrightarrow ac' - a'c \neq 0$ d) $r \cap r' = \varnothing \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$

5) Date le rette $r : y = mx + q$ e $r' : y = m'x + q'$ con $m \neq m'$ la relazione che consente di trovare le bisettrici degli angoli individuati dalle due rette è

   a) $|y - mx - q| \sqrt{m'^2+1} = |y - m'x - q'| \sqrt{m^2+1}$ b) $|y - mx - q| \sqrt{m^2+1} = |y - m'x - q'| \sqrt{m'^2+1}$
   c) $y = \pm mx + q'$ d) $y = \pm m'x + q$

6) Data la equazione $(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 = \gamma$

   a) $\gamma=0 \Rightarrow$ rappresenta una parabola b) $\gamma \neq 0 \Rightarrow$ rappresenta una circonferenza
   c) $\gamma > 0 \Rightarrow$ rappresenta una circonferenza di centro $G \equiv (\alpha,\beta)$
   d) $\gamma > 0 \Rightarrow$ rappresenta una circonferenza di centro $G \equiv (-\alpha,-\beta)$

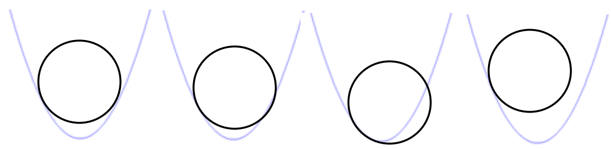
7) Data la circonferenza γ di centro $C \equiv (\alpha,\beta)$ e raggio r

   a) γ è tangente agli assi $\Rightarrow \alpha = \beta = r$ b) γ è tangente agli assi $\Rightarrow \alpha = \beta = |r|$
   b) $\alpha = \beta = r \Rightarrow \gamma$ è tangente agli assi d) γ è tangente agli assi $\Rightarrow r^2 = \alpha^2 + \beta^2$

8) Dati i luoghi geometrici $\gamma : f(x,y) = 0$ e $\gamma' : g(x,y) = 0$ si consideri il luogo $\gamma_k : f(x,y) + k\cdot g(x,y) = 0$.

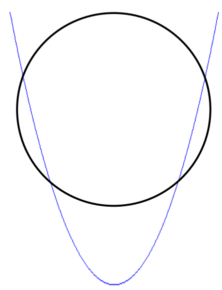
   a) $P \equiv (\tilde{x},\tilde{y}) \in \gamma_k\ \forall k \Rightarrow P \in \gamma \wedge P \in \gamma'$ b) Esistono sempre punti del piano che $\forall$ k appartengono a γ_k
   c) si può trovare k | $\gamma_k \equiv \gamma'$ d) $k = 0 \Rightarrow \gamma_k \equiv \gamma'$

9) Supponiamo che l'equazione risolvente tra una parabola ed una circonferenza assuma la forma $(x - \alpha)^2(x-\beta)(x - \gamma) = 0$ con α, β e γ non necessariamente diversi. Quale tra le seguenti figure è in contrasto con la situazione proposta:



   a) la terza b)la seconda c) la quarta d) la prima

10) Supponiamo che una parabola ed una circonferenza siano mutuamente collocate come in figura; cosa conviene fare nella scelta del sistema di riferimento per semplificare la determinazione analitica dei punti di intersezione?



   a) Far passare l'asse x per il centro della circonferenza e risolvere il sistema nella variabile x
   b) Far passare l'asse y per il centro della circonferenza e risolvere il sistema nella variabile x ottenendo così una equazione di II grado
   c) Far passare l'asse y per il centro della circonferenza e risolvere il sistema nella variabile y ottenendo così una equazione di II grado
   d) Collocare l'origine nel centro della circonferenza

3F PNI 9 marzo 2004 riepilogo coniche

Si consideri la funzione omografica γ: $y = \dfrac{2x-2}{x-3}$

a) se ne caratterizzi l'andamento determinando i due punti P e Q di intersezione con gli assi, gli asintoti e il vertice A più a destra. Si dimostri in particolare che $x_A = 5$.

b) Si trovi l'equazione della retta tangente t_A (ricordare che A è il vertice).

c) Si trovi l'equazione della parabola $\mathscr{P}$ ad asse verticale tangente a γ in A e che taglia l'asse y in B ≡ (0,4).

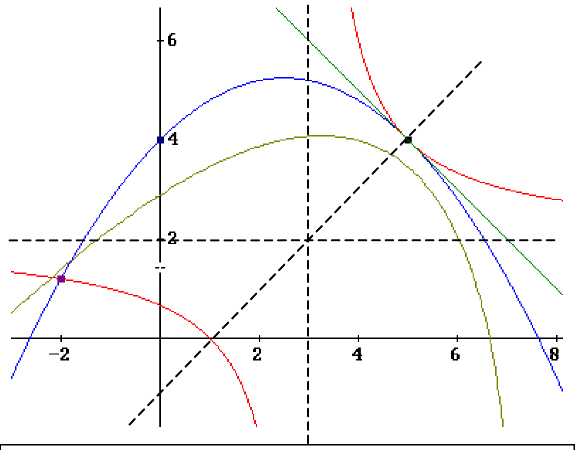
d) Si studi la intersezione $\mathscr{P} \cap \gamma = \{A,C\}$ determinando le coordinate di C e quindi si tracci la figura.

e) Si trovi la tangente goniometrica dell'angolo formato da t_A e dalla retta r_{AC}.

f) Si consideri infine una rotazione di centro O e di angolo acuto θ con tan θ = –5/12. Dopo aver scritto le equazioni della rotazione si trovi l'equazione della parabola $\mathscr{P}'$ trasformata di $\mathscr{P}$.

Punteggio base 3 punti con aggiunta degli indicatori di difficoltà riportati in tabella; nel punto f mi interessa soprattutto la correttezza della impostazione. Raccomando di prestare attenzione ad una impostazione corretta ed efficace.

Risposte parziali t_A: y = –x + 9; $\mathscr{P}$: y = –1/5 x^2 + x + 4; C≡(–2,6/5);±7/3;–144/845 x^2 + 24/169 xy –5/169 y^2+ 7/13 x–7/13 y + 4 = 0



a	b	c	d	e	f	
1.5	0.5	1.0	1.5	0.8	1.5	

3F PNI 29 settembre 2005: ingresso alla III valido anche per recupero

analitica

Si considerino le famiglie di curve r_k : (2+k)x + (k – 1)y – 3k = 0 e s_h : (h + 1)x –(3h + 1)y + 6h = 0.

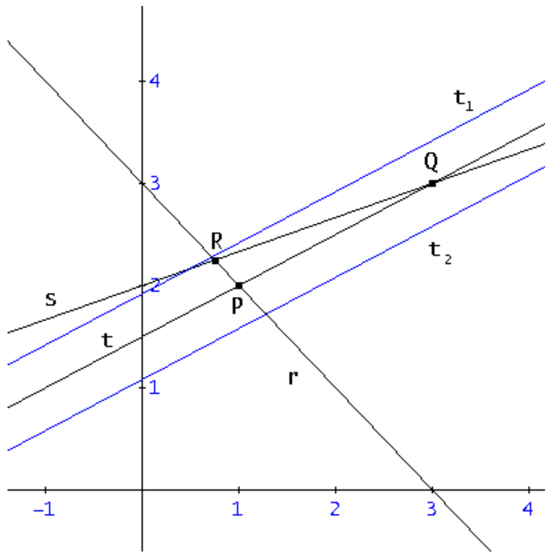
a) Trovare la retta t comune alle due famiglie e precisare a quali valori di h e di k essa corrisponde. Indicare con P e Q i centri dei due fasci.
b) Trovare le due rette r e s facenti parti dei due fasci ma non esprimibili attraverso le equazioni fornite (rette mancanti)
c) Le rette r, s, t individuano il triangolo PQR. Dopo aver determinato le coordinate di R trovare con il metodo preferito l'area σ del triangolo.
d) Scrivere le equazioni delle due rette t_1 e t_2 parallele a t e che distano da t di un valore pari all'area precedentemente trovata.

Punti a e b

Le due famiglie rappresentano due fasci propri di rette ottenuti attraverso la combinazione lineare:
(2x – y) + k(x + y – 3) = 0 e (x – y) + h(x – 3y + 6) = 0
La prima è vera ∀k ⇔ 2x – y = 0 ∧ x + y – 3 = 0 ⇔ x = 1 ∧ y = 2.
Pertanto il punto P≡(1,2) è centro del fascio.
La retta mancante è r: x+ y – 3 = 0 che appartiene al fascio (perché passa per P) non appartiene alla famiglia perché non corrisponde ad alcun valore di k. Infatti per ottenerla dovrebbe essere 1/k = 0 e tale equazione non ha soluzioni.
La seconda è vera ∀k ⇔ x – y = 0 ∧ x – 3y + 6 = 0 ⇔ 2y – 6 = 0 ∧ x = y ⇔ y = 3 e x = 3.
Pertanto il punto Q≡(3,3) è centro del fascio mentre la retta s: x – 3y + 6 = 0 che appartiene al fascio (perché passa per Q) non appartiene alla famiglia perché non corrisponde ad alcun valore di h.
La retta comune ai due fasci è quella che passa per i due centri. Basta pertanto, nel primo fascio imporre il passaggio per Q e si ha:
(6 – 3) + k(3 + 3 – 3) = 0 ⇒ k = – 1. Dunque t: (2 – 1)x + (–1 –1)y –3(–1) = 0 ⇔ x – 2y + 3 = 0
Facendo la stessa operazione sul secondo fascio si ottiene il valore di h (passaggio per P)
(1 – 2) + h(1 – 6 + 6) = 0 ⇒ h = 1

Note di correzione

Un compito di matematica va argomentato (in maniera corretta e completa non l'ha fatto nessuno). Mi riferisco in particolare alla ricerca dei punti fissi e a quella delle rette mancanti.
La strategia più efficace deve tener conto delle richieste; se viene richiesta la determinazione dei valori di h e k corrispondenti alla retta comune è inutile trovare r_{PQ} direttamente perché poi bisognerà trovarla comunque indirettamente.



Punto c

Per determinare il punto R basta intersecare le due rette mancanti r e s
x + y – 3 = 0 ∧ x – 3y + 6 = 0 ⇔ 4y – 9 = 0 ∧ x = 3 – y ⇔ y = 9/4 ∧ x = 3 – 9/4 = ¾
Pertanto R ≡(3/4,9/4)
Per trovare l'area del triangolo conviene usare la legge σ = ½ |∑xΔy| e si ottiene così: P≡(1,2), Q≡(3,3), R ≡(3/4,9/4)
σ = ½ |1(3 – 9/4) + 3(9/4 – 2) + ¾(2 – 3)| = ½ |¾ + ¾ – ¾ | ⇒ σ = 3/8

Nota di correzione: era lecito svolgere il calcolo anche come ½ $\overline{PQ}$ h_R = ½ $\overline{PQ}$ dist(R;t)

Punto d

Indicata con t_k la generica parallela a t sarà t_k : x – 2y + k = 0. Le due rette richieste saranno quelle che distano da un punto comodo di t di una quantità pari a 3/8.
Scegliamo per esempio il punto A≡(–3,0) e usiamo la generica relazione per la distanza:

$$\frac{|1\cdot(-3) - 2\cdot 0 + q|}{\sqrt{1+4}} = 3/8 \Rightarrow |k-3| = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

Si ha pertanto $k = 3 \pm \frac{3\sqrt{5}}{8}$ e le due rette sono:

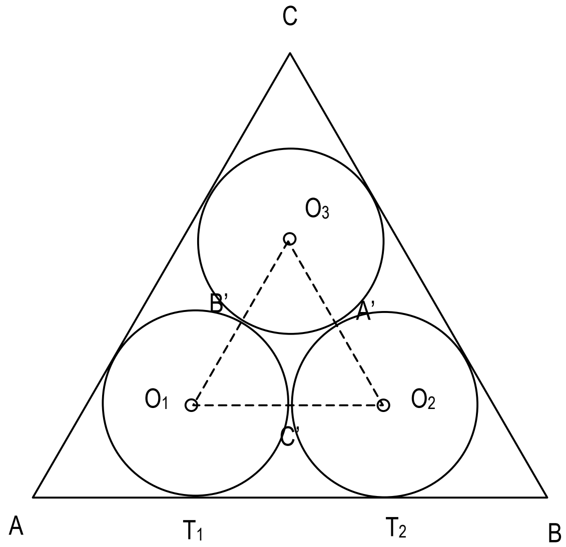
$$t_{1\text{-}2}: x - 2y + 3 \pm \frac{3\sqrt{5}}{8} = 0$$

Nota di correzione : indicato con (x,y) le coordinate del luogo richiesto bastava anche scrivere direttamente che la distanza tra t e (x,y) doveva essere pari a 3/8 arrivando direttamente alle due equazioni.
Ho notato grandi difficoltà nell'impostare e risolvere in modo elegante ed efficace le equazioni ai moduli. Ricordo che $|f(x)| = k \Leftrightarrow f(x) = \pm k$
Invito infine ad essere efficienti nella scelta delle procedure perché un problema complesso di analitica ha una estensione ben superiore a quello proposto e va svolto in un tempo decente.

applicazioni dell'algebra alla geometria

Si consideri un triangolo equilatero ABC di lato $\overline{AB} = a$. Nel triangolo sono inscritte tre circonferenze congruenti di centri O_1, O_2 e O_3 tangenti tra loro e tangenti ai tre lati del triangolo. Si indichino con T_1 e con T_2 i punti di contatto con il lato AB, con H la proiezione di C su AB e con A', B', C' i punti di contatto (due a due) delle tre circonferenze.

a) Determinare il raggio r delle tre circonferenze dimostrando che vale $a\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$.
b) Trovare l'area σ_1 del triangolo $O_1\,O_2\,O_3$
c) Dopo aver specificato le caratteristiche dei tre settori circolari coinvolti (tipo O_1C'B') determinarne l'area complessiva σ_2
d) Utilizzare i due risultati precedenti per trovare l'area della regione curvilinea A'B'C'



Punto a)
Per ragioni di simmetria si vengono a creare una serie di triangoli rettangoli (metà di equilateri).
Si ha $\overline{T_1T_2} = 2r$ mentre $\overline{AT_1} = \overline{T_2B} = \sqrt{3}\,r$
Pertanto, con riferimento al lato AB si ha:
$\overline{AT_1} + \overline{T_1T_2} + \overline{T_2B} = \overline{AB}$ e cioè $2\sqrt{3}\,r + 2r = a$ ovvero $r = \dfrac{a}{2(\sqrt{3}+1)}$ e razionalizzando:

$r = a\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

Nota di correzione: era la parte più importante dell'esercizio
Punto b)
Nei triangoli equilateri l'altezza vale $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ il lato e pertanto (visto che il lato è $2r$) si ha:

$\sigma_1 = \frac{1}{2}\, 2r\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,2r = \sqrt{3}\,r^2 = \sqrt{3}\,\dfrac{a^2(4-2\sqrt{3})}{16} \Rightarrow \sigma_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{8}a^2(2-\sqrt{3})$

Nota di correzione: prima si trova la relazione formale, poi si sostituisce, si fa il conto e si razionalizza.
Punto c)
I settori circolari del tipo O_1B'C' hanno un angolo al centro di 60° e pertanto la loro area complessiva è quella di una semicirconferenza di raggio r.
Dunque $\sigma_2 = \pi r^2 = \pi a^2\dfrac{4-2\sqrt{3}}{16} = \pi a^2\dfrac{2-\sqrt{3}}{8}$
Punto d)
Indicata con σ l'area della regione curvilinea si ha:
$\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = \dfrac{a^2}{8}[\sqrt{3}(2-\sqrt{3}) - \pi(2-\sqrt{3})] = \dfrac{a^2}{8}(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\pi)$
Nota di correzione: se il risultato è fattorizzabile bisogna fattorizzarlo.

In un triangolo di vertici A, B, C i lati misurano rispettivamente $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$. Indicato con M il punto medio del lato AB e con H il piede della altezza CH determinare la lunghezza della altezza CH e quella della mediana CM.
Note di correzione
Si fa la figura usando il compasso (si disegna il lato AB con c = 4 e dagli estremi si tracciano due archi di lunghezza 2 e 3).

Si determina la lunghezza della proiezione di AC e cioè $\overline{AH} = \frac{11}{8}$ usando la stessa tecnica che si usa per dimostrare il teorema di Pitagora generalizzato (visto che si tratta di un problema dedicato alle applicazioni dell'algebra alla geometria). Fuori da questo ambito è ovviamente lecito operare con la formula di Erone che consente di determinare direttamente l'altezza.

Si trova l'altezza $\overline{CH} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$ usando il teorema di Pitagora.

Si determina la lunghezza della mediana $\overline{CM} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ con la stessa tecnica.

3F PNI Circonferenze e parabole 7 dicembre 2005

Il compito utilizza in molti punti le stesse equazioni e pertanto, se quanto richiesto da un problema è già stato determinato nell'altro basta rinviare alla determinazione precedente.

1) Data la famiglia di circonferenze $\mathscr{C}_k : x^2 + y^2 - (2 + 3k)x - (2 - k)y + (1 + 3k) = 0$ determinare i punti A e B comuni alla famiglia e l'asse radicale r_{AB}. Trovare infine, all'interno della famiglia i valori di k corrispondenti alle due circonferenze tangenti all'asse y.
2) Date la circonferenza $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ e la parabola $\mathscr{P}$ ad asse verticale di vertice V≡(1,0) e passante per B≡(8/5,9/5) trovare l'equazione di $\mathscr{P}$. Caratterizzare la circonferenza e verificare in particolare che B e V appartengono anche ad essa. Ragionando per simmetria determinare l'ulteriore punto di intersezione tra $\mathscr{P}$ e $\mathscr{C}$.

   $\mathscr{P}$: $y = 5(x - 1)^2$ C è il simmetrico di B rispetto all'asse di simmetria comune C≡(2/5,9/5)
3) Data la circonferenza $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ si indichino con A, B e C i punti di tangenza con l'asse x, il punto più a destra di ordinata 9/5 e il centro. Determinare l'area del triangolo ABC.

correzione sintetica e note di correzione

1) per determinare A e B dopo aver scritto l'equazione come combinazione lineare si ha che essa è vera ∀k ⇔ si annullano simultaneamente i coefficienti del polinomio in k (impostare correttamente la questione non è un *optional*). Confondere l'annullamento dei coefficienti (da motivare) con la intersezione di curve è una manchevolezza formale e procedurale grave.
   Ciò porta a risolvere un sistema di II grado in x e y (intersezione tra l'asse radicale e la circonferenza generatrice). $3x - 3 - y = 0$ (asse radicale) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ (circonferenza generatrice). Si ottengono così i punti A≡(1,0) B≡(8/5,9/5)
   Per determinare le circonferenze tangenti si può procedere in due modi: o si interseca con l'asse y (x = 0) con la condizione di identità tra le radici ($\Delta = 0$) oppure si sfrutta $|-a/2|^2 = R^2$ e cioè $|-a/2|^2 = |-a/2|^2 + |-b/2|^2 - c$
   In entrambi i casi si ottiene $k_1 = 0$ e $k_2 = 16$.
   Non saper risolvere un sistema di II grado, non vedere le semplificazioni, non ricordare la relazione che dà il raggio ⇒ ☹
2) Se la parabola ha il vertice (1,0) la sua equazione è del tipo $y = a(x - 1)^2$. Se passa per B si ottiene a = 5
   Di questo aspetto non si è accorto nessuno.
   Se si procede classicamente si scrive (come detto a lezione)
   $x_V = 1 \Rightarrow -b/2a = 1$
   $V \in \mathscr{P} \Rightarrow a + b + c = 0$
   B≡(8/5,9/5) $\in \mathscr{P} \Rightarrow$ … e poi bisogna saper risolvere efficacemente il sistema.
   $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ ha centro C≡(1,1) e raggio R = 1 pertanto è tangente agli assi in (0,1) e (1,0) cioè nel vertice della parabola.
   Dunque la parabola e la circonferenza ammettono la retta x = 1 come asse di simmetria e dopo aver verificato che B≡(8/5,9/5) $\in \mathscr{C}$ si può trovare l'altro punto tramite la simmetria assiale $x' + 8/5 = 2\cdot 1 \Rightarrow x' = 2/5$
3) Per quanto visto ai punti precedenti si ha A≡(1,0), B≡(8/5,9/5) e C≡(1,1). L'area si trova in maniera banale in uno dei due metodi disponibili ½ $|\sum x\Delta y|$ oppure ½ AB dist($r_{AB,C}$) e vale 3/10

3F PNI: 1 febbraio 2006 funzioni omografiche e altre coniche

Una funzione omografica γ: $y = f(x) = \dfrac{ax + b}{x + c}$ ha come centro di simmetria il punto $G\equiv(1,2)$ e passa per il punto $A\equiv(2,1)$.

1) Determinare l'equazione della curva spiegando il procedimento seguito.

La funzione omografica corrisponde ad una iperbole equilatera riferita agli asintoti del tipo $Y = k/X$ opportunamente traslata (come si vede immediatamente eseguendo la divisione). Il centro di simmetria ha come coordinate l'intersezione dei due asintoti e dunque l'asintoto verticale ha equazione $x = 1$ ($x - 1 = 0$) e poiché l'asintoto verticale si ottiene per annullamento del denominatore si ha $c = -1$.

L'asintoto orizzontale ha equazione $y = 2$ e poiché per $x\to\infty$ si ha $f(x) \sim \dfrac{ax}{x} = a$ ne segue $a = 2$

La funzione ha dunque forma $y = \dfrac{2x + b}{x - 1}$

Se ora si tiene conto che $A\equiv(2,1)\in\gamma$ si ha $1 = \dfrac{4 + b}{2 - 1}$ da cui $b = -3$ e la funzione ha equazione: $y = \dfrac{2x - 3}{x - 1}$

2) Tracciare la curva e determinare le coordinate dei due vertici V_1 e V_2 ($x_{V1} < x_{V2}$).

La curva, a causa del passaggio per A si trova (rispetto agli asintoti) nel II e IV quadrante e dunque i vertici sono i punti di intersezione con la retta r per G di coefficiente angolare -1 (asse di simmetria dell'iperbole).

r: $y-2 = -1(x - 1)$ da cui $y = -x + 3$

$r\cap\gamma$: $-x + 3 = \dfrac{2x - 3}{x - 1} \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 2x - 3 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases}0\\2\end{cases} \Rightarrow y = -x + 3 = \begin{cases}3\\1\end{cases}$

Dunque $V_1\equiv(0,3)$ e $V_2\equiv(2,1)\equiv A$

3) Considerato il punto $T\in\gamma$ con $x_T = 4$ determinare l'equazione della retta tangente t per T

$y_T = \dfrac{2x - 3}{x - 1} = \dfrac{8 - 3}{4 - 1} = \dfrac{5}{3}$ dunque $T\equiv(4,5/3)$

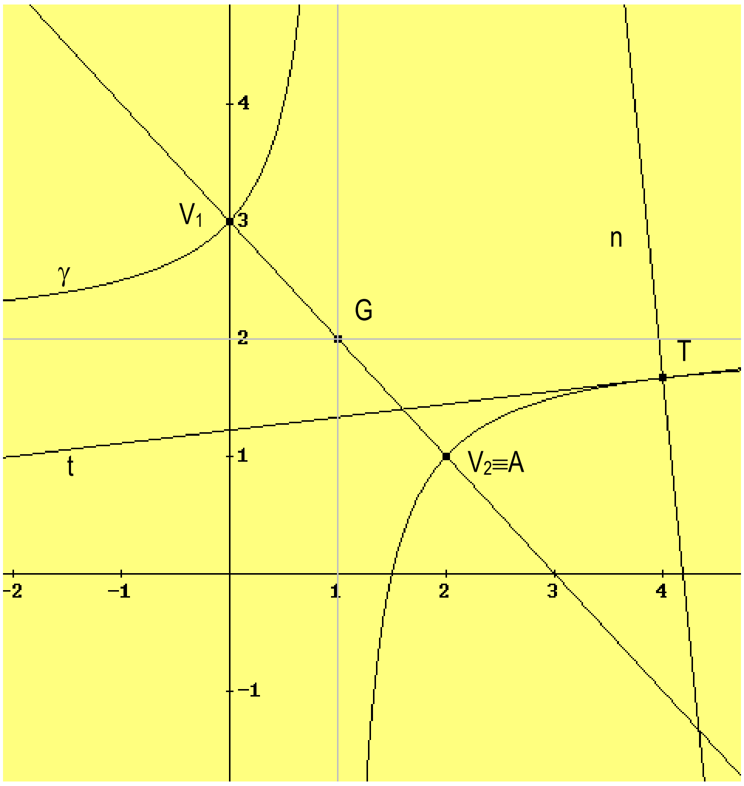
Per determinare la tangente basta intersecare il fascio di rette di centro T e γ

r_T: $y - 5/3 = m(x - 4) \Leftrightarrow y = mx - 4m + 5/3$

$r_T\cap\gamma$: $(mx - 4m + 5/3)(x - 1) = 2x - 3 \Leftrightarrow mx^2 - (1/3 + 5m)\,x + 4m + 4/3 = 0$

Si avrà la tangente quando $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \Delta = 0$ ma $\Delta = (1/3 + 5m)^2 - 16m(m + 1/3) = 1/9 + 25\,m^2 + 10/3\,m - 16\,m^2 - 16/3\,m = 9m^2 - 6/3\,m + 1/9 = (3m - 1/3)^2 \Rightarrow m = 1/9$

dunque t: $y = 1/9\,x - 4/9 + 5/3 = 1/9\,x + 11/9$



4) Senza svolgere i conti illustrare il procedimento da seguire per determinare le circonferenze tangenti a γ in T e di raggio R assegnato.

La condizione di tangenza richiede che il centro C della circonferenza stia sulla normale n per T e che la distanza tra C e T sia il raggio assegnato. Se si indica con α l'ascissa del centro, la ordinata dipende da α al I grado e si ha dunque una equazione di primo grado ai moduli nella sola variabile α cui corrispondono due soluzioni. Trovato il centro si trovano le equazioni delle due circonferenze con l'equazione in forma generale.

In alternativa basta intersecare la normale con la circonferenza di centro T e raggio R (luogo dei punti che distano da T di R)

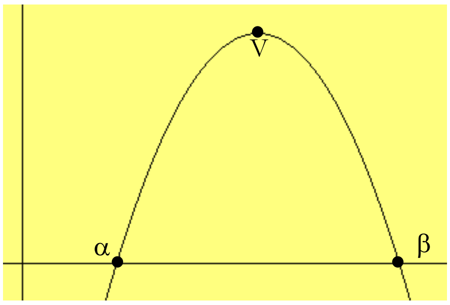
5) Senza svolgere i conti come si potrebbe scrivere il fascio di circonferenze tangenti a t in T?

Basta scrivere una particolare circonferenza con centro C su n e poi fare la combinazione lineare con l'asse radicale t. Per scrivere tale circonferenza basta prendere un qualsiasi punto particolare e comodo e trovarne poi la distanza da T.

9 marzo 2006: 3F PNI riepilogo coniche (2ore) questionario e problema

questionario

1) Data la parabola $\mathscr{P}$ di equazione $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ con $a < 0$ e $\beta > \alpha$; utilizzando il teorema di Archimede dimostrare che l'area del segmento parabolico da essa individuata con l'asse x vale $\sigma = -\frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$



$\sigma = \frac{2}{3}(\beta - \alpha)\, y_V$

$x_V = ½ (\beta + \alpha)$

$y_V = a(½ \beta + ½ \alpha - \alpha)(½ \beta + ½ \alpha - \beta) = a\, ½ (\beta - \alpha) ½ (\alpha - \beta) = -¼ (\beta - \alpha)^2$

per sostituzione

$\sigma = -\frac{2}{3}(\beta - \alpha)\, ¼ (\beta - \alpha)^2 = -\frac{1}{6} a(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}|a|(\beta - \alpha)^3$

Note di correzione: si può anche calcolare y_V come $-\Delta/4°$ ma si ottengono calcoli più onerosi.

2) Data la parabola $\mathscr{P}$ di equazione $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ dimostrare che i coefficienti angolari delle due tangenti nei punti di intersezione con l'asse x valgono $m_t = \pm a(\beta - \alpha)$

La parabola in forma esplicita ha equazione $y = ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\,\alpha\beta$

I punti di intersezione con l'asse x hanno coordinate α e β e poiché il coefficiente angolare della tangente in un punto di ascissa $\tilde{x}$ è $2a\tilde{x} + b$ si ha $m_\alpha = 2a\alpha - a(\alpha + \beta) = a(\alpha - \beta)$ e $m_\beta = 2a\beta - a(\alpha + \beta) = a(\beta - \alpha)$

3) Data l'equazione $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 2x - 2y - k^2 = 0$ perché essa rappresenta sempre delle circonferenze? Determinarne le caratteristiche (centro e raggio).

La curva ha la forma della equazione in forma normale della circonferenza ed è tale se $\Delta = a^2/4 + b^2/4 - c > 0$ perché in quel caso essa si riporta alla forma $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$

Nel nostro caso è $\Delta = 1 + 1 + k^2 = 2 + k^2 > 0\ \forall k$. Dunque si tratta di una circonferenza di centro (1,1) e raggio $r = \sqrt{2 + k^2}$

4) Data l'equazione $\mathscr{C}: y = \dfrac{x^2 + 3}{2x - 1}$ a) perché si tratta certamente di una conica? b) perché si tratta di un'iperbole e che equazione hanno gli asintoti?

La curva ridotta in forma normale si riduce ad un polinomio di II grado e dunque si tratta certamente di una conica (eventualmente degenere).

Poiché per $x \to ½$ si ha $y \to \infty$ si ha un asintoto verticale e dunque si tratta di una iperbole.

$x^2 + 3$	$2x - 1$
$-x^2 + ½ x$	$½ x + ¼$
$½ x + 3$	
$-½ x + ¼$	
$13/4$	

Facendo la divisione si ha

e dunque $y = \dfrac{x^2 + 3}{2x - 1} = ½ x + ¼ + \dfrac{13/4}{2x - 1}$

La differenza tra $y_{\mathscr{C}}$ e $y_r = ½ x + ¼ = \dfrac{13/4}{2x - 1} \to 0$ quando $x \to \infty$ e dunque la retta $y = ½ x + ¼$ è il secondo asintoto (obliquo)

Nota di correzione: non è sufficiente osservare che $y \sim \dfrac{x^2}{2x} = ½ x$ perché così troviamo solo la inclinazione dell'asintoto; esso è tale se la differenza tende a zero.

5) Data la curva di equazione $6x^2 - xy - 2y^2 - 10x + 9y - 4 = 0$ dimostrare che essa rappresenta l'unione di due rette e determinarle.

Se la curva rappresenta l'unione di due rette essa può essere scomposta in un prodotto di due equazioni di I grado e perché ciò accada il polinomio di II grado, ordinato in x o in y deve portare ad una equazione di II grado risolubile in forma razionale.

$6x^2 - x(y + 10) - (2y^2 - 9y + 4) = 0$

$\Delta = (y + 10)^2 + 24(2y^2 - 9y + 4) = 49y^2 + 196y + 196 = (7y + 14)^2$

$x = \dfrac{y + 10 \pm (7y + 14)}{12}$ e dunque:

$12x = 8y + 24$ oppure $12x = -6y - 4$ che porta alle rette:

$3x - 2y + 6 = 0 \vee 6x + 3y + 2 = 0$

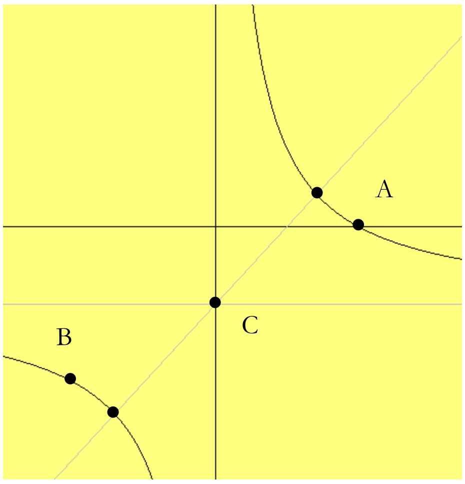
Nota di correzione: naturalmente l'equazione può essere risolta in y invece che in x con il medesimo risultato. Il metodo proposto, quando impareremo a classificare le coniche in forma generale ci permetterà, preventivamente di escludere che si tratti di una conica degenere.

problema

Si consideri la famiglia di curve $\mathcal{C}_k$: $y = \dfrac{(k-1)x + 2}{x + 2k}$

a) dimostrare che esse passano per due punti fissi G_1 e G_2 e determinarli.
Il luogo viene scritto in forma polinomiale in funzione del parametro k ottenendo:
$k(-x + 2y) + (x + xy - 2) = 0$
Questa equazione è vera $\forall k \Leftrightarrow -x + 2y = 0 \wedge x + xy - 2 = 0$. Risolto il sistema si ottiene $x = -1\pm\sqrt{5}$ e $y = ½ (-1\pm\sqrt{5})$
Dunque $G_1 \equiv(-1-\sqrt{5}, ½ (-1-\sqrt{5}))$ e $G_2 \equiv(-1+\sqrt{5}, ½ (-1+\sqrt{5}))$

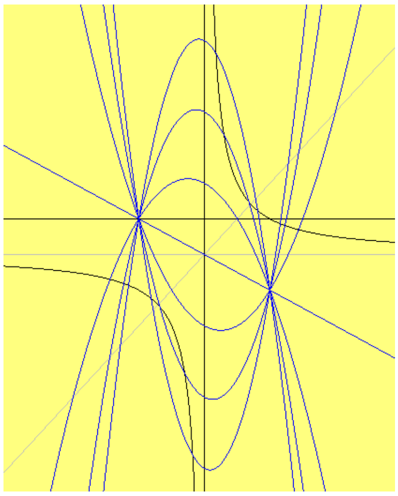
b) Considerare quella che passa per $A\equiv(2,0)$; indicarla con $\mathcal{I}$ determinarne le caratteristiche principali e disegnarla.



Dalla condizione $A \in \mathcal{C}_k$ si ottiene $k = 0$ e dunque: $y = \dfrac{-x+2}{x} = -1 + 2/x$
funzione omografica di asintoti $x = 0$ e $y = -1$
Il centro C è l'intersezione degli asintoti $\equiv(0,-1)$
L'asse di simmetria (vista la posizione di A) è la retta di coefficiente angolare 1 passante per C: $y +1 = x \Leftrightarrow y = x - 1$
I vertici si ottengono intersecando l'iperbole con l'asse di simmetria e si ottiene $-1 + 2/x = x - 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$
$y = \pm\sqrt{2} - 1$

c) Indicato con B il simmetrico di A rispetto al centro C determinare l'equazione $\mathcal{P}_a$ del fascio di parabole ad asse verticale passanti per A e per B.

Il simmetrico si ottiene dalla simmetria centrale di centro C. Pertanto $\dfrac{x_A + x_B}{2} = x_C$ da cui $x_B = 2x_c - x_A = -2$ e analogamente $y_B = 2y_c - y_A = -2$



Scritta l'equazione della generica parabola ad asse verticale $y = ax^2 + bx + c$ si impone il passaggio per A e per B; si ottiene il sistema lineare in tre incognite con soluzioni $b = ½$ e $c = -4a - 1$.
Dunque $\mathcal{P}_a$: $y = ax^2 - ½ x -(4a + 1)$
Nella figura qui a lato sono state tracciate (in blu), sovrapposte all'iperbole (in nero) le parabole con a compreso tra –3/2 e 3/2 e passo 0.5 (compresa la retta corrispondente ad a = 0). Come si vede il terzo punto di intersezione varia al variare di a.

d) $\mathcal{P}_a$ e $\mathcal{I}$ ammettono A e B come punti comuni. Determinare le coordinate del terzo punto di intersezione P.
Il terzo punto di intersezioni si ottiene determinando l'equazione risolvente della intersezione (polinomio di III grado) e sfruttando l'esistenza delle soluzioni note a priori corrispondenti ai punti A e B per fattorizzare il polinomio (teorema di Ruffini).
L'equazione risolvente è: $ax^3 + ½ x^2 - 4ax - 2 = 0$

	a	½	– 4a	–2
2		2a	4a + 1	2
	a	2a + ½	1	0
–2		–2a	–1	
	a	½	0	

Dunque si ha $(x - 2)(x + 2)(ax + ½) = 0$ e dunque $x_P = -\dfrac{1}{2a}$ e $y_P = -1 -4a$

e) Preso atto che $P \equiv \left(-\dfrac{1}{2a}, -1 - 4a\right)$ determinare i valori di a per i quali $\text{dist}(P,r_{AB}) = \dfrac{15}{2\sqrt{5}}$

Determiniamo in via preliminare la retta r_{AB}. Si ha $m_{AB} = \dfrac{-2-0}{-2-2} = ½$ e dunque $y = ½ x -1$

La distanza si ottiene dalla relazione dist = $\dfrac{|\tilde{y} - m\tilde{x} - q|}{\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{|-1 - 4a + 1/(4a) + 1|}{\sqrt{5}/2}$. Si ha dunque: $2\dfrac{|4a - 1/(4a)|}{\sqrt{5}} = \dfrac{15}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow$

$|(16a^2 - 1) / a| = 15 \Leftrightarrow 16a^2 - 1 = \pm 15a \Leftrightarrow 16a^2 \pm 15a - 1 = 0$

Si ottengono così le quattro soluzioni:

$a = \pm 1 \vee a \pm 1/16$

19 aprile 2008 2F PNI rette e parabole

Si consideri una generica parabola ad asse verticale di equazione $\mathscr{P}$: $y = ax^2 + bx + c$

a) determinare l'equazione sapendo che il vertice V≡(3,–2) e che essa risulta tangente alla retta $y = 3x – 31/2$

$x_V = – b/2a \Leftrightarrow 6a + b = 0$

$V \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 9a + 3b + c = –2$

Si ottiene $b = – 6a \wedge c = –2 + 9a$ pertanto la famiglia di parabole con il vertice dato ha equazione $y = ax^2 – 6ax + (9a –2)$

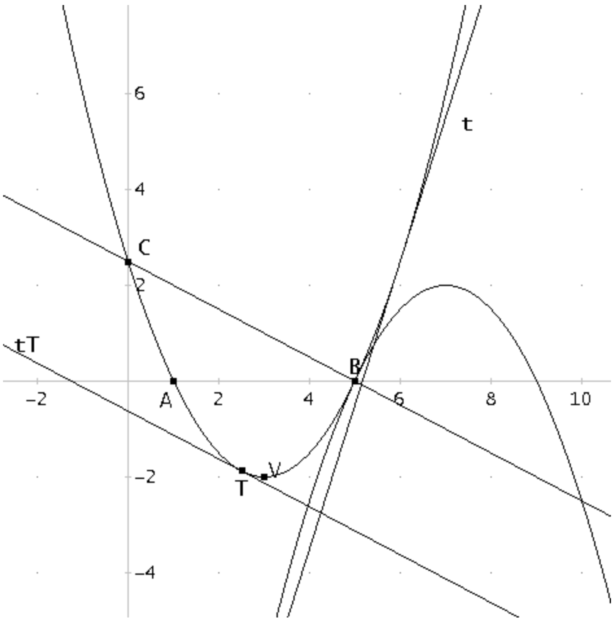
Intersecando con la retta data si ha l'equazione risolvente $ax^2 – (6a + 3) x + 9a + 27/2 = 0$ e si otterrà la parabola tangente quando le due intersezioni coincidono ovvero quando $\Delta = 0$. Calcoliamo pertanto Δ

$\Delta = (6a + 3) – 4a(9a + 27/2) = 36 a + 9 – 54 a = – 18 a + 9$

$\Delta= 0 \Leftrightarrow a = ½$ e dunque $b = –3$ e $c = –2 + 9/2 = 5/2$

Dunque $\mathscr{P}$: $y = ½ x^2 – 3x + 5/2$

b) Preso atto che risulta: $y = ½ x^2 – 3x + 5/2$ si trovino le coordinate dei punti A, B, C di intersezione con gli assi x e y e si disegni la figura in scala 1 = 1 cm



$\mathscr{P} \cap$ asse x: $\Delta = 9 – 5 = 4$ e dunque $x = 1 \vee x = 5$ A≡(1,0) mentre B≡(5,0)

$\mathscr{P} \cap$ asse y: x = 0 e y = 5/2 dunque C≡(0,5/2)

c) Considerata la retta r_{CB} qual è il punto T della parabola appartenente all'arco CB che presenta la massima distanza dalla retta? Spiegare e quindi trovare le coordinate di tale punto.

Facendo muovere una retta parallela a r_{CB} osserviamo che si hanno due punti equidistanti (le intersezioni) a distanza via via crescente sino ad arrivare alla tangente che presenta la distanza massima. Dunque T è il punto della arabola che presenta una tangente co il coefficiente angolare di r_{CB}

$m_{CB} = 5/2 / (–5) = –1/2$ e dunque r_{CB}: $y = – ½ x + 5/2$

Ma come è noto esiste una relazione (dimostrata a lezione) tra ascissa del punto di tangenza e coefficiente angolare della tangente

$m_t= 2a\, x_T + b$ e dunque $– ½ = 2\, ½\, x_T – 3$ da cui $x_T = 5/2$ e per sostituzione $y_T = – 15/8$ e T≡(5/2,–15/8)

d) Preso atto che T≡(5/2,–15/8) determinare l'area σ del triangolo CTB. Cosa si può dire di tale area rispetto a quelle degli altri triangoli con vertice sull'arco CB?

Per trovare l'area di CTB calcoliamo innanzitutto l'altezza

$$h_T = \text{dist}(T,r_{CB}) = \frac{|y_T – mx_T – q|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|–15/8 + 1/2 (5/2) – 5/2|}{\sqrt{1/4 + 1}} = \frac{25}{8}\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{25}{4\sqrt{5}}$$

$$\overline{CB} = |\Delta x|\sqrt{m^2 + 1} = 5\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Infine $\sigma = ½ h_T \overline{CB} = \dfrac{125}{16}$

e) Scrivere la simmetria di centro B e determinare l'equazione della parabola $\mathscr{P}$' simmetrica di $\mathscr{P}$ attraverso la simmetria $\mathscr{S}_B$

La simmetria $\mathscr{S}_B$ ha equazioni $x = 2x_B – x' = 10 – x'$ e analogamente per y con y = y'.

Sostituendo nella equazione della parabola si ha:

$– y' = ½(10 – x')^2 – 3(10 – x') + 5/2 \Leftrightarrow y' = –1/2\, x^2 + 7x' – 45/2$

La parabola è stata rappresentata per completezza sulla figura.

f) Scrivere l'equazione della retta r_m passante per T e determinare l'equazione risolvente $r_m \cap \mathscr{P} = \{T,P\}$ e determinare l'ascissa di x_P. Come mai il discriminante della equazione risolvente risulta essere un quadrato perfetto? Spiegare

La generica retta per T ha equazione r_m : $y + 15/8 = m(x – 5/2) \Leftrightarrow y = mx – 5/2\, m – 15/8$

La equazione risolvente della intersezione (ottenuta oper differenza delle due equazioni) risulta:

$1/2x^2 – (3+m)x + (35/8 + 5/2m) = 0$

Questa equazione ha per soluzioni le ascisse di T e di P e poiché T è fisso il Δ dovrà essere un quadrato perfetto n modo che, in una delle due soluzioni della equazione si elimini la dipendenza da m.

In effetti:

$\Delta = (m+3)^2 - 2(35/8 + 5/2\ m) = m^2 + m + ¼ = (m + ½)^2$

Le soluzioni sono dunque: $x = (m + 3) \pm (m + ½)$ che porta a $x_T = 5/2$ e $x_P = 2m + 7/2$ (ovviamente dipendente da m)

2F PNI 29 maggio 2008 finale

compito insieme a una parte di algebra e a una di a.a.g.

Trovare quanto richiesto e motivare la risposta sul proprio foglio

1) L'equazione (1) | $(x-2)^2 - (y-3)^2 = 0$ cosa rappresenta?
2) L'equazione (2) | $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 0$ cosa rappresenta?
3) Determinare la distanza d tra la retta $r: x + 2y - 1 = 0$ e il punto $P \equiv (2,3)$
4) I punti $A \equiv (1,\ldots)$ e $B \equiv (4,\ldots)$ appartengono alla retta r precedente. Determinare $|\overline{AB}|$ e l'area σ del triangolo ABP
5) Si considerino la parabola $\mathscr{P}: y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ e il punto $C \equiv (1,3)$; scrivere le equazioni della simmetria centrale di centro C $\mathcal{S}_C$ e quindi determinare la parabola $\mathscr{P}'$ trasformata di $\mathscr{P}$ attraverso $\mathcal{S}_C$ (in simboli $\mathscr{P}' = \mathcal{S}_C(\mathscr{P})$)
6) Determinare con il metodo più conveniente l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ di diametro AB con $A \equiv (1,3)$ e $B \equiv (2,5)$. Scrivere l'equazione in forma normale e trovare il centro C e il raggio R.
7) Determinare l'equazione della retta r_{AB} e (tenendo conto del risultato precedente) scrivere l'equazione del fascio di circonferenze di punti fissi A e B
8) Scrivere l'equazione delle tangenti a $\mathcal{C}$ parallele a r_{AB}