8/11/02 3F PNI primi elementi di goniometria

Nota bene: valori esatti in forma simbolica, valori approssimati con 3 cifre decimali, gli esercizi sono distinti a gruppi (1,2,7), (3,4,5), 6 evitare di soffermarsi su un solo gruppo. La calcolatrice va usata solo se non si opera con archi noti e per trovare i valori approssimati

1. Calcolare quanto richiesto scrivendo il risultato direttamente nella tabella facente parte del testo (non è richiesta la giustificazione del risultato)

arc sin $\sqrt{3}$	non esiste perché $\sqrt{3}$ è esterno al dominio	arcsin sin $\frac{2}{3}\pi$	arc sin $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$
arccos cos $\frac{7}{6}\pi$	arc cos $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{6}\pi$	sin arcsin $\frac{\pi}{4}$	$\approx$ sin 0.903339 $\approx$ 0.785
valori di x per cui non vale la identità $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$	quando t non è definita $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$	periodo della funzione $y = \sin 3x + \cos 2x$	i periodi sono $\frac{2}{3}\pi$ e π e la ripetizione comune dà 2π

Note di correzione

a) arc sin $\sqrt{3}$ vuol dire arco che ha per seno $\sqrt{3}$ e dunque non esiste perché il seno ha come codominio [-1,1] b) bisogna tener conto che arc sin ha come codominio $[-\pi/2,\pi/2]$ c) bisogna tener conto che arc cos ha come codominio $[0,\pi]$ d) esercizio appositamente scritto per verificare la chiarezza nelle definizioni arcsin $\frac{\pi}{4}$ non è un arco noto, ciò che è noto è arc sin $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ e) t = tan x/2 e pertanto bisogna scrivere per x/2 le condizioni di esistenza della tangente f) nel cercare il periodo bisogna cercare il mcm dei due periodi

2. Risolvere per $x \in [0,\pi]$ le seguenti equazioni elementari riportando nella tabella i risultati (i valori approssimati vanno espressi con 3 decimali; sul foglio si devono vedere i conti che hanno portato al risultato

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = \alpha = \text{arc cos}\,[-\frac{\sqrt{3}}{2}] = \frac{5\pi}{6} \approx 2.618$
$\tan x = -2$	$\alpha = \text{arc tan}(-2)$ $\quad x = \alpha + \pi \approx 2.034$
$\sin(2x - 1) = 0.8$	$\alpha = \text{arc sin}\ 0.8 \approx 0.927295$ $\quad 2x - 1 \in [-1, 2\pi - 1]$ riportare sul cerchio $2x - 1 = \alpha \vee 2x - 1 = \pi - \alpha$ e da qui si ha $x = \frac{\alpha + 1}{2} \approx 0.964 \vee x = \frac{\pi - \alpha + 1}{2} \approx 1.607$

Note di correzione

l'esercizio precisava nel testo dovere erano richieste le soluzioni e bisognava attenersi alla richiesta. a) nessun problema b) la soluzione non è arc tan c) bisogna scrivere preliminarmente l'intervallo entro cui varia 2x – 1 quando $x \in [0,\pi]$

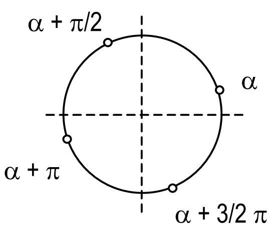
3. Data la funzione $y = f(x) = \sin^2 x + \cos 2x + \sin^4\frac{x}{2} + \cos x$ esprimerla in funzione della sola variabile cos 2x

$f(x) = \sin^2 x + \cos 2x + \sin^4\frac{x}{2} + \cos x = \frac{1 + \cos 2x}{2} + \cos 2x + \left(\frac{1 - \cos x}{2}\right)^2 + \cos x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos^2 x - \cos x + \cos x = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\,\frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{9}{8} + \frac{13}{8}\cos 2x$

Note di correzione

Era richiesto di trasformare in 2x e pertanto si trattava di usare ripetutamente le formule di bisezione. Si osservi che cos x si eliminava nei conti.

4. Data la funzione $y = f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2x) + \cos^2(\pi + x) + \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ esprimerla in funzione della sola variabile cos x



Dopo aver tracciato il cerchio goniometrico (su cui sono stati riportati gli archi associati necessari per semplificare la espressione data) si ha: $= f(x) = \cos 2x + \cos^2 x - \cos x = 2\cos^2 x - 1 + \cos^2 x - \cos x = 3\cos^2 x - \cos x - 1$

Note di correzione

dopo aver semplificato tramite archi associati (e non con somma e sottrazione) si arriva ad una espressione che si può ulteriormente semplificare con al formula di duplicazione del coseno.

5. Data la funzione $y = f(x) = \frac{2\sin x\cos x + 3\sin^2 x - 1}{2\cos^2 x + \sin^2 x - 3}$ esprimerla in funzione semplice di una sola funzione goniometrica

Basta trasformarla in omogenea di II grado con l'uso della prima identità fondamentale e poi passare in tangente dividendo per $\cos^2 x$.

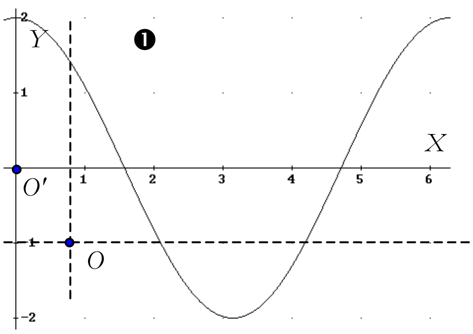
$$y = f(x) = \frac{2 \sin x \cos x + 3 \sin^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x}{2 \cos^2 x + \sin^2 x - 3 \sin^2 x - 3 \cos^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x - \cos^2 x}{-\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \frac{2 \tan x + 2 \tan^2 x - 1}{-1 - 2\tan^2 x}$$

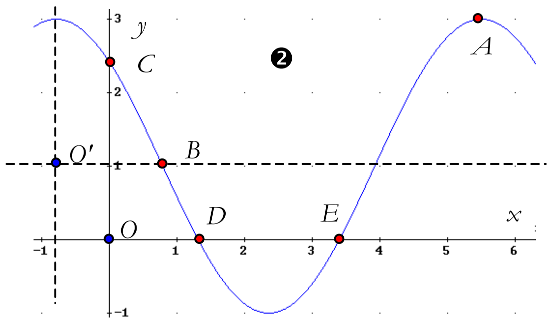
Note di correzione

Si tratta di una metodica espressamente trattata e segnalata a lezione

6. Tracciare per $x \in [0,2\pi]$ la funzione γ: $y = f(x) = 2 \cos(x + \frac{\pi}{4}) + 1$. La soluzione deve comprendere i due diagrammi in XO'Y e xOy e le coordinate dei punti A, B, C rispettivamente di massimo, flesso di ascissa minore e intersezione con l'asse y.

$y = 2 \cos(x + \frac{\pi}{4}) + 1 \Leftrightarrow y - 1 = 2 \cos(x + \frac{\pi}{4})$. Pertanto la traslazione ha la forma $Y = y - 1$ e $X = x + \frac{\pi}{4}$ e la funzione assume la forma $Y = 2 \cos X$





L'origine O nel sistema provvisorio XO'Y ha coordinate $x = 0 \Rightarrow X = \frac{\pi}{4}$ e $y = 0 \Rightarrow Y = -1$

Si ottiene così la figura ❶ da cui si ricava la figura ❷

Per determinare i punti richiesti si procede a partire da informazioni note.

Punto A: $X = 2\pi$ da cui $x = X - \pi/4 = 7/4\ \pi$; $Y = 2$ da cui $y = Y + 1 = 2 + 1 = 3$. Pertanto $A \equiv (7/4\pi, 3)$.

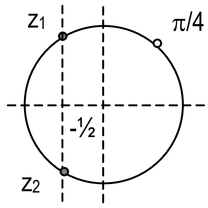
Per il punto B si ha analogamente $B \equiv (\pi/4, 1)$

Per il punto C basta porre $x = 0$ nella funzione e si ha $y = 2 \cos(\frac{\pi}{4}) + 1 = \sqrt{2} + 1 \approx 2.41$

Note di correzione

a) bisogna esplicitamente ricavare la trasformazione procedendo per equivalenze b) come avevo segnalato a lezione il sistema provvisorio è XO'Y ed esso serve ad ottenere il diagramma in xOy; è indispensabile tracciare i due diagrammi con le informazioni che ho segnato (per la scala basta un solo valore)

7. Risolvere l'equazione $2 \cos(x + \frac{\pi}{4}) + 1 = 0$ per $x \in [0,2\pi]$ e controllare sul diagramma precedente la sensatezza dei risultati trovati.



L'equazione equivale a $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$ con $x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$

$\alpha = \arccos -\frac{1}{2} = 2/3\ \pi$ e pertanto le soluzioni (disegnare il cerchio) sono $z_1 = 2/3\ \pi$ cui corrisponde $x_D = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} \approx 1.309$

$z_2 = 4/3\ \pi$ cui corrisponde $x_E = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12} \approx 3.403$

Nota di correzione

Come per l'esercizio 2c) bisogna cercare le soluzione in z che corrispondono in x all'intervallo richiesto.

1,3	2,2	3,2	4,1.5	5,1.5	6, 1+2+2			7,2	•	•-	•½	x+	punti	voto

14/11/02 3F PNI primi elementi di goniometria (recupero)

Nota bene: valori esatti in forma simbolica, valori approssimati con 3 cifre decimali, gli esercizi sono distinti a gruppi (1,2), (3,4,5), 6 evitare di soffermarsi su un solo gruppo. La calcolatrice va usata solo se non si opera con archi noti e per trovare i valori approssimati

1. Calcolare quanto richiesto scrivendo il risultato direttamente nella tabella facente parte del testo (è richiesta la giustificazione del risultato sul foglio o nel riquadro)

arc sin $\frac{\pi}{2}$	non esiste perché $\frac{\pi}{2} > 1$	arcsin sin $\frac{11}{6}\pi$	arc sin $\frac{-1}{2} = -\frac{\pi}{6}$
arcos $[\frac{1}{3}$ arccos $\frac{-1}{\sqrt{2}}]$	arcos $\frac{1}{3}\frac{3}{4}\pi$ = arcos$\frac{\pi}{4} \approx 0.667$	dominio della funzione y = $\sqrt{3 - \sin x}$	$\forall$x perché 3 – sin x è sempre positivo
valori di x per cui non vale la identità $\sin x = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$	si tratta della formula di bisezione scritta senza uno dei due casi; è falsa quando sin x < 0	periodo della funzione y = sin 2x + sin 4x	la prima delle due funzioni ha periodo π, la seconda $\pi/2 \Rightarrow$ la somma ha periodo π

2. Risolvere per $x \in [0,\pi]$ le seguenti equazioni elementari riportando nella tabella i risultati (i valori approssimati vanno espressi con 3 decimali; sul foglio si devono vedere i conti che hanno portato al risultato

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$x_1 = \alpha = \text{arc sin }[\frac{\sqrt{3}}{2}] = \frac{\pi}{3} \vee x_1 = \pi - \alpha = \frac{2}{3}\pi$
$\tan(x+\frac{2\pi}{3}) = -1$	α = arc tan(– 1) = $-\pi/4$ poiché $x + \frac{2\pi}{3} \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ la soluzione è $x + \frac{2\pi}{3} = \alpha + \pi = \frac{3\pi}{4}$ e pertanto $x = \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$
$\lvert\cos x\rvert = -\frac{1}{4}$	nessuna soluzione perché $\lvert\cos x\rvert \geq 0\ \forall$ x

3. Calcolare la formula di triplicazione del seno ed esprimere il risultato in funzione della sola variabile sin x.

$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x) \sin x = 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = \sin x(-4\sin^2 x + 3)$

4. Al risultato precedente applicare le formule parametriche e scrivere il risultato in forma fattorizzata in termini di I e II grado nella variabile t

$$\sin 3x = \sin x(-4\sin^2 x + 3) = \frac{2t}{1+t^2}\left(-4\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}+3\right) = \frac{2t}{1+t^2}\frac{-16t^2+3+3t^4+6t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2t}{1+t^2}\frac{3t^4-10t^2+3}{(1+t^2)^2} = \frac{2t}{1+t^2}\frac{(t^2-3)(3t^2-1)}{(1+t^2)^2} = \frac{2t(t^2-3)(3t^2-1)}{(1+t^2)^3}$$

5. Data la funzione $y = f(x) = \sin^2 x \tan(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x) \sin(-\frac{\pi}{2} + x)$ esprimerla in funzione di sin x e cos x, quindi abbassarla di grado passando in 2x e infine usando la identità della combinazione lineare scriverla come una sinusoide traslata.

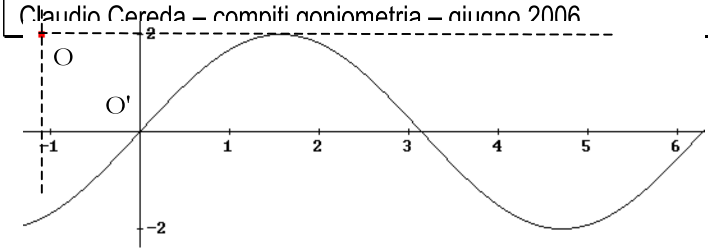
$y = f(x) = \sin^2 x \frac{\cos x}{\sin x} + \cos x(-\cos x) = \sin x \cos x - \cos^2 x = ½ \sin 2x - \frac{1 + \cos 2x}{2} = ½ [\sin 2x - \cos 2x - 1]$

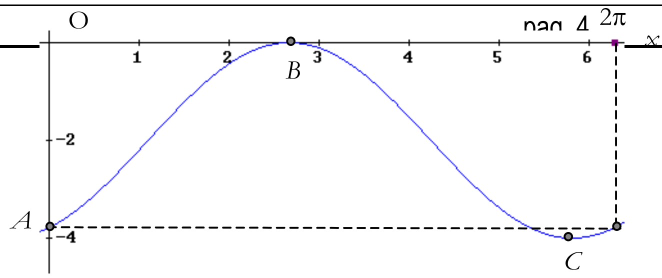
Applicando la identità della combinazione lineare e tenendo conto che $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ si ottiene $y = ½ [\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}) - 1]$

Si tratta di una sinusoide di ampiezza $\frac{\sqrt{2}}{2}$ di periodo π opportunamente traslata.

6. Tracciare per $x \in [0,2\pi]$ la funzione γ: $y = f(x) = 2 \sin(x - 1.1) - 2$. La soluzione deve comprendere i due diagrammi in XO'Y e xOy e le coordinate dei punti A, B, C rispettivamente di intersezione con l'asse y, di massimo e di minimo.

La traslazione ha la forma $x - 1.1 = X \wedge y + 2 = Y$
Eseguita la traslazione si ottiene la funzione Y = 2 sin X mentre l'origine O nel sistema XO'Y ha coordinate:
$x = 0 \Rightarrow X = -1.1$ e $y = 0 \Rightarrow Y = 2$
Si traccia il diagramma nel sistema XO'Y e si indica su di esso l'origine O del sistema xOy che viene accennato in tratteggio.
A questo punto si traccia il diagramma definitivo in xOy riportando la zona compresa tra 0 e 2π. Su tale diagramma si riportano i 3 punti richiesti A, B, C e si procede alla loro determinazione.





Determinazione di A: $x_A = 0$ $y_A = f(0) = 2\sin(-1.1) - 2 \approx -3.782$
Determinazione di B: $X_B = \pi/2 \Rightarrow x_B = X_B + 1.1 \approx 2.671$ $Y_B = 2$ da cui $y_B = Y - 2 = 0$
Analogamente si opera per C.

1,3	2,2	3,2	4,3	5,3	6, 1+2+2			●	●-	●½	x+	punti	voto

15/1/03 3F PNI disequazioni goniometriche

Risolvere le seguenti disequazioni goniometriche in un periodo partendo da 0; per la sufficienza 2 esercizi completi e corretti; valutazione massima 4 esercizi completi e corretti; i valori approssimati vanno espressi con almeno 4 cifre decimali esatte; gli archi che non corrispondono ad archi notevoli vanno indicati simbolicamente e determinati in forma approssimata.

1. $4 \cos^2 x - \cos x - \frac{1}{2} \le 0$
2. $\sin(x - \pi/3) \le 1/\sqrt{2}$
3. $\cos x + 3 \sin \frac{x}{2} \le -1$
4. $-2 \sin x + 2\sqrt{3} \cos x \ge 3$
5. $4 \sin x \cos x + 1 - 2 \sin x - 2 \cos x \ge 0$

1	disequazione II grado	intervalli sul cerchio	individuazione capisaldi	soluzioni	

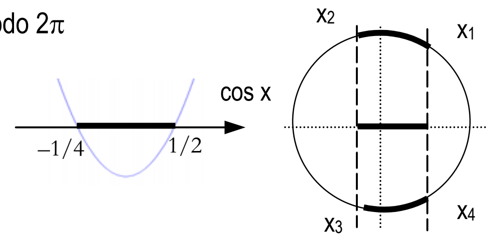
2	campo di studio	intervalli sul cerchio	individuazione capisaldi	soluzioni	

3	strategia corretta	disequazione II	intervalli sul cerchio	individuazione capisaldi	soluzioni	

4	riduzione a f. elementare	campo di studio	intervalli sul cerchio	individuazione capisaldi	soluzioni	

5	riduzione a f. elementare	intervalli sul cerchio	individuazione capisaldi	schema e soluzioni	

1. $4 \cos^2 x - \cos x - \frac{1}{2} \le 0$ è una disequazione di II grado in solo coseno con periodo 2π e pertanto si studia in $[0,2\pi]$



$\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$ Discussione grafica tramite la parabola $\cos x = \frac{1 \pm 3}{8} = \begin{matrix} -\frac{1}{4} \\ +\frac{1}{2} \end{matrix}$

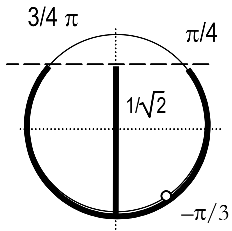
$\alpha = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ $\beta = \arccos(-1/4) \approx 1.82348$

$x_1 = \alpha$; $x_2 = \beta$; $x_3 = 2\pi - \beta = 4.4597$; $x_4 = 2\pi - \alpha = 5/3\,\pi$

Soluzioni: $x_1 \le x \le x_2 \vee x_3 \le x \le x_4$

Note di correzione: le soluzioni in coseno vanno espressamente date o mediante la parabola o con riferimento al teorema sullo studio del segno del trinomio di II grado. Come sottolineato a lezione i valori che non corrispondono ad archi noto vanno indicati simbolicamente negli intervalli delle soluzioni e ne va dato a parte il valore approssimato. Quando si deve rappresentare un intervallo in solo seno, coseno o tangente esso va riportato sul cerchio con un unico schema di discussione.

2. $\sin(x - \pi/3) \le 1/\sqrt{2}$ è una disequazione elementare che va riportata all'intervallo $[0,2\pi]$ richiesto dal testo $x \in [0,2\pi] \Rightarrow (x - \pi/3) \in [-\pi/3, 5/3\,\pi]$



Teniamo presente che $\alpha = \arcsin(1/\sqrt{2} = \pi/4$ e tracciamo il cerchio per la soluzione grafica

Le soluzioni vanno ricercate entro l'intervallo $[-\pi/3, 5/3\,\pi]$ e risultano essere definite dagli intervalli in grassetto espressi a partire da $-\pi/3$

$-\pi/3 \le x - \pi/3 \le \pi/4 \vee 3/4\,\pi \le x - \pi/3 \le 5/3\pi$ se ora si passa nella variabile x si ha:

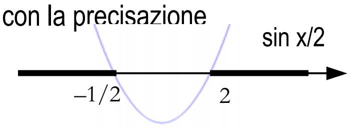
$0 \le x \le 7/12\,\pi \vee 13/12\,\pi \le x \le 2\pi$

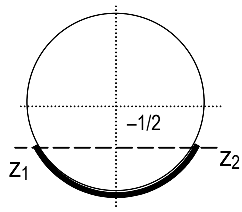
Note di correzione: il campo di studio è stato ignorato da molti oppure è stato citato come un optional del tutto secondario al fine della ricerca delle soluzioni; ne sono seguiti molti errori da parte di chi ha fatto variare $x - \pi/3$ in $[0,2\pi]$ invece che in $[-\pi/3,5/3\,\pi]$. La zona da cui si inizia la ricerca delle soluzioni deve essere ben visibile sul cerchio

3. $\cos x + 3 \sin \frac{x}{2} \le -1$ la disequazione va risolta in x/2 per evitare la comparsa di espressioni irrazionali si ha pertanto applicando le formule di duplicazione.

$1 - 2\sin^2\frac{x}{2} + 3\sin\frac{x}{2} + 1 \le 0 \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2} - 2 \ge 0$

Si tratta di una disequazione analoga a quella proposta nell'esercizio 1 con la precisazione che il periodo di sin x/2 è 4π e pertanto da $x \in [0,4\pi]$ si ha $\frac{x}{2} \in [0,2\pi]$





$\Delta = 9 + 16 = 25 = 5^2$ da cui $\sin\frac{x}{2} = \frac{3\pm5}{4} = -\frac{1}{2};\ 2$

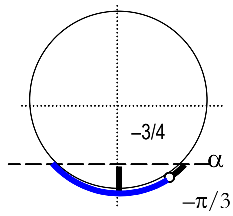
Il caso sin x > 2 non porta a soluzioni e ci occupiamo pertanto solo di $\sin\frac{x}{2} < -\frac{1}{2}$ con campo di studio $z = \frac{x}{2} \in [0,2\pi]$

$\alpha = \arcsin(-\frac{1}{2}) = -\pi/6$ e le soluzioni si hanno per $7/6\,\pi \le \frac{x}{2} \le 11/6\,\pi$ che corrispondono a

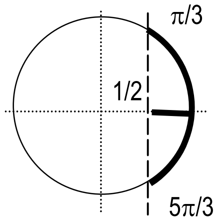
$7/3\,\pi \le x \le 11/3\,\pi$

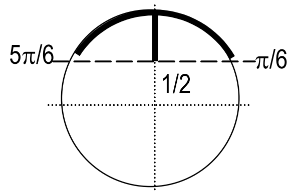
Note di correzione: si osservi che la soluzioni appartengono all'intervallo $[2\pi,4\pi]$

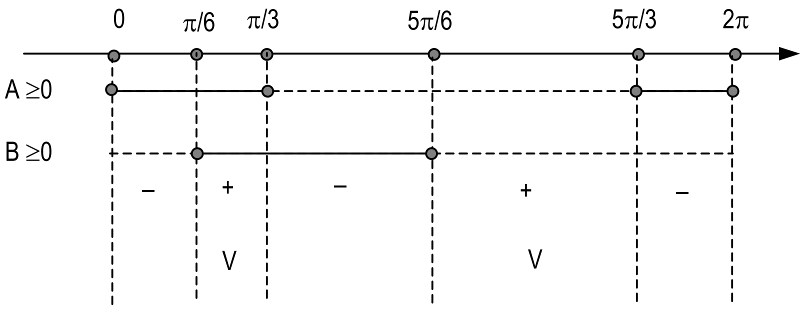
4. $-2\sin x + 2\sqrt{3}\cos x \ge 3$ è una disequazione di tipo lineare che si riduce a forma normale utilizzando la identità secondo cui $a\sin x + b\cos x = \frac{a}{|a|}\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x + \operatorname{artg}\frac{b}{a})$; se si applica la identità la disequazione si riduce a
$-\sqrt{4+12}\,\sin(x + \operatorname{artg}(-\sqrt{3})) = -4\sin(x - \pi/3) \ge 3 \Leftrightarrow \sin(x-\pi/3) \le -3/4$
Il periodo è 2π e lo studio verrà effettuato per $z = x - \pi/3 \in [-\pi/3, 5/3\pi]$
Dopo aver riportato gli intervalli sul cerchio si osserva che siamo costretti a spezzare l'intervallo delle soluzioni come indicato in figura in nero e blu visto che $\alpha = \arcsin(-3/4) \approx -0.84806$ viene dopo $-\pi/3$
$-\pi/3 \le z \le \alpha \vee \pi - \alpha \le z \le 5/3\,\pi$ e passando in x si ha
$0 \le x \le \alpha + \pi/3 \approx 0.1991 \vee 5.0368 \approx 4/3\pi - \alpha \le x \le 2\pi$
Note di correzione: in questo esercizio la mancata esplicitazione del campo di studio della variabile z portava ad errori secchi nella determinazione delle soluzioni; in molti hanno moltiplicato per –1 senza cambiare di verso alla disequazione; in molti non conoscono ancora le funzioni goniometriche inverse; quando si usa una identità bisogna citarla prima di applicarla



5. $4\sin x\cos x + 1 - 2\sin x - 2\cos x \ge 0$ la disequazione è fattorizzabile in maniera semplice tramite raccoglimenti parziali; si ha infatti:
$2\sin x(2\cos x - 1) + (1 - 2\cos x) = (2\cos x - 1)(2\sin x - 1) \ge 0$
$A = 2\cos x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \cos x \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le x \le \pi/3 \vee 5/3\pi \le x \le 2\pi$
$B = 2\sin x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \sin x \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le x \le \pi/3 \vee 5/3\pi \le x \le 2\pi$
Dopo aver individuato le soluzioni sul cerchio si passa allo schema di discussione del segno necessario ad individuare le soluzioni finali





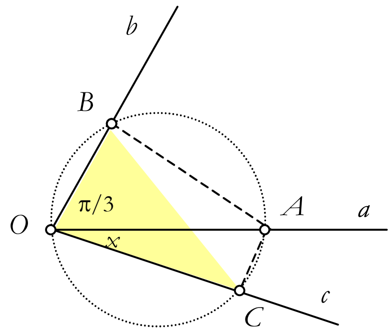


3F PNI 14/3/2003: problema goniometrico con M e m

Sono date tre semirette a, b e c di vertice O con a interna all'angolo bc. Si sa che $a\hat{O}b = \pi/3$ e $a\hat{O}c = x$ con $x \in [0,\pi/2]$. Preso un punto $A \in a$ tale che $\overline{OA} = l$ si indichino con B e C le proiezioni di A su b e su c.

a) Determinare l'area σ del triangolo OBC semplificando la funzione ottenuta.
b) Disegnare le due figure corrispondenti a x = 0 e x = π/2
c) Determinare x | $\sigma = \sigma_{MAX}$
d) Disegnare con il compasso la figura corrispondente al valore trovato (dalla figura deve essere visibile il processo di costruzione seguito o meglio ancora esso va descritto nei suoi aspetti essenziali).
e) Tracciare il diagramma di y = f(x) = σ nell'intervallo corrispondente al problema (basta 1 sola figura da cui si vedano bene gli estremi e il massimo).

funzione	figure limite	massimo	figura soluz.	diagramma		



a) Si costruisce la figura a partire da OA e poiché i due angoli ABO e ACO sono retti ne consegue che i punti B e C si trovano su una circonferenza di diametro OA. L'angolo Aob viene tracciato puntando in O con apertura $l/2$ e determinando il punto B dalla intersezione.

Poiché è richiesta $\sigma_{OBC} = \frac{1}{2}\,\overline{OC}\;\overline{OB}\sin(x + \pi/3)$ dobbiamo calcolare $\overline{OC}$ e $\overline{OB}$ che si trovano dal teorema dei triangoli rettangoli:

$\overline{OC} = l\cos x$ e $\overline{OB} = l\cos\pi/3 = \frac{1}{2}l$

$\sigma_{OBC} = \frac{1}{2}\,\overline{OC}\;\overline{OB}\sin(x + \pi/3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,l^2\cos x\sin(x + \pi/3)$ (formule di somma e sottrazione)

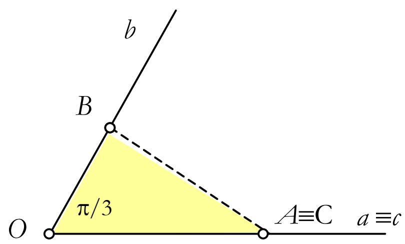
$\sigma_{OBC} = \frac{l^2}{4}\left[\cos x\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\right] = \frac{1}{8}l^2(\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x)$ (abbassamento di grado con formule di duplicazione e bisezione)

$\sigma_{OBC} = \frac{1}{16}l^2[\sin 2x + \sqrt{3}(1 + \cos 2x)] = \frac{1}{16}l^2[\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3}]$ (riduzione a sinusoide traslata con identità della combinazione lineare)

$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = 2 \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a} = \sqrt{3} \quad \varphi = \arctan\sqrt{3} = \pi/3$

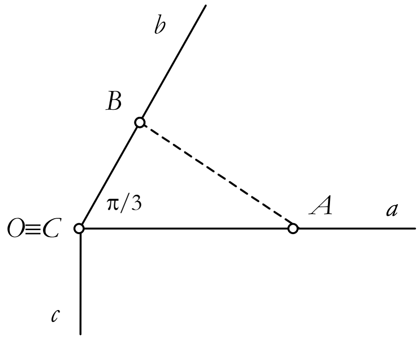
si ha dunque $\sigma_{OBC} = \frac{1}{16}l^2(2\sin(2x + \pi/3) + \sqrt{3})$

Note di correzione: cattiva costruzione della figura, mancata evidenziazione della relazione sull'area per decidere cosa determinare, riferimenti teorici da analfabetismo di ritorno (teorema dei seni invece del teorema sui triangoli rettangoli), mancata conoscenza delle funzioni di π/3, confusione tra seno e coseno; mancata semplificazione della funzione area. Questa era la parte più importante del problema insieme al tracciamento della funzione.



b) Per x = 0 il punto C coincide con il punto A e si ha $\sigma = \frac{1}{2}\,\overline{OB}\;\overline{OA}\sin\pi/3 = \frac{1}{2}\,\overline{OB}\;\overline{OA}\sin\pi/3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}l^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}l^2$, valore che si ottiene anche per sostituzione.

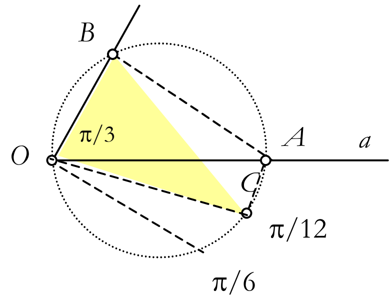
Per x = π/2 il punto C coincide con il punto O e il triangolo degenera in un triangolo di area nulla. Per sostituzione si ha $\sigma_{OBC} = \frac{1}{16}l^2(2\sin(4\pi/3) + \sqrt{3}) = \frac{1}{16}l^2(-\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 0$



Nota di correzione: la discussione del comportamento negli estremi è una ottima occasione per verificare se si sono fatti errori nella determinazione della funzione che costituisce comunque l'obiettivo principale del problema.

c) $\sigma_{OBC} = \sigma_{max} \Leftrightarrow$ è massima la funzione $\sin(2x + \pi/3)$ che nell'intervallo fissato dal problema $2x + \pi/3 \in [\pi/3, 4\pi/3]$ assume il suo valore massimo per $2x + \pi/3 = \pi/2 \Leftrightarrow 2x = \pi/6 \Leftrightarrow x = \pi/12$

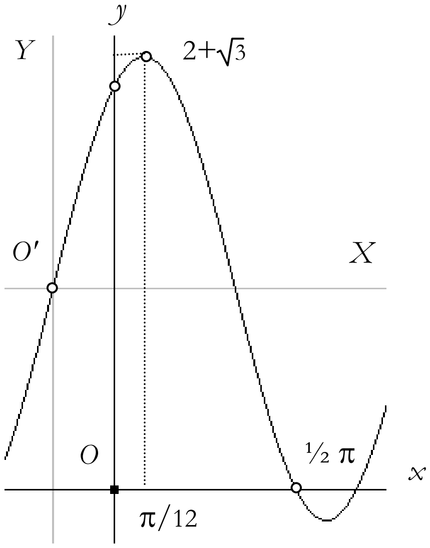
L'area massima vale: $\sigma_{max} = \frac{1}{16}l^2(2 + \sqrt{3})$



Note di correzione: ricordarsi di calcolare oltre al valore di x che corrisponde al massimo anche l'area massima che servirà nella rappresentazione della funzione.

d) La figura corrispondente all'area massima richiede di costruire l'angolo di $x = \pi/12$ che si ottiene per bisezione da $\pi/6$. La costruzione di $\pi/6$ si ottiene puntando il compasso in A con apertura uguale al raggio mentre la bisezione si ottiene costruendo un qualsiasi rombo sull'angolo. Si ottiene così la figura (che ci si limita a tracciare senza riportare la costruzione di $\pi/6$ edi $\pi/12$ che sono state descritte).

e) La funzione richiesta si ottiene osservando che $\sigma_{OBC} = \frac{1}{16} l^2(2 \sin(2x + \pi/3) + \sqrt{3}) = \frac{1}{16} l^2(2 \sin 2(x + \pi/6) + \sqrt{3})$. Possiamo trascurare il fattore di scala $\frac{1}{16} l^2$ e limitarci a rappresentare $y = 2 \sin 2(x + \pi/6) + \sqrt{3}$



Si applica la traslazione $Y = y - \sqrt{3}$ e $X = x + \pi/6$ e si ottiene:
$Y = 2 \sin 2X$.
L'origine O nel sistema traslato XO'Y ha coordinate $x = 0 \Rightarrow X = \pi/6$ $y = 0 \Rightarrow Y = -\sqrt{3}$
La intersezione con l'asse y ha ordinata $2 \sin \pi/3 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
Il massimo ha ordinata $2 + \sqrt{3}$
Nota di correzione: Quei pochi che si sono avvicinati al tracciamento si sono, in genere, dimenticati di mettere in evidenza il fattore 2. Quando si traccia una funzione preceduta da un fattore moltiplicativo non è assolutamente essenziale riportarlo visto che esso può essere assunto come unità di misura.

3F PNI aprile 2003: problema goniometrico assenti mese di marzo

Si consideri un angolo acuto $r\hat{O}s = \alpha$ e si indichino con B un punto di s e con A il terzo vertice di un triangolo isoscele OBA esterno a $r\hat{O}s$, di angolo alla base $A\hat{O}B = x$ e di lato $\overline{OA} = a$.

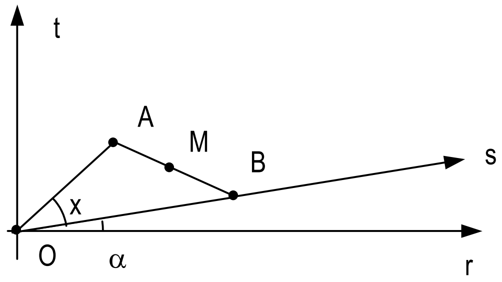
a) Determinare la misura di $\overline{OB}$ usando il teorema delle proiezioni
b) Determinare le coordinate di A e di B nel sistema di riferimento ortonormale rOt (se gli assi si chiamano r e t le coordinate di un generico punto P si indicheranno con r_P e t_P),
c) Determinare le coordinate di M punto medio di AB
d) Discutere se le relazioni trovate siano valide per il caso di α qualsiasi
e) Individuare una strategia risolutiva non basata sulla geometria analitica e determinare in quel caso la misura di $\overline{OM}$ e del seno di $M\hat{O}B$.
f) Sulla base del risultato trovato determinare la misura della proiezione $\overline{MH}$ di M su r
g) Supponendo che sia $\sin \alpha = 1/3$ determinare in forma semplificata (cioè come sinusoide traslata) la funzione che fornisce la misura di $\overline{MH}$ e determinare in particolare il valore massimo di $\overline{MH}$ e l'angolo x in corrispondenza del quale tale valore si determina.

Nota bene: le domanda e) ed f) sono facoltative e vanno affrontate solo al termine del problema visto che corrispondono alla adozione di una strategia risolutiva poco efficace e dispendiosa in termini di calcolo come si potrà controllare anche dalla soluzione scritta.

a) $\overline{OB} = 2a \cos x$	
b) $A \equiv (a \cos(\alpha+x), a \sin(\alpha+x))$ $B \equiv (2a \cos x \cos \alpha, 2a \cos x \sin \alpha)$	
c) $r_M = ½ a[\cos(\alpha+x) + 2 \cos x \cos \alpha] = ½ a[3 \cos x \cos \alpha - \sin x \sin \alpha]$ $t_M = ½ a[\sin(\alpha+x) + 2 \cos x \sin \alpha] = ½ a[3 \cos x \sin \alpha + \sin x \cos \alpha]$	
d) sono valide perché	
g) $\overline{MH} = \frac{\sqrt{17}}{6} \sin(x + \varphi)$ con $\tan \varphi = \frac{3\sqrt{2}}{4}$	
g) $\overline{MH}_{max} = \frac{\sqrt{17}}{6}$ $x' = \pi/2 - \arctan \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 0.815$ rad	
e) $\overline{OM} = ½ a \sqrt{9 - 8 \sin^2 x}$ $\sin M\hat{O}B = \frac{\sin x}{\sqrt{9 - 8 \sin^2 x}}$	
f) $\cos M\hat{O}B = \frac{3 \cos x}{\sqrt{9 - 8 \sin^2 x}}$ da cui $\overline{MH} = \ldots$	

costruisce ordinatamente la figura ?
si esprime ordinatamente e in modo formalmente corretto ?
sa analizzare la figura ?
sa applicare correttamente i teoremi?
sa semplificare le espressioni goniometriche?
sa ridurre e analizzare una combinazione lineare?

a) Si costruisce la figura indicando anche il sistema ortonormale rOt.



$\overline{OB} = 2\overline{OA}_s = 2a \cos x$ per il teorema dei triangoli rettangoli (o delle proiezioni)

Note di correzione: gli angolo, se non viene diversamente specificato si intendono positivi e pertanto vanno disegnati in verso antiorario

Se il problema consiglia di operare con un sistema di riferimento ortonormale rOt converrà disegnare la retta r in orizzontale per non complicarsi inutilmente la vita

b) Le coordinate di A sono (visto che l'angolo del vettore OA con l'asse r è $\alpha + x$) sono:

$A \equiv (a \cos(\alpha+x), a \sin(\alpha+x))$

Le coordinate di B si calcolano tenendo conto del valore di $\overline{OB}$ e sono: $B \equiv (\overline{OB} \cos \alpha, \overline{OB} \sin \alpha) \equiv (2a \cos x \cos \alpha, 2a \cos x \sin \alpha)$

Nota di correzione: in qualunque quadrante si operi le coordinate di un punto si trovano moltiplicando il modulo del raggio vettore per il coseno e il seno dell'angolo formato tra il primo asse e il vettore e rappresentano le coordinate (con segno) del vettore valide qualunque sia la collocazione del vettore nei diversi quadranti.

Alla fine dell'anno sono indegni gli errori nell'uso dei teoremi di base o la mancata conoscenza delle relazioni sulla riduzione al I quadrante. Le due coordinate si indicano con r_A e t_A non con A_r e A_t.

c) Il punto medio del segmento AB ha come coordinate la semisomma delle coordinate degli estremi e dunque:

$$r_M = \frac{r_A + r_B}{2} = ½\, a[\cos(\alpha+x) + 2 \cos x \cos \alpha] = ½\, a[3 \cos x \cos \alpha - \sin x \sin \alpha]$$

$$t_M = \frac{t_A + t_B}{2} = ½\, a[\sin(\alpha+x) + 2 \cos x \sin \alpha] = ½\, a[3 \cos x \sin \alpha + \sin x \cos \alpha]$$

Nota di correzione: la relazione viene dalla identità di Chasles e vale comunque siano posti i punti nel sistema di riferimento

d) Poiché abbiamo usato i teoremi delle proiezioni (in cui compaiono grandezze con segno) e teoremi di geometria analitica validi per ogni disposizione di punti (identità di Chasles) α può avere un valore qualsiasi e le relazioni trovate valgono in ogni caso.

Nota di correzione: poche risposte e insensate

e) $\overline{OM}$ deve essere necessariamente determinato con il teorema del coseno applicato al triangolo AMO del quale conosciamo due lati e l'angolo compreso.

Infatti $A\hat{O}M$ e dunque $O\hat{A}M = \pi - 2x$; applicando il teorema del coseno si ha:

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AM}^2 - 2\overline{OA}\ \overline{AM} \cos O\hat{A}M = a^2 + 1/4\, a^2 - a^2\cos(\pi - 2x) = a^2(5/4 + \cos 2x) \text{ e dunque}$$

$$\overline{OM} = ½\, a\sqrt{5 + 4 \cos 2x} = ½\, a\sqrt{9 - 8 \sin^2 x}$$

L'angolo $M\hat{O}B$ può essere determinato applicando il teorema dei seni al triangolo OMB del quale sono noti l'angolo MBO e i due lati contrapposti MB e MO.

$$\sin M\hat{O}B = \sin M\hat{B}O \frac{\overline{MB}}{\overline{MO}} = \sin x \frac{1}{\sqrt{5 + 4 \cos 2x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{5 + 4(1 - 2\sin^2 x)}} = \frac{\sin x}{\sqrt{9 - 8 \sin^2 x}}$$

Nota di correzione: nessuno è arrivato qui

f) Per trovare $\overline{MH}$ bisogna determinare l'angolo $M\hat{O}H = M\hat{O}B + \alpha$ è dunque necessario determinare anche il coseno di $M\hat{O}B$

$$\cos M\hat{O}B = \sqrt{1 - \sin^2 M\hat{O}B} = \sqrt{\frac{9 - 8\sin^2 x - \sin^2 x}{9 - 8 \sin^2 x}} = \sqrt{\frac{9 - 9\sin^2 x}{9 - 8\sin^2 x}} = \frac{3 \cos x}{\sqrt{9 - 8\sin^2 x}}$$

$$\overline{MH} = \overline{MO} \sin M\hat{O}H = ½\, a\sqrt{9 - 8\sin^2 x}\left[\sin(M\hat{O}B + \alpha)\right] = ½\, a\sqrt{9 - 8\sin^2 x}\left[\sin(M\hat{O}B)\cos\alpha + \cos(M\hat{O}B)\sin\alpha\right] =$$

$$= ½\, a\sqrt{9 - 8\sin^2 x}\left[\frac{\sin x}{\sqrt{9 - 8\sin^2 x}}\cos\alpha + \frac{3\cos x}{\sqrt{9 - 8\sin^2 x}}\sin\alpha\right] = ½\, a[3 \cos x \sin \alpha + \sin x \cos \alpha]$$

cioè lo stesso valore che era già stato determinato in maniera più diretta e conveniente.

Nota di correzione: nessuno è arrivato qui

g) Con i valori che sono stati forniti si ha $\cos \alpha = \sqrt{1 - 1/9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\overline{MH} = ½\, a[3 \cos x \sin \alpha + \sin x \cos \alpha] = ½\, a[3 \cos x \frac{1}{3} + \sin x \frac{2\sqrt{2}}{3}] = 1/6\, a(2\sqrt{2} \sin x + 3 \cos x)$$

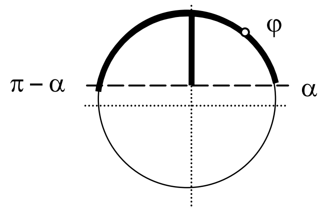
applichiamo ora la identità a sin x + b cos x = $\frac{a}{|a|}\sqrt{a^2 + b^2}$ sin (x + artan $\frac{b}{a}$) e avremo:

$\overline{MH} = \frac{\sqrt{17}}{6}$ a sin (x + φ) con tan φ = $\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Il valore massimo di $\overline{MH}$ vale dunque $\frac{\sqrt{17}}{6}$ a e si ottiene quando x + φ = π/2 e cioè per x = π/2 – arctan $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ≈ 0.815 rad ≈ 46.7°

Nota di correzione: la determinazione di cos α e gli altri elementi vanno determinati in forma esatta; anche assumendo come valide le risposte intermedie ci sono stati errori e imprecisioni anche qui nella semplificazione della funzione.

3F PNI 14/5/2003: compito finale

1. Risolvere per $x\in[0,2\pi]$ la disequazione $2 \sin x + 3 \cos x > 1$; i capisaldi vanno espressi in forma simbolica e i loro valori approssimati devono essere espressi con 4 cifre decimali significative.
   Usando la identità relativa alla combinazione lineare di seni e coseni si ha:
   $2 \sin x + 3 \cos x = \sqrt{4+9} \sin (x + \varphi)$ con $\varphi = \arctan 3/2 \approx 0.9828$
   pertanto la disequazione equivale a $\sin (x + \varphi) > \frac{1}{\sqrt{13}}$ e inoltre $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{13}} \approx 0.2810$
   

   Dobbiamo pertanto risolvere graficamente la disequazione tenendo conto che $x + \varphi \in[\varphi,2\pi+\varphi]$ come in figura
   le soluzioni corrisponderanno dunque (nella variabile $x+\varphi$ rappresentata sul cerchio goniometrico) a:
   $\varphi \le x + \varphi < \pi - \alpha \vee 2\pi+\alpha < x + \varphi \le 2\pi+\varphi$ che riportate alla variabile x producono gli intervalli
   $0\le x\le\pi-(\alpha+\varphi) \vee 2\pi+(\alpha-\varphi)<x\le 2\pi$
   $\pi-(\alpha+\varphi) \approx 1.8778$ mentre $2\pi+(\alpha-\varphi)\approx 5.5814$
   Nota di correzione: quasi tutti non hanno tenuto conto che bisognava spezzare gli intervalli delle soluzioni da φ a $\pi - \alpha$ e da 2π a $2\pi+\varphi$ e così hanno ottenuto soluzioni estranee al campo di studio richiesto. Errori di conto di tutti i generi.
2. Dato il triangolo ABC con a = 2 cm, b = 3 cm e $\cos \beta = ½$ determinare in forma esatta gli altri lati ed angoli (motivare la non accettabilità della seconda soluzione)
   Il coseno determina univocamente il seno (nei triangoli) e si ha: $\sin \beta = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\beta = \pi/3$
   Possiamo così determinare le funzioni di α tramite il teorema dei seni:
   $\sin \alpha = \frac{a}{b} \sin \beta = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ mentre $\cos \alpha = \pm\sqrt{1-\frac{1}{3}} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$
   $\sin \gamma = \sin [\pi - (\alpha+\beta)] = \sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2} \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2} \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx$ / –0.418 s.n.a. \ 0.9958 s.a.
   Dunque $\gamma = \arcsin (\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $c = \sin \gamma \frac{a}{\sin \alpha} = (\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2})\, 2\sqrt{3} = 1/3 + \sqrt{6}$ cm
   Nota di correzione: la soluzione esatta si fa così e non con scorciatoie basate sull'uso della calcolatrice.
3. Determinare in forma esatta il lato del dodecagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r (è richiesta la determinazione del sin 15° a partire dalle funzioni di 30°)
   L'angolo al centro è 360°/12 = 30° pertanto il lato è determinabile tramite il teorema della corda come $l = 2r \sin 15°$
   Il sin 15° si determina con le formule di bisezione: $\sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ e dunque il lato è pari a:
   $l = \sqrt{2-\sqrt{3}}\, r$
   Nota di correzione: ricordarsi del teorema della corda
4. In una circonferenza di raggio r un quadrilatero inscritto ABCD ha angoli al centro di 60°, 90°, 120°,… Determinare l'area e il perimetro del quadrilatero.
   Il quarto angolo vale (per differenza a 360°) ancora 90° e l'area si può determinare come somma delle aree di 4 triangoli isosceli di lato r e angolo al vertice noto:
   $\sigma = ½\, r^2(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1) = r^2(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$
   Il perimetro richiede la determinazione dei lati che si fa con il teorema della corda:
   $2p = 2r(\sin 30 + \sin 45 + \sin 60 + \sin 45) = 2r(½ + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = r(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})$
   Nota di correzione: gli angoli erano nell'ordine dato; è lecito cambiarlo se si osserva che così facendo viene un quadrilatero con la stessa area e lo stesso perimetro.
5. Data la piramide a base quadrata ABCD di lato l e vertice E con BC ⊥ CE, CC ⊥ CE e $\overline{CE} = \sqrt{3}\, l$ determinare tutti gli spigoli e la superficie laterale σ.
   Osserviamo in via preliminare che per ragioni di simmetria BCE ≅ DCE e che ABE ≅ ADE

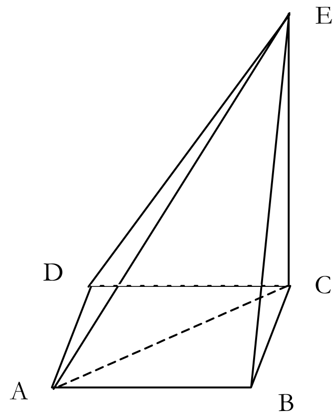
$\overline{BE} = \overline{DE} = \sqrt{1+3}\,l = 2\,l$ per il teorema di Pitagora

Poiché la base ABCD è ortogonale a Ce anche AC ⊥ CE e ciò ci consente di determinare AE.

$\overline{AC} = \sqrt{2}\,l$ e pertanto $\overline{AE} = \sqrt{2+3}\,l = \sqrt{5}\,l$

Tramite il teorema del coseno è possibile determinare cos AEB perché sono noti tutti i lati del triangolo e dunque:

$\cos AEB = \dfrac{AE^2 + BE^2 - AB^2}{2\,AE\,BE} = \dfrac{(4+5-1)l^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{5}\cdot l^2} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ e $\sin AEB = \sqrt{1-\dfrac{4}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$



Possiamo finalmente calcolare la superficie laterale

$\sigma = 2(\sigma_{ABE} + \sigma_{BCE}) = \overline{BC}\ \overline{CE} + \overline{AE}\ \overline{BE}\ \sin AEB = (\sqrt{3} + 2\sqrt{5}\dfrac{1}{\sqrt{5}})\,l^2 = (\sqrt{3}+2)\,l^2$

Nota di correzione: l'angolo ABE = 90° ma la dimostrazione di ciò richiede l'uso del teorema della 3 perpendicolari (che faremo l'anno prossimo) e pertanto per ora siamo costretti a seguire la via indicata nella correzione (più lunga).

4G ordinamento 13/10/99 primi elementi goniometria

$\boxed{1.}$ Tracciare mediante traslazioni ed omotetie il diagramma della funzione $\gamma : y = -2\cos(2x + \pi/2) + 2$ su di un intervallo pari ad un periodo. Determinare le coordinate del punto M di massimo.

$\boxed{2.}$ Dimostrare che vale la seguente identità, precisandone il dominio: $\mathrm{tg}[\arccos(x^2 - 1)] = \dfrac{\sqrt{2x^2 - x^4}}{x^2 - 1}$

$\boxed{3.}$ Prescindendo da problemi di campo di esistenza dimostrare la seguente identità: $\dfrac{1 + \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha}$

$\boxed{4.}$ Completare le seguenti questioni fornendo sul foglio una breve motivazione

$\alpha° = 63° \Rightarrow \alpha =$	$\alpha \in [\pi, 3/2\,\pi] \wedge \sin\alpha = h \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha =$
$\sin x = \frac{a}{b} \Rightarrow$ deve essere $\lvert a\rvert \le \lvert b\rvert$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$	$\mathrm{tg}\,x = \frac{a}{b} \Rightarrow$ a e b possono avere qualsiasi valore $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

Griglia di correzione

$1 \Rightarrow 7$	$2 \Rightarrow 4$	$3 \Rightarrow 3$	$4 \Rightarrow 4$	Totale 18

4G ordinamento 13/11/99 equazioni e disequazioni goniometriche

1. Risolvere per $x \in [0,2\pi]$ la disequazione $8 \cos^2 x - 2 \cos x - 1 \le 0$
2. Risolvere per $x \in [0,2\pi]$ la equazione elementare $\sin (x + \pi/3) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
3. Risolvere per $x \in [0,4\pi]$ la equazione $\cos x + 3 \sin \frac{x}{2} + 1 = 0$
4. Risolvere con il metodo preferito per $x \in [0,2\pi]$ la equazione $-2\sin x + 2\sqrt{3} \cos x \ \frac{x}{2} - 3 = 0$
5. Risolvere per $x \in [0,2\pi]$ la disequazione $4 \sin x \cos x - 2 \sin x - 2 \cos x + 1 \ge 0$

Griglia di correzione

$1 \Rightarrow 3$	$2 \Rightarrow 2$	$3 \Rightarrow 3$	$4 \Rightarrow 4$	$5 \Rightarrow 3$	Totale / 15

4G 11/12/99 Problemi di goniometria

$\boxed{1.}$ Di un triangolo sono assegnati le misure di 2 lati e un angolo; si ha precisamente a = $\frac{5}{2}$; b = 3; cosα = $\frac{2}{3}$; determinare gli altri elementi della figura (di cui è richiesta solo una costruzione approssimativa, cioè senza riga e compasso) dimostrando in particolare che: sin $\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, sin$\gamma = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{\sqrt{5}} \pm 1\right)$ e c = $2 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{2.}$ Maturità sperimentale ordinaria 1988 III quesito modificato

Di un generico triangolo sono noti $\overline{AC} = a$ e $\overline{CB} = 2a$. Indicata con x la misura dell'angolo BCA si costruisca da parte opposta di C rispetto ad AB un triangolo rettangolo BDA tale che $\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. 2.1) Dopo aver fissato il campo di variabilità per x (motivare) scrivere la espressione dell'area dei 2 triangoli CBA e ADB 2.2) Determinare la quantità $\overline{AB}^2$ necessaria al calcolo dell'area di ADB 2.3) Scrivere l'espressione dell'area del quadrilatero ADBC 2.4) Utilizzando l'identità della combinazione lineare di seni e coseni dimostrare che tale area prende valore massimo per $x = \frac{\pi}{2} - \varphi$ dove $\varphi = \text{artg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 2.5) Dopo aver determinato il perimetro del quadrilatero determinare il valore di x per il quale esso vale $\frac{9+\sqrt{3}}{2}a$

Griglia di correzione

1.1 ⇒ 2	1.2 ⇒ 2	1.3 ⇒ 1.5	2.1 ⇒ 3	2.2 ⇒ 1	2.3 ⇒ 1.5	2.4 ⇒ 3	2.5 ⇒ 3

4G 15/1/2000 Goniometria: teoria e semplici applicazioni

$\boxed{1.}$ Data la funzione y = a sin x + b cos x **dimostrare** che essa si può sempre porre nella forma di una sinusoide traslata. A cosa serve l'identità trovata?

$\boxed{3.}$ La tg $\frac{x}{2}$ può essere scritta come funzione razionale fratta di sin x e cos x. Trovare e dimostrare tale relazione precisando dove non ha significato.

$\boxed{5.}$ Dimostrare che l'area del segmento circolare non contenente il centro, individuato da una corda di angolo al centro α in un cerchio di raggio r vale $\frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin\alpha)$. Quanto vale il segmento di tangente tracciata da un estremo della corda sino al punto di incontro con l'asse della corda?

$\boxed{7.}$ In un triangolo di lato c gli angoli adiacenti valgono α e 2α. A quale vincolo deve soddisfare α perché il triangolo esista? Determinare a e c in funzione di cos α. Per il calcolo è necessario determinare sin 3α. A quale vincolo deve essere sottoposto α affinché il terzo angolo sia ottuso? Completare l'esercizio calcolando cos 3α con espressione analoga a quella di sin 3α.

1 ⇒ 3	3 ⇒ 2	5 ⇒ 3	7 ⇒ 5	tot ⇒ 13

$\boxed{2.}$ In analisi matematica si incontra la funzione y = sin(x+Δx) - sin x. Per fattorizzarla serve una identità in grado di trasformare una differenza di seni (sin p - sin q) in un prodotto. Tale identità, nota come formula di *prostaferesi*, si ricava dalle identità della somma e differenza di seni. Ricavarla ed applicarla al caso considerato.

$\boxed{4.}$ Dimostrare l'espressione parametrica razionale di cos x in funzione di $t = \tan\frac{x}{2}$. A cosa servono le formule parametriche nella teoria delle equazioni e cosa si ottiene quando si usano?

$\boxed{6.}$ Un triangolo ha i tre lati che misurano rispettivamente $a = 2u$, $b = 3u$, $c = 4u$. Fissare arbitrariamente l'unità u e costruire la figura con il compasso. Determinare cos γ e sin β. Dal teorema del coseno applicato ad un triangolo ricavare la disuguaglianza triangolare

$\boxed{8.}$ Di un triangolo isoscele ABC di base AC sono noti l'angolo alla base α e il cateto c . Indicati con M e N i punti che trisecano la base si chiede di determinare $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ e sin$A\hat{B}M$ che risulta pari a $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{9 - 8\cos^2\alpha}}$

2 ⇒ 2.5	4 ⇒ 2	6 ⇒ 4	8 ⇒ 4	tot ⇒ 12.5

4G 21/3/2000 problemi tipo esame

Si consideri in una circonferenza di centro O e raggio *r* una corda AB pari al lato del quadrato inscritto. Sull'arco AB non contenente il centro si consideri un generico punto N e si indichi con M il punto di incontro tra la circonferenza e la bisettrice dell'angolo AON. Posto AOM = x si indichi il campo di variabilità di x, si determini la funzione di x corrispondente alla somma delle aree dei triangoli AOM, MON e NOB. Si determini quindi il valore di x per il quale la funzione assume il suo valore massimo. Infine si calcoli la lunghezza della corda MN in corrispondenza del valore di x determinato.

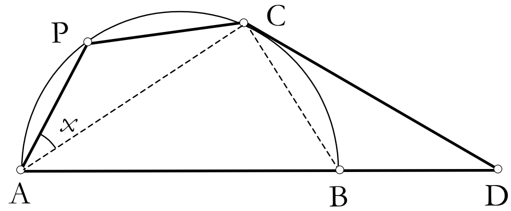
Figura e campo	Funzione	Massimo	Corda	Totale
2	3	3	2	Voto

4G 29/4/2000 problema goniometria guidato

$\boxed{1.}$ Su di una semicirconferenza di diametro AB = 2 r si consideri un punto C tale che $\overline{BC} = r$. Prolungato il diametro AB sino in D con $\overline{BD} = r$ si consideri un generico punto P appartenente all'arco AC e si indichi con x la misura in radianti dell'angolo PAC . Stabilire quanto segue: 1) Il campo di variabilità di x 2) le misure di CD, PC, APC, PA 3) La misura y = f(x) del perimetro del quadrilatero APCD 4) per quale valore di x la funzione prende il suo valore massimo. 5) Motivare la ragione geometrica per la quale in corrispondenza del valore trovato è massima anche l'area

1.1 $\Rightarrow$ 1	1.2 $\Rightarrow$ 3	1.3 e 1.4 $\Rightarrow$ 2	1.5 $\Rightarrow$ 2	• •-	
				• 1/2	

Se $\overline{BC} = r$ per il teorema della corda $C\hat{A}B = \pi/6$ e dunque $x \in [0, \pi/3]$ visto il valore massimo formato quando P≡A (retta tangente)



$C\hat{B}A = \pi/3$ e dunque poiché CBD è isoscele $B\hat{D}C = \pi/6$. Pertanto $\overline{CD} = 2\,\overline{BD}\cos\pi/6 = \sqrt{3}\,r$

$\overline{PC} = 2\,r\sin x$ per il teorema della corda

$A\hat{P}C = 2/3\,\pi$ supplementare di CBA

$P\hat{C}A = \pi - (2/3\,\pi + x) = \pi/3 - x$ e dunque $\overline{PA} = 2r\sin(\pi/3 - x)$ per il teorema della corda

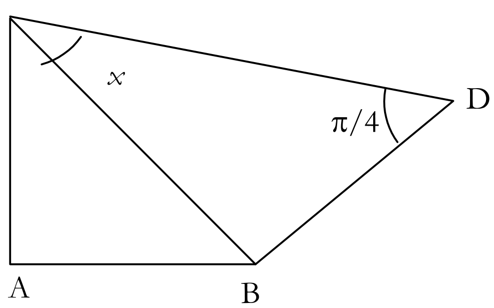
$y = \overline{PA} + \overline{PC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 2r\sin(\pi/3 - x) + 2\,r\sin x + \sqrt{3}\,r + 3r = r(\sqrt{3}\cos x - \sin x + 2\sin x + \sqrt{3} + 3) = r(\sqrt{3}\cos x + \sin x) + r(\sqrt{3} + 3)$

Applicando l'identità della combinazione lineare si ha y = = $2r\sin(x + \pi/3) + r(\sqrt{3} + 3)$ e dunque la funzione è massima quando $x + \pi/3 = \pi/2$ e cioè $x = \pi/6$ valore che appartiene al campo di studio richiesto

L'area si trova come area del triangolo ADC che è costante e quella del triangolo CAP di base costante ed altezza variabile. Tale altezza è massima quando P è punto di contatto con la parallela ad AC e ciò si verifica proprio per $x = \pi/6$

4G 6/5/2000 goniometria (guidato)

$\boxed{1.}$ Il triangolo rettangolo isoscele ABC ha ipotenusa BC. Si costruisca su BC ed esternamente al triangolo ABC un generico triangolo BCD con $C\hat{D}B = \pi/4$. Posto $D\hat{C}B = x$ si risponda alle seguenti richieste: 1.1) trovare il campo di variabilità di x 1.2) analizzare la figura al fine della determinazione dell'area di CABD da indicare come y = f(x). 1.3) esprimere la funzione trovata come funzione sinusoidale traslata e determinare il valore di x che corrisponde all'area massima 1.4) È possibile dare una interessante interpretazione geometrica del risultato trovato. Quale?



Per l'esistenza del triangolo deve essere $D\hat{C}B > 0$ e $D\hat{C}B < \pi - \pi/4 = 3/4\,\pi$ pertanto $D\hat{C}B \in]0, 3/4\,\pi[$

L'area richiesta si determina per somma delle aree di 2 triangoli. Il primo (CAB) è completamente noto; il secondo (CBD) richiede la determinazione di CB, e CD per poter utilizzare il teorema sull'area del generico triangolo.

$\overline{CB} = \sqrt{2}\,a$ (teorema di Pitagora o diagonale del quadrato)

La determinazione di $\overline{CD}$ richiede invece l'uso del teorema dei seni e dunque la determinazione preventiva di $C\hat{B}D = \pi - (\pi/4 + x) = 3/4\,\pi - x$

$\overline{CD} = \dfrac{\overline{CB}}{\sin \pi/4} \sin C\hat{B}D = 2a \sin(3/4\,\pi - x)$

L'area richiesta vale dunque $y = 1/2\, a^2 + 1/2\, \overline{CB}\ \overline{CD} \sin x = 1/2\, a^2 + 1/2 \sqrt{2}\, a\, 2a \sin(3/4\,\pi - x) \sin x = 1/2\, a^2 + \sqrt{2}\, a^2 [1/\sqrt{2} \cos x + 1/\sqrt{2} \sin x) \sin x = 1/2\, a^2 + a^2 [\cos x + \sin x] \sin x = 1/2\, a^2 + a^2 [\cos x \sin x + \sin^2 x]$

Usando le formule di duplicazione e di bisezione si ha: $y = 1/2\, a^2 + a^2 [1/2 \sin 2x + 1/2 (1 - \cos 2x)] = a^2 [1 + 1/2(\sin 2x - \cos 2x)] = a^2 [1 + \sqrt{2}/2 \sin(2x - \pi/4)]$. Tenuto conto che $x \in]0, 3/4\,\pi[$ allora $2x - \pi/4 \in]-\pi/4, 5/4\,\pi[$ e la funzione seno in tale intervallo assume il suo valore massimo a $\pi/2$. Si ha pertanto area massima per $2x - \pi/4 = \pi/2 \Leftrightarrow x = 3/8\,\pi$ che corrisponde al caso del triangolo isoscele

Il punto D percorre un arco di circonferenza di cui BC è la corda (vedi costruzione del luogo geometrico dei punti che vedono un segmento sotto un angolo dato). L'altezza di tale triangolo è variabile e prende il suo valore massimo con il triangolo isoscele. In tal caso si ha $2x + \pi/4 = \pi$ e cioè $x = 3/8\,\pi$

4G 12/10/00 primi elementi goniometria

1. Le seguenti 4 affermazioni benché plausibili sono false. Spiegare per ciascuna di esse in non più di 2 righe il perché (sono ammessi anche controesempi):
a) $\forall x$, $\sin x = \tan x \cdot \cos x$ b) $\forall x$, $\arcsin[\sin x] = x$ c) 1 radiante = 57.295° d) $\forall x, x \in [\pi/2, \pi[\Rightarrow \sin x = \tan x / \sqrt{1 + \tan^2 x}$

2. Spiegare perché il codominio di $y = \arcsin x$ è l'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$

3. Dimostrare la seguente identità: $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

4. a) Tracciare mediante traslazioni il diagramma della funzione $\gamma : y = 2 \sin(x + \pi /4) -1$ nel sistema xOy. Quindi determinare le coordinate b) del punto di massimo M, c) del punto A di intersezione con l'asse y e d) dei due punti B e C di intersezione con l'asse x.

5. Indicato con α l'arco del III quadrante per il quale $\cos \alpha = - 2/5$ costruirlo con righello e compasso e quindi calcolare $\sin \alpha$ e $\tan \alpha$

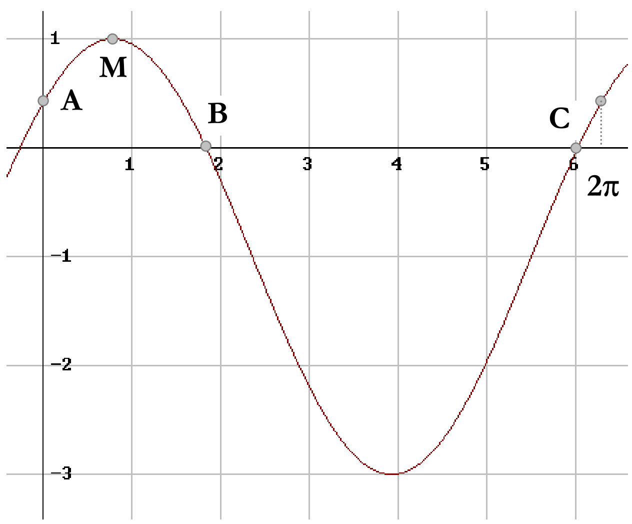
6. Aiutandosi nei ragionamenti con la circonferenza goniometrica calcolare le seguenti espressioni e infine commentare il risultato
a) $\sin(\arcsin 1/2)$= _____ b) $\arcsin(\sin \pi/6)$ = ________ c) $\arcsin(\sin 5/6\, \pi)$= ___________

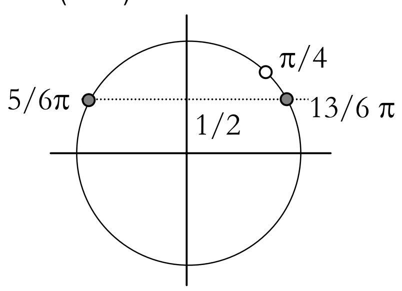
Griglia di correzione

1t ⇒ 5	2t ⇒ 2	3t ⇒ 2	teoria	4a ⇒ 4	4b) ⇒ 1	4c) ⇒ 1	4d ⇒ 3	5 ⇒ 3	6 ⇒ 2	compet

Sintesi della Soluzione

1a) Non vale per $x = \pm \pi/2 + 2k\pi$ 2b) $\arcsin(\sin \pi) = 0$ in virtù della restrizione sul codominio di arcoseno
1c) Il valore indicato è solo approssimato 1 rad = 180° / π che è un numero irrazionale 1d) $\sin x = -\tan x / \sqrt{1 + \tan^2 x}$ il seno è positivo ma la tangente nel II quadrante è negativa
2) Per invertire le funzioni non biunivoche bisogna restringerne il dominio ad una zona di biunivocità; per il seno si è scelto l'intervallo indicato nel quale la funzione è crescente
3) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha + 1 - \sin^2\alpha = \sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha + 1 = \sin^2\alpha(\sin^2\alpha - 1) + \sin^2\alpha \cos^2\alpha + 1 = -\sin^2\alpha \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha + 1 = 1$ c.v.d.
4) si pone $y+1 = Y$ e $x + \pi/4 = X$ il che trasforma la funzione in $Y = 2 \sin X$ nel sistema XO'Y. Tracciata la funzione si determinano le coordinate di O: $x = 0 \Rightarrow X = \pi/4$ e $y = 0 \Rightarrow Y = 1$. Si indica la posizione di O sul diagramma XO'Y e a questo punto si traccia il diagramma definitivo come in figura.
Gli elementi richiesti sono i seguenti:
M: $X_M = \pi/2 \Rightarrow x_M = X + \pi/4 = 9/4\, \pi$ mentre $y_M = 2 \sin(9/4\, \pi + \pi /4) -1 = 2 \sin(5/2\, \pi) - 1 = 2 - 1 = 1$





A: $y_A = f(0) = 2 \sin(\pi/4) - 1 = \sqrt{2} - 1$
{B,C}: $x \in [0,2\pi] \Rightarrow x+\pi/4 \in [\pi/4, 9/4\, \pi]$ mentre y = 0 eq $\sin(x+\pi/4) = 1/2$
Posto $\alpha = \arcsin(1/2) = \pi/6$ e tenuto conto dell'intervallo di ricerca delle soluzioni si ha:
$z_1 = x_1 + \pi/4 = \pi - \alpha = 5/6\, \pi$ da cui: $x_1 = 5/6\, \pi - \pi/4 = 7/12\, \pi \approx 1.8326$
$z_2 = x_2 + \pi/4 = 2\pi + \alpha = 13/6\, \pi$ da cui: $x_2 = 13/6\, \pi - \pi/4 = 23/12\, \pi \approx 6.0214$
5) Tracciare una circonferenza di raggio pari a 5 e individuare il punto di ascissa - 2 con ordinata negativa. A questo punto $\sin \alpha = -\sqrt{1 - 4/25} = -\sqrt{21} / 5$ mentre $\tan \alpha = -\sqrt{21} /2$

6) sin (arc sin 1/2) = sin (π/6) = 1/2 mentre arcsin(sin π/6) = arc sin(1/2) = π/6 ma invece arcsin(sin 5/6 π) = arc sin(1/2) = π/6. Mentre sin[arc sin x] = x non è vero che arcsin [sin x] = x a causa delle solite restrizioni sul dominio della funzione seno.

4 G 18/11/2000 equazioni goniometriche

La determinazione dei valori approssimati va svolta sempre alla quarta cifra decimale. È facoltativo uno degli esercizi tra 2 e 3.

$\boxed{1c}$ Risolvere per $x \in [0,2\pi]$ la equazione $2 \sin x - 2 \cos x + 5/2 = 0$

$\boxed{2c}$ Risolvere per $x \in [0, \pi]$ la equazione $5 \sin^2 x - 3\sqrt{3} \sin x \cos x + 1 = 0$

$\boxed{3c}$ Risolvere per $x \in [0, \pi]$ la equazione $\frac{1 - \cos 2x}{\cos^2 x} + 4 \text{ tg } x = 2\sqrt{3} \text{ tg } x + 4\sqrt{3}$

$\boxed{4c}$ Sapendo che $\alpha = \arcsin(-3/5)$ e che $\beta = \arccos(4/5)$ determinare la relazione intercorrente tra α e β. Quindi utilizzare la relazione trovata per calcolare $\sin(\alpha - 2\beta)$

$\boxed{5c}$ Risolvere in $\mathfrak{R}$ l'equazione $\sin(2x - \pi/4) = -\cos(x + \pi/6)$

$\boxed{6c}$ Usando le formule di bisezione dimostrare che $\text{tg } x/2 = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

<table>
<tr><td rowspan="3">1⇒ 3</td><td rowspan="3">2÷3 ⇒ 3</td><td rowspan="3">4⇒ 3</td><td rowspan="3">5⇒3</td><td rowspan="3">6⇒2</td><td colspan="2">Totale 14</td></tr>
<tr><td>●</td><td>●-</td></tr>
<tr><td>●½</td><td>×+</td></tr>
</table>

19/12/2000 4G disequazioni e problemi

1. Risolvere per $x \in [0,\pi]$ la seguente disequazione $\dfrac{\tan^2 x - \tan x - 2}{6\sin^2 x - 5\sin x + 1} \geq 0$
2. Il triangolo ABC ha $\overline{AB} = c$, $A\hat{C}B = 2/3\ \pi$. Determinare l'angolo $C\hat{A}B$ in modo che il perimetro del triangolo valga $(2/\sqrt{3} + 1)\ c$.
3. In una circonferenza di raggio *r* è inscritto il triangolo ABC contenente il centro. Sapendo che $\overline{AB} = \dfrac{2\,r}{\sqrt{5}}$ e che $\overline{AC} = \dfrac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{5}}$ r determinare gli altri elementi del triangolo.

Zucchi III F marzo 93: problemi a carattere generale

1) Dato un triangolo generico di lati b, c e area $S=\frac{2}{5}bc$ dimostrare che il terzo lato a vale $a=\sqrt{b^2+c^2\pm\frac{6}{5}bc}$ $\Rightarrow$ 2

2) Dimostrare che l'area S di un trapezio di angoli alla base α e β circoscritto ad una circonferenza di raggio R vale $S=2R^2\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)$ $\Rightarrow$ 2

3) Dato un triangolo isoscele di angolo al vertice β si tracci l'altezza AD relativa al lato BC. Sapendo che CD/DB=m/n si dimostri che $\cos\beta = \frac{n}{m+n}$ e che $\cos\gamma = \sqrt{\frac{m}{2(m+n)}}$ $\Rightarrow$2

4) Dimostrare che il raggio del cerchio inscritto in un triangolo rettangolo di ipotenusa c e angolo α vale $r = \frac{c\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$ $\Rightarrow$2

5) Dato un generico triangolo di angoli α, β,γ dimostrare che se si tracciano da γ la mediana e l'altezza, l'angolo φ tra di esse è tale che $\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}-\frac{1}{\mathrm{tg}\beta}\right)$ $\Rightarrow$ 2.5

Zucchi dicembre 93 III F

1) Calcolare la seguente espressione evidenziando il processo seguito: Y = sen(artg3/4)
2) Esplicitare la funzione y=f(x) sapendo che artgy = arcsin$\sqrt{1-x^2}$
3) Risolvere la seguente disequazione in $[0,\pi]$: $tg^3x + tg^2x - 3tgx - 3 \geq 0$
4) Dimostrare la seguente identità e precisarne il dominio: $\sin(\arccos a - \arccos b) = b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2}$
5) Ricordando la formula di bisezione tracciare il diagramma di $y = \sin^2 x$
6) Dimostrare che per gli angoli di un triangolo vale: $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = -1 + 4\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\sin(\gamma/2)$

1) Calcolare la seguente espressione evidenziando il processo seguito: Y = tg(arcsin 8/17)
2) Esplicitare la funzione y=f(x) sapendo che arcosy = artg$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
3)Risolvere la seguente disequazione in $[0,2\pi]$: $1 - \cos x \geq tgx - \sin x$
4) Dimostrare la seguente identità e precisarne il dominio: $\cos(\arcsin a - \arcsin b) = \sqrt{1-a^2}\ \sqrt{1-b^2} + ab$
5)Ricordando la formula di bisezione tracciare il diagramma di $y = \cos^2 x$
6) Dimostrare che per gli angoli di un triangolo vale: $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\cos(\gamma/2)$

Zucchi dicembre 93 III F

1) Senza far uso del goniometro disegnare gli angoli α e β $tg\alpha=-2/3$ e $\sin\beta=4/5$
2) Ricorrendo a semplici proprietà di seno e coseno determinare la relazione tra x e y e riconoscere il tipo di curva da essa rappresentata: $\text{sen}t + \cos t = x \wedge \text{sen}t\cdot\cos t = y$
3) Dimostrare che in un triangolo vale la seguente identità: $\text{sen}\alpha = -\cos[(3\alpha+\beta+\gamma)/2]$ dove α, β e γ rappresentano gli angoli.
4) Dimostrare la seguente identità $\arcsin\sqrt{1-a^2} = \text{artg}\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{|a|}$
5) Dimostrare la seguente identità $\cos^2\alpha - \text{sen}^2(\pi/4+\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4 - 2\alpha)$
6) Risolvere per $x\in[0,2\pi]$ la seguente disequazione: $1-\sin x \geq \sin^2(\pi/4 - x/2)$

1) Senza far uso del goniometro disegnare gli angoli α e β $tg\alpha=3/5$ e $\cos\beta=-2/3$
2) Ricorrendo a semplici proprietà di seno e coseno determinare la relazione tra x e y e riconoscere il tipo di curva da essa rappresentata: $x = 3\text{sen}t \wedge y = 4\cos t$
2) Esplicitare la funzione $y=f(x)$ sapendo che $\arccos y=\text{artg}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3) Dimostrare che in un triangolo vale la seguente identità: $\text{sen}\alpha = -\text{sen}(2\alpha+\beta+\gamma)$ dove α, β e γ rappresentano gli angoli.
4) Dimostrare la seguente identità $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \arccos\dfrac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}$
5) Dimostrare la seguente identità $(\text{sen}\alpha+\text{sen}\beta)^2 + (\cos\alpha+\cos\beta)^2 = 4\cos^2[(\alpha-\beta)/2]$
6) Risolvere per $x\in[0,2\pi]$ la seguente disequazione: $2\,\text{sen}x\cdot\cos(x/2) \geq \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

Zucchi III F Novembre 94: funzioni goniometriche e disequazioni

1) Determinare le funzioni goniometriche di $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ sapendo che $\cos\alpha = -4/5$ (punti 0.8)

2) Determinare in quali intervalli è verificata la seguente uguaglianza: $\sin x \sqrt{\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x}} = \sqrt{2}$ (punti 1)

3) Esprimere in funzione di $\sin \alpha$ e quindi in funzione di $\mathrm{tg}\, \alpha$ la seguente funzione: $y = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ (punti 1.2)

4) Determinare $\cos x$ sapendo che $\sin (x - \pi/2) + \sin \pi/2 = \sin (x + \pi/2)$ (punti 1)

5) Spiegare perché tra gli angoli α, β e γ di un triangolo vale la relazione $\sin \alpha = -\sin(2\alpha+\beta+\gamma)$ (punti 1)

6) Risolvere in $[0,2\pi]$ la seguente equazione: $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x$ (punti 1.5)

7) Risolvere in $[0,2\pi]$ la seguente equazione: $\sin (x/2 - \pi/4) = 1/2$ (punti 1)

8) Esprimere $y = \arcsin x = f(\mathrm{arctg}\, x)$ (punti 2)

Zucchi III F dicembre 94: funzioni goniometriche

1) Si consideri la funzione γ: $y = f(x) = \text{tg } x$. a) Darne la definizione dopo aver precisato il significato della variabile x b) Specificare le caratteristiche del diagramma (disegnandolo e precisandone gli elementi più significativi) c) Illustrane il significato geometrico sul cerchio goniometrico. d) Tracciare in scala 1:1 il diagramma di sin x e di tg x nell'intorno dell'origine precisandone le particolarità. e) definire la funzione inversa di $y = \text{tg } x$

2) Determinare $\cos(\alpha - \beta)$ e $\cos(\alpha + \beta)$

3) Dimostrare che per $\alpha \in]0,\pi/2[$ e $\beta \in]0,\pi/2[$ si ha sempre $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$

4) Dimostrare che $2\cos^2 (\tfrac{1}{2}\arccos a) = 1 + a$

5) Dimostrare che $\sin (\arccos a - \arccos b) = b\sqrt{1 - a^2} - a\sqrt{1 - b^2}$

Zucchi III F dicembre 94: funzioni goniometriche e disequazioni

1) Risolvere in $[0,2\pi]$ la disequazione $6\cos^2 x - \cos x - 1 \geq 0$

2) Calcolare $\sin\frac{\alpha}{2}$ e $\cos\frac{\alpha}{2}$ sapendo che $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ e che $\alpha \in]\pi , \frac{3}{2}\pi [$

3) Dimostrare che $2 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin \alpha (\sin \alpha + \sin \beta) + \cos \alpha (\cos \alpha + \cos \beta)$

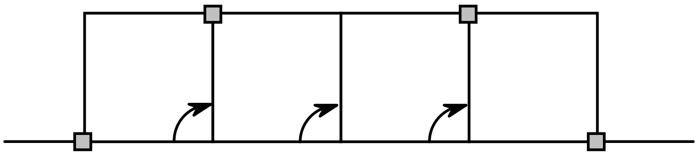
4) Semplificare le seguenti espressioni: a) $\sqrt{\frac{1 - \cos 4\alpha}{2}}$ b) $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha/6}{1 - \cos \alpha/6}}$ c) $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos \alpha$

5) Semplificare, trasformandola al I grado, la seguente espressione (si può evitare di sviluppare):
$y = \sin(\frac{\pi}{3} - x)\cdot \sin(\frac{\pi}{3} + x)$

Zucchi III A Ottobre 95 funzioni goniometriche

1	Determinare le funzioni goniometriche di $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sapendo che sen $\alpha = -\frac{3}{5}$	$\Rightarrow$ 1
2	Determinare in $[0,2\pi]$ quando vale la seguente identità: $\sin x \sqrt{\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x}} = \sqrt{2}$	$\Rightarrow$ 1.5
3	Dimostrare la seguente identità: $\frac{2}{\tan \alpha + \cot \alpha} + \tan \alpha \cot \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$	$\Rightarrow$ 1
4	Sapendo che $\sin \alpha = \frac{a}{b}$ con $0 < a < b$ determinare $\cos \alpha$ e $\tan \alpha$ per $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$	$\Rightarrow$ 1.5
5	Tracciare su un periodo il diagramma della funzione $y = 1 + 2 \sin(x + \frac{\pi}{4})$ indicando le coordinate del punto di massimo e di minimo	$\Rightarrow$ 3
6	Applicando la definizione di funzione inversa dimostrare che: $\arcsin \sqrt{1 - a^2} = \arctan \frac{\sqrt{1 - a^2}}{\|a\|}$	$\Rightarrow$ 3

Zucchi III A Novembre 95 funzioni goniometriche

1	Risolvere per $x \in [0\ ,\ \pi]$ la seguente equazione:	$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$
2	Si consideri la seguente funzione $\gamma : y = -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$. Tracciarne l'andamento per $x \in [0\ ,\ \pi]$ mediante traslazione. Sul diagramma indicare il punto di massimo e le intersezioni con gli assi (quelle con l'asse x sono le soluzioni dell'esercizio1).	
3	Risolvere per $x \in [0\ ,\ 2\pi]$ la seguente disequazione, dopo averla fattorizzata:	$6 \sin x \cos x - 3\sqrt{3} \sin x - 2 \cos x + \sqrt{3} \geq 0$
4	Risolvere per $x \in [0\ ,\ \pi]$ la seguente disequazione di II grado:	$\mathrm{tg}2x - \mathrm{tg}x - 2 \leq 0$
5	Un quadrato di lato unitario ruota appoggiandosi allo spigolo basso di destra come in figura. Si disegni la traiettoria percorsa dal quadratino scuro e si stabilisca quanto è lunga.	

Zucchi III A dicembre 95: problemi a carattere generale

1	Di un triangolo si conoscono i seguenti elementi: a = 4 cm, b= 5 cm, tg $\alpha = 3/5$ Disegnare la figura in scala 1 = 1cm. Determinare sin β e i valori approssimati di β_1 e β_2 espressi in °. Infine determinare graficamente le corrispondenti lunghezze approssimate di c_1 e c_2 con 2 cifre significative.	$\sin\beta = \dfrac{15}{4\sqrt{34}}$ $\Rightarrow 4$

2	In una circonferenza di raggio R si consideri un settore circolare di angolo al centro 2α. All'interno del settore viene disegnata una circonferenza tangente ai 2 lati e all'arco del settore. Dimostrare che il raggio r di tale circonferenza vale:	$r = R\dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ $\Rightarrow 4$

3	Dato il generico triangolo di cui sono noti α, β ($\alpha>\beta$) e l'altezza h relativa al lato c determinare le lunghezze dei tre lati a, b, c. Infine determinare tg φ dove φ è l'angolo formato tra l'altezza e la corrispondente mediana.	$\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\beta} - \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)$ $\Rightarrow 5$

4	Si consideri un trapezio di angoli alla base α e β circoscritto ad una circonferenza di raggio r. Si determini l'area σ del trapezio in funzione di α, β e r. Infine supponendo che sia $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ e $\sigma = \dfrac{28}{3}r^2$ si determini sin β e si costruisca la figura corrispondente agli angoli dati.	$\sigma = 2r^2\left(\dfrac{1}{\sin\beta} + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$ $\Rightarrow 6$

5	In un generico triangolo sono noti i lati a e b e la bisettrice t relativa all'angolo 2γ tra a e b. Trovare cos γ. Per la dimostrazione utilizzare uno dei seguenti tre percorsi: calcolo delle aree dei triangoli con uso della identità $\sin 2\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma$; teorema del coseno con uso del teorema della bisettrice; detto D il punto d'incontro tra il prolungamento di AC e la parallela a t per B ragionare sul triangolo ABD e sulle similitudini evidenti.	$\cos\gamma = \dfrac{t(a+b)}{2ab}$ $\Rightarrow 5$ Chi le fa tutte e tre prende 10 nel compito.

Zucchi III A gennaio 96 problemi a carattere generale

1	Dimostrare che tra gli elementi di un generico triangolo sussiste la relazione: $(b + c + a)(b + c - a) = 2bc\,(1 + \cos\alpha)$	$\Rightarrow$ 2

2	I lati obliqui AB = c e CD = a di un trapezio di base maggiore AC sono tra loro perpendicolari. Indicati con α e γ gli angoli BAC e DCA stabilire quale relazione li lega; determinare $\tan\alpha = f(a,c)$ e quindi trovare l'altezza h. Quale elemento manca per conoscere completamente il trapezio?	$\tan\alpha = a/c$ $h = \dfrac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ $\Rightarrow$ 3

3	Dato un segmento circolare di arco AB = α e raggio r determinarne l'area σ, la corda $\overline{AB}$ e la freccia f cioè la distanza massima tra arco e corda.	$\sigma = \frac{1}{2} r^2(\alpha - \sin\alpha)$ $f = r(1 - \cos \frac{1}{2}\alpha)$ $\Rightarrow$ 3

4	Dato un generico triangolo ABC si indichi con G l'ortocentro determinato dalle due altezze CH e AK. Si calcoli $x = \overline{GH}$. Quindi si determini il rapporto $\eta = \overline{CG} / \overline{GH}$. Per analogia si scriva il rapporto $\lambda = \overline{AG} / \overline{GK}$	$\overline{GH} = b \cos\alpha / \tan\beta$ $\eta = \tan\alpha \tan\beta - 1$ $\Rightarrow$ 5

5	Si consideri il segmento PQ di lunghezza 2a e sia O il suo punto medio. Per O si tracci una semiretta r e sia $r\hat{O}P = x$ con $x \in [0, \pi/2]$. Indicata con M la proiezione di P su r si determinino i valori di x per i quali si ha: $a\,\overline{PM} + \overline{QM}^{\,2} = \dfrac{261}{64} a^2$	$\sin x = 5/24 \vee 1/8$ $\Rightarrow$ 5

Zucchi III A febbraio 96: problemi, equazioni e disequazioni

1	Data la funzione γ: $y = f(x) = \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x + 1$ tracciarne il diagramma nell'intervallo $[0, 2\pi]$ specificando le coordinate del punto M di massimo e dei punti $\{A, B\} = \gamma \cap \vec{x}$ e $\{C\} = \gamma \cap \vec{y}$	⇒ 5

2	Data l'equazione $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = 1 - 2\sin^2 x$ fattorizzarla e dopo averla fattorizzata indicare la modalità di soluzione senza eseguire i conti.	⇒ 3

3	Si consideri il triangolo ABC e sia il punto di intersezione della bisettrice di β con il lato AC. Sapendo che $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, che $\beta = 2\alpha$ e che $\overline{BD} = 2$ trovare l'area σ del triangolo ABD e sin γ	⇒ 4 $\sigma = \frac{8\sqrt{2}}{9}$ $\sin\gamma = \frac{23}{27}$

4	Sia ABC un triangolo isoscele di base $\overline{AB} = 2a$ e di apertura $A\hat{C}B = 2\alpha$. Determinare il raggio r del cerchio inscritto. Quindi determinare l'area σ della porzione di triangolo compresa tra il vertice C e l'arco di circonferenza delimitato dai punti di tangenza ai lati AC e BC	⇒ 4 $r = a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha + 1}$ $\sigma = r^2(\text{cotg}\,\alpha + \alpha - \pi/2)$

5	Risolvere per $x \in [0, 4\pi]$ la disequazione: $\cos x - \cos\frac{x}{2} < 0$	⇒ 3

Zucchi III A dicembre 96 equazioni e funzioni

1) Semplificare la funzione: $f(a,b,\alpha) = \dfrac{(a+b)\ \text{sen}\ \alpha\ (a-b)\cos(90-\alpha) + 2b^2\ \text{sen}\ \alpha + 2ab\ \text{sen}(180+\alpha)}{a\cos(90-\alpha) - b\ \text{sen}(180-\alpha)}$

2) Esprimere in funzione di cos α e semplificare la funzione $f(\alpha) = \dfrac{2}{\text{sen}^2\alpha} - \dfrac{1}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1}{\cos^3\alpha - 1}$

3) Risolvere per $x \in [0,2\pi]$ l'equazione $(4\ \text{sen}\ x + 3)(\sqrt{3}\cos x + 2) = 0$

4) Risolvere per $x \in [0,\pi]$ l'equazione $\text{sen}(2x - \frac{\pi}{3}) = -\dfrac{1}{2}$

5) Risolvere per $x \in [0,\pi]$ l'equazione $\text{tg}^2 x - 4 = 0$

Zucchi III A gennaio 97: funzioni e identità

1	La equazione sen x = k con k > 1 non ha soluzione perché	⇒ 1
2	Si consideri l'uguaglianza vera sen α = k con $\alpha \in]\ \pi, \frac{3}{2}\pi\ [$. Prestando attenzione ai segni determinare cos α, tan α, arc sen k	⇒ 3
3	Assunta per nota l'identità che fornisce cos $(\alpha - \beta)$ determinare direttamente sen $(\alpha + \beta) = \cos[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)] = \dots$	⇒ 3
4	Assunta per nota l'identità che fornisce cos $(\alpha - \beta)$ dimostrare che: $\cos(\text{arc cos } \alpha - \text{arc cos } b) = ab + \sqrt{1 - a^2}\sqrt{1 - b^2}$. Porre α = arc cos a … e non dimenticarsi dei segni.	⇒ 3
5	Note le relazioni che forniscono sen$(\alpha - \beta)$ e cos$(\alpha - \beta)$ dimostrare che: $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$	⇒ 3
6	Inventare una strategia che consenta di calcolare in forma esatta sen α per l'angolo $\alpha = 39°$ (non è richiesto il calcolo).	⇒ 3

Zucchi III A ottobre 97 funzioni goniometriche

1	Determinare le funzioni goniometriche di $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ sapendo che tan $\alpha = 2$	$\Rightarrow 1$
2	Senza risolvere le disequazioni spiegare perché $\forall a$ si ha $-1 < \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} < 1$ quindi posto $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ con α nel II quadrante trovare $\cos\alpha$ e dire in quel caso quali valori può prendere a.	$\Rightarrow 3$
3	Prescindendo da problemi di campo di esistenza dimostrare la seguente identità: $\sin^2\alpha\ \text{tg}\alpha + \cos^2\alpha\ \text{cotg}\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha$	$\Rightarrow 2$
4	Calcolare $\text{tg}(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5})$	$\Rightarrow 1$
5	Tracciare su un periodo il diagramma della funzione $y = \frac{3}{2} - 2\sin(x - \frac{\pi}{4})$ indicando le coordinate del punto di massimo e di minimo	$\Rightarrow 4$
6	Usare i risultati dell'esercizio precedente per tracciare il diagramma della funzione $y = -\left\|-\frac{3}{2} + 2\sin(x - \frac{\pi}{4})\right\|$	$\Rightarrow 2$

Zucchi III A equazioni e funzioni dicembre 97

$\boxed{1.}$ Risolvere per $x \in [0,\pi]$ la equazione $tg^2x + tg\, x - 2 = 0$

$\boxed{2.}$ Dimostrare la formula parametrica del coseno precisando, nell'intervallo $[0,2\pi]$ per quali valori tale identità non vale.

$\boxed{3.}$ Prescindendo da problemi di campo di esistenza dimostrare la seguente identità: $\dfrac{2 \sin\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2 \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha}{(1 + \cos\frac{\alpha}{2})^2}$

$\boxed{4.}$ Studiare nell'intervallo $[0,2\pi]$ la funzione $\gamma : y = 3 \sin(x) - 4 \cos(x) + 2$ determinandone il diagramma, i punti di massimo e minimo A e B e le intersezioni con gli assi C, D, E

Zucchi III A equazioni e funzioni gennaio 98 (recupero o rifacimento)

$1 \Rightarrow 2$	$2 \Rightarrow 4$	$3 \Rightarrow 2$	$4 \Rightarrow 5 + 1 + 0.5 + 3$	totale $\Rightarrow 17.5$

1. Esprimere $\sin(3x) = f(\sin x, \cos x)$
2. Risolvere per $x \in [0,2\pi]$ la equazione $\sin 3x = 4 \sin x \cos 2x$
3. Calcolare $\cos[3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos(-\frac{1}{2})]$
4. Studiare nell'intervallo $[0,2\pi]$ la funzione $\gamma : y = -\sqrt{2} \sin(x) + \sqrt{2} \cos(x) + \sqrt{2}$ determinandone il diagramma, i punti di massimo e minimo A e B e le intersezioni con gli assi C, D, E

Zucchi III A equazioni e funzioni gennaio 98 (recupero o rifacimento)

$1 \Rightarrow 2$	$2 \Rightarrow 2$	$3 \Rightarrow 3$	$4 \Rightarrow 4 + 1 + 0.5 + 3$	totale $\Rightarrow 15.5$

1. Esprimere $\cos(3x) = f(\cos x)$

2. Ricavare la formula di prostaferesi $\cos p - \cos q$

3. Risolvere, con un metodo a piacere, l'equazione $\sqrt{3}\,\sin^2(x) + 4\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\,\cos^2(x) = 0$ per $x \in [0, \pi]$

4. Studiare nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la funzione $\gamma : y = -\sin(x) + \sqrt{3}\,\cos(x) + \sqrt{2}$ determinandone il diagramma, i punti di massimo e minimo A e B e la intersezione C con l'asse y e le intersezioni D, E con l'asse x

Zucchi III A problemi aprile 98

Svolgere l'esercizio 3 e almeno uno dei rimanenti esercizi. Evitare di saltare da un esercizio all'altro.

1) Dato il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ di angoli α, β e γ e i cui lati misurano *a, b, c* sia M il punto medio di AB. Applicando il teorema dei seni ai due triangoli $\overset{\Delta}{ACM}$ e $\overset{\Delta}{CMB}$ dimostrare che [sin $A\hat{C}M$] / [sin $B\hat{C}M$] = *a* / *b* (⇒ 3 *prestare attenzione al fatto che nel rapporto si elidono numerose grandezze ignote*).

2) Dato il triangolo rettangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ rettangolo in A di cui sono noti l'angolo β e la misura *a* del lato BC sia D il punto di incontro della bisettrice di β con AC. Operando con i triangoli rettangoli dimostrare che $\overline{AD} = a \cos \beta \tan(\frac{1}{2}\beta)$. Quindi, senza tener conto del calcolo precedente, ed operando direttamente sul triangolo $\overset{\Delta}{BDC}$, dimostrare che $\overline{DC} = a \tan(\frac{1}{2}\beta)$. (⇒ 2 + 3 *trattandosi di un triangolo rettangolo gli angoli sono tutti noti*).

3) Dato il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ di angoli α, β e γ e i cui lati misurano *a, b, c* si sa che: $a = 7$ *cm*, $b = 9$ *cm* e $\alpha = 40°$. Costruire la figura con riga e compasso. Determinare quindi le misure del terzo lato e del terzo angolo. Esprimere i risultati con 4 cifre significative. (⇒ 2 + 3)

4) Dato il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ di angoli α, β e γ e i cui lati misurano *a, b, c* si conoscono *a,* β e γ. Determinare, nell'ordine, i seguenti elementi: sin α, *b*, l'altezza h_a relativa al lato BC, l'area σ. Sia per l'altezza, sia per l'area esprimere il risultato in tangente. (⇒ 1 + 1 + 2 + 1)

Zucchi III A problemi aprile 98

Svolgere l'esercizio 4 e almeno uno dei rimanenti esercizi. Evitare di saltare da un esercizio all'altro. Gli esercizi hanno all'incirca lo stesso grado di difficoltà.

1) Dato il triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base AB con $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = \overline{BC} = b$ dimostrare che 1.1.) $\cos\alpha = \frac{c}{2b}$ 1.2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{4b^2 - c^2}}{2b}$ 1.3.) $\cos\gamma = \frac{2b^2 - c^2}{2b^2}$ 1.4.) Il raggio R del cerchio circoscritto $= \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - c^2}}$

2) Dato il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ di angoli $C\hat{A}B = \alpha$, $C\hat{B}A = 2\alpha$ e di lato $\overline{CB} = a$ dimostrare che 2.1.) $b = 2a\cos\alpha$ 2.2.) $c = a(4\cos^2\alpha - 1)$ 2.3.) Supposto che sia $\sin\alpha = 3/5$ spiegare perché è accettabile solo l'angolo α acuto e calcolare i corrispondenti valori di b e di c.

3) Dato il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ rettangolo in C si conoscono l'ipotenusa c e un angolo acuto α. 3.1.) Dimostrare che, indicati con σ l'area e con p il semiperimetro, il raggio della circonferenza inscritta di un generico triangolo è sempre $r = \frac{\sigma}{p}$ 3.2.) Utilizzando la relazione precedente dimostrare che, per il triangolo dato, $r = c\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}$

4) Nel generico triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ sono dati: $c = \overline{AB} = 4$ cm, $a = \overline{BC} = 3$ cm e $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 4.1.) Costruire in scala 1:1 la figura. 4.2.) Determinare in forma esatta $\sin\gamma$ e i due valori di $\cos\gamma$. 4.3.) Determinare in forma esatta i due valori di $\sin\beta$ e i due corrispondenti valori di b_1 e b_2 (risposta finale $2\sqrt{3}\pm\sqrt{5}$)

Zucchi III A equazioni dicembre 98

1. Risolvere per $x \in [0,2\pi]$ l'equazione goniometrica $tg\ x = k$ con $k < 0$ indicando l'espressione simbolica delle due soluzioni.

2. Risolvere per $x \in [0,2\pi]$ l'equazione goniometrica $3 \cos x + 2 = 0$. Determinare le due soluzioni con una precisione alla quarta cifra significativa.

3. Data l'equazione $a \sin x + b \cos x + c = 0$ illustrare sinteticamente i 3 possibili metodi di soluzione (per ognuno dei 3 metodi indicare le sostituzioni od equivalenze utilizzate ed a cosa ci si riduca).

4. Risolvere, attraverso l'uso delle formule parametriche, l'equazione $2 \sin x - \cos x = 1$ per $x \in [0,2\pi]$. Indicare le soluzioni approssimate alla quarta cifra significativa. Spiegare quindi cosa accade in questo tipo di equazioni quando $x = \pi$ è soluzione.

5. Usando le formule di somma e sottrazione e quelle di duplicazione determinare $\cos 3x = f(\cos x)$. Utilizzare quindi il risultato trovato per risolvere in forma esatta l'equazione $\cos 3x = 4 \cos^2 x - 3$ per $x \in [0,2\pi]$.

1 ⇒ 3		2 ⇒ 1.5		3 ⇒ 3.5		4 ⇒ 3		5 ⇒ 4 + 3		Totale ⇒ 18	

Zucchi III A problemi maggio 99

1) È assegnato il triangolo isoscele $\overset{\Delta}{ABC}$ di base $\overline{BC} = a$ e angolo al vertice $B\hat{A}C = \alpha$. Dal vertice B si traccia l'angolo $C\hat{B}D = \alpha$ (il punto D appartiene ad AC). Si traccia quindi l'angolo $B\hat{D}E = 2\alpha$ (il punto E appartiene ad AB). Dopo avere identificato le misure dei diversi angoli necessari determinare la lunghezza del segmento ED e l'area del triangolo $\overset{\Delta}{EDB}$

Risposte: $\overline{ED} = a \cos\frac{3\alpha}{2} / \cos\frac{\alpha}{2}$ $\sigma_{EDB} = 2\, a^2 \cos\frac{3\alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2} \cos\alpha$

2) Di un triangolo qualsiasi sono assegnate le misure dei lati a e b e l'angolo β. Costruire la figura per il caso in cui sia $b < a$ e $b > a \sin\beta$. Spiegare perché in questo caso il problema ammette due soluzioni. Determinare quindi $\sin\alpha$ e i due corrispondenti valori dell'angolo α (α_1 e α_2). Scrivere i due valori di $\cos\alpha_1$ e $\cos\alpha_2$. Infine trovare l'espressione di $\sin\gamma$ e spiegare come si trovano i due valori di c_1 e c_2.

6/10/2003 4F PNI prova di ingresso

1) Calcolare arcsin($\sin\frac{7}{4}\pi$)

   a) $\frac{7}{4}\pi$ b) non esiste c) $-\frac{1}{4}\pi$ d) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) Sapendo che tan $\alpha = -2/3$ e che $\alpha \in [\pi/2,\pi]$ cos α vale

   a) 0.832 b) –0.832 c) $-\frac{3}{\sqrt{13}}$ d) cos(arc tan ($-\frac{2}{3}$)

3) La disequazione $\dfrac{\sin x+2}{\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}} > 0$ risolta in $[0,2\pi]$

   a) non ha sol. b) è sempre vera c) ha sol. $x \in]3/4\ \pi, 7/4\pi[$ d) è vera per $x \in [5/6\ \pi, \pi]$

4) Per la funzione $y = f(x) = 2 \sin x - 3 \cos x$ si ha:

   a) $f(0) = -1$ b) un codominio positivo c) un massimo relativo per $x = \pi/2 - \text{artan}(3/2)$ d) una massimo relativo per $\pi/2 + \text{artan}(3/2)$

5) cos 4x vale

   a) $4\cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$ b) $(2\cos^2 x - 1)^2$ c) non ammette una formula generale d) è sempre positivo

6) La equazione $\tan(x - \pi/6) = -1$ nell'intervallo $[0,\pi]$

   a) non ha soluzioni b) è vera per $x = 2/3\ \pi$ c) ha due soluzioni d) è vera per $x = 11/12\ \pi$

7) Il lato del dodecagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r vale:

   a) $r\frac{\sqrt{3}}{4}$ b) $r\sqrt{2+\sqrt{3}}$ c) $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ d) $r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

8) Il triangolo con $\alpha = 30°$, a = 3 cm e b = 4 cm

   a) è univocamente determinato b) i dati sono insufficienti a caratterizzare il triangolo c) si ha $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ d) si ha $\sin\gamma = \frac{1}{6}(2\sqrt{3} \pm \sqrt{5})$

9) Si consideri una corda di lunghezza l in una circonferenza di raggio r e si indichino con α e 2α gli angoli alla circonferenza e al centro.

   a) L'area del settore circolare è $r^2 \text{arc} \sin\frac{l}{r}$ b) L'area del triangolo che definisce il segmento circolare è $\frac{l}{4}\sqrt{4r^2 - l^2}$

   c) $\sin 2\alpha = \frac{l}{2r^2}\sqrt{4r^2 - l^2}$ d) Non si può esprime l'area del segmento circolare in forma simbolica

10) Si consideri il generico poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio r e si indichi l'unica affermazione errata

    a) Il lato del poligono vale $2r \sin\frac{\pi}{n}$ b) L'area del poligono vale ½ n $r^2 \sin\frac{\pi}{n}$ c) L'apotema (lato della circonferenza inscritta) vale $r \cos\frac{\pi}{n}$ d) L'angolo al centro definito dal lato vale $2\frac{\pi}{n}$

3F PNI 03/11/2003 primi elementi di goniometria

1) Gli angoli α e β appartengono rispettivamente al III e II quadrante; inoltre $\tan\alpha = 3$ e $\sin\beta = 1/4$. Determinare in forma esatta $\cos(\beta - \alpha)$

$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$ dobbiamo perciò calcolare le funzioni goniometriche mancanti tenendo conto (nella scelta del segno) del quadrante in cui si opera.

$\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ $\qquad \sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\sqrt{1-\dfrac{1}{16}} = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \dfrac{-\sqrt{15}}{4}\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{10}} + \dfrac{-3}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{\sqrt{15}-3}{4\sqrt{10}} \approx 0.0690$

Nota di correzione: il calcolo del seno può essere svolto anche direttamente dal coseno, ma passando per la tangente non si deve nuovamente riflettere sul segno perché la relazione è di tipo univoco.

2) Gli angoli acuti α e β hanno rispettivamente $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}\,a}{4-a}$ e $\tan\beta = \dfrac{a-1}{\sqrt{3}}$ a) stabilire il campo di variabilità del parametro a b) Determinare in forma esatta l'angolo $\alpha - \beta$

a) Poiché si tratta di angoli acuti dovrà essere $\dfrac{a}{4-a} \geq 0 \wedge a - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a < 4 \wedge a \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq a < 4$

b) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}\,a}{4-a} - \dfrac{a-1}{\sqrt{3}}}{1 + \dfrac{\sqrt{3}\,a}{4-a}\cdot\dfrac{a-1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{3a - (-a^2+5a-4)}{\sqrt{3}(4-a+a^2-a)} = \dfrac{a^2-2a+4}{\sqrt{3}(a^2-2a+4)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ perché $a^2 - 2a + 4 \neq 0\ \forall a$ visto che $\Delta < 0$.

Poiché $\alpha - \beta$ è acuto si ha $\alpha - \beta = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$

Nota di correzione: l'esercizio è stato tralasciato quasi da tutti; errori nel dominio, difficoltà a semplificare l'espressione.

3) Semplificare la funzione $f(\alpha,\beta) = \cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$; la semplificazione deve essere spinta il più avanti possibile.

$f(\alpha,\beta) = \cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\alpha\cos^2\beta - (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) = \cos^2\alpha\cos^2\beta - 1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

Nota di correzione: va bene operare subito un abbassamento di grado con le formule di bisezione

4) Tracciare il diagramma γ della funzione $y = f(x) = 2\cos x - \sin x + \sqrt{5}$. Determinare le coordinate del minimo A e del punto B di intersezione con l'asse y.

Si utilizza la identità $a\sin x + b\cos x = \dfrac{a}{|a|}\sqrt{a^2+b^2}\,\sin\left(x + \arctan\dfrac{b}{a}\right)$ e pertanto:

$y = f(x) = 2\cos x - \sin x + \sqrt{5} = -\sin x + 2\cos x + \sqrt{5} = -\sqrt{5}\sin(x+\varphi) + \sqrt{5}$ con $\varphi = \arctan(-2) \approx -1.107$

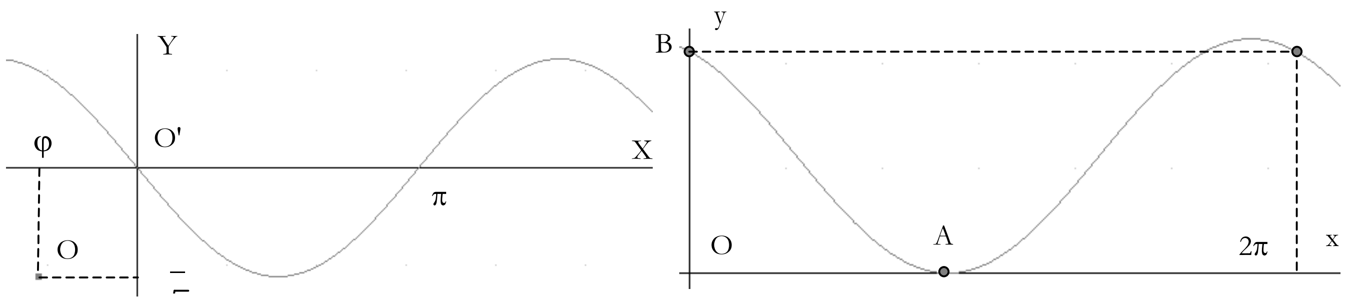
Si ha pertanto: $y - \sqrt{5} = -\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$ ed operando la sostituzione (traslazione)

$Y = y - \sqrt{5} \wedge X = x + \varphi \Leftrightarrow y = Y + \sqrt{5} \wedge x = X - \varphi$

la funzione originaria diventa: $Y = -\sqrt{5}\sin X$

Dopo aver tracciato nel sistema XO'Y una sinusoide ribaltata si procede alla determinazione dell'origine O che si trova tramite la traslazione: $x = 0 \Rightarrow X = \varphi \wedge y = 0 \Rightarrow Y = -\sqrt{5}$

A questo punto (dopo aver tracciato a tratteggio gli assi provvisori e la sinusoide) si possono tracciare gli assai xOy che



passano per il punto O appena determinato.

Si ottiene così la figura qui a lato indicata.

Il punto di minimo A si determina osservando che $X_A = \frac{1}{2}\pi$ e pertanto $x_A = X_A - \varphi = \frac{1}{2}\pi - \varphi \approx 2.678$

Il punto B si trova dalla condizione x = 0 sostituendo nella funzione data: si ha $f(0) = 2 + \sqrt{5} \approx 4.236$

Nota di correzione: citare sempre la identità ed identificare correttamente a e b (per non sbagliare il segno e l'angolo; scrivere la funzione traslata prima di tracciarla; ricordarsi di riportare sugli assi x e y almeno un valore che identifichi la scala (nella mia figura ci sono 2π e il punto B; non è obbligatorio fare due figure, ma in quel caso solo l'asse xOy deve essere ib rilievo e con le etichette su di esso.

5) Esprimere in forma più semplice (algebrica) la funzione $y = f(a) = \cos[\frac{1}{2} \arccos a]$ e precisarne il dominio.

Il dominio di arccos a è [–1,1] mentre $\alpha = \arccos a \in [0,\pi]$ e dunque ½ arccos a è acuto (coseno > 0)

$\cos \alpha = a$ mentre $y = \cos(\frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - a}{2}}$

Si osservi che la funzione trovata ha un dominio più ampio di quella originaria ma la eguaglianza vale solo entro il dominio originario.

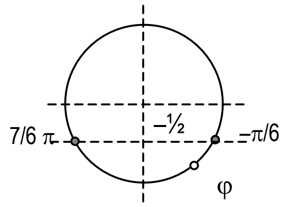
Nota di correzione: esercizio poco praticato ma svolto correttamente da chi ci ha provato; nessuno ha fatto la osservazione finale.

3F PNI 09/12/2003 equazioni e disequazioni goniometria

Si può scegliere se affrontare l'esercizio 3 o 4. In tutto il compito i valori approssimati vanno espressi accurati sino alla quarta cifra decimale.

1) Si consideri per $x \in [0,2\pi]$ la funzione $y = f(x) = 2 \sin x - 3 \cos x + \frac{\sqrt{13}}{2}$. Determinare i punti A e B di intersezione con l'asse $\vec{x}$ e il punto M di massimo. Non è richiesto il tracciamento della funzione

Utilizzando la identità della combinazione lineare di seni e coseni si ha:



$f(x) = \sqrt{13} \sin(x + \varphi) + \frac{\sqrt{13}}{2}$ con $\varphi = \arctan(-\frac{3}{2}) \approx -0.9828$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x + \varphi) = -\frac{1}{2}$ e, tenuto conto che $\alpha = \arcsin(-\frac{1}{2}) = -\pi/6$ e che $x + \varphi \in [0,2\pi]$, si ottiene: $x + \varphi = \begin{cases} -\pi/6 \\ 7/6\,\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} -\pi/6 - \varphi \approx 0.4592 \\ 7/6\,\pi - \varphi \approx 4.6480 \end{cases}$

Per quanto riguarda il punto di massimo deve essere $x_M + \varphi = \pi/2$ e dunque $x_M = \pi/2 - \varphi \approx 2.5536$

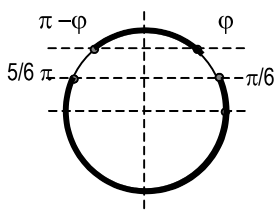
$y_M = \sqrt{13} + \frac{\sqrt{13}}{2} = 3/2\sqrt{13} \approx 5.4083$

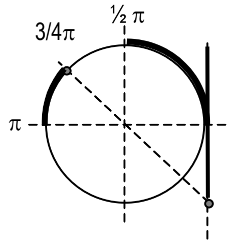
Concludendo:

$A \equiv (-\pi/6 - \varphi, 0)$ $B \equiv (7/6\pi - \varphi, 0)$ $M \equiv (\pi/2 - \varphi, 3/2\sqrt{13})$

Nota di correzione: non era necessario e nemmeno consigliabile fare la traslazione come se si dovesse fare uno studio di funzione. Prestare attenzione ai problemi di dominio per non perdere soluzioni

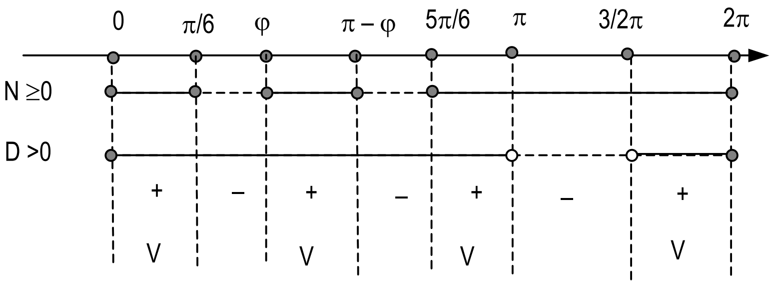
2) Risolvere nell'intervallo $[0,2\pi]$ la disequazione $\frac{6 \sin^2 x - 7 \sin x + 2}{\tan \frac{x}{2} + 1} \geq 0$





Si tratta di una disequazione fratta e pertanto discutiamo separatamente il segno dei diversi fattori:

$N \geq 0 \Leftrightarrow 6 \sin^2 x - 7 \sin x + 2 \geq 0$ $\Delta = 49 - 48 = 1$ valori esterni all'intervallo delle radici $\sin x = \frac{7 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{cases}$. Poiché $\arcsin(\frac{1}{2}) = \pi/6$ e $\arcsin(2/3) = \varphi \approx 0.7297$ si ha lo schema indicato qui a lato.



$D > 0 \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} + 1 > 0$ con $\frac{1}{2} x \in [0,\pi] \Leftrightarrow \tan(\frac{1}{2} x) > -1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} x < \frac{1}{2}\pi \vee 3/4\,\pi < x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq x < \pi \vee 3/2\,\pi < x \leq 2\pi$

Riportando le soluzioni nello schema di discussione del segno si ottiene quanto esposto qui a lato con soluzioni:

$[0,\pi/6] \cup [\varphi,\pi-\varphi] \cup [5/6\,\pi,\pi[\cup]3/2\,\pi,2\pi]$

Nota di correzione: attenzione ai problemi di dominio nel denominatore

3) Prestando attenzione ai problemi posti dal dominio risolvere la seguente equazione:

$\sqrt{2 \sin x - 1} + \sqrt{1 - 2 \sin x} + 3\sin x - 2 = 0$

Per l'esistenza delle due radici deve essere $2 \sin x - 1 = 0$ e cioè $\sin x = \frac{1}{2}$ ma per tale valore si ha:

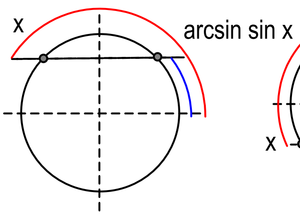
$0 + 0 + 3/2 - 2 = 0$ che è falsa e pertanto l'equazione non ha soluzioni.

4) Nell'intervallo $[0,2\pi]$ si consideri la funzione arcsin sin x; dopo aver scritto a cosa corrisponde nei quattro quadranti tracciarne l'andamento ed utilizzarlo per risolvere l'equazione $\arcsin \sin x - 2/3\, x + 1 = 0$

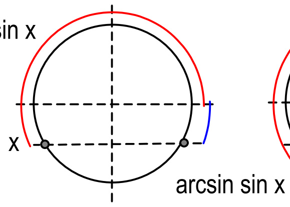
La funzione arcsin sin x (come si può immediatamente osservare con una sinusoide o con il cerchio goniometrico vale: x nel primo quadrante, $\pi - x$ nel II e III quadrante e $x - 2\pi$ nel IV quadrante e presenta pertanto il classico diagramma a dente di sega (si veda la figura in cui sono stati evidenziati in rosso l'argomento e in blu il valore della funzione).

L'equazione data equivale alla intersezione tra il dente di sega ed una retta. Come si vede dal diagramma la zona interessata dalla intersezione è il II quadrante e si ha pertanto:

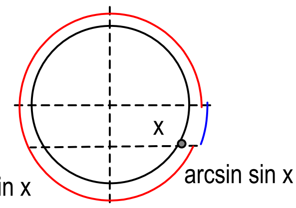
$\pi - x - 2/3\, x + 1 = 0 \Leftrightarrow 5/3\, x = \pi + 1 \Leftrightarrow x = 3/5\,(\pi + 1) \approx 2.4850$



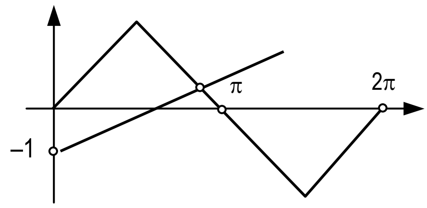
II quadrante



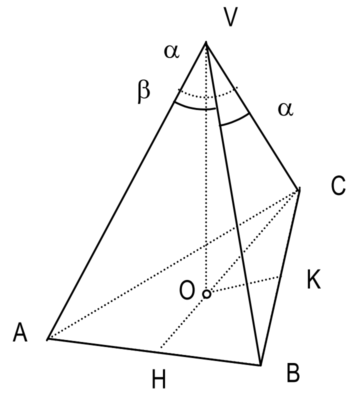
III quadrante



IV quadrante



3F PNI 26/01/2004 problemi goniometria

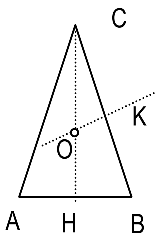


Svolgere 2 problemi tra i primi tre e il numero 4. Si raccomanda di completare gli esercizi che vengono via via affrontati e di essere sobri ed ordinati.

1. Una piramide retta (la proiezione del vertice cade nel circocentro O del poligono di base) ha base ABC e vertice V. Gli spigoli laterali hanno tutti lunghezza l mentre i tre angoli al vertice formati dalle facce valgono rispettivamente α, β, α. Dimostrare che l'altezza h = VO vale $h = l\sqrt{\dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta/2}{4\sin^2\alpha/2 - \sin^2\beta/2}}$. Per evitare perdite di tempo utilizzare la figura già fornita con il testo.
   Suggerimento: individuare le caratteristiche di ABC e puntare alla determinazione di OC.

Il triangolo ABC è isoscele con base AB infatti i due triangoli ACV e BCV sono congruenti per il I criterio.

Per comodità si disegna nel piano la base ABC. Per trovare la altezza VO si applicherà il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo VOC e ciò richiede di calcolare il raggio CO della circonferenza circoscritta. La determinazione può essere effettuata sia con la relazione abc/(4S) sia ragionando sulla similitudine evidente tra CHB e COK. In effetti si ha: $\overline{CO} : \overline{CK} = \overline{CB} : \overline{CH}$



Ma per il teorema dei triangoli rettangoli si ha:

$\overline{CB} = 2\,l \sin(½\alpha)$ e $\overline{AB} = 2\,l \sin(½\beta)$

Dunque $\overline{CK} = ½\,\overline{CB}$ mentre $\overline{CH}$ si trova con il teorema di Pitagora

$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{HB}^2}$

Sostituendo si ottiene:

$$\overline{CO} = \overline{CK} \cdot \overline{CB} / \overline{CH} = \frac{½\,\overline{CB}^2}{\sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{HB}^2}} = \frac{½\,4\,l^2 \sin^2(½\alpha)}{\sqrt{4\,l^2 \sin^2(½\alpha) - l^2\sin^2(½\beta)}} = \frac{2\,l \sin^2(½\alpha)}{\sqrt{4 \sin^2(½\alpha) - \sin^2(½\beta)}}$$

$$\overline{VO} = \sqrt{l^2 - \frac{4\,l^2 \sin^4(½\alpha)}{(4 \sin^2(½\alpha) - \sin^2(½\beta))}} = l\sqrt{\frac{4 \sin^2(½\alpha) - \sin^2(½\beta) - 4 \sin^4(½\alpha)}{(4 \sin^2(½\alpha) - \sin^2(½\beta))}} = l\sqrt{\frac{4 \sin^2(½\alpha)\,(1 - \sin^2(½\alpha)) - \sin^2(½\beta)}{(4 \sin^2(½\alpha) - \sin^2(½\beta))}} =$$

$$= l\sqrt{\frac{4 \sin^2(½\alpha)\cos^2(½\alpha) - \sin^2(½\beta)}{(4 \sin^2(½\alpha) - \sin^2(½\beta))}} = l\sqrt{\frac{\sin^2\alpha - \sin^2(½\beta)}{(4 \sin^2(½\alpha) - \sin^2(½\beta))}}$$

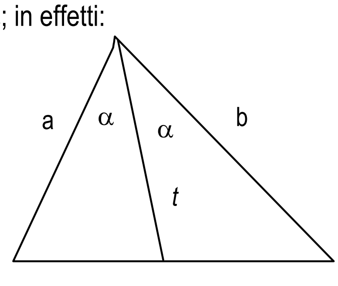
Nota di correzione: difficoltà evidenti nel semplificare le funzioni goniometriche (abbassamenti di grado ed angoli doppi).

2. In un generico triangolo ABC sono note le misure a, b, t di due lati e del segmento di bisettrice relativo all'angolo compreso. Determinare in funzione di a, b, t l'area σ del triangolo dimostrando che risulta $\sigma = \dfrac{t\,(a+b)}{4\,ab}\sqrt{4\,a^2b^2 - t^2(a+b)^2}$. Per esigenze di uniformità di correzione indicare con 2α l'angolo compreso.
   Suggerimento: scrivere l'area e tener conto che è anche somma di due aree

Ricordando la relazione che fornisce l'area di un triangolo e semplificando il fattore ½ si ha:

$a\,t \sin\alpha + b\,t \sin\alpha = a\,b \sin 2\alpha$ e ciò, dopo aver semplificato per $\sin\alpha$ consente di trovare $\cos\alpha$; in effetti:

$2\,ab \cos\alpha = t\,(a+b)$ e infine $\cos\alpha = \dfrac{t(a+b)}{2\,a\,b}$



Ciò permette di trovare $\sin\alpha$ ed infine determinare l'area senza passare per gli angoli:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{t^2(a+b)^2}{4\,a^2b^2}} = \frac{1}{2ab}\sqrt{4\,a^2\,b^2 - t^2(a+b)^2}$$

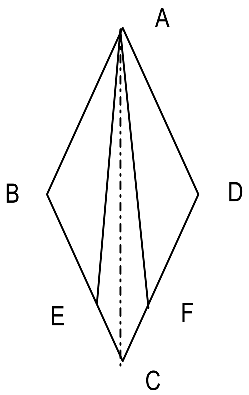
$$\sigma = ½\,ab \sin 2\alpha = a\,b \sin\alpha \cos\alpha = a\,b\,\frac{1}{2ab}\sqrt{4\,a^2\,b^2 - t^2(a+b)^2}\,\frac{t(a+b)}{2\,a\,b} =$$

$$\frac{t\,(a+b)}{4\,ab}\sqrt{4\,a^2b^2 - t^2(a+b)^2}$$

Nota di correzione: la parte cruciale dell'esercizio stava nella individuazione di una relazione che, sfruttando l'ipotesi, consentisse di risalire all'angolo α; è facendosi domande del genere che si arriva alla abilità di problem solving

3. In un rombo ABCD di lato l ed angolo acuto α due segmenti AE e AF dividono la figura in tre parti equivalenti. Determinare in funzione di l e α la misura dei due segmenti dimostrando che AE = $\frac{l}{3}\sqrt{13 + 12\cos\alpha}$.

Suggerimento: determinare preliminarmente BE.



La determinazione di BE è molto semplice perché se le tre aree sono uguali, in virtù della simmetria rispetto all'asse AC si ha che $\sigma_{ABE} = ½\,\sigma_{AEC}$ e poiché i due triangoli hanno la stessa altezza deve essere BE = 2 EC ovvero BE = 2/3 l

A questo punto AE può essere determinato con il teorema del coseno e per farlo basta osservare che l'angolo ABE = $\pi - \alpha$ e pertanto cos ABE = – cos α

Si ha pertanto:

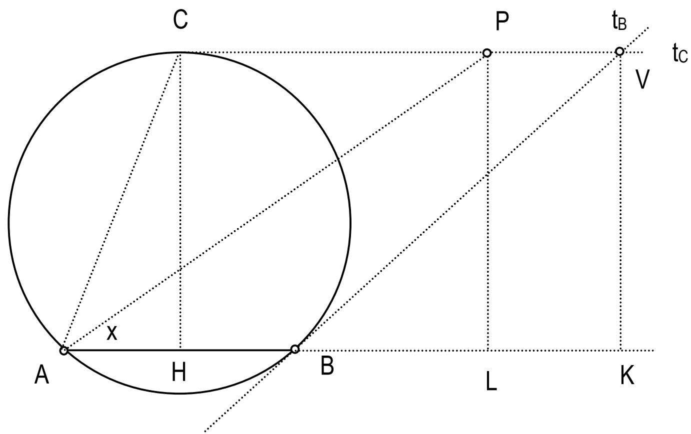
$$\overline{AE}^{\,2} = l^2 + 4/9\, l^2 + 2l(2/3\, l)\cos\alpha = 13/9\, l^2 + 4/3\, l^2\cos\alpha$$

$$\overline{AE} = \frac{1}{3}\sqrt{13 + 12\cos\alpha}\; l$$

Nota di correzione: la determinazione di BE era molto semplice; anche per questo problema sono possibili numerose strategie

4. In una circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio r è assegnata la corda AB di lunghezza 4/3 r. Si indichi con C il punto dell'arco maggiore appartenente all'asse di AB. Dopo aver tracciato le due tangenti t_B e t_C si indichi con V il punto di incontro. Determinare la lunghezza del segmento AP dove P∈CV e viene descritto tramite l'angolo x = PAB. Dopo aver trovato la lunghezza richiesta precisare il campo di variabilità di x.

Suggerimento: tener presente che ACB è l'angolo alla circonferenza



Il problema ammette diverse strategie risolutive tutte basate sul fatto che il triangolo ACH è completamente determinato e così pure BKV (perché VK = CH mentre l'angolo VBK = ACB per una proprietà degli angoli alla circonferenza).

Si può per esempio ragionare sul triangolo ACP (teorema dei seni) sfruttando il fatto che $A\hat{C}P = A\hat{C}H + ½\,\pi$ oppure riferirsi al triangolo rettangolo APL con PL = CH.

Vediamo in questo ultimo modo:

$\sin A\hat{C}B = \dfrac{4/3\ r}{2r} = 2/3$ $\qquad \cos A\hat{C}B = \sqrt{1 - 4/9} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ e dunque (formule di bisezione)

$$\tan A\hat{C}H = \sqrt{\frac{1-\cos A\hat{C}B}{1+\cos A\hat{C}B}} = \frac{1-\cos A\hat{C}B}{\sin A\hat{C}B} =$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

e dunque (triangolo rettangolo ACH) si ha $\overline{HC} = \overline{AH} / \tan A\hat{C}H = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}\,r = \dfrac{4(3+\sqrt{5})}{3\cdot 4}\,r = \dfrac{3+\sqrt{5}}{3}\,r$

Poiché HC = LP si può calcolare AP riferendosi al triangolo rettangolo ALP

$$\overline{AP} = \frac{\overline{LP}}{\sin x} = \frac{3+\sqrt{5}}{3\sin x}\,r$$

Per quanto riguarda la determinazione del dominio si osserva che quando P ≡ C si ha x = $C\hat{A}B$ (complementare di $A\hat{C}H$) e dunque x = arc tan $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$ = = arc tan $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Quando invece P ≡ V dobbiamo calcolare tan $V\hat{A}K$ e ciò richiede di determinare BK (si ricordi che $V\hat{B}K = A\hat{C}B$)

Dunque $\overline{BK} = \dfrac{\overline{KV}}{\tan A\hat{C}B} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{3}\dfrac{\sqrt{5}}{3}\dfrac{3}{2}r = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{6}r$

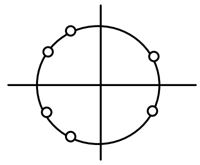
$\overline{AK} = \dfrac{4}{3}r + \dfrac{5+3\sqrt{5}}{6}r = \dfrac{13+3\sqrt{5}}{6}r$ e dunque e $\tan x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{3}\,\dfrac{6}{13+3\sqrt{5}} = \dfrac{2(3+\sqrt{5})}{13+3\sqrt{5}}$

Nota di correzione: ricordarsi sempre di fare una analisi di cosa è richiesto per arrivare al risultato ed esplicitare i relativi ragionamenti. Spero di non aver sbagliato qualche conto perché star dietro ai conti e alle esigenze di formattazione lavorando direttamente a video è dura.

13 dicembre 2005 3F PNI: definizioni tracciamento, identità

1) Semplificare le seguenti espressioni:

   a) $\text{sen}(2\pi - \alpha) + \cos(\pi/2 + \alpha) + \cos(3/2\,\pi - \alpha)$

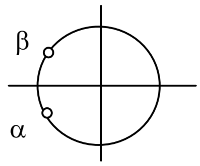


La figura qui a lato consente di individuare le necessarie relazioni tra le grandezze coinvolte.
$\text{sen}(2\pi - \alpha) + \cos(\pi/2 + \alpha) + \cos(3/2\,\pi - \alpha) = -\sin\alpha - \sin\alpha - \sin\alpha = -3\sin\alpha$

   b) $[\text{sen}(\pi + \alpha) + \text{sen}(\pi - \alpha)]\cos^2(3/4\,\pi + \alpha)$

$[-\sin\alpha + \sin\alpha]\cos^2(3/4\,\pi + \alpha) = 0$

   c) β e α stanno rispettivamente nel II e III quadrante e hanno la stessa ascissa. Esprimere β in funzione di α



$\alpha = 2\pi - \beta$ e pertanto $\beta = 2\pi - \alpha$

2) Ridurre ad un'unica funzione di α:

   a) $f(\alpha) = \dfrac{2\sin\alpha}{3\cos\alpha - \sin\alpha} = g(\tan\alpha)$

Basta dividere N e D per $\cos\alpha$ e si ha: $f(\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{3 - \tan\alpha}$

   b) $f(\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{3\cos^2\alpha - 1} = g(\sin\alpha)$

$f(\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{3\cos^2\alpha - 1} = \dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha\,(2 - 3\sin^2\alpha)} = \pm\dfrac{2\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}\,(2 - 3\sin^2\alpha)}$

   c) $f(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^2\alpha - 2\cos\alpha} = g(t)$ con $t = \tan(\alpha/2)$

$\sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ e pertanto $f(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^2\alpha - 2\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{2t - 1 + t^2}{1+t^2}}{\dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2} - \dfrac{2 - 2t^2}{1+t^2}} = \dfrac{(2t - 1 + t^2)(1+t^2)}{2[2t^2 - (1 - t^2)(1+t^2)]} =$
$\dfrac{(2t - 1 + t^2)(1+t^2)}{2[2t^2 - 1 + t^4]}$

   d) $f(\alpha) = \tan(3\alpha) = g(\tan\alpha)$

$\tan(3\alpha) = \dfrac{\sin(2\alpha + \alpha)}{\cos(2\alpha + \alpha)} = \dfrac{\sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha}$ per poter passare in tangente è bene mantenere l'espressione come omogenea di III grado e pertanto si useranno le espressioni del coseno che lo consentono:

$\tan(3\alpha) = \dfrac{2\sin\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha}{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha}$ basta ora dividere N e D per $\cos^3\alpha$ e si ottiene:

$\tan(3\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha + (1 - \tan^2\alpha)\tan\alpha}{(1 - \tan^2\alpha) - 2\tan^2\alpha} = \dfrac{\tan\alpha(3 - \tan^2\alpha)}{1 - 3\tan^2\alpha}$

3) Calcolare

   a) $\sin\arccos(1/4)$

Se $\alpha = \arccos(1/4)$ siamo nel I quadrante e $\cos\alpha = ¼$. Dunque: $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - 1/16} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

   b) $\sin\arccos k$ con $-1<k<0$

Con ragionamento analogo al precedente siamo nel II quadrante e $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - k^2}$

   c) $\tan(\arccos k)$ con con $-1<k<0$

Siamo nel II quadrante dove la tangente è negativa mentre $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - k^2}$ è positivo. Dunque $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{1 - k^2}}{k}$

   d) Partendo dalle funzioni goniometriche di 30° e 18° a quali funzioni di archi espressi da numeri interi si può arrivare nell'intervallo tra 1° e 10° estremi inclusi. Rispondere spiegando: esempio 15° = 30/2 …

15° = 30°/2 3° = 18° – 15° 6° = 2·3° 9° = 3° + 6°
Altro non si può fare

4) Tracciare nell'intervallo $[0,2\pi]$ il diagramma della funzione γ: $y = f(x) = 2 \cos(x - \pi/3) - 1$ precisando le coordinate dei punti M e m di massimo e minimo. Se fosse stato $f(x) = 2 \cos(-x + \pi/3) - 1$ cosa sarebbe cambiato?

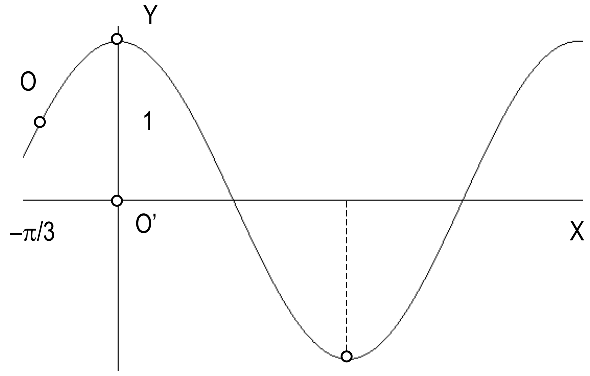
Posto $Y = y + 1$ e $X = x - \pi/3$ si ha la funzione $Y = 2 \cos X$ nel sistema d'assi XO'Y. Si tratta di una cosinusoide di ampiezza 2 e il punto $O \equiv (0,0)$ presenta in questo sistema coordinate $(-\pi/3,1)$ come nel primo diagramma.

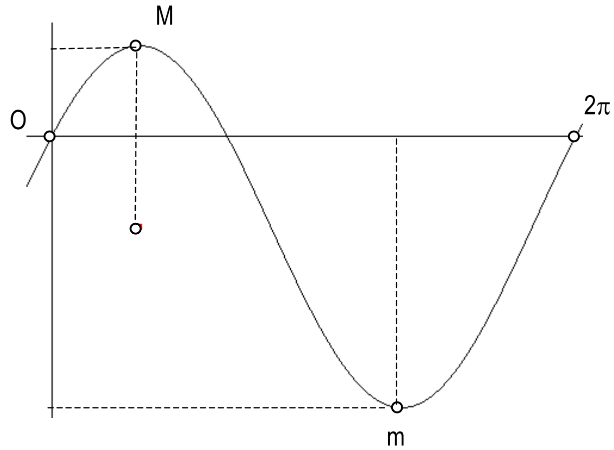
Fatto ciò si può tracciare il secondo diagramma (nel sistema xOy) ed individuare le coordinate del massimo M e del minimo m.

$X_M = 0$ da cui $x_M = \pi/3 Y_M = 2$ da cui $y_M = 2 - 1 = 1$

$X_m = \pi$ da cui $x_m = 4\pi/3$ $Y_m = -2$ da cui $y_M = -2 - 1 = -3$

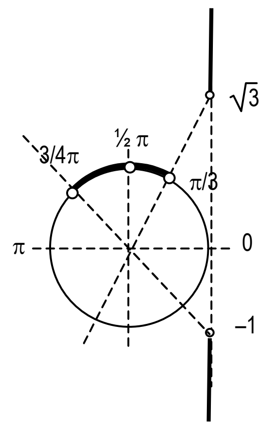
Poiché, come si nota anche dal diagramma, la funzione coseno è dispari, $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ e dunque non cambia nulla se si considera il diagramma di $f(x) = 2 \cos(-x + \pi/3) - 1$





3F PNI 17 gennaio 2006: equazioni e disequazione goniometriche

1. Risolvere in $x \in [0,\pi]$ la disequazione $\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} > 0$



$\Delta = (1-\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2$

Le soluzioni si hanno per valori esterni all'intervallo delle radici $\tan x = \dfrac{-1+\sqrt{3} \pm (1+\sqrt{3})}{2} = \begin{matrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{matrix}$

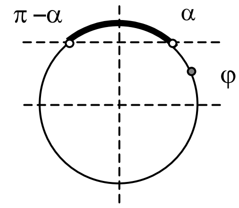
I due valori della tangente corrispondono ad archi noti e dunque si ha: (attenzione a ½ π che va fuori dominio)

$\pi/3 < x < \frac{3}{4}\pi \wedge x \neq \pi/2$

Nota di correzione:
E' una disequazione!
Riportare sul cerchio goniometrico le soluzioni in tan x e in x;
Si veda il calcolo del Δ
Chi non conosce le funzioni di π/3 e π/4 le studi!

2. Data la disequazione lineare $2 \sin x + \sqrt{3}\cos x - 5/2 > 0$ determinarne le soluzioni per $x \in [0,2\pi]$ utilizzando sia il metodo della combinazione lineare sia la soluzione grafica. Prestare attenzione al fatto che una delle soluzioni corrisponde ad un arco noto. I valori approssimati vanno espressi con 4 cifre decimali significative.

   a) In generale $a \sin x + b \cos x = \dfrac{a}{|a|}\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x + \text{artg}\,\dfrac{b}{a}) = \sqrt{7}\sin(x+\varphi) - 5/2$ con $\varphi = \text{artan}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.71372$ e dunque dobbiamo risolvere la disequazione $\sqrt{7}\sin(x+\varphi) > 5/2 \Leftrightarrow \sin(x+\varphi) > \dfrac{5}{2\sqrt{7}} \approx 0.94491$ con $(x+\varphi) \in [\varphi, 2\pi+\varphi]$ (la figura non è in scala per migliorarne la leggibilità).



   $\alpha = \arcsin\dfrac{5}{2\sqrt{7}} \approx 1.2373$ e le soluzioni, costruite a partire da φ, sono:

   $\alpha < x + \varphi < \pi - \alpha \Leftrightarrow \alpha - \varphi < x < \pi - (\alpha + \varphi)$

   $\alpha - \varphi \approx 0.5236$ valore molto prossimo a π/6. Poiché sostituendo seno e coseno di π/6 si ha $2 \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 + 3/2 = 5/2$ possiamo concludere che $\alpha - \varphi = \pi/6$

   $\pi - (\alpha + \varphi) \approx 1.1905$

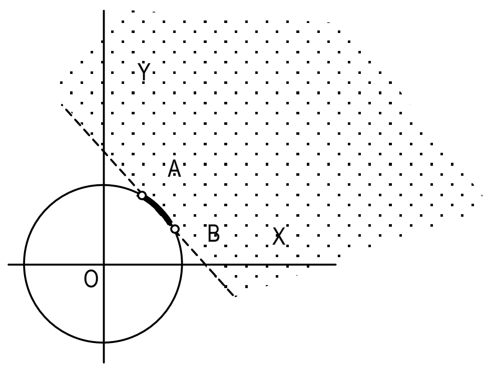
   Nota di correzione: la verifica che $\alpha - \varphi = \pi/6$ e non ≈ richiede di trasformare l'equazione in una identità oppure di calcolarsi noiosamente $\sin(\alpha - \varphi)$ con le formule di somma e sottrazione (cosa che non consiglio).

   b) Si opera la sostituzione Y = sin x e X = cos x così la disequazione si trasforma nel sistema

   $\begin{cases} 2Y + \sqrt{3}X - \frac{5}{2} > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$ che corrisponde alla intersezione tra il semipiano superiore definito dalla retta $2Y + \sqrt{3}X - \frac{5}{2} = 0$ e dalla circonferenza goniometrica. La retta può essere tracciata in forma tabulare (2 punti) e si ottiene il diagramma indicativo indicato del quale è necessario determinare l'ascissa dei punti di intersezione A e B.

   $Y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}X + \dfrac{5}{4} \wedge X^2 + \dfrac{3}{4}X^2 + \dfrac{25}{16} - \dfrac{5\sqrt{3}}{4}X = 1 \Rightarrow$

   $\dfrac{7}{4}X^2 - \dfrac{5\sqrt{3}}{4}X + \dfrac{9}{16} = 0 \Leftrightarrow 7X^2 - 5\sqrt{3}X + \dfrac{9}{4} = 0$ con $\Delta = 75 - 63 = 12$. Le soluzioni sono:



   $X = \dfrac{5\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{14} = \begin{matrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866 \\ \dfrac{3\sqrt{3}}{14} \approx 0.3715 \end{matrix}$ $\qquad Y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}X + \dfrac{5}{4} = \begin{matrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{9}{28} + \dfrac{5}{4} = \dfrac{13}{14} \end{matrix}$

   Dobbiamo ora determinare le coordinate dell'arco BA.

   $x_B = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \pi/6$

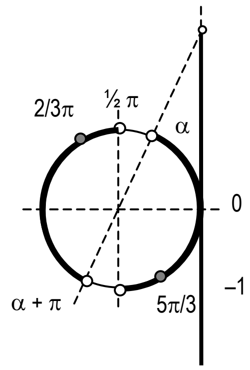
   $x_A = \arccos\dfrac{3\sqrt{3}}{14} \approx 1.1905.$

   Dunque le soluzioni della disequazione sono $\pi/6 < x < \arccos\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

   Nota di correzione: attenzione bisogna determinare, almeno in via approssimata sia X sia Y di A e B oppure sfruttare un tracciamento preciso della retta (tramite il coefficiente angolare oppure punti comodi).

La sostituzione X = cos x non è obbligatoria ma se si invertono seno e coseno può sorgere qualche difficoltà quando si passa dalle soluzioni in X e Y agli archi.

3. Data la disequazione elementare $\tan(x + 2/3\,\pi) < 2$ risolverla nell'intervallo $[0,\pi]$



Il campo di studio è $x + 2/3\,\pi \in [2/3\,\pi, 5/3\pi]$ ed i suoi estremi vanno riportati sul cerchio insieme agli intervalli determinati dalla condizione $\tan z < 2$. Con α si indica $\arctan 2 \approx 1.1071$.

Ora si prendono le soluzioni comprese nel campo di studio e cioè:

$2/3\pi \le x + 2/3\,\pi < \alpha + \pi \vee 3/2\,\pi < x + 2/3\,\pi \le 5/3\,\pi$ che corrisponde a

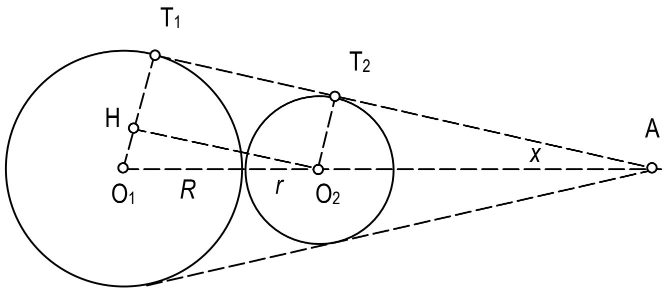
$0 \le x < \pi/3 + \alpha \vee 5/6\pi < x \le \pi$

$\pi/3 + \alpha \approx 2.1543$

Nota di correzione: In questo esercizio per tracciare correttamente gli archi sul cerchio era più semplice lavorare pensando all'insieme complementare. Si sono visti molti errori sia di individuazione degli archi, sia di scelta di quelli interni al campo di studio.

14 febbraio 2006 III F PNI trigonometria

1. Due circonferenze di centri O_1 e O_2 e raggi R e r ($R > r$) sono tangenti esternamente e le rette tangenti tracciate da un punto A esterno ad entrambe formano un angolo $2x$. Indicata con d la distanza tra i centri e indicati con T_1, T_1', T_2, T_2' i punti di contatto:
   a) determinare i valori di R e r in funzione di x e di d
   b) determinare il perimetro y del rettangolo di vertici $O_2\,T_2\,T_1H$ in funzione di x e di d
   c) rappresentare la funzione così trovata su un periodo
   d) determinare $x \mid y = 7/5\ d$

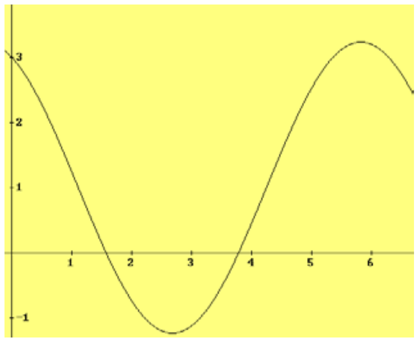


a) Costruita la figura si riconosce immediatamente la necessità di operare sul triangolo rettangolo $O_1\,O_2\,H$ di ipotenusa $d = R + r$ e angolo $HO_2O_1 = x$ (angolo corrispondente di O_1AT_1.

Il lato $\overline{O_1H} = R - r = d \sin x$

Basta fare somma e differenza delle due equazioni e si ha:
$R = ½\, d(1 + \sin x)$ e $r = ½\, d(1 - \sin x)$

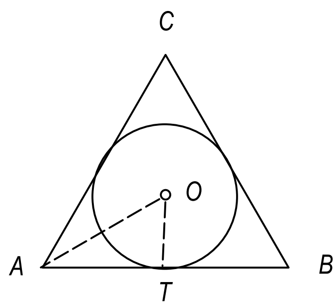
b) Il perimetro 2p richiesto vale $2\left(\overline{HO_2} + \overline{HT_1}\right) = 2\,(r + \overline{O_2H}\,) = 2[½\, d(1 - \sin x) + d \cos x] = d(-\sin x + 2 \cos x + 1)$



c) La funzione $y = d(-\sin x + 2 \cos x + 1) = d\left(-\sqrt{5}\sin[x + \arctan(-2)] + 1\right)$ che viene rappresentata mediante una traslazione con le ben note tecniche

d) Se il perimetro vale 7/5 d si ha: $-\sin x + 2 \cos x + 1 = 7/5 \Leftrightarrow -\sin x + 2 \cos x = 2/5$. Questa equazione può essere risolta o mediante combinazione lineare o con le parametriche o per via grafica. In questo caso la soluzione più conveniente (nella scrittura dei risultati) è quest'ultima e si ottiene $\sin x = 4/5$ e $\cos x = 3/5$ (provare con i 3 metodi)

2. Si consideri un triangolo equilatero di lato l:
   a) dimostrare che il raggio del cerchio inscritto vale $\frac{\sqrt{3}}{6}\,l$



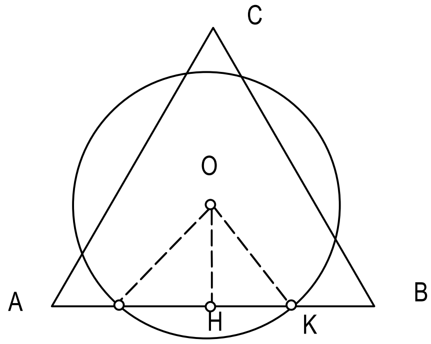
a) Il triangolo rettangolo OTA ha angoli di 30°, 60° e 90° e poiché $\overline{AT} = ½\, l$ si ha:

$$r = \overline{OT} = \overline{AT}\,\tan \pi/6 = ½\, l\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,l$$

b) Indicato con O il centro del triangolo si consideri una circonferenza secante il triangolo di raggio $\overline{OK} = \frac{l}{\sqrt{6}}$. Essa determina con il triangolo tre segmenti circolari congruenti. Dopo aver trovato l'angolo al centro che li caratterizza determinare l'area complessiva dei tre segmenti.

$\overline{OH} = r = \frac{\sqrt{3}}{6}\,l$ mentre $\overline{OK} = \frac{l}{\sqrt{6}}$

Dunque $\cos H\hat{O}K = \frac{OH}{OK} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e l'angolo al centro del settore è ½ π.



L'area del segmento circolare è $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ dove con σ_1 e σ_2 si intendono rispettivamente le aree del settore e quella del triangolo.

$\sigma_1 = ¼\,\pi\,\frac{l^2}{6} = \pi\,\frac{l^2}{24}$

$\sigma_2 = ½\,\overline{OH^2} = \frac{l^2}{24}$. L'area complessiva $3\sigma = \frac{1}{8}\,l^2\,(\pi - 1)$