22/12/95 geometria: primi elementi

$\boxed{1}$ Enunciare, completandolo, il postulato sul trasporto degli angoli: *dati in un piano un angolo* α *e una semiretta* V*r*:

esistono due semirette Vs e Vt che formano con Vr angoli congruenti all'angolo α
Se si fissa il verso di rotazione convenzionale positivo (antiorario) allora la semiretta è unica. In linguaggio simbolico si scrive:
$\forall\alpha, \forall Vr \Rightarrow \exists! Vs \mid r\hat{V}s \cong \alpha$

$\boxed{2}$ Una definizione è: …

una proposizione con cui si assegna significato ad un termine nuovo attraverso relazioni tra termini precedentemente definiti (eventualmente primitivi)

$\boxed{3}$ La definizione di somma degli angoli richiede che essi siano consecutivi. Pertanto presi l'angolo $\alpha = r\hat{O}s$ e l'angolo $\beta = t\hat{P}q$ per sommarli bisogna prima costruire l'angolo $\beta' \cong$ _β_ con $\beta' =$ _$s\hat{O}v$_ e in tal caso si ha $\alpha + \beta = r\hat{O}v$

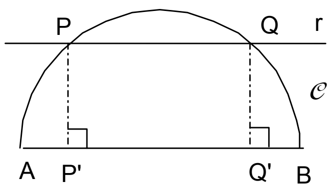
$\boxed{4}$ Una figura $\mathscr{F}$ si dice convessa se:

definizione in linguaggio naturale:

il segmento che unisce due punti qualsiasi della figura è completamente interno alla figura

definizione in linguaggio simbolico: $\forall (P_1,P_2) \subseteq \mathscr{F} \Rightarrow P_1P_2 \subseteq \mathscr{F}$

$\boxed{5}$ Descrive in linguaggio naturale il processo che porta alla costruzione della figura indicata qui a lato



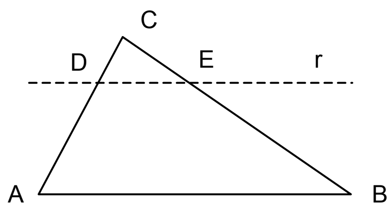
Data una semicirconferenza $\mathscr{C}$ di diametro AB si consideri una retta r parallela al diametro che interseca la semicirconferenza in P e Q e si indichino con P' e Q' le proiezioni di P e Q sul diametro.

$\boxed{6}$ Scrivere in forma simbolica il seguente teorema: *un generico triangolo equilatero è equiangolo*

$\forall \overset{\Delta}{ABC},\ AB \cong BC \cong CA \Rightarrow A\hat{B}C \cong B\hat{C}A \cong C\hat{A}B$

$\boxed{7}$ Scrivere simbolicamente ipotesi e tesi del seguente teorema esposto in linguaggio naturale e fare la figura.

Preso un generico triangolo ABC si considera una retta r parallela a quella passante per A e per B e che interseca, rispettivamente, in D e in E, i lati AC e BC. In tal caso i due angoli individuati dai segmenti AB, DA e DE sono supplementari



Ipotesi:

$r \cap r_{AB} = \varnothing \wedge \{D\} = r \cap AC \wedge r \cap CB = \{E\}$

Tesi:

$D\hat{A}B + A\hat{D}E \cong \pi$

$\boxed{8}$ Enunciare e dimostrare il teorema T2 relativo alla congruenza di due angoli di un triangolo

Si veda testo o dispensa

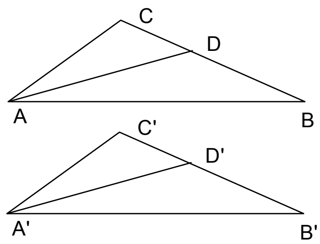
$\boxed{9}$ Dimostrare che se due triangoli ABC e A'B'C' hanno congruenti un lato, uno degli angoli adiacenti a tale lato e la bisettrice relativa a tale angolo, sono congruenti.

Dati: $\overset{\Delta}{ABC}$ e $\overset{\Delta}{A'B'C'}$

Ipotesi: $AB \cong A'B' \wedge C\hat{A}B \cong C'\hat{A}'B' \wedge C\hat{A}D \cong D\hat{A}B \wedge C'\hat{A}'D' \cong D'\hat{A}'B' \wedge D \in CB \wedge D' \in C'B' \wedge AD \cong A'D'$

Tesi: $A\overset{\Delta}{B}C \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$

Dimostrazione:



$D\overset{\Delta}{A}B \cong D'\overset{\Delta}{A'}B'$ per I criterio infatti:
- $DA \cong D'A'$ per HP
- $AB \cong A'B'$ per HP
- $D\hat{A}B \cong D'\hat{A}'B'$ per conseguenza dell'ipotesi (metà di angoli congruenti)

ne consegue che $D\hat{B}A \cong D'\hat{B}'A'$ (1)
ne consegue che

$A\overset{\Delta}{B}C \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$ per II criterio infatti:
- $AB \cong A'B'$ per HP
- $C\hat{A}B \cong C'\hat{A}'B'$ per HP
- $C\hat{B}A \cong C'\hat{B}'A'$ per (1)

1⇒2	2⇒2	3⇒2	4⇒3	5⇒3	6⇒2	7⇒3	8⇒6	9⇒6

31/1/98: primi elementi di geometria

1 Dato un segmento AB e una semiretta Vr di origine V il postulato sul trasporto dei segmenti afferma che:

linguaggio naturale
linguaggio simbolico

2 Data una retta *r* e indicata con (A,B) una generica coppia di punti distinti della retta e con $\rangle$ il simbolo di ordinamento (A $\rangle$ B si leggerà A *viene dopo B*), cosa significa dire che la retta *r* è un insieme totalmente ordinato? Indicare aut con $\dot{\vee}$. Scrivere la risposta simbolicamente

1)
2)

3 Dato il segmento AB costruire su foglio a pare il segmento CD tale che 3 AB $\cong$ 4 CD spiegando cosa si fa.

4 Dato il triangolo ABC rettangolo in A costruire esternamente ad esso i triangoli equilateri ABE e ACD. Tracciare la retta r_D parallela a r_{AC} e la retta r_E parallela a r_{AB}. Sia $r_E \cap r_D = \{F\}$. Si tracci per A la parallela a r_{EB} che incontra r_E in G. Dopo aver costruito accuratamente la figura (su foglio a parte) rispondere alle seguenti domande:

1) il quadrilatero ABEG è un
2) individuare la retta passante per due dei punti dati perpendicolare a BC
3) trovare il triangolo individuato dai punti dati congruente ad ABC

5 Enunciare (in linguaggio naturale) e dimostrare il II criterio di congruenza per due triangoli dati ABC e A'B'C' (costruire su foglio a parte la figura, scrivere simbolicamente ipotesi e tesi, dimostrare)

6 Dati due triangoli isosceli ABC e A'B'C' di base AB e A'B'. Sapendo che le mediane BM e B'M' sono congruenti e che sono congruenti i lati dimostrare che i due triangoli dati sono congruenti (costruire su foglio a parte la figura, scrivere simbolicamente ipotesi e tesi, dimostrare)

1⇒1+1.5	2⇒1+1	3⇒3	4⇒2+1.5	5⇒0.5+1+3	6⇒0.5+1+3	tot⇒ 20

25/1/95: primi elementi geometria

1) Indichiamo con α un piano, con r ed s due rette, con p e q due semirette di α aventi in comune l'origine A. Scrivere in simboli le seguenti proposizioni o definizioni

4.1) r ed s si incontrano in un punto P: ________________ 4.2) r ed s non si incontrano: __________________

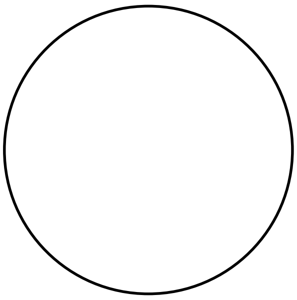
4.3) r e s giacciono nel piano α: ______________________ 4.4) l'angolo concavo definito da p e q:__________

4.5) Indicati con α' e α'' i due semipiani in cui la retta r divide il piano α si scriva in forma simbolica il seguente postulato: siano A' e A" due generici punti di α' e α'' non appartenenti a r, allora la retta passante per A' e A" interseca r in un punto P:

____

____
_

2) Disegnare su una circonferenza due generiche corde AB e CD e indicare con OH e OK le distanze di esse dal centro O. Cosa si può concludere dalla ipotesi AB > CD ? Disegnare la figura indicando l'angolo retto con il simbolo $\pi/2$ e scrivere simbolicamente l'ipotesi e la tesi:

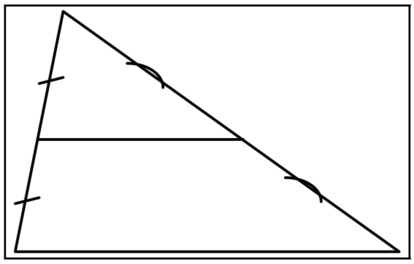


Ipotesi: ________________

____

Tesi: ________________________

3) Si osservi la figura rappresentata, la si completi con le lettere e si descriva il processo che porta alla sua costruzione. Inoltre si precisino le ulteriori proprietà di cui sembra godere.



____

____

4) Dati 5 punti del piano a 3 a 3 non allineati, quante sono le rette passanti per quei punti? _____

E se i punti invece di 5 sono n dove n rappresenta un generico numero naturale? ________ Spiegazione:

5) 8.1) Possono esistere segmenti adiacenti che non siano consecutivi? 8.2) E segmenti consecutivi che non siano adiacenti? Spiegazione:

6) Tradurre in linguaggio ordinario il seguente postulato della geometria piana: $\forall \{A,B\} \Rightarrow \exists! r: A \in r \wedge B \in r$

28/2/98 geometria congruenze di triangoli

1. Dato un triangolo ABC con l'angolo ABC ottuso dimostrare per assurdo che, indicata con AH l'altezza, il punto H è necessariamente esterno al segmento BC.
Se fosse H interno … ⇒ 1 + 3

2. Dato un triangolo ABC si prolunghi la mediana AM di un segmento MD congruente ad AM. Dimostrare che l'angolo CAB è congruente all'angolo BDC ⇒ 1 + 3

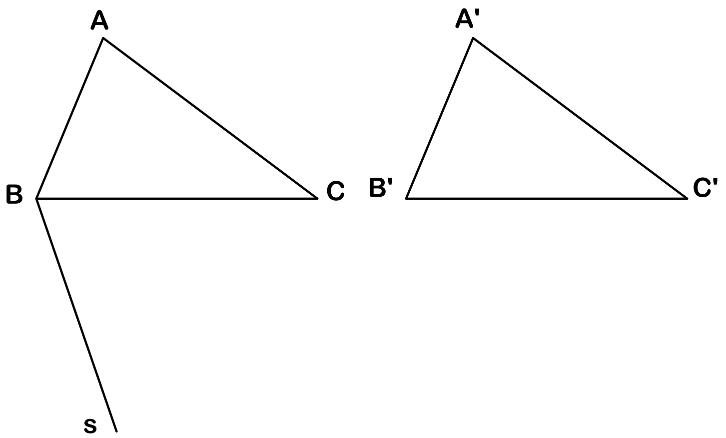
3. Dato un triangolo ABC rettangolo in A sia l'angolo ACB doppio dell'angolo ABC. Dimostrare che BC è doppio di AC
Costruire da parte opposta l'angolo ABD congruente a CBA e tale che BD sia conguente a BC. Unire D con A e ragionare. Non si può usare la somma degli angoli interni del triangolo. Non dimenticarsi di spiegare perché C, A e D sono allineati ⇒ 1 + 2 + 1 + 2

1/3/95 geometria primi elementi sulle congruenze

1) Sia $\overset{\Delta}{ABC}$, un triangolo isoscele sulla base AC e sia P il punto medio del lato AB. Da P si conduca la perpendicolare al lato AC e sia H il punto di intersezione con AC. Costruire la figura e individuare la relazione tra AH e HC scrivendo in forma simbolica ipotesi e tesi

2) Dimostrare che in un triangolo con due angoli congruenti sono congruenti i lati opposti a tali angoli

3) Si considerino due triangoli $\overset{\Delta}{ABC}$, e $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ con i lati corrispondenti congruenti. Si completi la seguente dimostrazione del III criterio di congruenza.



Ipotesi: $AB \cong A'B' \wedge AC \cong A'C' \wedge CB \cong C'B'$

Tesi: $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$

Dimostrazione: si consideri una semiretta s che forma con il lato BC un angolo $\widehat{CBs} \cong \widehat{C'B'A'}$, e si consideri un punto $A'' \in s$: $BA'' \cong B'A' \Rightarrow$

$\overset{\Delta}{A'B'C'} \cong \overset{\Delta}{A''BC}$, per ____________________

Ne consegue che i triangoli $\overset{\Delta}{ABA''}$, e $\overset{\Delta}{ACA''}$, sono isosceli perché:

____

____

Ne consegue che $\widehat{BAA''} \cong \widehat{BA''A}$, e che $\widehat{CAA''} \cong \widehat{CA''A}$, e dunque che ____________ e dunque che ________ per il I criterio.

Per la proprietà transitiva ne consegue che ______________________ **cvd**

4) Dati due triangoli congruenti $\overset{\Delta}{ABC}$ e $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ dimostrare che sia le bisettrici, sia le mediane relative a vertici corrispondenti sono congruenti (limitare la dimostrazione ad una sola mediana e ad una sola bisettrice)

Problema 1: 2 punti	Problema 2: 4 punti	Problema 3: 4 punti	Problema 4: 4 punti
Ordine:	Precisione espressiva	Studio	Autonomia

5/3/96: problemi sulle congruenze tra triangoli

$\boxed{1}$ Si consideri il triangolo isoscele ABC di base AB. Dimostrare che le bisettrici degli angoli esterni relativi alla base individuano con i prolungamenti dei lati congruenti, segmenti congruenti.

$\boxed{2}$ Si consideri un generico triangolo ABC e si indichi con b la bisettrice dell'angolo CAB. Siano AE e AF due segmenti di b con AE ≅ AB e AF ≅ AC. Dimostrare che CE ≅ BF

$\boxed{3}$ Dato il triangolo isoscele ABC di base BC e con AB ≅ 2 BC sia F il punto di incontro delle mediane CE e BD. Dimostrare che il triangolo BFC è isoscele. Quindi dimostrare che anche EFD è isoscele.

21/3/98: problemi sulle congruenze tra triangoli

$\boxed{1.}$ Dato un generico triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, sia A*r* la bisettrice dell'angolo in A che incontra in M il lato BC. Si tracci per M una retta *s* che formi con AM un angolo congruente a $\widehat{BMA}$. Si indichino con E e con D i punti di intersezione di *s* con le rette r_{AC} e r_{AB}. Dimostrare che i segmenti CE e BD sono congruenti.

⇒ 1 + 3

$\boxed{2.}$ Sono dati i triangoli $\overset{\Delta}{ABC}$ e $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ in cui i lati di vertici A e A' sono rispettivamente congruenti. Tracciate le mediane AM e A'M' esse risultano congruenti. Dimostrare che i due triangoli sono congruenti.
Suggerimento: prolungare AM e A'M' in P e P' di due segmenti congruenti alle mediane. 1) si dimostri che AB≅PC e … 2) si dimostri che $\overset{\Delta}{APC} \cong \overset{\Delta}{A'P'C'}$ 3) analogamente si può dimostrare che … 4) quindi …

⇒ 1 + 4

$\boxed{3.}$ È dato un generico triangolo di angoli α, β e γ e si indichi con δ uno qualsiasi degli angoli esterni. Dimostrare che la somma di due degli angoli interni è sempre minore di un angolo piatto. Spiegare perché la dimostrazione vale per una qualsiasi coppia di angoli.

⇒ 3

$\boxed{4.}$ È dato un generico triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$. Si prolunghi il segmento AC dalla parte di C di un segmento CD congruente a CB. Si indichi con E un generico punto della bisettrice dell'angolo $\widehat{DCB}$. Dimostrare che il triangolo $\overset{\Delta}{DBE}$ è isoscele.

⇒ 1+3

re che anche EFD è isoscele.

12/4/97: teoria e problemi sulle congruenze tra triangoli

1 Dimostrare per assurdo il II criterio di congruenza dei triangoli. ⇒ 3

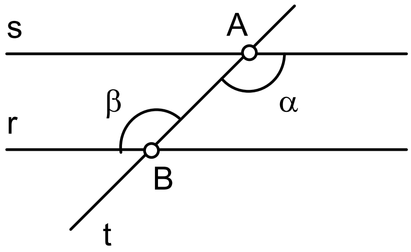
2 Si considerino due triangoli ABC e A'B'C' con due lati rispettivamente congruenti e con congruenti anche le mediane relative ad uno di essi. Dimostrare che i due triangoli sono congruenti. ⇒ 3

3 Si considerino due triangoli ABC e A'B'C' con i lati AB, A'B' e AC, A'C' rispettivamente congruenti e con congruenti anche le mediane AM e A'M'. Dimostrare che i due triangoli sono congruenti.

Prolungare le mediana di un segmento ad esse congruenti sino in N e N'. Ragionare poi su AMB e CMN nei due triangoli. Passare infine ad ACN e A'C'N' e infine concludere. ⇒ 6

4 Si consideri un triangolo isoscele ABC di base BC e sia D un generico punto interno al triangolo tale che BD ≅ DC. Indicato con M il punto medio della base BC si dimostri che A, D e M sono allineati. ⇒ 4

24/5/96 rette parallele



$\boxed{1}$ **Teorema T4.** Dimostrare che due rette complanari non secanti, tagliate da una trasversale, formano con essa angoli alterni interni congruenti (completare la figura)

Dati:

___

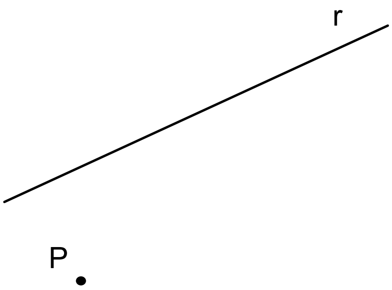
Ipotesi: ___

Tesi: ___

Dimostrazione:

___

$\boxed{2}$ Data una retta r, in base al teorema T3 è sempre possibile tracciare una retta s parallela ad essa passante per un punto P ∉ r.



Costruzione: si tracci per il punto P …

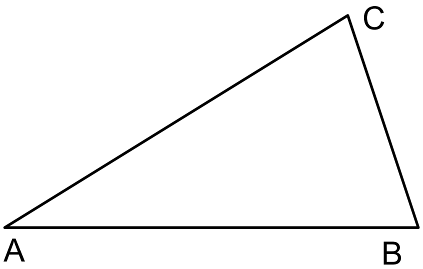
___

___

___

___

$\boxed{3}$ Sia ABC un triangolo acutangolo e si indichino con AH e BK due altezze che si incontrano nel punto O. Dimostrare che gli angoli AOB e ACB sono supplementari.



Dati:

___

Ipotesi:

___

Tesi:

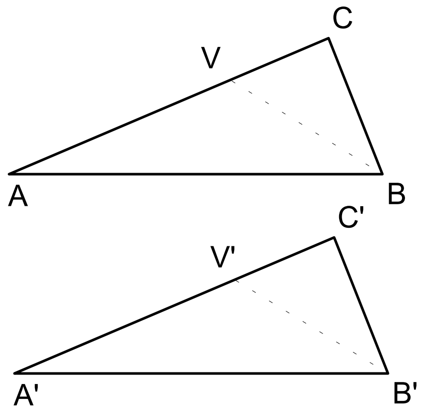
___

Dimostrazione:

___

–

$\boxed{4}$ Dimostrare che se due triangoli rettangoli hanno congruenti uno degli angoli acuti e la bisettrice relativa a quell'angolo sono congruenti.



Dati:

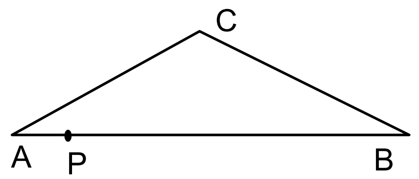
Ipotesi:

Tesi:

Dimostrazione:

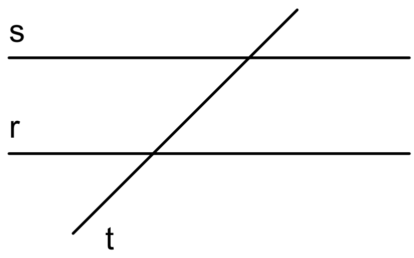
$\boxed{5}$ **Dati:** $\overset{\Delta}{ABC}$, s semiretta

Ipotesi: $AC \cong BC \wedge P \in AB \wedge \widehat{sPB} \cong \frac{1}{2}\pi \wedge s \cap AC = \{Q\} \wedge s \cap r_{BC} = \{R\}$ **Tesi:** $QC \cong CR$



$1 \Rightarrow 4$	$2 \Rightarrow 4$	$3 \Rightarrow 4$	$4 \Rightarrow 5$	$5 \Rightarrow 5$	totale

Ingresso geometria 09/95

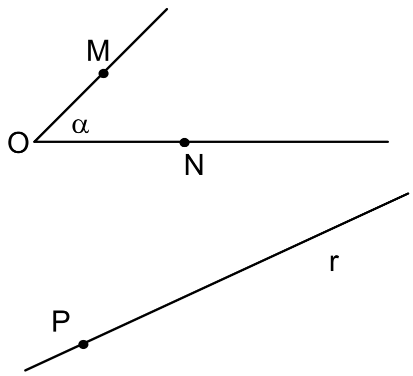


$\boxed{1}$ Date le rette r, s non secanti, dimostrare che tracciata una retta t con $r \cap t = \{P\}$ e $s \cap t = \{Q\}$ gli angoli alterni interni sono congruenti (completare la figura)

Ipotesi: ____

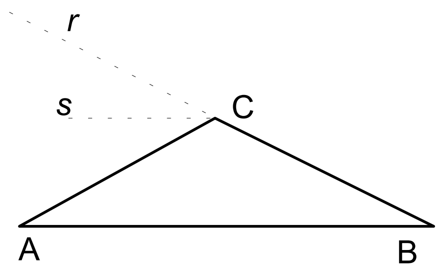
Tesi: ____

Dimostrazione:



$\boxed{2}$ Dato l'angolo $\alpha = \widehat{MON}$, e la retta r, con $P \in r$, eseguire la costruzione dell'angolo β di vertice P ed origine r tale che $\beta \cong \alpha$. Descrivere la costruzione e spiegare perché l'angolo $\beta \cong \alpha$

$\boxed{3}$ Dato un generico poligono convesso di n lati, unendo un generico vertice con gli $n-1$ vertici rimanenti si ottengono _______ triangoli. Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è pari ad un angolo piatto π, la somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati vale ______.e, in particolare la somma degli angoli interni di un quadrilatero vale ______



$\boxed{4}$ Dimostrare che in un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo adiacente l'angolo al vertice è parallela alla base.

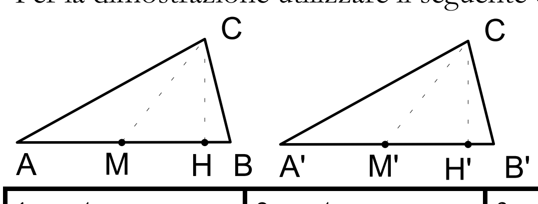
Ipotesi: ____

Tesi: ______________________

Dimostrazione:

$\boxed{6}$ **Ipotesi:** $AM \cong MB \cong A'M' \cong M'B' \wedge CM \cong C'M' \wedge CH \cong C'H' \wedge \widehat{AHC} \cong \widehat{A'H'C'} \cong \frac{1}{2}\pi$ **Tesi:** $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$

Per la dimostrazione utilizzare il seguente criterio generalizzato di congruenza dei triangoli rettangoli

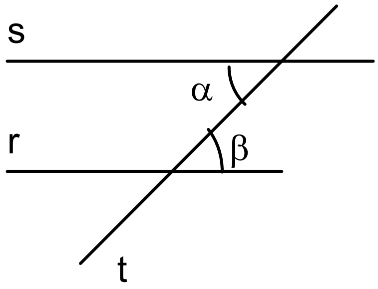


Dimostrazione:

$1 \Rightarrow 4$	$2 \Rightarrow 4$	$3 \Rightarrow 4$	$4 \Rightarrow 2$	$5 \Rightarrow 5$	$6 \Rightarrow 5$

ingresso geometria 25/09/96

$\boxed{1}$ Date le rette r, s che con una retta t formano due angoli angoli alterni interni α e β congruenti dimostrare per assurdo che le due rette r e s sono parallele

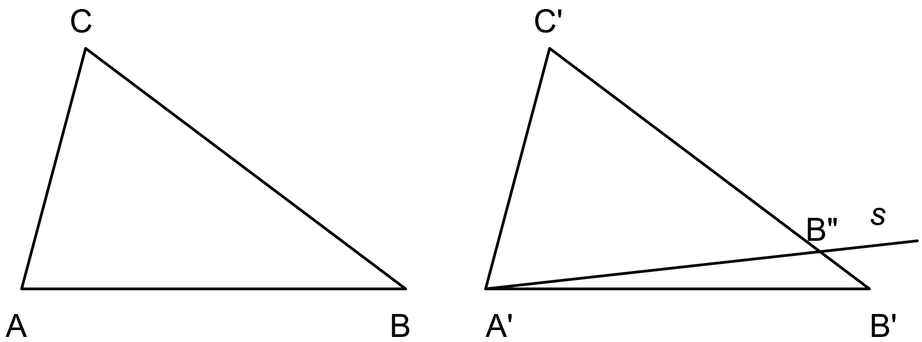


Ipotesi: ____

Tesi: ____

Dimostrazione:

$\boxed{2}$ Si considerino due triangoli ABC e A'B'C' con le seguenti caratteristiche: AB $\cong$ A'B', AC $\cong$ A'C', $\widehat{ACB} \cong \widehat{A'C'B'}$ e si supponga inoltre che $\widehat{ABC}$ e $\widehat{A'B'C'}$ siano della stessa specie (per esempio entrambi acuti).



Dimostrare che $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$.

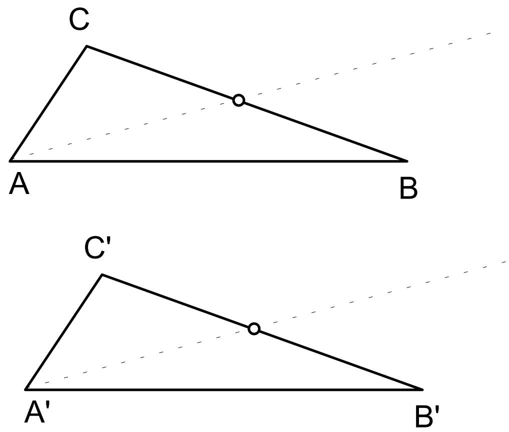
Dimostrazione: procedere per assurdo.

$\boxed{3}$ Il problema precedente corrisponde ad un nuovo criterio di congruenza: provare ad enunciarlo.

Due triangoli che abbiano rispettivamente congruenti due lati e un angolo non compreso tra i due sono congruenti se

$\boxed{4}$ **Ipotesi**: AB $\cong$ A'B' $\wedge$ AC $\cong$ A'C' $\wedge$ M $\in$ CB $\wedge$ M' $\in$ C'B' $\wedge$ CM $\cong$ MB $\wedge$ C'M' $\cong$ M'B' $\wedge$ AM $\cong$ A'M'

Tesi: $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$



Enunciato in linguaggio naturale: ....

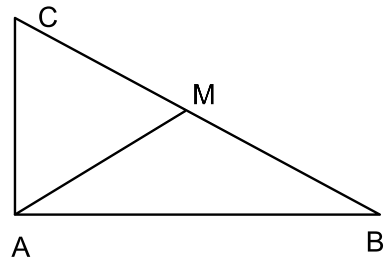
Dimostrazione:

Si prolunghi AM in N in modo che AM $\cong$ MN e si faccia lo stesso anche per l'altro triangolo (in N'). Ragionare per entrambi i triangoli dati su $\overset{\Delta}{AMB}$ e $\overset{\Delta}{CMN}$

1 $\Rightarrow$ 2	2 $\Rightarrow$ 5	3 $\Rightarrow$ 1	4 $\Rightarrow$ 5	

6/12/95

$\boxed{1}$ Dato un triangolo rettangolo ABC con angolo retto in A, sia M∈BC tale che AM ≅ MC. Dimostrare che MC ≅ MB



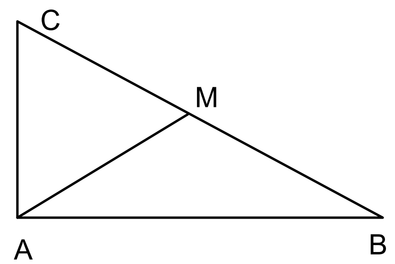
Ipotesi: ____

Tesi: ____

Dimostrazione:

____

$\boxed{2}$ Dato un triangolo rettangolo ABC con angolo retto in A, sia M∈BC tale che BM ≅ MC. Dimostrare procedendo per assurdo che AM ≅ MB



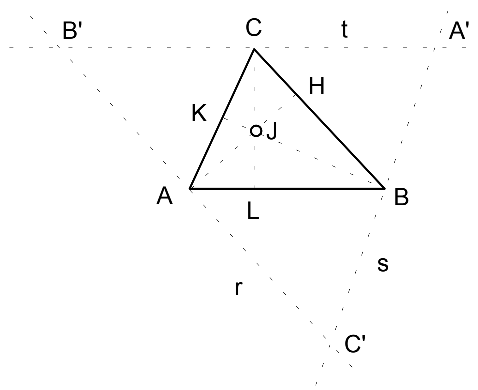
Ipotesi: ____

Tesi: ____

Dimostrazione:
suggerimento: utilizzare il teorema sulle diseguaglianze tra elementi di un triangolo

$\boxed{3}$ Dimostrare che le altezze di un triangolo qualsiasi si incontrano in uno stesso punto detto__________________ (per indicare la perpendicolarità usare il simbolo ⊥)

Ipotesi: ____

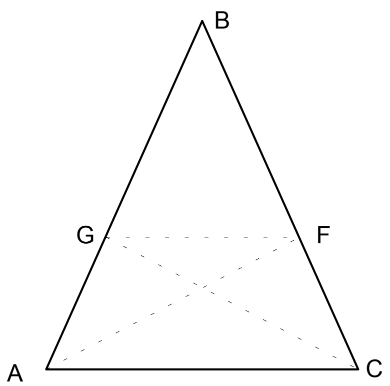


Tesi:

____

Dimostrazione:

$\boxed{4}$ Dato un triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$, di base AB si indichino con F il punto di incontro della bisettrice di $B\hat{A}C$, con BC e con G quello della bisettrice di $B\hat{C}A$, con AB. Dimostrare AG ≅ FC, che il quadrilatero ACFG è un trapezio isoscele e che GF ≅ AG.



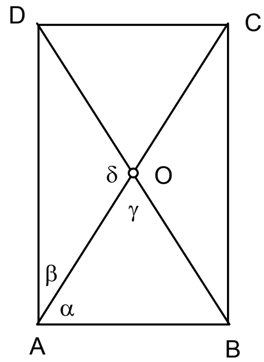
Ipotesi: ____

Tesi: ____

Dimostrazione:

1 ⇒ 4	2 ⇒ 5	3 ⇒ 4	4 ⇒ 5

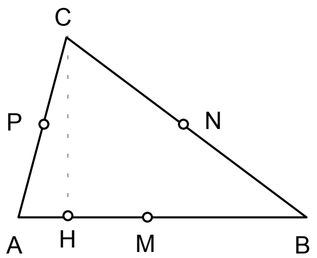
14/12/96



1 Citare un teorema fondamentale sui triangoli in cui si usi il concetto di luogo geometrico.

2 Dimostrare direttamente, cioè senza far uso dei teoremi sui quadrilateri che *se in un quadrilatero le diagonali sono congruenti e si tagliano a metà il quadrilatero è un rettangolo*. Spiegare che condizione si deve dare affinché sia un quadrato. (si consiglia di usare i simboli dati in figura, dopo averla completata).

3 Si consideri un generico triangolo ABC e siano M, N, P i punti medi dei lati AB, BC e CA. Dopo aver tracciato l'altezza CH, dimostrare che il quadrilatero MNPH è un trapezio isoscele (non dimenticarsi che la tesi richiede due asserti). Tenere presente il teorema sulla mediana del triangolo rettangolo.



4 Enunciare e dimostrare il teorema sulla proprietà delle mediane di tagliarsi scambievolmente. Usando il teorema appena dimostrato spiegare attraverso un ragoionamento per assurdo come mai anche la terza mediana passa per G dove {G} = AN ∩ BP e N e P sono i punti medi di CB e AC

1 ⇒ 1	2 ⇒ 4	3 ⇒ 5	4 ⇒ 5	

gennaio 98

1. Posto che si chiama tangente ad una circonferenza la retta *r* che presenta dal centro O della circonferenza $\mathscr{C}$ una distanza OH congruente al raggio si risponda ai due seguenti quesiti:

1) come mai la tangente è perpendicolare al raggio? ⇒ 0.5

2) si dimostri per assurdo che la tangente non può incontrare $\mathscr{C}$ in altri punti oltre a H. ⇒ 2

2. Si considerino due corde consecutive di una circonferenza $\mathscr{C}$ AB e BC con AB < BC. Indicati con H e K le proiezioni del centro O su AB e BC si dimostri che OH > OK. ⇒ 2.5

3. Si considerino su una retta 3 punti consecutivi A, B, C. Supponiamo che esista un punto O del piano tale che OA ≅ OB ≅ OC. Usando il lemma dell'angolo esterno e il teorema T1 si faccia vedere che tale assunzione è assurda. ⇒ 3 Cosa si può concludere da ciò? ⇒ 0.5 (per comodità di argomentazione si consiglia di chiamare α, β, γ, δ i 4 angoli formati dai 3 segmenti con la retta).

4. Data una corda AB su una circonferenza $\mathscr{C}$ di centro O dimostrare che l'angolo alla circonferenza AODB ,^ è sempre metà di AOB,^. ⇒ 2 Spiegare, senza scendere in troppi dettagli come il teorema si possa generalizzare al caso di un angolo alla circonferenza qualsiasi (cioè con i lati non passanti per il centro). ⇒2

febbraio 96

Svolgere almeno 2 problemi. Ritagliare e incollare il testo dei problemi prescelti

1. Si consideri il parallelogrammo ABCD e sia AB≅AC. Dopo aver prolungato la mediana AM di un segmento ME≅AM si dimostri che ABEC è un rombo e che DCE ≅ π

2. Sia ABCD un generico quadrilatero convesso e siano M, N, P, Q i punti medi dei lati consecutivi. Dimostrare che il quadrilatero MNPQ è un parallelogramma

3. Sia AB la corda di una circonferenza $\mathscr{C}$ di centro O e sia P un punto sul prolungamento di AB con BP≅ BO. Si unisca P con O e lo si prolunghi sino ad incontrare $\mathscr{C}$ in Q. Dimostrare che $\widehat{QOA} \cong 3\widehat{BOP}$. Come mai quella indicata non può essere considerata una costruzione che consente la trisezione dell'angolo?

4. Sia AB una corda non passante per il centro di una circonferenza $\mathscr{C}$. Dimostrare che, indicato con M il punto medio di AB, per qualsiasi altra corda PQ passante per M è sempre PM ≠ MQ

aprile 97: circonferenza

1. Si considerino due circonferenze secanti $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ di centri O e O' e si indichi con C uno dei due punti di intersezione. Indicato con M il punto medio di OO' si tracci per C una retta *r* perpendicolare a CM che interseca in A e B le due circonferenze. Dimostrare che AC ≅ CB
(*si consiglia di proiettare O e O' su AB*)

2. Si consideri una circonferenza $\mathscr{C}$ di diametro AB e sia $C \in \mathscr{C}$. Si indichi con E la intersezione della bisettrice di $C\hat{A}B$ con $\mathscr{C}$ e sia F la intersezione della bisettrice di $C\hat{B}A$ con AE. Dimostrare che il triangolo FEB è rettangolo isoscele.
(*si consiglia di ragionare sugli angoli e costruire molto bene, cioè col compasso, le bisettrici*)

3. Si consideri una circonferenza $\mathscr{C}$ e sia AB una sua corda. Dopo aver tracciato la tangente *t* passante per A si prenda su di essa, da parte opposta rispetto al centro, un punto F che determina un segmento AF congruente ad AB. Si indichi con E l'intersezione di FB con $\mathscr{C}$. Dimostrare che il triangolo AEF è isoscele.
(*ricordarsi che anche la tangente determina angoli alla circonferenza*)

4. Dimostrare che se il quadrilatero convesso ABCD ha congruenti le somme delle coppie di lati opposti allora esso è circoscrivibile ad una circonferenza.
(*rispondere solo a quanto richiesto e motivare bene tutte le proprie affermazioni)*.

Svolgere 3 delle seguenti 4 questioni incollando l'intestazione e il testo degli esercizi proposti

maggio 97: circonferenza

1. Si consideri un generico triangolo ABC avente il lato AB come diametro di una circonferenza $\mathscr{C}$; dopo aver indicato con E con F i punti di intersezione di $\mathscr{C}$ con AC e BC si tracci la retta r_{EF} e si indichi con H la proiezione di B su tale retta. Dimostrare che gli angoli ABE e HBF sono congruenti.
(*si consiglia di dimostrare che EAB e CFE sono congruenti*)

2. Si consideri una circonferenza $\mathscr{C}$ di diametro AB ed una circonferenza $\mathscr{C}$' di diametro BE che interseca $\mathscr{C}$ in C oltre che in B. Dimostrare che i punti A, C, E sono allineati.
(*se i tre punti sono allineati l'angolo ACE …*)

3. Si consideri una circonferenza $\mathscr{C}$ di diametro AB e sia C un generico punto della circonferenzatale che CB < CA. Dopo aver indicato con H la proiezione di C su AB e con E la intersezione tra la tangente t_C e la retta r_{AB} si dimostri che HCB è congruente a BCE.
(*ricordarsi che anche la tangente determina angoli alla circonferenza*)

4. Data la circonferenza $\mathscr{C}$ di centro O e un triangolo ABC inscritto nella circonferenza si indichino con H l'ortocentro H e con CD il diametro. Dimostrare che il quadrilatero ADBH è un parallelogrammo. Quindi, indicato con N il punto di intersezione tra AB e HD dinostrare che N biseca AB.
(*usare per la dimostrazione la definizione di parallelogrammo).*

5. Data la circonferenza $\mathscr{C}$ di centro O e una sua generica corda AB dimostrare che l'angolo formato dalla tangente t_B e dalla corda è uno degli infiniti angoli alla circonferenza della corda AB.
(*descrivere la costruzione che si effettua per la dimostrazione).*

Svolgere 3 delle seguenti 5 questioni incollando l'intestazione e il testo degli esercizi prescelti

maggio 97 (assenti e recupero): circonferenza

1. Si considerino due circonferenze $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ di centri O_1 e O_2 tangenti esternamente in T e tra loro diverse. Dopo aver tracciato una generica retta per T che le incontra in A_1 e A_2 si dimostri che non può mai essere $TA_1 \cong TA_2$
(*si consiglia di tracciare i diametri e ragionare sui triangoli che si producono*)

2. Si considerino due circonferenze $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ diverse tangenti internamente in A. Indicati con AB il diametro della maggiore e con O il centro della minore. Si tracci da B la tangente alla minore e siano C ed E il punto di tangenza e quello di intersezione. Dimostrare che gli angoli CAE e CAO sono congruenti.
(*si cerchi di dimostrare che lo sono CAE e ACO*)

3. Si consideri una circonferenza $\mathscr{C}$ e sia AB una sua corda. Si prenda sulla tangente t_A un punto C tale che $AC \cong AB$. Si unisca C con B e sia D l'ulteriore punto di intersezione di rCB con $\mathscr{C}$. Dimostrare che $AD \cong CD$
(*si consiglia di lavorare con gli angoli e si ricordi la proprietà dell'angolo formato tra corda e tangente*)

4. Dimostrare che la tangente alla circonferenza è sempre perpendicolare al raggio tracciato per il punto di tangenza

maggio 98 : circonferenza, punti notevoli e poligoni inscritti e circoscritti

$\boxed{1.}$ Dato il triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$, di base AB si consideri un punto D posto sul prolungamento di CB oltre B tale che D sia il centro di una circonferenza $\mathcal{C}$ tangente in A ad AC. Spiegare come si trova il punto D. Dopo aver tracciato $\mathcal{C}$ sia $r_{AB} \cap \mathcal{C} = \{A,E\}$. Dimostrare che $\widehat{CDE} \cong \frac{1}{2}\pi$.

Suggerimenti: $AD \perp AC$; affinché $\widehat{CDE} \cong \frac{1}{2}\pi$ deve essere $\widehat{DBE} + \widehat{BED} \cong \frac{1}{2}\pi$ ⇒ 1+2

$\boxed{2.}$ Data una circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C e un punto esterno si traccino le due tangenti in A e B. Dimostrare che il quadrilatero PACB è sia inscrivibile, sia circoscrivibile. ⇒ 1.5

$\boxed{3.}$ Dimostrare che in un generico trapezio isoscele gli angoli alla base sono congruenti. Quindi, sfruttando questo risultato dimostrare che un generico trapezio isoscele è sempre inscrivibile e spiegare infine come si può trovare il centro della circonferenza circoscritta. ⇒ 1 + 1 + 1

$\boxed{4.}$ Due circonferenze $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ hanno lo stesso centro O. Preso un punto P esterno ad entrambe si traccino le due coppie di rette tangenti e siano A, B e C, D i corrispondenti punti di tangenza. Dimostrare che $\widehat{APC} \cong \widehat{DPB}$. Dimostrare successivamente che il quadrilatero ABDC è un trapezio e che è isoscele. ⇒ 1 + 1 + 1

Suggerimenti: $AB \| CD$ perché $\perp$ a OP; dimostrarlo

$\boxed{5.}$ Dimostrare che due mediane di un triangolo ABC si incontrano dividendosi in parti doppie l'una dell'altra. Quindi, sfruttando il risultato precedente dimostrare che le 3 mediane si incontrano in uno stesso punto. ⇒ 2 + 1

9/1/02 congruenze sui triangoli

Dato un generico triangolo ABC

a) enunciare il lemma dell'angolo esterno e quindi dedurre da esso le seguenti conseguenze

In un triangolo qualsiasi angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti

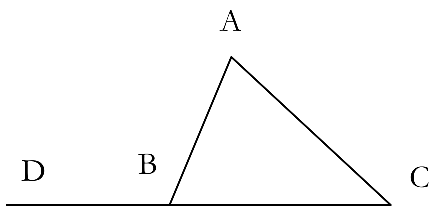
b) la somma di due angoli interni di un triangolo è sempre minore di un angolo piatto

Indichiamo con π un generico angolo piatto e consideriamo l'angolo esterno ABD del triangolo ABC. Per il lemma dell'angolo esterno $\widehat{ABD} > \widehat{ACB}$ e sommando l'angolo $\widehat{ABC}$ si ha $\widehat{ABD} + \widehat{ABC} > \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$; ma $\widehat{ABD} + \widehat{ABC} = \pi$ per definizione di angolo esterno e pertanto $\pi > \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$. Per gli altri angoli basta considerare un diverso angolo esterno e ragionare allo stesso modo. ☺

c) in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono sempre acuti

Poiché gli angolo alla base sono congruenti se la loro somma deve essere minore di π si ha che ogni singolo angolo è minore di $\pi/2$ (angolo retto) ☺

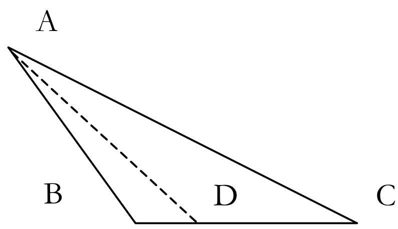
d) in un triangolo rettangolo non si possono avere altri angoli retti o ottusi



Se la somma di due angoli interni è minore di π gli altri angoli sono necessariamente acuti perché altrimenti la somma con l'angolo retto sarebbe maggiore o eguale a un angolo piatto ☺

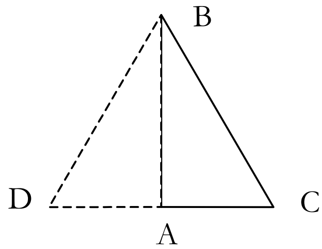
e) in un triangolo ottusangolo il piede della altezza relativa ad uno degli angoli acuti cade sempre all'esterno del lato opposto (ragionare per assurdo)

Consideriamo il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ con $\widehat{ABC} > \pi/2$ e indichiamo con D il piede della perpendicolare. Supponiamo per assurdo che il punto D cada all'interno di BC. Consideriamo allora il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ADB}$; l'angolo retto $\widehat{ADC}$ risulta allora, per il lemma dell'angolo esterno, maggiore di $\widehat{ABD}$ che è ottuso per ipotesi (assurdo). Dunque D non può cadere all'interno e non può neanche coincidere con B perché allora il triangolo sarebbe rettangolo. Dunque D cade all'esterno di BC.



Dato un triangolo ABC rettangolo in A sia l'angolo ACB doppio dell'angolo ABC. Costruire da parte opposta l'angolo ABD congruente a CBA e considerare il punto D tale che BD sia congruente a BC. Unire D con A e a) dimostrare che D, A, e C sono allineati. b) Quindi dimostrare che il triangolo CBD è equilatero. c) Infine usare il risultato trovato per dimostrare che BC è il doppio di AC.

a) I due triangoli $\overset{\Delta}{ABC}$ e $\overset{\Delta}{ABD}$ sono congruenti per il I criterio (BC≅ BD per ipotesi; $\widehat{CBA} \cong \widehat{ABD}$ per ipotesi; AB in comune) ne consegue che $\widehat{BAD} \cong \widehat{BAC} \cong \pi/2$. Dunque $\widehat{DAC} \cong \pi$ e i 3 punti sono allineati. ☺



b) b) Inoltre DA≅CA; $\widehat{BDA} \cong \widehat{BCA}$ e $\widehat{CBD} = 2\widehat{CBA} \cong \widehat{BCA}$ pertanto il triangolo $\overset{\Delta}{CBD}$ è equiangolo. Ma per il teorema T2 se un triangolo è equiangolo è equilatero (valgono le proprietà del triangolo isoscele per ogni coppia di lati) e pertanto DC≅CB. ☺

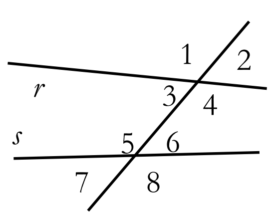
c) Dunque BC≅DC≅2CA ☺

1a,0.5	1b,1	1c,1	1d,1	1e,3		2a,3	2b,2	2c,1	

9/3/02 parallele e perpendicolari

Nel corso del compito è lecito indicare i seguenti teoremi dimostrati a lezione e particolarmente utili con i simboli qui di seguito indicati:

T1) se isoscele angoli congruenti T2) Se angoli congruenti allora isoscele T3) Se alterni interni congruenti (a angoli associati) allora rette parallele T4) Se rette parallele allora alterni interni congruenti (e angoli associati) T5) L'angolo esterno è congruente alla somma degli angoli interni non adiacenti C5) La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente ad un angolo piatto T6) In un parallelogramma i lati opposti sono congruenti T7) In un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa.

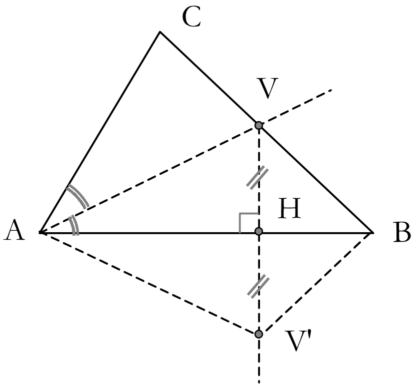


1) Date le rette r, s, t indicate in figura con gli angoli numerati da 1 a 8 rispondere indicando la relazione tra gli angoli indicati:

1 e 8 sono	alterni esterni	5 e 4	
1 e 7		4 e 6	
7 e 3		6 e 2	

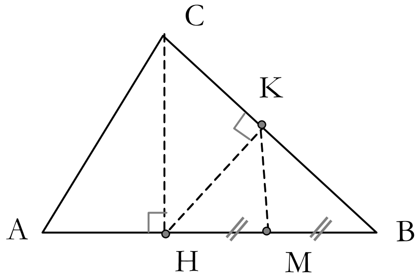
2) Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Si traccino la mediana AM, la altezza AH e la bisettrice AV dell'angolo MAH. Dimostrare che $C\widehat{A}V \cong V\widehat{A}B$.
3) Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Si traccino la bisettrice AV e la perpendicolare per B alla bisettrice che incontra la r_{AC} in D. Dimostrare che DV≅VB.
4) **Facoltativo**: Date due rette parallele r_{AB} e r_{CD} tagliate da una trasversale nel punti E e F si traccino le bisettrici di una coppia di angoli alterni esterni e si dimostri che tali bisettrici sono parallele. Mettere lettere anche sulle bisettrici in modo che gli angoli siano sempre indicati da terne di lettere.

Recupero 12/3/02 geometria razionale



1. *Tradurre in linguaggio naturale la seguente costruzione espressa dalla figura qui a lato per la quale sono stati indicati in tratto pieno i dati e a tratteggio le costruzioni successive.*

Dato un generico triangolo ABC si tracci la bisettrice AV dell'angolo CAB. Quindi dal punto V si tracci l'altezza VH del triangolo ABV e la si prolunghi di un segmento HV' congruente a VH. Si unisca infine V' con A e con B



2. Dato un triangolo ABC si tracci l'altezza CH. Si proietti il punto H su CB e si indichi con K il piede della perpendicolare. Si tracci la mediana KM del triangolo KHB. *Dopo aver costruito la figura individuare almeno una congruenza tra angoli e una congruenza tra segmenti di tipo non banale (cioè che non sia la proprietà su cui si è costruita la figura). Non è richiesta la dimostrazione.*

L'angolo CHK è congruente a CBA. Inoltre KM è congruente a MB.

3. *Scrivere ipotesi e tesi in forma simbolica per il seguente problema di cui non è richiesta la dimostrazione.*

   Sono dati i triangoli $\overset{\Delta}{ABC}$ e $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ in cui i lati di vertici A e A' sono rispettivamente congruenti. Anche le mediane AM e A'M' sono congruenti. Dimostrare che i due triangoli sono congruenti.

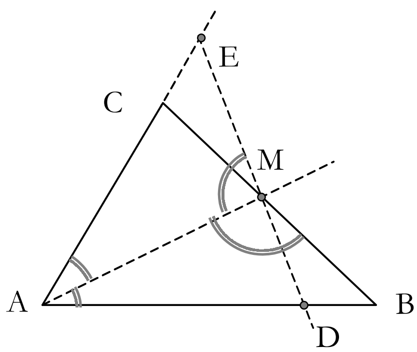
dati: $\overset{\Delta}{ABC}$ e $\overset{\Delta}{A'B'C'}$, $M \in BC$ e $M' \in B'C'$

ipotesi: $AB \cong A'B' \wedge AC \cong A'C' \wedge BM \cong MC \wedge B'M' \cong M'C' \wedge AM \cong A'M'$

tesi: $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$

4. *Dimostrare il seguente teorema (è richiesta la costruzione della figura ma non sono richieste la scrittura della ipotesi e della tesi) Si può argomentare nello stile preferito.*

   Dato il triangolo ABC tracciare la bisettrice AM di $C\hat{A}B$, la retta s_M che forma con AM un angolo $A\hat{M}s$ congruente a $A\hat{M}B$. Si indichino con D e con E le intersezioni di s con le rette r_{AB} e r_{AC}. a) Dimostrare che $\overset{\Delta}{AME} \cong \overset{\Delta}{AMB}$ b) Dimostrare che $\overset{\Delta}{AMC} \cong \overset{\Delta}{AMD}$ c) Quale proprietà relativa alla congruenza di segmenti si può dedurre dai casi a) e b)?



Dimostrazione

a) $\overset{\Delta}{AME} \cong \overset{\Delta}{AMB}$ per il II criterio (lato AM in comune e angoli adiacenti congruenti per ipotesi)
b) $\overset{\Delta}{AMC} \cong \overset{\Delta}{AMD}$ per il II criterio (lato AM in comune, $A\hat{M}C \cong A\hat{M}D$ per differenza di angoli congruenti per ipotesi e perché opposti al vertice, $C\hat{A}M \cong M\hat{A}D$ per ipotesi)
c) Dalla prima coppia di triangoli si ha $AE \cong AB$ e dalla seconda $AC \cong AD$ se ne deduce che $CE \cong DB$ per differenza di segmenti congruenti

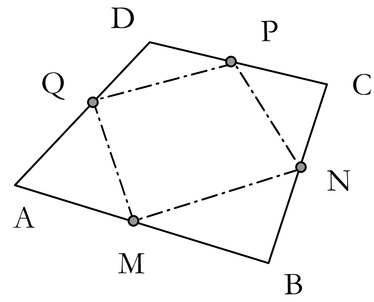
Traduzione in linguaggio naturale		P	E
Costruzione e lettura di una figura		P	E
Analisi di un enunciato e scrittura simbolica		P	E
Abilità dimostrativa		P	E

24/4/02 geometria: i quadrilateri

Rispetto al compito precedente indicare genericamente con: T6) le proprietà di lati angoli e diagonali di un parallelogramma, con T8) le proprietà del trapezio isoscele relative ad angoli alla base e diagonali, con T9) il teorema di Talete, con T10) il teorema sulla parallela al lato di un triangolo tracciata per il punto medio e con T11) quello sulla congiungente i punti medi.

Sono obbligatori l'esercizio 1 (soglia per la sufficienza se svolto in modo perfetto) e uno a scelta tra il 2 e il 3. Non è necessaria la esplicitazione di tesi e ipotesi mentre lo è la costruzione ordinata della figura. Si raccomandano l'ordine, il rispetto della numerazione delle domande e la leggibilità dei ragionamenti. Quando si usa il teorema di Talete specificare sia le parallele sia le trasversali con i simboli più volte usati (lettera minuscola seguita in pedice da due punti tipo r_{AB}.

1. Si consideri un generico quadrilatero ABCD e si indichino con M, N, P e Q i punti medi dei lati. Rispondere alle seguenti domande indicando gli elementi essenziali della dimostrazione a) Perché MNPQ è un parallelogramma b) Perché se il quadrilatero è un trapezio isoscele il parallelogramma è un rombo? c) Perché se le diagonali di ABCD sono perpendicolari il parallelogramma è un rettangolo? d) Cosa accade se sono vere sia la b) sia la c) ?



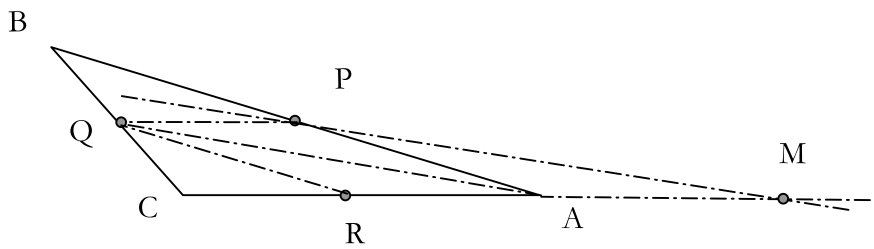
a) MNPQ è un parallelogramma perché se si considerano i triangoli individuati dai vertici del quadrilatero e dalla diagonale opposta al vertice si può applicare il teorema T11). Così QP e MN sono entrambi paralleli ad AC e lo stesso si può dire per QM e PN.

b) Se il quadrilatero ha $D\hat{A}B \cong C\hat{B}ACBA$ e AD≅BC ne consegue la congruenza dei triangoli QAM e NBM per il I criterio; ne consegue che QM≅NM e dunque il parallelogramma risulta essere un rombo perché ha due lati consecutivi congruenti

c) Se le diagonali sono perpendicolari lo sono anche i lati del parallelogramma perché essi risultano paralleli alle diagonali del quadrilatero (vedi punto a).

d) Viene il rombo rettangolo e cioè il quadrato.

2. Sia ABC un triangolo ottusangolo in C. Si indichino con P, Q, R i punti medi di AB, BC e CA e con M il punto di intersezione della retta r_{AC} con la retta r_P parallela alla mediana AQ. Ragionando sui diversi parallelogrammi che si determinano dimostrare che CR ≅ AM. Dopo aver svolto la dimostrazione far vedere che quanto dimostrato equivale ad affermare che $CM \cong \frac{3}{2} AC$



Conviene completare la figura tracciando il punto N, il segmento QC e il segmento QP.

A questo punto possiamo osservare che:

QPAR è un parallelogramma per il teorema T11 essendo definito da congiungenti i punti medi.

QPMA è un parallelogramma perché QP è parallelo ad AM per T11 e QA è parallelo a PM per ipotesi.

Per la uguaglianza dei lati opposti di un parallelogramma (T6) e per la proprietà transitiva ne segue che AR≅AM e poiché CR≅RA per ipotesi si ha che CR≅RA≅AM o anche $CR \cong \frac{1}{3} CM$

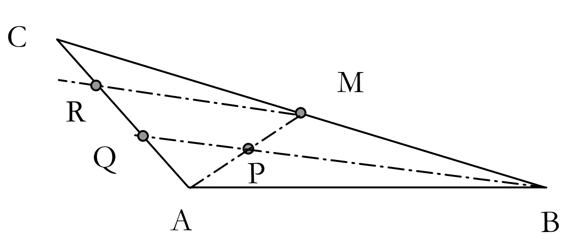
$CM \cong \frac{3}{2} AC \Leftrightarrow \frac{1}{3} CM \cong \frac{1}{2} AC$ ma ciò equivale a quanto appena dimostrato.

3. Sia ABC un triangolo ottusangolo in A. Si tracci la mediana AM e si indichino con P il suo punto medio e con Q il punto di intersezione tra la retta r_{PB} e la retta r_{AC}. Dimostrare che $AQ \cong \frac{1}{3} AC$. Suggerimento tracciare per M la retta r_M parallela a r_{PB}

Seguiamo il suggerimento ed indichiamo con R il punto di intersezione di r_M con r_{AC}.

Per la corrispondenza di Talete T9) applicata alle parallele r_M e r_{PB} rispetto alla trasversali r_{AC} e r_{AM} si ha RQ≅QA.

Per la corrispondenza di Talete T9) applicata alle parallele r_M e r_{PB} rispetto alla trasversali r_{AC} e r_{BC} si ha RQ≅CR.



Per la proprietà transitiva RQ≅CR≅QA e dunque AQ $\cong \frac{1}{3}$ AC

1a	1b	1c	1d	2figura	2dimostr	3figura	3dimostr	

1F PNI 13 febbraio 2006 – Congruenza tra triangoli

Consegne: si può scegliere tra la domanda 2 e la 3. Se resta tempo aggiungere l'altra risposta ma solo dopo il resto

1) Enunciare e dimostrare il lemma dell'angolo esterno (nella dimostrazione evitare le parti ripetitive); quindi citare due conseguenze importanti che si derivano da esso
2) Corollario del lemma dell'angolo esterno: in un triangolo acutangolo il piede H dell'altezza AH appartiene al lato BC. Fallo vedere. Se H fosse esterno …
3) Corollario del V criterio: in un triangolo isoscele l'altezza è mediana e bisettrice. Fallo vedere
4) Sia $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangolo isoscele acutangolo di vertice C e sia O il punto di incontro delle due altezze AH e BK. Dimostrare che a) il triangolo $\overset{\Delta}{AOB}$ è isoscele b) OC è bisettrice dell'angolo $\widehat{ACB}$.

Valutazione

Soglia di sufficienza: 1 Discreto: $1 \wedge (2 \vee 3)$ Ottimo: $1 \wedge (2 \vee 3) \wedge 4$ Eccellente: $1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4$

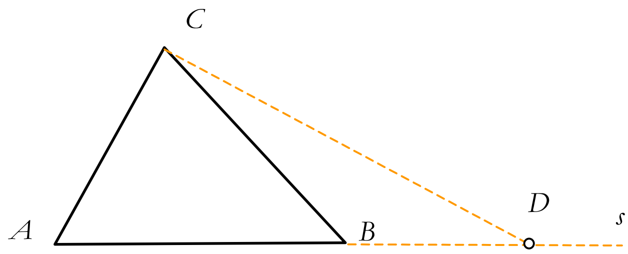
1) Enunciato: In un generico triangolo qualsiasi angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti

Dati: $\overset{\Delta}{ABC}$, Bs

Ipotesi: $\widehat{ABs} \cong \pi$

Tesi: $\widehat{CBs} > \widehat{ACB}$ e $\widehat{CBs} > \widehat{BAC}$

Dimostrazione

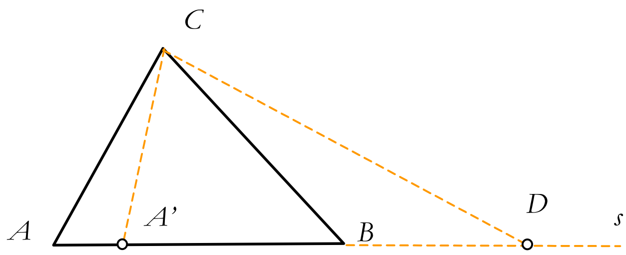


La dimostrazione inizia col dimostrare che $\widehat{CBs} > \widehat{ACB}$, infatti la seconda disuguaglianza verrà derivata dalla prima (come vedremo)

Si procede per assurdo. Dalla negazione della tesi segue che $\widehat{CBs} \leq \widehat{ACB}$

Supponiamo che sia $\widehat{CBs} \cong \widehat{ACB}$ e consideriamo su Bs un segmento BD≅AC; ne consegue che $\overset{\Delta}{BDC} \cong \overset{\Delta}{ABC}$ per il I criterio (BC è in comune) dunque $\widehat{CBA} \cong \widehat{BCD}$ perché opposti a lati congruenti in triangoli congruenti

Si ha così che $\pi = \widehat{ABD} = \widehat{ABC} + \widehat{CBD} \cong \widehat{BCD} + \widehat{ACB} = \widehat{ACD}$



Ma ciò significa che A, C e D devono essere allineati e cioè che C deve essere allineato con A e B ovvero che il triangolo ABC è degenere.

Se ora si suppone che sia $\widehat{CBs} < \widehat{ACB}$ si può costruire entro l'angolo $\widehat{ACB}$ una semiretta tale che sia $\widehat{A'CB} \cong \widehat{CBs}$ con A' interno al segmento AB. Si ripete il ragionamento precedente utilizzando il triangolo $\overset{\Delta}{A'BC}$ e si ottiene il risultato precedente e cioè A',C,B sono allineati. Dunque non si può negare che sia $\widehat{CBs} > \widehat{ACB}$.

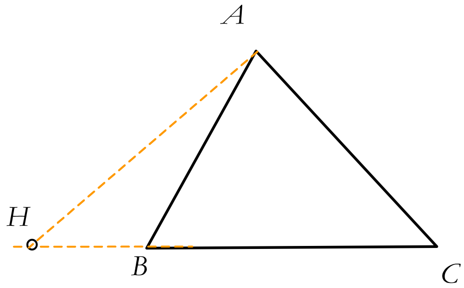
Per dimostrare che $\widehat{CBs} > \widehat{BAC}$ basta osservare che se si prolunga CB dalla parte di B si ottiene un angolo esterno opposto al vertice rispetto al precedente e che si trova rispetto all'angolo $\widehat{BAC}$ nella stessa posizione in cui si trovava $\widehat{CBs}$ rispetto ad $\widehat{ACB}$ e dunque si ha ancora $\widehat{CBs} > \widehat{BAC}$

La applicazione più importante è certamente il IV criterio di congruenza. Altri corollari sono il fatto che in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono acuti, che in un triangolo rettangolo gli altri angoli sono necessariamente acuti, che un triangolo non può avere più di un angolo ottuso

Nota di correzione: molte persone hanno saltato intere parti della dimostrazione o sbagliato a collocare la costruzione (c'è chi l'ha messa nelle ipotesi) o chi non ha saputo scrivere nell'ipotesi che l'angolo dato è esterno (la semiretta che lo definisce è sul prolungamento del lato). Ricordo infine che l'ipotesi assurda non va chiamata ipotesi (non è una delle ipotesi del teorema).

Consiglio quelli che hanno difficoltà a svolgere ragionamenti sensati in proprio a concentrarsi almeno sullo studio rigoroso delle dimostrazioni viste a lezione o assegnate da studiare

2) Se H fosse esterno (per esempio dalla parte di B) il triangolo $\overset{\Delta}{AHB}$ sarebbe rettangolo in H e dunque l'angolo $A\hat{H}B$ (retto) dovrebbe essere minore di $A\hat{B}C$ (angolo esterno di $H\hat{B}A$) che è acuto per ipotesi.



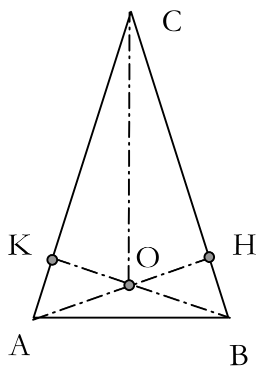
Nota di correzione: quasi tutti hanno disegnato l'altezza vera che non serviva a nulla, alcuni hanno preso H fuori dalla retta BC (ricordo che il piede della perpendicolare può stare fuori dal segmento ma, per definizione, sta sulla retta. Si potrebbe anche dire che nel triangolo $\overset{\Delta}{AHB}$ si avrebbero un angolo retto e un angolo ottuso (supplementare di quello acuto per HP) ma questa non sarebbe già più una conseguenza diretta (corollario) del I.a.e.

3) Sia AH l'altezza. I due triangoli $\overset{\Delta}{AHB}$ e $\overset{\Delta}{AHC}$ sono congruenti per il V criterio infatti sono congruenti il lato AH (comune), gli angoli $H\hat{B}A$ e $H\hat{C}A$ perché alla base di un triangolo isoscele, i lati AB e AC per ipotesi e inoltre i due angoli $A\hat{H}B$ e $A\hat{H}C$ contrapposti ai due lati congruenti sono della stessa specie perché entrambi retti. Dalla congruenza dei due triangoli seguono quella di lati ed angoli e dunque l'altezza è anche mediana e bisettrice.
Nota di correzione: naturalmente il processo era più rapido se si desiderava far discendere dal IV criterio; in effetti qui avevamo non solo angoli della stessa specie, ma addirittura angoli uguali

4) Dati: $\overset{\Delta}{ABC}$

Ipotesi: $AC \cong BC \wedge H \in BC \wedge K \in AC \wedge A\hat{H}B \cong B\hat{K}A \cong ½\,\pi \wedge \{O\} = AH \cap BK$

Tesi: $AO \cong BO \wedge A\hat{C}O \cong B\hat{C}O$

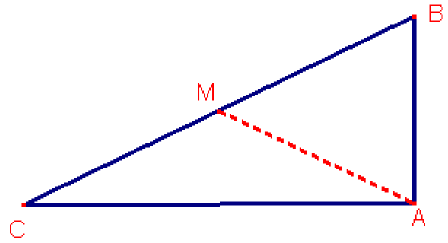


Dimostrazione: $\overset{\Delta}{ABK} \cong \overset{\Delta}{BAH}$ per il IV criterio (AB comune, $A\hat{B}K \cong B\hat{A}H$ angoli alla base di un triangolo isoscele, $A\hat{H}B \cong B\hat{K}A \cong ½\,\pi$ per ipotesi) $\Rightarrow BK \cong AH \wedge AK \cong BH \wedge K\hat{B}A \cong H\hat{A}B$ e dunque per il teorema inverso di quello sui triangoli isosceli si ha $AO \cong BO$
$\Rightarrow OK \cong OH$ per differenza di segmenti congruenti (1)
$\Rightarrow KC \cong CH$ per differenza di segmenti congruenti (2)

Ma ora possiamo affermare che $C\hat{O}K \cong C\hat{O}H$ per il III criterio (per (1), per (2) e CO in comune) e dunque $A\hat{C}O \cong B\hat{C}O$ perché angoli corrispondenti di segmenti congruenti in triangoli congruenti.
Nota di correzione: confrontare questa dimostrazione con la pletora di congruenze inutili che stanno sugli elaborati. Segnalo invece alcuni errori molto diffusi:
Incapacità a scrivere correttamente gli elementi principali della ipotesi (riguardare)
La confusione che porta a scrivere l'uguaglianza degli angoli alla base tra le ipotesi (è la conseguenza di un teorema CNS affinché un triangolo sia isoscele è che abbia gli angoli alla base congruenti).
La pericolosità del prolungare CO senza dire se si prolunga in H (e allora non è detto che CH sia l'altezza) o si traccia da O la perpendicolare (e allora non è detto che H,O,C siano allineati).
Come capita nel primo compito c'è anche chi ha usato la tesi per dimostrare la tesi.

12 aprile 2007 1F PNI Quadrilateri e circonferenze

1) Dato il triangolo ABC sia M il punto medio di BC. Dimostrare che se AM≅BM allora il triangolo è rettangolo in A.



Dati: $\overset{\Delta}{ABC}$, M

HP: CM≅MB $\wedge$ AM≅BM

TS: $\widehat{CAB} \cong \frac{1}{2}\pi$

Dimostrazione

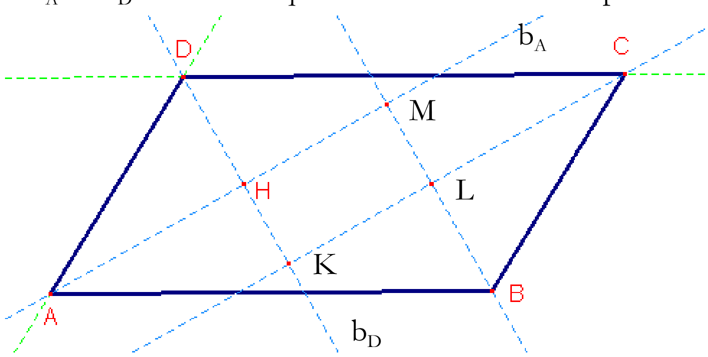
$\widehat{BCA} = \widehat{MCA} \cong \widehat{MAC}$ (triangoli isosceli)

$\widehat{CBA} = \widehat{MCB} \cong \widehat{BAM}$ (triangoli isosceli)

Ma per il teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo $\widehat{BCA} + \widehat{CBA} + \widehat{CAB} = \widehat{BCA} + \widehat{CBA} + (\widehat{MAC} + \widehat{BAM}) \cong 2(\widehat{MAC} + \widehat{BAM}) \cong 2\,\widehat{CAB} \cong 2\pi$ e dunque $\widehat{CAB} \cong \frac{1}{2}\pi$

Nota di correzione: si poteva anche operare sui due angoli esterni $\widehat{CMA}$ e $\widehat{AMB}$ la cui somma fa π mentre la somma degli angoli interni non adiacenti fa $2\,\widehat{CAB}$. Non si poteva invece sfruttare le proprietà della inscrivibilità in una semicirconferenza perché quel teorema si dimostra con questo.

2) Si consideri il parallelogrammo ABCD e siano b_A e b_D due delle quattro bisettrici e H il punto di intersezione. Dimostrare che $\widehat{DHA} \cong \frac{1}{2}\pi$. Ragionando analogamente su tutte le bisettrici cosa si può concludere circa il quadrilatero HKLM determinato dai punti di intersezione (precisare i nomi dei 3 triangoli da prendere in esame)?



Dati: ABCD, b_A, b_D

HP: $r_{AD} \parallel r_{BC} \wedge r_{AB} \parallel r_{DC} \wedge \widehat{DAb_A} \cong \widehat{BAb_A} \wedge \dots \wedge b_A \cap b_D = \{H\}$

TS: $\widehat{DHA} \cong \frac{1}{2}\pi$

Stabilire inoltre le caratteristiche di HKLM

Dimostrazione

$\widehat{ADC} + \widehat{DAB} \cong \pi$ (angoli coniugati interni di $r_{AD} \parallel r_{BC}$)

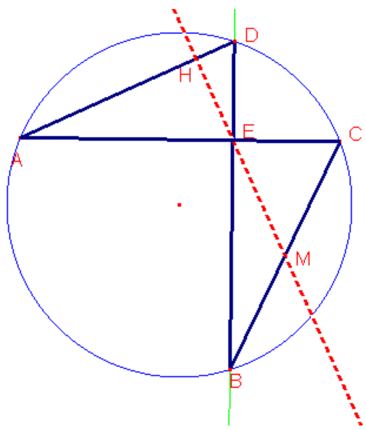
ne consegue, tenuto conto dell'ipotesi, che $\widehat{ADH} + \widehat{DAH} \cong \frac{1}{2}\pi$ e quindi, applicando il teorema sulla somma degli angoli interni al triangolo AHD segue che $\widehat{DHA} \cong \frac{1}{2}\pi$.

HKLM è un rettangolo perché con ragionamento analogo applicato al triangolo BLC si ha $\widehat{BLC} \cong \frac{1}{2}\pi$.

Si ottengono identici risultati per gli altri due angoli riferendosi ai triangoli DKC e AMB.

Nota di correzione: con dimostrazione meno diretta, ma elegante (indicato con P il punto di intersezione di b_A con DC) si poteva osservare che $\widehat{DPA} \cong \widehat{PAB}$ (alterni interni) e ciò insieme alla ipotesi consente di affermare che il triangolo DAP è isoscele sulla base AP. Ma poiché DH è bisettrice, essa è anche mediana e altezza.

3) Siano AC e BD due corde di una medesima circonferenza tra loro perpendicolari e si indiche con E il punto di intersezione delle due corde. Siano EH l'altezza relativa al lato AB e M il punto di intersezione del suo prolungamento con BC. Dimostrare che il triangolo EMB è isoscele. Come si potrebbe dimostrare per conseguenza che anche EMC è isoscele?



Dati: AC, BD, $\mathcal{C}$

HP: $\{ABCD\} \subset \mathcal{C} \wedge AC \cap BD = \{E\} \wedge \widehat{AED} \cong \frac{1}{2}\pi \wedge H \in AD \wedge \widehat{EHA} \cong \frac{1}{2}\pi \wedge r_{HE} \cap BC = \{M\}$

TS: ME≅MB $\wedge$ ME ≅ MC

Dimostrazione

$D\hat{A}E \cong D\hat{E}H$ perché complementari di uno stesso angolo ($H\hat{E}A$) (1)

$D\hat{B}C \cong D\hat{A}E$ perché angoli alla circonferenza della corda DC (2)

$D\hat{E}H \cong B\hat{E}M$ perché opposti al vertice (3)

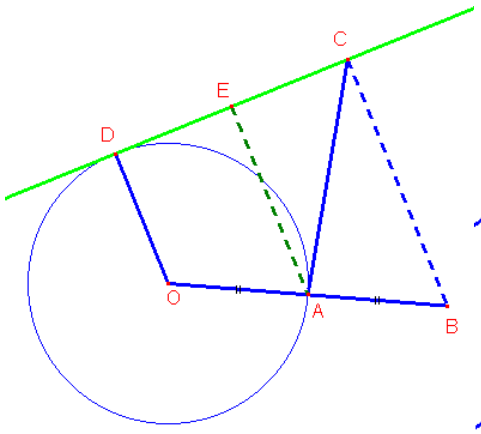
Da (1), (2), (3) si ha per la proprietà transitiva che $B\hat{E}M \cong E\hat{B}C$ e ciò garantisce che il triangolo EMB è isoscele.

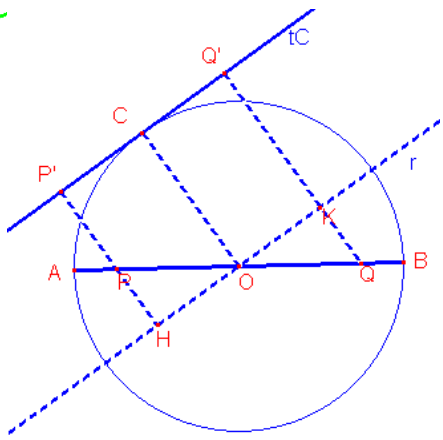
Ma $M\hat{C}E \cong M\hat{E}C$ perché complementari di uno stesso angolo ($M\hat{E}B$) dunque anche il triangolo MEC è isoscele.

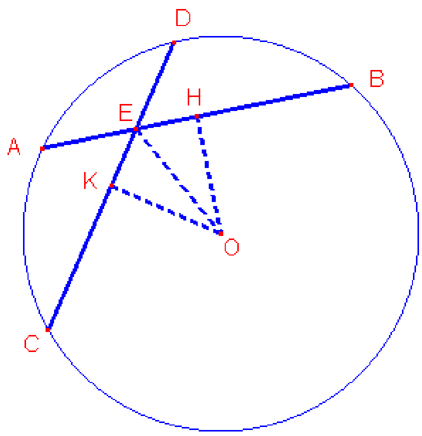
Consegne: Il primo teorema ha la funzione di salvagente. Raccomando di essere essenziali ma precisi nelle dimostrazioni. Le ipotesi vanno indicate correttamente e non confuse con le conseguenze delle stesse.
Le figure da utilizzare sono quelle già predisposte nel testo e dunque evitare di rifarle ed eventualmente completarle con le lettere mancanti che si intendono utilizzare.
Le figure sono state tutte realizzate con Cabri.
Partendo dal punteggio minimo di 3 i punteggi dei tre esercizi sono rispettivamente di 1.5, 3 e 3

14 maggio 2007 1F PNI circonferenze

Consegne: per agevolare la scrittura precisa e coerente delle dimostrazioni non viene richiesto di indicare dati, ipotesi e tesi per le quali si rinvia al testo. Utilizzare e completare senza pasticciarle le figure fornite. Se si usano i suggerimenti bisogna descrivere ciò che si fa nella propria dimostrazione. Svolgere a scelta un problema tra i primi 3 e uno tra il quarto e il quinto. Se si termina la dimostrazione svolgere un secondo problema del I gruppo.







1) Si considerino su una circonferenza di centro O due punti A e D qualsiasi che formino un angolo al centro ottuso. Si prolunghi OA in B di un segmento congruente al raggio. Indicate con C e con E le proiezioni di B e di A sulla tangente t_D dimostrare che $\widehat{ABC} \cong 2\ \widehat{ACB}$ e che $\widehat{OAC} \cong 3\ \widehat{ACB}$. (suggerimento unire A con D; nella dimostrazione si fa riferimento al teorema di Talete)

   Le tre rette r_{OD}, r_{AE} e r_{BC} sono parallele perché perpendicolari ad una stessa retta (la prima perché il raggio è perpendicolare alla tangente, le altre due per costruzione).
   Dunque DE≅EC per il teorema di Talete (visto che OA≅AB per ipotesi).
   Poiché EA è mediana e altezza il triangolo DAC è isoscele su DC e dunque $\widehat{ADC} \cong \widehat{ACD}$. Poiché anche il triangolo DOA è isoscele avremo che $\widehat{DAO} \cong \widehat{ODA} \cong \pi/2 - \widehat{ADC} \cong \pi/2 - \widehat{ACD} \cong \widehat{ACB}$ (1)
   Ma $\widehat{ACB} \cong \widehat{EAC}$ (alterni interni) mentre $\widehat{EAC} \cong \widehat{EAD}$ (nel triangolo isoscele la mediana è bisettrice) (2)
   Dalla (1) e la (2) segue per somma che $\widehat{OAC} \cong 3\ \widehat{ACB}$
   Inoltre $\widehat{CBA} \cong \widehat{EAO}$ perché corrispondenti e dunque $\widehat{CBA} \cong 2\ \widehat{EAD} \cong 2\ \widehat{EAC} \cong 2\ \widehat{ACB}$

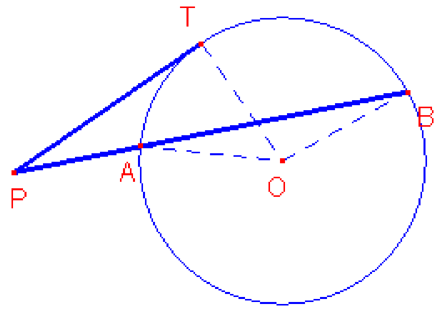
2) In una circonferenza di centro O e diametro AB si considerino sul diametro due punti P e Q qualsiasi equidistanti dal centro. Sia C un punto qualsiasi della circonferenza e t_C la corrispondente retta tangente. Indicare con Q' e P' le proiezioni di Q e P sulla retta tangente. Dimostrare che QQ' + PP' ≅ AB (suggerimento: dopo aver tracciato il raggio OC si consiglia di tracciare la parallela r a t_C individuando per prolungamento o intersezione i due punti H e K che consentono di trovare una interessante relazione su QQ' + PP').

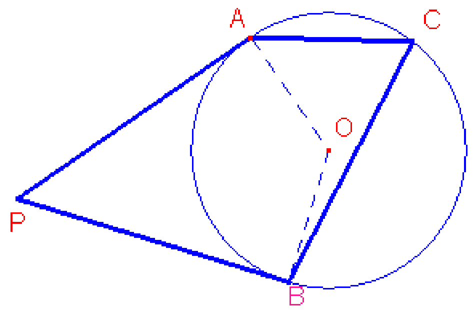
   Traccio per O la parallela r a t_C e individuo i punti H e K per prolungamento e intersezione. Si osserva immediatamente che i due triangoli rettangoli PHO e QKO sono congruenti (sono congruenti le ipotenuse per ipotesi e i due angoli opposti al vertice). Ne consegue che PH ≅ QK. (1)
   Inoltre per il parallelismo di r e t_C P'H≅CO≅Q'K (2)
   Dunque QQ' + PP' = Q'K + KQ + PP' ≅ Q'K + HP + PP' = Q'K + HP' ≅ 2 OC ≅ AB

3) In una circonferenza di centro O siano AB e CD due corde congruenti che si intersecano in E. Dimostrare che le due corde si dividono in parti rispettivamente congruenti (suggerimento: proiettare O sulle due corde)

   Si tratta di dimostrare che AE ≅ ED. Proiettiamo il centro O sulle due corde e troveremo i punti H e K che sono punti medi delle corde stesse (lo garantisce un teorema e la dimostrazione è banale visto che si tratta della altezza di un triangolo isoscele).
   Inoltre in base ad uno dei teoremi delle circonferenze corde uguali sono equidistanti dal centro (la cosa si dimostra molto semplicemente anche lavorando sui due triangoli isosceli che sono congruenti per il III criterio.

Dunque i due triangoli rettangoli EHO e EKO sono congruenti (ipotenusa in comune e cateti distanza congruenti).
Ne se segue che KE ≅ EH e dunque ED ≅ EA per differenza di segmenti congruenti.





4) Da un punto P esterno ad una circonferenza di centro O si tracciano la tangente PT e la secante PAB collocate dalla stessa parte rispetto al centro. Dimostrare che $T\hat{P}A \cong \frac{1}{2}\left(T\hat{O}B - T\hat{O}A\right)$

$\frac{1}{2}\left(T\hat{O}B - T\hat{O}A\right) = \frac{1}{2}T\hat{O}B - \frac{1}{2}T\hat{O}A$

Ma $\frac{1}{2}T\hat{O}B$ è l'angolo alla circonferenza della corda TB e cioè $T\hat{A}B$ mentre $\frac{1}{2}T\hat{O}A$ è l'angolo alla circonferenza della corda TA e cioè $T\hat{B}A$.

Ma l'angolo alla circonferenza è uguale a quello formato dalla tangente e dunque $P\hat{T}A \cong T\hat{B}A$

Unendo tutte le relazioni si ha: $\frac{1}{2}\left(T\hat{O}B - T\hat{O}A\right) \cong T\hat{A}B - P\hat{T}A$.

Ma $T\hat{A}B$ è l'angolo esterno di $T\hat{A}P$ e dunque $T\hat{A}B - P\hat{T}A \cong T\hat{P}A$ come richiesto.

5) Dato un punto P esterno ad una circonferenza di centro O si tracciano le tangenti PA e PB. Quindi, sull'arco AB maggiore si prende un generico punto C. Dimostrare che al variare del punto C la somma dei due angoli $P\hat{A}C$ e $P\hat{B}C$ rimane costante (si può procedere in molti modi, per esempio ragionare sul quadrilatero).

Dati P e la circonferenza le tangenti sono univocamente determinate e dunque l'angolo $A\hat{P}B$ è dato. Poiché A e B sono univocamente determinati è fissato anche l'angolo al centro $A\hat{O}B$. Al variare del punto C l'angolo $A\hat{C}B$ non varia perché si tratta di un angolo alla circonferenza di una corda data (metà dell'angolo al centro).

Dunque $A\hat{P}B + A\hat{C}B$ è costante al variare di C.

Ma la somma degli angoli di un quadrilatero è costante e vale 2π e pertanto: $P\hat{A}C + P\hat{B}C \cong 2\pi - (A\hat{P}B + A\hat{C}B)$ è costante.