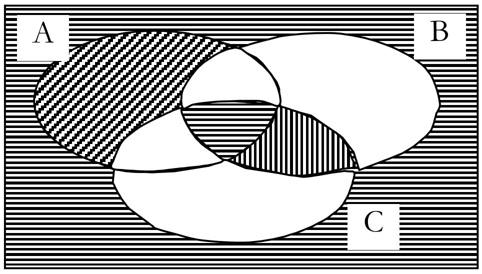
Liceo Zucchi 12/10/96: teoria degli insiemi

$\boxed{1}$ Dati i tre insiemi A, B, C rappresentati in figura, entro l'insieme universale U, scrivere a cosa corrispondono le zone retinate:

a tratti orizzontali: ______________________________

a tratti verticali: ______________________________

a tratti obliqui: ______________________________



2

Se $A \cap B = \varnothing$	$A - B =$	$m(A \cup B) =$	$\overline{A} \cup B =$

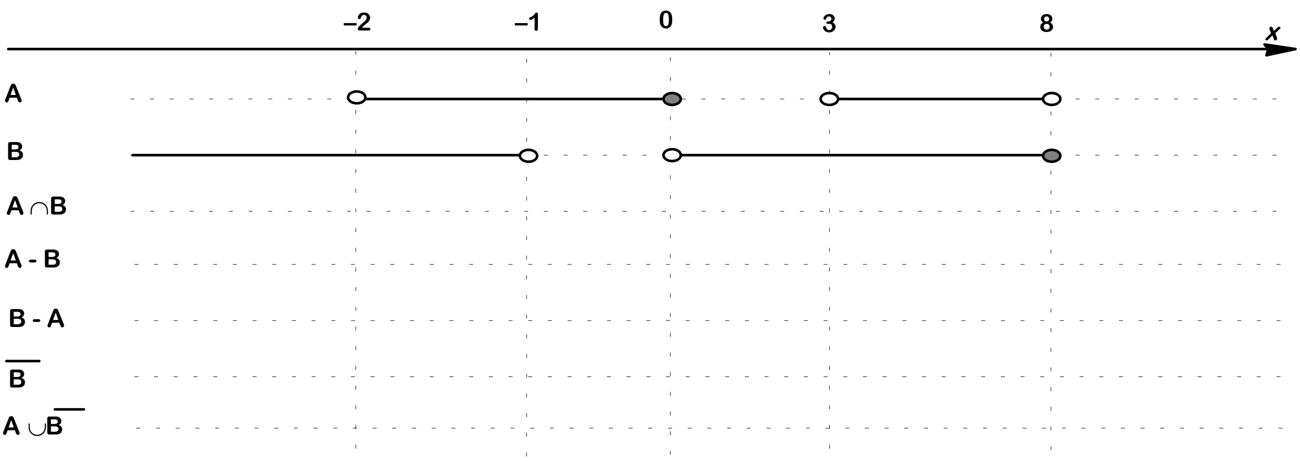
3

Un insieme è denotato da …	
Un insieme è connotato da …	

4

Le due leggi distributive relative a tre insiemi A, B, e C si scrivono così:	
I:	II:

$\boxed{5}$ Considerere sulla retta gli insiemi A e B indicati. Rappresentare gli insiemi indicati nella tabella sottostante:

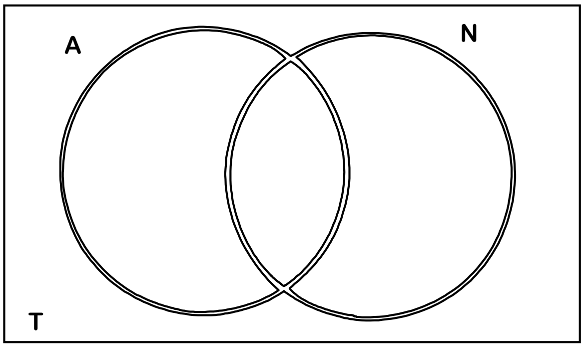


$\boxed{6}$ Si consideri la seguente proposizione scritta in linguaggio simbolico: $\forall x,\ x \in \mathcal{N} \Rightarrow \exists y,\ y \in \mathcal{N} : y > x$ esprimerla in linguaggio naturale e dire quale proprietà dei naturali essa rappresenta.

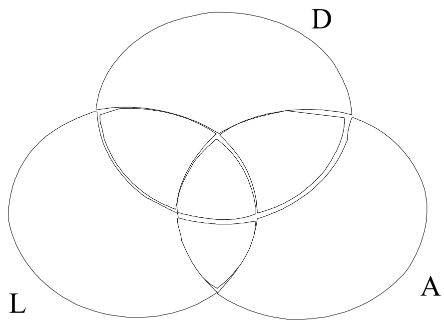
$\boxed{7}$ Un gruppo di 70 studenti pratica dello sport. Si sa che 35 alunni praticano l'atletica e di essi 12 fanno corsa.
Sapendo che chi fa nuoto non corre, che solo in 7 fanno sia nuoto sia atletica mentre 9 non fanno nè atletica nè nuoto. Trovare:

- quanti di coloro che fanno atletica non fanno corsa e non fanno nuoto;
- quanti fanno solo nuoto

Indicare gli insiemi con A, C e N e l'insieme universale con T. Usando le informazioni disegnare correttamente gli insiemi e quindi procedere determinando via via gli elementi necessari.



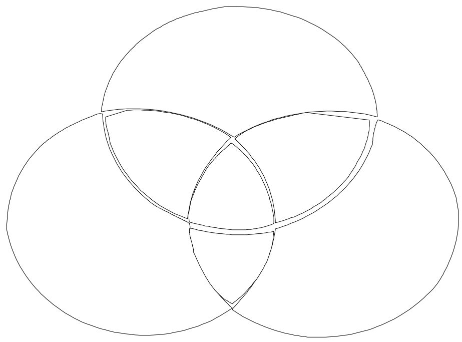
$\boxed{8}$ Si considerino le seguenti due proposizioni che richiedono di utilizzare l'insieme L delle lezioni, l'insieme A delle cose che richiedono attenzione e l'insieme D delle cose difficili:
Alcune lezioni sono difficili *Ciò che è difficile richiede attenzione*
Dopo aver tradotto le proposizioni in diagrammi di Venn ricavare la conclusione.



La conclusione è di tipo _____ e consente di affermare che:

____

A questo punto si consideri la conclusione precedente e la seguente affermazione:
Nessuna lezione fa diventare più belli.
Utilizzando gli insiemi L, A e l'insieme B delle cose che fanno diventare più belli riempire il diagramma di Venn e trarre la conclusione.



La conclusione è di tipo _______ e consente di affermare che:

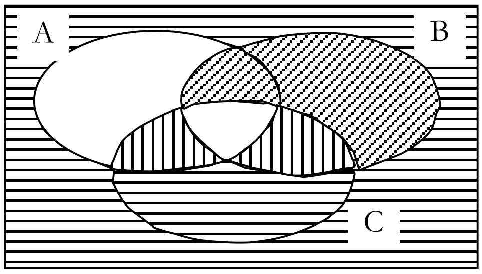
____

$1 \Rightarrow 3$	$2 \Rightarrow 3$	$3 \Rightarrow 2$	$4 \Rightarrow 2$	$5 \Rightarrow 5$	$6 \Rightarrow 4$	$7 \Rightarrow 8$	$8 \Rightarrow 6$	totale

18/10/97: teoria degli insiemi

E' consentito lavorare su fogli di brutta ma i calcoli e la motivazione delle proprie affermazioni vanno riportate su questo foglio che costituisce l'unico elemento di valutazione

$\boxed{1}$ Dati i tre insiemi A, B, C rappresentati in figura, entro l'insieme universale U, scrivere a cosa corrispondono le zone retinate:



a tratti orizzontali: __________________________________

a tratti verticali: __________________________________

a tratti obliqui: __________________________________

2

Se $A \cap B = A \wedge A \cap B \neq B$	come sono A e B? ______	$m(A \cup B) =$ ______	$\overline{A} - B =$ _________

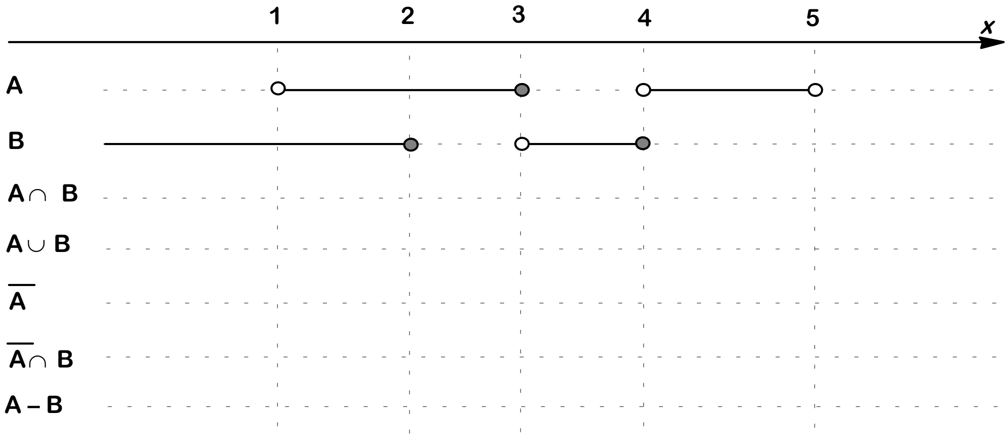
3

Un insieme è denotato da …	
Un insieme è connotato da …	

4

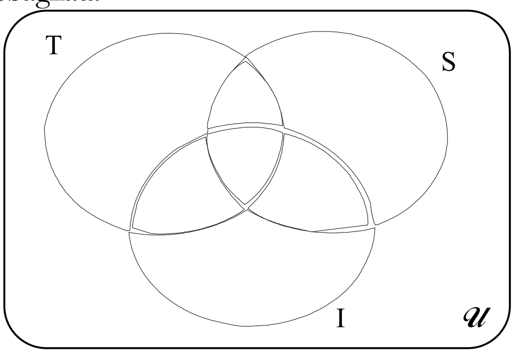
$\overline{A \cup B} =$	$\overline{A \cap B} =$	$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} =$

$\boxed{5}$ Considerare sulla retta gli insiemi A e B indicati. Rappresentare gli insiemi indicati nella tabella sottostante:



$\boxed{6}$ Si consideri la seguente proposizione scritta in linguaggio simbolico: $\exists x,\ x \in \mathcal{N} \mid \forall y,\ y \in \mathcal{N},\ x > y$ esprimerla in linguaggio naturale e dire perché si tratta di una proprietà sbagliata

$\boxed{7}$ Un gruppo di 48 studenti frequenta una scuola in cui si insegnano Francese (F), Inglese (I) e Spagnolo (S), si sa che è obbligatorio studiare almeno una lingua e non più di due. Gli alunni che studiano una sola lingua sono 5 per T, 4 per S e 3 per I. Te S sono studiati da 9 alunni mentre quelli che studiano T sono in tutto 29. Quanti studiano T e I, quanti S e I?



m($\mathcal{U}$) = ______m(T∪S∪I) = ____ m(T∩S∩I) =______

m(T – S – I) = ____

8 Dato l'insieme C = {a,b} indichiamo con A = {a} e B ={b} denotare l'insieme delle parti di C, $\mathcal{P}$(C). Quindi barrare vero o falso alle affermazioni successive

$\mathcal{P}$ (C) =

____

$\mathcal{P}(C) \in \mathcal{P}[\mathcal{P}(C)]$		$A \in \mathcal{P}[\mathcal{P}(C)]$		$\varnothing \in \mathcal{P}[\mathcal{P}(C)]$		$\{\varnothing\} \in \mathcal{P}[\mathcal{P}(C)]$	
vero	falso	vero	falso	vero	falso	vero	falso

9 Se A ∪ B = C e inoltre A ∩ B = C cosa si può dire di A, B, C ? Motivare la risposta

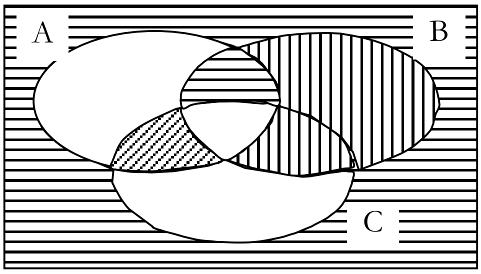
____

–

1 ⇒ 3	2 ⇒ 4	3 ⇒ 2	4 ⇒ 4	5 ⇒ 5	6 ⇒ 3	7 ⇒ 8	8 ⇒ 6	9 ⇒ 3	totale 38

19/10/95: teoria degli insiemi

1 Dati i tre insiemi A, B, C rappresentati in figura entro l'insieme universale U scrivere a cosa corrispondono le zone retinate:



a tratti orizzontali: ________________________________

a tratti verticali: __________________________________

a tratti obliqui: ____________________________________

2

Se $A \subseteq B$ allora	$A - B =$	$A \cap B =$	$A \cup B =$

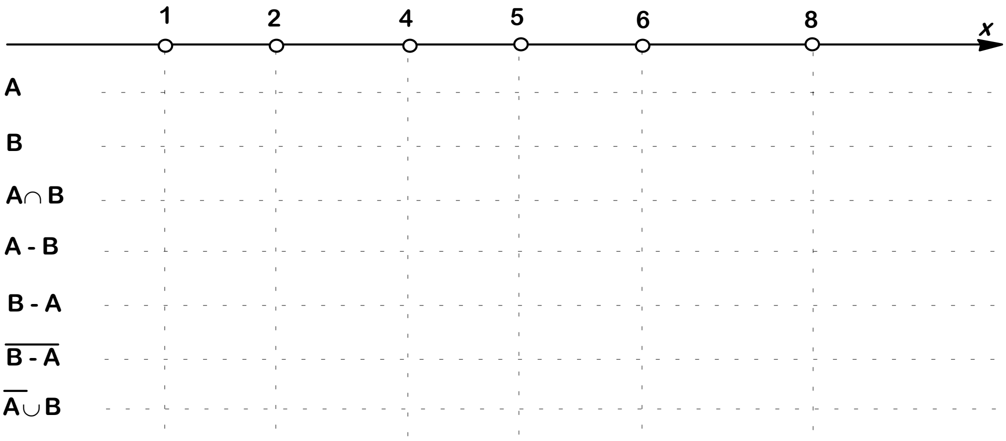
3

Connotare un insieme significa:	

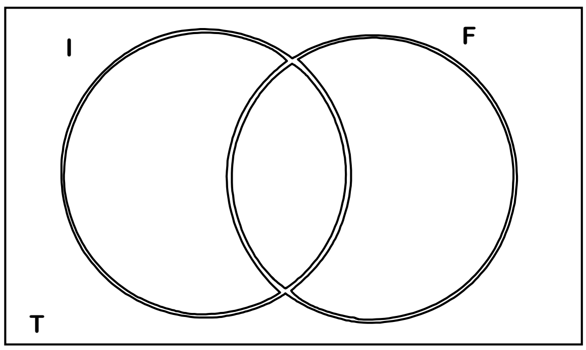
4

Le due leggi De Morgan, scritte in maniera simbolica, affermano che, dati gli insiemi A e B:	
I:	II:

5 Considerere sulla retta i seguenti intervalli: A=]2,5[e B=[1,4]∪]6,8[. Rappresentare gli insiemi indicati nella tabella sottostante:



6 In un gruppo di 100 turisti tedeschi 70 parlano anche inglese, 45 parlano anche francese, mentre 5 parlano solo tedesco. Tra quelli che parlano anche inglese ma non francese ce ne sono 7 che parlano danese. In quanti parlano due lingue, oltre al tedesco? Indicare gli insiemi con I, F e D e l'insieme universale con T. Sulla figura disegnare correttamente l'insieme D e quindi determinare, usando le operazioni insiemistiche, quanto richiesto.
Come mai si può affermare che $I \cap F \neq \varnothing$?



m(I) =	m(F) =	$m(\overline{I \cup F}) =$

m(D) =	m(I ∩ F) =
m(2 lingue) =	

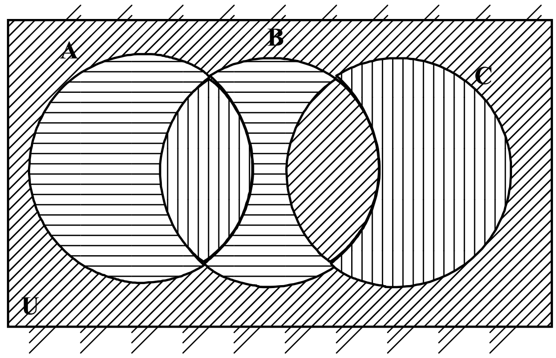
7 Si considerino i seguenti insiemi all'interno dell'insieme universale Q dei quadrilateri: A = {insieme dei rombi}; B = {insieme dei rettangoli}; C = {insieme dei parallelogrammi}. Per la correttezza dei diagrammi di Eulero alcune delle zone della figura devono essere vuote. Indicarle con tratto orizzontale. Indicare con tratto verticale l'insieme dei quadrati. Indicare con l'evidenziatore, aggiungendo anche la parte mancante, l'insieme dei quadrilateri con le diagonali perpendicolari.

8 Lo spazio, i piani, le rette, i segmenti, le semirette sono tutti insiemi costituiti da punti.

Se indichiamo con r ed s due rette che si intersecano nel punto P la scrittura $r \cap s = P$ è grammaticalmente sbagliata e quella giusta è:	
Se indichiamo con r una retta che giace nel piano α la scrittura $r \in \alpha$ è grammaticalmente sbagliata e quella giusta è:	
Se indichiamo con r ed s due semirette giacenti nel piano π con l'origine O in comune e con $r\hat{O}s$, l'angolo convesso formato formato dalle semirette, il corrispondente angolo concavo si scrive in teoria degli insiemi come:	

8/11/97: teoria degli insiemi e relazioni

E' consentito lavorare su fogli di brutta ma i calcoli e la motivazione delle proprie affermazioni vanno riportate su questo foglio che costituisce l'unico elemento di valutazione



$\boxed{1}$ Dati i tre insiemi A, B, C rappresentati in figura, entro l'insieme universale U, scrivere nel modo più semplice a cosa corrispondono le zone retinate:

a tratti orizzontali: ______________________________

a tratti verticali: ________________________________

a tratti obliqui: _________________________________

2

Se $A \subset B \subset C$	$(C - B) \cap (B - A) =$ ________________	$(C - B) \cup (B - A) \cup \overline{C} =$ ____________________	Scrivere $\overline{A} - \overline{C}$ come unione di due insiemi disgiunti ____________________

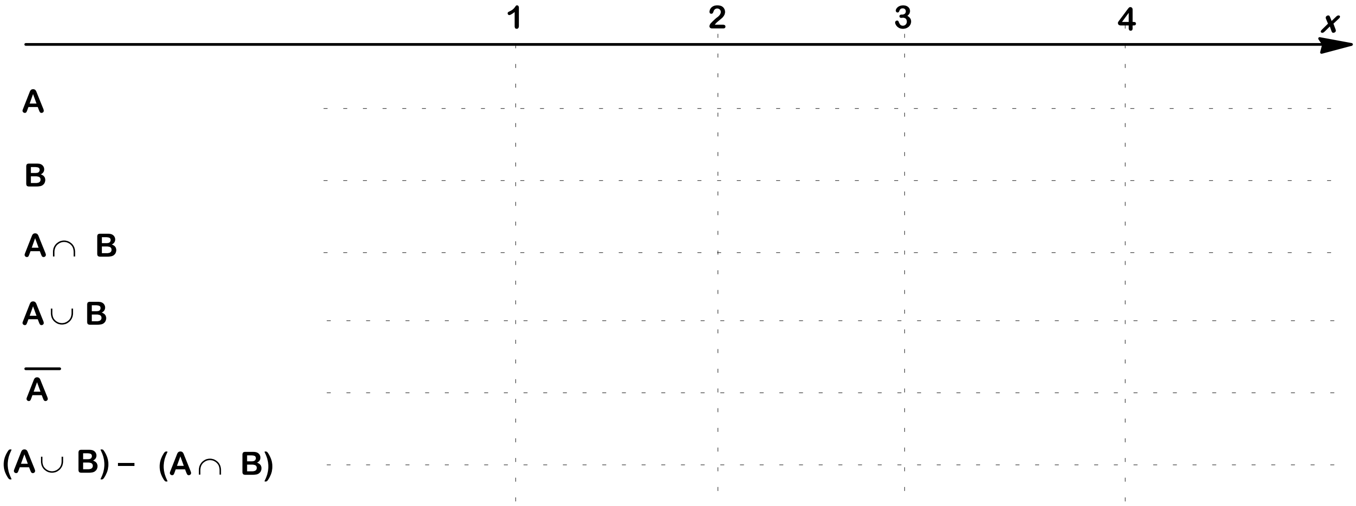
3

Dato un insieme A e gli insiemi A_1 e A_2 si dice che A_1 e A_2 sono una partizione di A se …

4

In generale, dati due insiemi A e B nell'insieme universale U si ha sempre:	$m(A \cup B) =$ ____________________	$m(\overline{A}) =$ ____________________

$\boxed{5}$ Considerare sulla retta gli insiemi $A = [1,3[$ e $B =]-\infty,2[\cup [4,+\infty[$. Rappresentare gli insiemi indicati nella tabella sottostante:



$\boxed{6}$ Si consideri la seguente proposizione scritta in linguaggio simbolico:

$\forall (x,y),\ (x,y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \Rightarrow \exists z,\ z \in \mathcal{N} \mid y + z = x$

La proposizione è sbagliata, dare un controesempio che spieghi perché è sbagliata.

____

____

7 Si consideri l'insieme universale dei quadrilateri e siano A l'insieme dei parallelogrammi, B l'insieme dei rettangoli, C l'insieme dei rombi e D l'insieme dei quadrilateri con le diagonali perpendicolari.

Tra A, B, C, D esistono delle relazioni di inclusione che si chiede di precisare qui di seguito inserendo il simbolo o i simboli corretti tra le lettere oppure completando la frase

A ___ B   A ___ C $B \cap C$ è l'insieme dei ______________________

$A \cap D$ è l'insieme dei ____________________________

D = C è sbagliata perché (disegnare un controesempio nel rettangolo qui a lato)

8 Dato l'insieme A = {1,2,3,4,5} e l'insieme B = {1,2,3,4} si consideri la relazione $\mathscr{R}$ definita in A × B e così definita: $\mathscr{R}$ = {(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(2,1), (3,2),(4,3),(3,4)}

Il dominio della relazione è $\mathscr{D}$ = ______________________ il codominio è $\mathscr{C}$ = ________________________
Quando rispetto ad una proprietà si scrive che è falsa bisogna scrivere il perché.

La relazione è riflessiva V F ____

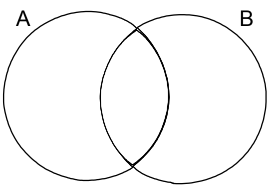
____

La relazione è simmetrica V F ____

____

La relazione è transitiva V F ____

____



9 Se gli insiemi A e B sono disposti come in figura l'insieme unione $A \cup B = C$ presenta una ovvia partizione in tre sottoinsiemi disgiunti; essi sono:

____

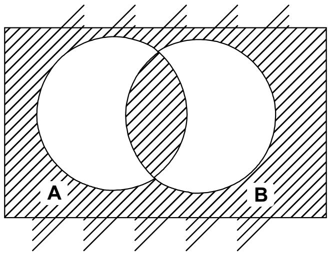
1 ⇒ 3	2 ⇒ 3	3 ⇒ 2	4 ⇒ 2	5 ⇒ 3	6 ⇒ 3	7 ⇒ 3	8 ⇒ 4	9 ⇒ 2	totale 25

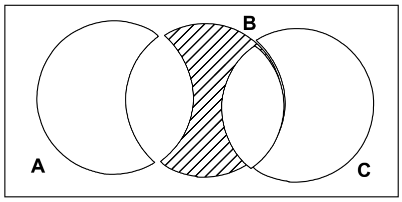
4/11/94: teoria insiemi e logica

1) La zona in tratteggio ha rispettivamente come espressione:

____

____





2) Se $A \subseteq B$ allora

2.1) $A - B =$ ____________ 2.2) $A \cap B =$ ___________ 2.3) $A \cup B =$ __________

3) Denotare un insieme significa: ____

4) Consideriamo nell'insieme universale dei numeri naturali i seguenti insiemi $A=\{x \mid x=4 \vee 7\leq x\leq 12\}$ e $B=\{x \mid 3\leq x\leq 9\}$, connotare o denotare i seguenti insiemi:

$A-B = \{$______________________________ $A\cup B = \{$______________________________

5) Considerere sulla retta i seguenti intervalli: $A=]2,5[$ e $B=[1,4]\cup]6,8[$.
Rappresentare a) $\overline{A} \cup B$ b) $A\cap B$ c) $\overline{A} \cap B$

1 2 4 5 6 8

__________________⊥____⊥___________⊥____⊥_____⊥___________⊥__________________

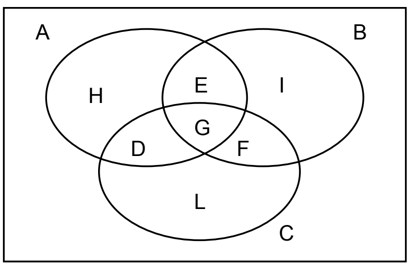
A							
B							
$\overline{A}$							
$A\cap B$							
$\overline{A} \cup B$							
$\overline{A} \cap B$							

6) Presi 40 studenti 25 hanno letto il libro A, 22 il libro B, 22 il libro C, 33 il libro A o il libro B, 32 A o C e 31 B o C; 10 studenti hanno letto tutti e tre i libri. Quanti studenti hanno letto solo un libro? Quanti studenti non hanno letto nulla? Indicare con m(A) i lettori di A e così via.

m(A) =_________ m(B) = _________ m(C) = ________ $m(A\cup B)$ = _________

$m(A\cup C)$ = _________ $m(B\cup C)$ = _________ $m(G)=m(A\cap B\cap C)$ = __________

$m(A\cap B)$ = _________ $m(A\cap C)$ = _________ $m(C\cap B)$ = _________



m(D) = _________ m(F) = __________

m(E) = _________ m(H) = __________

m(I) = _________ m(L) = __________

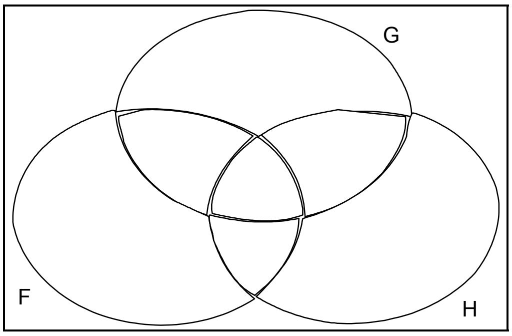
$m(A\cup B\cup C)$ = _________

$m(A \cup B \cup C)^C =$ _________

7) Indicate con p, q e r delle proposizioni dimostrare mediante tabella di verità che $p \wedge (q \vee r)$ equivale a $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
v	v	v					
v	v	f					
v	f	v					
v	f	f					
f	v	v					
f	v	f					
f	f	v					
f	f	f					

8) Determinare, ammesso che esistano, le conclusioni (FH) che derivano dalle categoriche di tipo I e A nella III figura (GH e GF)



pr. maggiore ____

pr. minore ____

conclusione ____

9/11/96: logica

1 Date le proposizioni p, q scrivere le proprietà seguenti:

legge di assorbimento per il $\vee$	
legge di assorbimento per il $\wedge$	
legge di De Morgan per $\wedge$	
legge di De Morgan per $\vee$	

2 Data la seguente proposizione: $s = \{[(p\leftrightarrow q)\wedge r]\rightarrow \overline{r}\}\leftrightarrow q$ determinarne il valore per p=*v*, q=*v*, r=*f* eseguendo una operazione alla volta in modo che si riconoscano i singoli risultati intermedi.

$s = \{[(p\leftrightarrow q)\wedge r]\rightarrow \overline{r}\}\leftrightarrow q =$

3 Usando la proprietà distributiva e le proprietà del vero e falso dimostrare la seguente equivalenza:

$a\vee(\overline{a}\wedge b)=a\vee b$

$a\vee(\overline{a}\wedge b)=$

4 Utilizzando le tabelle di verità dimostrare che $s = [p\rightarrow(q\wedge r)]\rightarrow(p\rightarrow q)$ è una tautologia.

p	q	r	$q\wedge r$	$p\rightarrow(q\wedge r)$	$p\rightarrow q$	s	$s = [p\rightarrow(q\wedge r)]\rightarrow(p\rightarrow q) \overset{(1)}{=} [\overline{p}\vee(q\wedge r)]\rightarrow(\overline{p}\vee q) =$
v	*v*	*v*					
v	*v*	*f*					
v	*f*	*v*					
v	*f*	*f*					
f	*v*	*v*					
f	*v*	*f*					
f	*f*	*v*					
f	*f*	*f*					

5 Dimostrare la tautologia di cui all'esercizio precedente utilizzando le proprietà formali dei diversi connettivi ed utilizzando le righe vuote nell'ultima colonna della tabella precedente. In corrispondenza del simbolo di = sovrascrivere il numero corrispondente alla proprietà utulizzata in base alla seguente legenda:

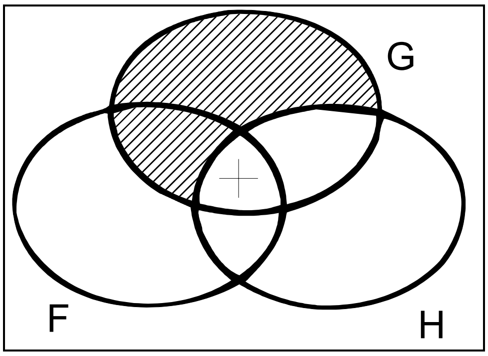
(1) equivalenza della implicazione (2) legge di De Morgan per $\wedge$ (3) legge di De Morgan per $\vee$

(4) doppia negazione (5) legge di assorbimento per $\wedge$ (6) legge di assorbimento per $\vee$

(7) propr. distrib. di $\wedge$ risp a $\vee$ (8) propr. distrib. di $\vee$ risp a $\wedge$ (9) proprietà del vero

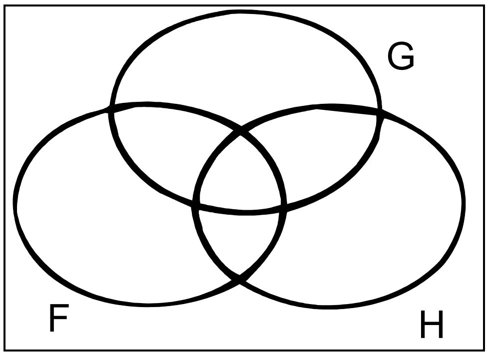
(10) proprietà del falso (11) proprietà esercizio 3

6 Si consideri lo schema rappresentato in figura. Indicare il tipo di categorica e la conclusione che se ne ricava



I prem.	tipo	II prem.	tipo	$\Rightarrow$	tipo
FG		GH			
conclusione in linguaggio naturale					

7 Si considerino le due seguenti proposizioni categoriche: *nessun F è G; ogni G è H.* Dopo aver disegnato i diagrammi di Venn usando il tratteggio verticale per la prima proposizione e quello orizzontale per la seconda, oppure due colori diversi, si dica di quale insieme bisogna chiedere che non sia vuoto per poter trarre una conclusione e, in quel caso, di che conclusione si tratta.



Se l'insieme ____ non è vuoto allora si può concludere tra F e H

con una categorica di tipo ___

e la conclusione è: ____

8 Si considerino le due seguenti funzioni proposizionali nell'insieme dei quadrilateri: q(x) = "*x è un rombo*" e p(x) = "*x ha le diagonali perpendicolari*". Stabilire se le proposizioni seguenti sono vere o false e indicare corrispondentemente un esempio dimostrativo o un controesempio, disegnando una figura illustrativa.

proposizione	v / f	figura caso 1	figura caso 2	figura caso 3
$\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$				
$\exists x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$				
$\forall x,\ \overline{q(x)} \Rightarrow p(x)$				

9 Provare ad esporre in forma simbolica la proposizione s costituita dal seguente proverbio *è tutto bene ciò che finisce bene* scrivendo le relative funzioni proposizionali p(x) e q(x) che la compongono e la proposizione finale composta dalle funzioni trovate con opportuni connettivi e quantificatori.

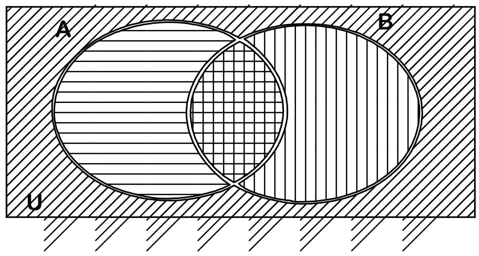
p(x) = "
q(x) = "
s =

1⇒2	2⇒1	3⇒2	4⇒3	5⇒6	6⇒4	7⇒5	8⇒5	9⇒4	totale

novembre 95: logica

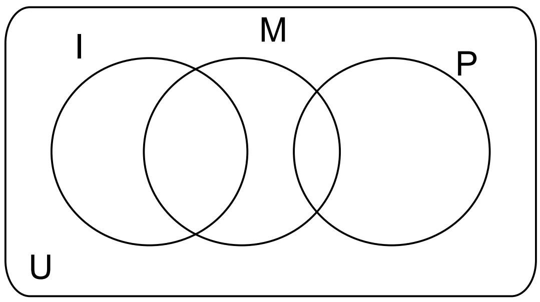
1 Tre alunni A, B e C hanno copiato durante un compito in classe. Il professore li interroga per sapere chi ha passato agli altri due le informazioni sbagliate e raccoglie le seguenti tre dichiarazioni: 1) A dice: "*B non è stato, è stato C*" 2) B dice: "*sono stato io C è innocente*" 3) C dice: "*io non c'entro, è stato A*". Il professore accerta che due hanno sempre mentito e uno ha detto il vero. Indichiamo con *a* la proposizione "è stato A", con *b* la proposizione "è stato B", con *c* la proposizione "è stato C". Completare la tabella indicando simbolicamente la dichiarazione di A, B e C. Quindi esaminare i valori di verità delle dichiarazioni nei tre casi in cui il colpevole sia A, B o C. Alla luce dei risultati stabilire chi ha passato le informazioni sbagliate.

2 Se i due cerchi rappresentano gli insiemi A e B dell'insieme universale U, in figura è anche rappresentata in tratteggio una partizione di U. Scrivere i quattro insiemi che la compongono	
obliquo	orizzontale
quadrettato	verticale

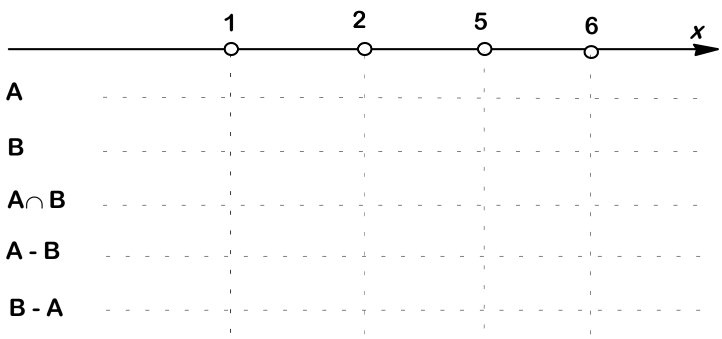


3 In un gruppo di 40 studenti 5 hanno il padre impiegato e fanno le vacanze al mare; quelli che fanno le vacanze al mare sono 20 e di questi 3 hanno il padre libero professionista; i figli di libero professionisti sono 10 e gli alunni che non vanno al mare, nè sono figli di impiegati, nè sono figli di liberi professionisti sono 8. Determinare le misure di tutti gli elementi della partizione dell'insieme U e concludere indicando m(I)

$m(I \cap M) =$	$m(M) =$
$m(M \cap P) =$	$m(P) =$
$m(P - M) =$	$m((M - I) - P) =$
$m(\overline{I \cup M \cup P}) =$	$m(M \cup P) =$



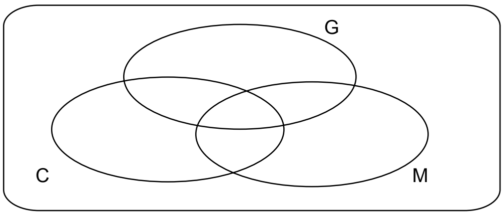
4 Considerere sulla retta i seguenti intervalli: A=[1,5[e B=]2,6]. Rappresentare gli insiemi indicati nella tabella sottostante e spiegare come mai risulta $(A \cap B) + (A - B) + (B - A) = A \cup B$



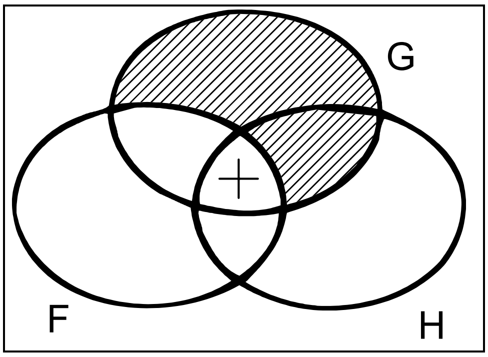
5 Si considerino le due seguenti premesse p = "*nessuno dei miei cugini è giusto*" e q = "*tutti i magistrati sono giusti*"; trarre la conclusione, se esiste, dopo aver rappresentato le due premesse e la conclusione con i diagrammi di Venn

p	tipo	q	tipo	$\Rightarrow$	tipo

conclusione:



6 Si consideri lo schema rappresentato in figura. Indicare il tipo di categorica, l'ordine di soggetto e predicato e la conclusione che se ne ricava



I prem.	tipo	II prem.	tipo	⇒	tipo
conclusione in linguaggio naturale					

7 Esprimere attraverso i soli connettivi di congiunzione, disgiunzione e negazione le seguenti proposizioni (usare i simboli più comodi):

$p \rightarrow q =$	$\overline{p \rightarrow q} =$
$p \leftrightarrow q =$	$\overline{p \leftrightarrow q} =$

8 Si dimostri sia mediante tabella di verità, sia per via formale, cioè usando le proprietà, la seguente tautologia: $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$

p	**q**	**p→q**		

$[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p =$ ______________________

____

____

____

Nella dimostrazione formale sfruttare la seguente identità: $p + pr = pv + pr = p(v + r) = pv = p$

9 Si considerino le due seguenti funzioni proposizionali nell'insieme dei triangoli: p(x) = "*x è un triangolo isoscele*" e q(x) = "*x è un triangolo ottusangolo*". Stabilire se le proposizioni seguenti sono vere o false e indicare corrispondentemente un esempio dimostrativo o un controesempio, disegnando una figura.

proposizione	v / f	figura 1	figura 2	figura 3
$\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$				
$\exists x, p(x) \Rightarrow q(x)$				
$\forall x, q(x) \Rightarrow p(x)$				

10 Negare la seguente proposizione: "*tutte le volte che ho studiato ho preso la sufficienza*" e, supponendo di indicarla con $\forall x, s(x) \rightarrow p(x)$ scrivere la negazione sia in forma simbolica, sia in linguaggio naturale

forma simbolica	linguaggio naturale

22/11/97: logica

1 Dato l'insieme A = {a,b,c,d} e la relazione $\mathscr{R} \subseteq A \times A$ così definita $\mathscr{R}$ = {(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)} il dominio $\mathscr{D}$ = { _________ } e il codominio $\mathscr{C}$ = { _________ }

La relazione non è riflessiva perché ____________________ non è simmetrica perché ____________________

è transitiva perché 1) ______________________ 2) ______________________ 3) ______________________

La relazione data rappresenta una proprietà delle lettere dell'alfabeto. Quale? __________________________

2 L'elemento neutro rispetto a ∧ è _______ e rispetto a ∨ è ________

3 Date le proposizioni p e q precisare a cosa corrispondono le proposizioni definite dalle colonna indicate

p	q	(1)	(2)	(3)	(4)
v	*v*	*f*	*f*	*v*	*v*
v	*f*	*v*	*v*	*v*	*f*
f	*v*	*v*	*v*	*f*	*f*
f	*f*	*f*	*v*	*v*	*v*

(1) ______________________(2) ____________________

(3) ______________________(4) ____________________

(5) Usando la sola variabile p scrivere una possibile formulazione simbolica delle proposizioni "*gli asini volano*" e "*piove o non piove*"

"*gli asini volano*" = ____

"*piove o non piove*" = ____

4 Scrivere a cosa corrispondono le 4 seguenti proposizioni:

p ∧ (p∨q) = _____ p ∧ (p∧q) = _____ p ∨ (p∨q) = _____ p ∨ (p∧q) = _____

5 Data la seguente proposizione: $s = \{[\overline{p \leftrightarrow q} \vee r] \rightarrow \overline{r}\} \leftrightarrow p$ e sapendo che p = *v*, q = *v*, r = *f* sostituire i valori di verità eseguendo una operazione alla volta in modo che si riconoscano i singoli risultati intermedi.

$s = \{[\overline{p \leftrightarrow q} \vee r] \rightarrow \overline{r}\} \leftrightarrow p$ = ____

6 Utilizzando le tabelle di verità trovare i valori di verità di s = (p→q) → (pr → q).

p	q	r	p→q	pr → q	s
v	*v*	*v*			
v	*v*	*f*			
v	*f*	*v*			
v	*f*	*f*			
f	*v*	*v*			
f	*v*	*f*			
f	*f*	*v*			
f	*f*	*f*			

7 In corrispondenza delle seguenti proposizioni indicare il corrispondente valore di verità:

Se "2+2 = 5" allora "2+2 = 4"	
Se "2+2 = 5" allora "2+1 = 5"	
Se "2+2 = 4" allora "2+1 = 5"	
Se "2+2 = 4" allora "2+1 = 3"	

8 Si consideri come insieme universale quello degli esseri viventi e siano assegnate in esso le seguenti funzioni proposizionali:

R(x) = "x è una ragazza" e C(x) = "x è calma"

Scrivere il valore di verità e il significato delle seguenti 4 proposizioni.

$\forall x, R(x) \rightarrow C(x)$ ____

$\forall x, R(x) \wedge C(x)$ ____

$\exists x, R(x) \rightarrow C(x)$ ____

$\exists x, R(x) \wedge C(x)$ ____

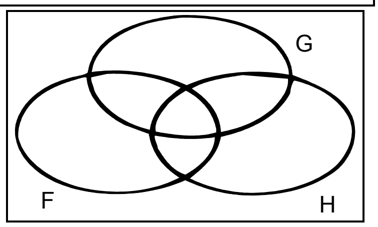
Spiegare poi, riflettendo sulla differenza di significato tra $\wedge$ e $\rightarrow$, quale sia la differenza tra la III e la IV proposizione.

La terza è vera anche quando ____

9 Si indichino con A l'insieme degli anfibi, con M quello dei mammiferi e con L quello dei lupi. Indicare il tipo di categorica e la conclusione che se ne ricava

I prem.	Tipo	II prem.	tipo	$\Rightarrow$	tipo
conclusione in linguaggio naturale					

10 Si considerino le due seguenti proposizioni categoriche: *qualche F è G; ogni G è H*. Dopo aver disegnato i diagrammi di Venn, si tragga una conclusione.



La conclusione è: ______________________________________

11 Supponiamo che a(x) e b(x) siano le funzioni proposizionali che definiscono gli insiemi A e B. Si consideri: la proposizione diretta $\forall x, a(x) \Rightarrow b(x)$

la conversa è __________________________ la contraria è __________________________________

la contronominale è _____________________ la negazione è _________________________________

dare un caso in cui la diretta è vera e la conversa è falsa ____

dare un caso in cui la diretta e la conversa sono entrambe vere ___________________________________

per dimostrare che la diretta è falsa basta dare un *controesempio* cioè trovare ________________________

____

12 In una classe di 30 alunni almeno un alunno ha i capelli rossi e inoltre per ogni coppia di alunni almeno uno non ha i capelli rossi. Quanti sono gli alunni con i capelli rossi? Spiegare la risposta.

____

____

____

____

1⇒4	2⇒1	3⇒4	4⇒2	5⇒1	6⇒2	7⇒1	8⇒3	9⇒3	10⇒3	11⇒3	9⇒4	tot⇒31

14/12/96: geometria e relazioni

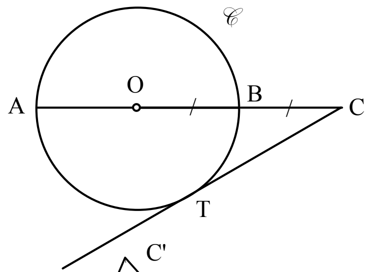
1 Consideriamo un piano α ed una retta *r* su di esso che lo divide in due semipiani β e γ. Sia P un generico punto di *r*, B e C due generici punti di β e γ. Chi ci garantisce che la retta *r* esiste? È corretto affermare che $P \in r_{BC}$? Chi ci garantisce che $r_{BC} \cap r \neq \varnothing$? Nel citare i postulati dare il numero sul libro oppure sintetizzarne il contenuto

2 Data una retta *r* e indicate con (A,B) e (B,C) due generiche coppie di punti distinti della retta e con $\rangle$ il simbolo di ordinamento, cosa significa dire che la retta *r* è un insieme totalmente ordinato? Indicare la negazione di $\rangle$ con $\langle$ e la disgiunzione esclusiva (aut) con $\dot{\vee}$. Scrivere la risposta simbolicamente

3 Come devono essere due segmenti per poterli sommare? Se due segmenti AB e CD non soddisfano la condizione precedente come si fa a sommarli? Spiegare a parole ma in forma precisa

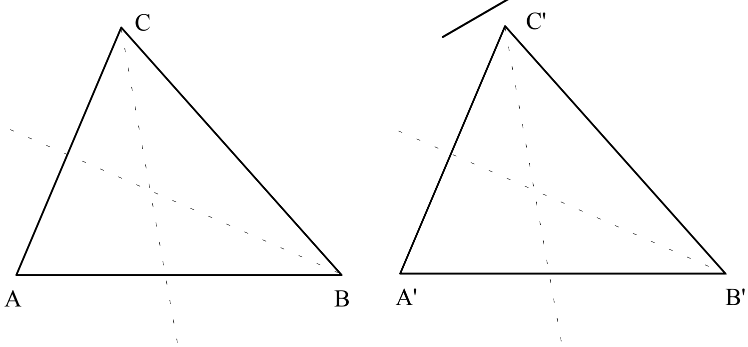
4 Si consideri la seguente proposizione: *la retta ha un verso e lungo tale verso non cè nè un prima nè un dopo*. Questa proposizione ci dice che la retta gode di due proprietà degli insiemi. Spiegare quali sono.

5 Si consideri la figura a fianco; si descriva in linguaggio naturale il processo che porta a costruirla e quindi si individui su di essa una proprietà osservabile sulla congruenza di due segmenti.

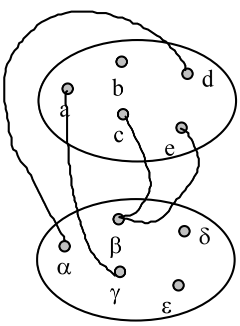


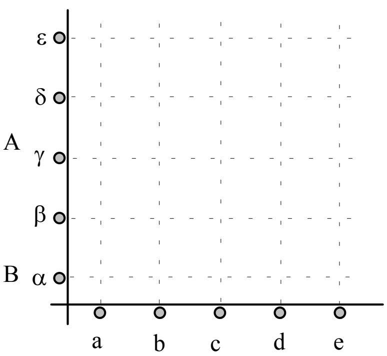
6 Si consideri il seguente teorema di cui viene richiesta la costruzione della figura e la scrittura simbolica dei dati, della ipotesi e della tesi: *due triangoli sono congruenti se hanno congruenti un angolo, la bisettrice di tale angolo e l'altezza relativa ad uno dei due lati dell'angolo.*

Dati:
Ipotesi



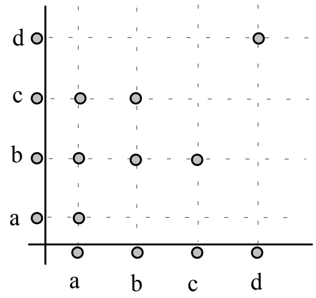
7 Si consideri la relazione rappresentata in figura tra gli insiemi A = {a, b, c, d, e} e B = {α, β, γ, δ, ε}.





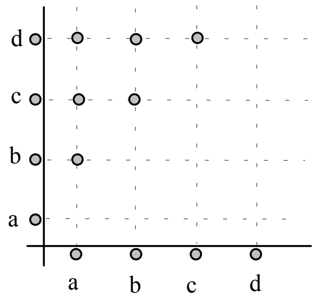
La relazione $\mathscr{R}$ tra A e B è univoca?
Il dominio di $\mathscr{R}$ è $\mathscr{D}$ = {
Il codominio di $\mathscr{R}$ è $\mathscr{C}$ = {
$\mathscr{R}$ è denotata dall'insieme {
Dare la rappresentazione cartesiana della relazione

8 Data la relazione $\mathscr{R}$ tra A e sè stesso il cui diagramma cartesiano è dato in figura spiegare perchè non è riflessiva, non è simmetrica, non è transitiva



non è riflessiva perché
non è simmetrica perché
non è transitiva perché

9 Data la relazione $\mathscr{R}$ tra A e sè stesso il cui diagramma cartesiano è dato in figura e che non è riflessiva, è antisimmetrica e transitiva si chiede di scrivere di quale relazione tra le prime 4 lettere dellálfabeto si tratti (si consiglia di riflettere sulle proprietà e motivare la risposta). Cosa si può dire di *d* ?



1⇒3	2⇒4	3⇒3	4⇒3	5⇒4	6⇒6	7⇒4	8⇒3	9⇒3	totale

23/2/96: gli insiemi numerici e le espressioni frazionarie

$\boxed{1}$ Dati due insiemi numerici A e A' diversi (su cui sono state definite le ordinarie operazioni) si dice che tra essi esiste un isomorfismo se tra gli elementi di A e A' esiste una corrispondenza biunivoca che: …

$\boxed{2}$ Nelle proposizioni seguenti scrivere la risposta se si tratta di una domanda, o vero o falso se si tratta di una affermazione (fare una crocetta su quella che si ritiene sia la risposta giusta):

Un numero razionale ed una frazione sono la stessa cosa	$\boxed{V}$ $\boxed{F}$
Due frazioni si dicono equivalenti e si scrive $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ se e solo se …	
Nell'insieme dei numeri razionali indichiamo con $\alpha = \left[\frac{m}{n}\right]$ l'insieme di tutte le frazioni equivalenti a $\frac{m}{n}$, l'elemento neutro rispetto alla somma è …	$0 = \left[\frac{\ }{\ }\right]$
invece, l'elemento neutro rispetto al prodotto è …	$1 = \left[\frac{\ }{\ }\right]$
il reciproco di $\alpha = \left[\frac{m}{n}\right]$ è …	$\alpha' = \left[\frac{\ }{\ }\right]$
m : n e la frazione $\frac{m}{n}$ sono lo stesso numero	$\boxed{V}$ $\boxed{F}$
m : n attraverso un opportuno isomorfismo corrisponde a …	$\frac{\ }{\ } : \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ }$
Se nell'insieme dei numeri interi si fosse stabilito per la regola dei segni del prodotto che (+)(+) = (–)(–) = (–) e (+)(–) = (–)(+) = (+) allora non varrebbe più la proprietà commutativa	$\boxed{V}$ $\boxed{F}$
$\alpha^0 = 1^\alpha = 1^{-\alpha} = \alpha^1 : \alpha = \alpha^0 : \beta^0$	$\boxed{V}$ $\boxed{F}$

$\boxed{3}$ Nelle proposizioni seguenti scrivere la risposta se si tratta di una domanda, o vero o falso se si tratta di una affermazione (fare una crocetta su quella che si ritiene sia la risposta giusta):

$(\alpha\ \beta)^m =$	$(\alpha + \beta)^m = \alpha^m + \beta^m$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$	$(\alpha + \beta) : \beta =$	$(\alpha \cdot 0)^m =$
$-(\alpha\ \beta) : \beta =$	$[(\alpha)^m]^n =$	$(-\alpha)^{2n} = \alpha^{2n}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$	$\alpha^{-n} : \alpha^{-m} =$
$\{1:[1:(1:\alpha^{-n})]\} =$	$-(-\alpha - \beta) =$	$\alpha\cdot\alpha:\alpha^2:\alpha^{-1} =$	$(\alpha^n)^m:\alpha^m=\alpha^{(n-1)m}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

4 Dimostrare, applicando le definizioni, che se α è un numero razionale qualsiasi e m e n sono due numeri interi positivi con m > n si ha $\alpha^n : \alpha^m = \alpha^{n-m}$ come nel caso in cui n > m. In corrispondenza di ogni passaggio indicare la motivazione

5 Descrive in linguaggio naturale la seguente proprietà espressa in linguaggio simbolico: $\forall(\alpha,\beta),\ \alpha \in Z \wedge \beta \in Z \Rightarrow -(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$

6 Risolvere la seguente espressione frazionaria

$$\left\{\left[-2\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{2}\right)\right]^3 : \left[\left(2-\frac{10}{7}\right)+\frac{3^4}{5^2}\cdot\frac{-25}{(-9)^2}\right]^2\right\} : \left\{\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^{-3} : \left(\frac{4}{25}\right)^3 + \frac{4}{7^2} : \left(-\frac{2}{7}\right)\right\}^2 \cdot \frac{5}{7}$$

7 Risolvere la seguente espressione frazionaria

$$\frac{-4\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right):\left(\frac{7}{30}-\frac{5}{12}\right)-\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}\right):\left(-\frac{3}{2}\right)\right]}{\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)-\left[-2^2\left(3-\frac{1}{2}\right)+2\left(3+\frac{1}{2}\right)\right]}$$

5/4/97: gli insiemi numerici e le loro proprietà

1 Come si passa dagli insiemi ai numeri naturali? Cioè cos'è un numero naturale?

2 Se indichiamo con $(abc)_n$ un numero composto dalle cifre a, b, c, nel sistema posizionale in base n scrivere il valore decimale del seguente numero indicando gli estremi del calcolo: $(752)_8 =$

3 Nell'insieme dei numeri naturali la moltiplicazione $n \cdot m$ è definita come:

4 La legge di annullamento del prodotto afferma che:

5 Due numeri sono primi tra loro se:

6 Perché è impreciso affermare che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$?

7 L'insieme $\mathbb{Z}$ è ordinato. Enunciare il criterio usato per il confronto tra due numeri interi α e β distinguendo i tre casi possibili

8 Si consideri l'ampliamento che fa passare da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ e si indichi con $\mathbb{F}$ l'insieme formato dalle classi di frazioni apparenti. 1) Si effettua l'ampliamento perché 2) Tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{F}$ esiste un isomorfismo, cioè

9 Una frazione è

10 Due frazioni sono equivalenti $\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q} \Leftrightarrow$

11 Dato l'insieme $\mathbb{F}$ delle frazioni l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è definito come

12 Sia $\alpha \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{N}$ allora: $\alpha^n =$

13 Sia $\alpha \in \mathbb{Q}$ e $\beta = -n \in \mathbb{Z}^-$ allora: $\alpha^\beta =$

14 Si considerino $a \in \mathbb{Q}$, $\alpha = -n \in \mathbb{Z}^-$ e $\beta = -m \in \mathbb{Z}^-$ allora:

$a^\beta \cdot a^\alpha = \left(\frac{1}{a}\right)^m \left(\frac{1}{a}\right)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{n+m} = a^{-(n+m)} = a^{(-n)+(-m)} = a^{\beta+\alpha}$. Scrivere sopra ciascuno dei 5 segni di = la proprietà di cui ci si è serviti scegliendo tra 1) prodotto potenza naturale con la stessa base 2) definizione potenza ad esponente negativo 3) proprietà dell'opposto 4) postulato 5) dato 6) proprietà del quoziente

15 Si considerino le frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ e siano $r = mcm(n,q)$, $s = r:n$, $t = r:q$ allora:

$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m\,s}{n\,s}+\frac{p\,t}{q\,t}=\frac{m\,s}{r}+\frac{p\,t}{r}=\frac{m\,s+p\,t}{r}$ Scrivere sopra ciascuno dei 3 segni di uguale il numero o i numeri delle proprietà utilizzate scegliendo tra: 1) definizione di frazione 2) definizione di somma tra frazioni 3) proprietà di equivalenza tra frazioni 3) dato dell'esercizio 4) definizione di divisione 5) definizione di moltiplicazione 6) proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

16 Il numero di numeri rappresentabili con 6 posti in base 4 è ____________________________________

1, 2	**2, 2**	**3, 2**	**4, 2**	**5, 2**	**6, 1**	**7, 3**	**8, 4**	**9, 2**	**10, 2**	**11, 3**	**12, 1**	**13, 1**	**14, 5**	**15, 4**	**16, 2**

19/5/98 Insiemi numerici

1 Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}$ e siano α_1 e α_2 due generici numeri interi di valore assoluto a_1 e a_2 con $a_1<a_2$. Completare la seguente tabella che definisce l'operazione di addizione in $\mathbb{Z}$ $\Rightarrow 2$

α_1	α_2	$\alpha_1 + \alpha_2$	α_1	α_2	$\alpha_1 + \alpha_2$	α_1	α_2	$\alpha_1 + \alpha_2$	α_1	α_2	$\alpha_1 + \alpha_2$
$+a_1$	$+a_2$	$+(a_1+a_2)$	$+a_1$	$-a_2$		$-a_1$	$-a_2$		$-a_1$	$+a_2$	

2 Se nell'insieme dei numeri relativi venisse data la seguente regola dei segni: $\Rightarrow 0.5+1+1+0.5+1$

$(+) \cdot (+) = (-) \cdot (-) = (-)$ e $(+) \cdot (-) = (-) \cdot (+) = (+)$

per la moltiplicazione varrebbe ancora la proprietà commutativa	V F
varrebbe ancora la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma	V F
il numero intero corrispondente per isomorfismo al numero naturale n sarebbe	
l'opposto del numero intero -n sarebbe	
se fosse $(+) \cdot (+) = (+) \cdot (-) = (+)$ non varrebbe più la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma; infatti: $(+3)\ (0) = 0 = (+3)\ [(+2) + (-2)]$ darebbe	

3 Si consideri nell'insieme $\mathscr{F}$ delle frazioni la relazione di equivalenza $\frac{m}{n} \sim \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow m\,n' = m'\,n$. Dimostrare che la definizione di moltiplicazione $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$ rispetta la relazione di equivalenza $\Rightarrow 2$

4 Spiegare cosa significa che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}^+$ sono isomorfi (rappresentare le corrispondenze con $\leftrightarrow$). $\Rightarrow 1.5$

5 Nell'insieme dei numeri razionali l'elemento neutro rispetto alla somma è la classe di tutte le frazioni del tipo $\left[\frac{0}{n}\right]$. 5.1) Che differenza c'è tra $\left[\frac{0}{n}\right]$ e $\frac{0}{n}$? 5.2) Dimostrare che $\frac{0}{n} \sim \frac{0}{1}$ 5.3) Dimostrare che $\frac{0}{1}$ è l'elemento neutro rispetto alla somma. $\Rightarrow 0.5 + 1 + 1$

6 La seguente definizione di divisione con resto tra a e b con $b \neq 0$ $\{a : b = q \text{ resto } r\} \Leftrightarrow \{a = b \cdot q + r\}$ è imprecisa. Manca una cosa. Quale? $\Rightarrow 1$

7 Spiegare perché se n e m sono dei generici numeri naturali si ha $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

8 Rispondere alle seguenti questioni: $\Rightarrow 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 1$

$\forall\ m, m \in \mathbb{N} \Rightarrow 0^m = 0$	V F
$0 : 0$ è indeterminato perché	
$\forall\ m, m \neq 0 \Rightarrow m : 0$ è impossibile perché	
$a^0 = 1$ perché $a^n = a \cdot a \ldots a$ n volte	V F
0^0 è indeterminato perché $0^0 = 0^{n-n} = \ \ldots$	

9 Stabilire il risultato delle seguenti potenze definite in $\mathbb{Z}$ e in cui le lettere rappresentano dei numeri naturali qualsiasi non nulli: $\Rightarrow 1 + 0.5 + 0.5$

$[(-a)^n \cdot (-a)^n] = \qquad =$	$[-(a^3)^{-3}]^2 =$	$[-(a^3)^2]^{-3} =$

$\boxed{10}$ Spiegare perché nel definire l'insieme delle frazioni si stabilisce che $\mathscr{F} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ cioè si escludono le frazioni con denominatore nullo. In effetti se fosse accettabile $\frac{n}{0}$ si avrebbe che $\frac{n}{0} + \frac{p}{q}$ dà sempre lo stesso risultato indipendentemente da $\frac{p}{q}$. Dimostrarlo tenendo presente la relazione di equivalenza e spiegare perché una tale situazione non è accettabile. $\Rightarrow 3$

$\boxed{11}$ Nella seguente eguaglianza vera le lettere rappresentano numeri naturali $-(-a) - (+b) = (+a) + (-b)$. Rispondere alle seguenti domande: 11.1) indicare nell'ordine il significato dei tre segni meno 11.2) indicare le due proprietà che si usano nel passare dal I al II membro $\Rightarrow 1 + 1$

1F 26/9/2001 Logica delle proposizioni

1. Data la seguente proposizione: $s = \{[\overline{p \leftrightarrow q} \vee r] \rightarrow \overline{r}\} \leftrightarrow p$ determinarne il valore per p=*f*, q=*f*, r=*f* eseguendo una operazione alla volta in modo che si riconoscano i singoli risultati intermedi.

$s = = \{[\overline{f \leftrightarrow f} \vee f] \rightarrow \overline{f}\} \leftrightarrow f = \{[f \vee f] \rightarrow v\} \leftrightarrow f = v \leftrightarrow f = f$

Segnalo come molto diffuso il seguente errore: $\overline{f \leftrightarrow f} \neq v \leftrightarrow v$

2. Utilizzando le tabelle di verità dimostrare che $s = [p \rightarrow (q \wedge r)] \rightarrow (p \rightarrow q)$ è una tautologia.

(1) = $q \wedge r$ (2) = $p \rightarrow q$ (3) = $p \rightarrow (1)$ (4) = (3) $\rightarrow$ (2)

Ricordarsi quando si usa un simbolo di definirlo

p	q	r	(1)	(2)	(3)	(4)
v	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*
v	*v*	*f*	*f*	*v*	*f*	*v*
v	*f*	*v*	*f*	*f*	*f*	*v*
v	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*v*
f	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*
f	*v*	*f*	*f*	*v*	*v*	*v*
f	*f*	*v*	*f*	*v*	*v*	*v*
f	*f*	*f*	*f*	*v*	*v*	*v*

3. Dimostrare con un metodo a propria scelta che $p \wedge (p \vee q) = p \vee (p \wedge q) = p$ questa proprietà è detta *ridondanza di un termine* ed è utile per semplificare espressioni

Con la proprietà distributiva si dimostra la eguaglianza dei primi due termini $p \wedge (p \vee q) = (p \wedge p) \vee (p \wedge q) = p \vee (p \wedge q)$

Per dimostrare che $p \wedge (p \vee q) = p$ si può procedere in uno dei seguenti modi:

tabella di verità per una sola delle espressioni

osservare che $(p \vee q)$ ha un valore di verità più ampio di p (può essere vero se q è vero anche quando p è falso) ma se poi viene di nuovo congiunto a p si ritorna a p perché se p è vero lo è anche $(p \vee q)$ e se p è falso la congiunzione è falsa come p

con le proprietà formali $p \wedge (p \vee q) = (p \vee f) \wedge (p \vee q) = p \vee (f \wedge q) = p \vee f = p$

4. dimostrare che $s = [p \rightarrow (q \wedge r)] \rightarrow (p \rightarrow q)$ è una tautologia utilizzando le proprietà formali dei diversi connettivi. In corrispondenza del simbolo di = sovrascrivere il numero corrispondente alla proprietà utilizzata in base alla seguente legenda: (1) equivalenza della implicazione (2) legge di De Morgan per $\wedge$ (3) doppia negazione (4) legge di assorbimento (5) proprietà distributiva (6) legge di idempotenza (7) ridondanza di un termine (8) associativa (9) tertium non datur $p \vee \overline{p} = v$

$s = [p \rightarrow (q \wedge r)] \rightarrow (p \rightarrow q) \overset{(1)}{=} [\overline{p} \vee (q \wedge r)] \rightarrow (\overline{p} \vee q \overset{(1)}{=} \overline{\overline{p} \vee (q \wedge r)} \vee (\overline{p} \vee q) \overset{(2)(3)(8)}{=} p \wedge \overline{q \wedge r}\,) \vee \overline{p} \vee q =$

$\overset{(2)}{=} p \wedge (\overline{q} \vee \overline{r}) \vee \overline{p} \vee q \overset{(5)}{=} (p \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge \overline{r}) \vee \overline{p} \vee q \overset{(2)}{=} (p \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge \overline{r}) \vee \overline{p \wedge \overline{q}} =$

$\overset{(9)}{=} v \vee (p \wedge \overline{r}) \overset{(4)}{=} v$

Le proprietà (8) e (9) sono state aggiunte in quanto necessarie alla dimostrazione

5. Date le proposizioni *p* = "il Frisi mi piacerà" *q* ="le lezioni saranno interessanti" scrivere simbolicamente *a* ="il Frisi mi piacerà se le lezioni saranno interessanti"; *b* ="il Frisi mi piacerà solo se le lezioni saranno interessanti"; *c* ="il Frisi non mi piacerà se le lezioni non saranno interessanti"; *d* ="se il Frisi non mi piacerà sarà perché le lezioni non saranno interessanti"; *e* ="o il Frisi mi piacerà o le lezioni non saranno interessanti"; *f* ="le lezioni non saranno interessanti eppure il Frisi mi piacerà"

$a = q \rightarrow p$ $b = q \leftrightarrow p$ $c = \overline{q} \rightarrow \overline{p}$ $d = c$ $e = p \text{ xor } \overline{q}$ $f = \overline{q}\ p$

Diffusa la tendenza a scambiare p con q. Il significato da dare a perché è oggetto di discussione anche tra i logici e ho trattato come giuste le soluzioni che hanno usato $\leftrightarrow$

1F 20/10/2001 Logica, Insiemi, Relazioni

Rispondere a propria scelta a 5 domande sulle conoscenze e a 5 sulle competenze indicando nella prima riga della griglia a quali esercizi si risponde

Conoscenze

1.Data la funzione proposizionale p(x) = " x gode della proprietà P": 1.1) La proposizione $\forall x$, p(x) si legge: … 1.2) La sua negazione $\overline{\forall x, p(x)}$ = … 1.3) Un controesempio di $\forall x$, p(x) è …

1.1) Tutti gli x godono della proprietà p, o anche tutti gli x sono p 1.2) $\exists x, \overline{p(x)}$ 1.3) è un particolare valore di x che rende falsa la prima proposizione cioè falsifica la proposizione universale

2.Data la proposizione categorica "nessun fallito è ricco" scriverla in forma affermativa utilizzando l'attributo *povero* come negazione di *ricco*

Tutti i falliti sono poveri

3.Cos'è un sillogismo?: dare la spiegazione in un paio di righe

è uno schema di ragionamento in cui da due proposizioni categoriche contenenti un termine comune si ricava una terza proposizione categorica che lega i due termini non comuni

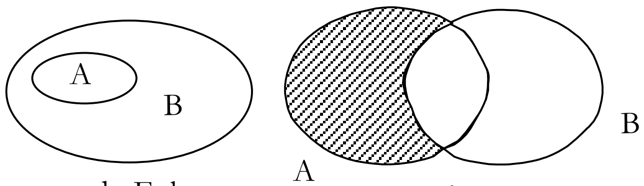
4.Spiegare che legame esiste tra una funzione proposizionale p(x) e l'insieme P che da essa si genera

L'insieme P ha come elementi gli x che rendono vera p(x) e viceversa. P è detto insieme di verità di p(x)

5.Chi è l'insieme così definito $A = \{x \mid k \in \mathcal{N} \wedge x = 2k + 1\}$: rispondere a parole

E' l'insieme dei numeri dispari

6.Gli insiemi A e B sono tali che $A \subset B$ rappresentarli con la notazione e di Eulero e con quella di Venn



secondo Eulero secondo Venn

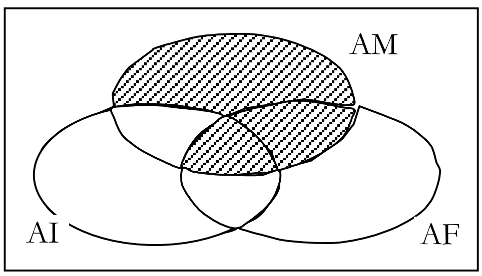
7.Data una relazione $\mathcal{R}$ definita in A×A dire: 5.1) cosa si intende con relazione 5.2) cos'è il dominio $\mathcal{D}$ della relazione 5.3) cosa significa che la relazione è simmetrica

5.1) La relazione è un qualsiasi sottoinsieme di A×A o in simboli $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ 5.2) il dominio è l'insieme degli elementi di A che compaiono almeno una volta come primo elemento della coppia che costituisce gli elementi di $\mathcal{R}$; si può anche dire che è l'insieme delle controimmagini cioè degli elementi che possiedono una immagine; simbolicamente si scrive $x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists y \mid (x,y) \in \mathcal{R}$ 5.3) La relazione è simmetrica quando $\forall (x,y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathcal{R}$ in modo non simbolico si può dire che la relazione è simmetrica quando l'immagine e la controimmagine si possono scambiare il ruolo

Competenze

a. Sono date le premesse: p1 = " le aziende mal dirette sono improduttive" e p2 = "le ferrovie non sono mal dirette". Rappresentarle con diagrammi di Venn dopo aver indicato a fianco del simbolo la sigla della categorica; stabilire se si può trarre una conclusione e, in caso positivo, dire di che tipo di conclusione si tratta e scrivere la frase corrispondente.

p1 è di tipo A e userò AM per aziende mal dirette e AI per azienda improduttiva
p2 è di tipo E (nessuna azienda ferroviaria è mal diretta) e userò AF per azienda ferroviaria; AM è l'attributo comune alle due categoriche che si rappresentano come in figura (retinatura della lunula di AM con AI e della lente tra AM e AF).
Dopo aver rappresentato le categoriche si osserva che non si possono trarre conclusioni perché nessuna categorica corrisponde alla figura tra AI e AF

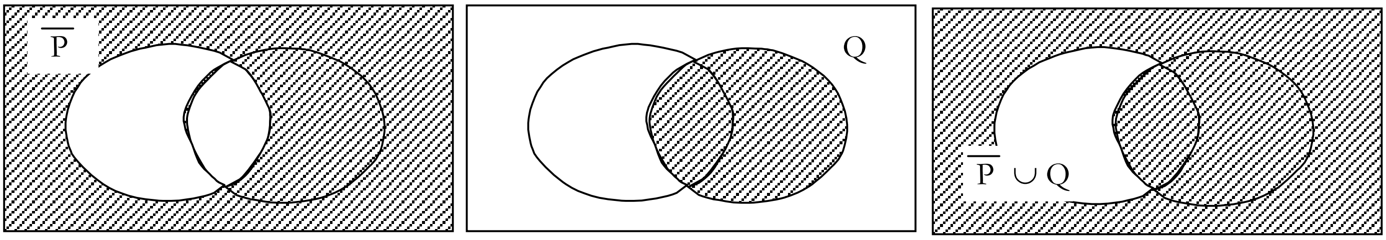


a. Come è noto dalla logica $p(x) \rightarrow q(x) = \overline{p(x)} \vee q(x)$. Se indichiamo con P l'insieme di verità di p(x)e con Q l'insieme di verità di q(x) scrivere attraverso le operazioni insiemistiche l'insieme $R = \{x \mid p(x) \rightarrow q(x)\}$darne una rappresentazione con i diagrammi di Eulero e infine scriverlo simbolicamente attraverso l'operazione insiemistica di differenza

Rappresentiamo in generale gli insiemi P e Q.

L'insieme $R = \{x|p(x) \rightarrow q(x)\} = \{x| \overline{p(x)} \vee q(x)\} = \overline{P} \cup Q$ (complementare di P con l'aggiunta di Q).

Ora poiché la lunula di P è l'insieme P – Q la parte tratteggiata (insieme complementare) è $\overline{P - Q}$

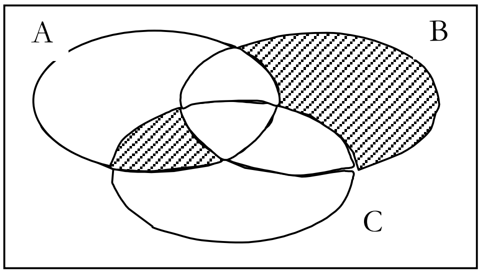


L'insieme A = {x | x∈𝒩 ∧ 1<x≤7}. Si consideri la relazione ℛ così definita ℛ = {(a,b) | (a,b)∈A×A ∧ a + b = 10}. Scrivere ℛ in forma denotativa e quindi dire (motivando) se è riflessiva, se è simmetrica, se è transitiva

A = {2,3,4,5,6,7} mentre ℛ = {(3,7),(4,6),(5,5),(7,3),(6,4)}

Non è riflessiva perché 3∈𝒟 mentre (3,3) ∉ ℛ

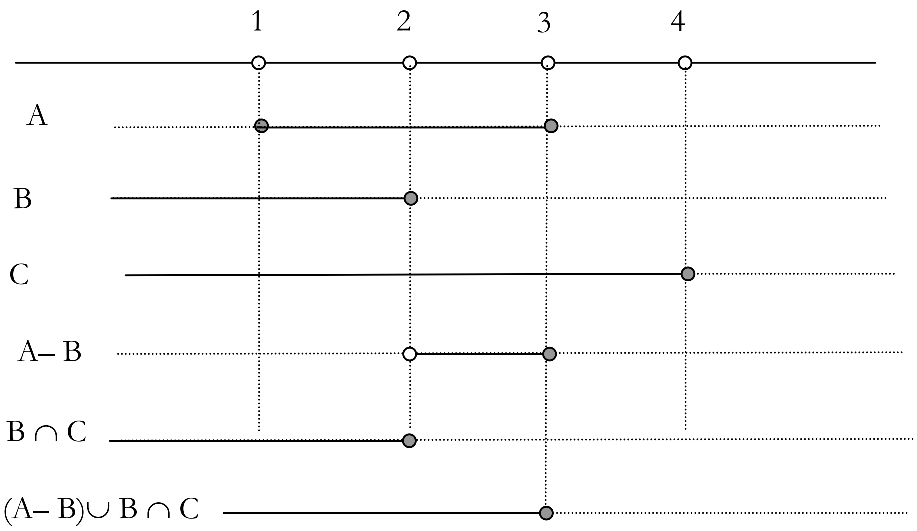
E' simmetrica come si vede osservando le coppie e per la stessa ragione è transitiva



b. Dati i 3 insiemi A, B e C disegnati con la rappresentazione di Eulero scrivere a cosa corrisponde l'insieme tratteggiato

   Si tratta di [(A∩C) – B]∪[B – A – C]

c. Sono dati gli intervalli A, B e C rappresentati in figura; rappresentare, dopo aver calcolato i termini intermedi l'insieme (A – B)∪(B∩C)



d. Dati gli insiemi A = {x | k∈𝒩 ∧ x = 3k}, B = {x | k∈𝒩 ∧ x = 5k}, C = {x | k∈𝒩 ∧ x = 15k} dire a parole chi sono gli insiemi A∪B, A∩B, A∩C, A–C, B – A

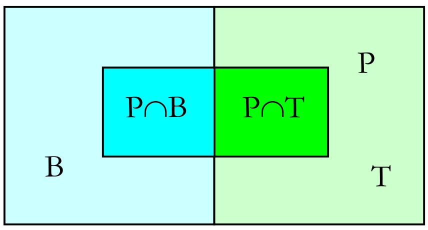
   A è formato dai multipli di 3, B dai multipli di 5 e C dai multipli di 15. Pertanto se si usa la rappresentazione di Eulero e si indica con U l'insieme dei numeri naturali si ha:

   che C corrisponde alla intersezione di A e B perché i multipli di 15 sono sia multipli di 3 che di 5.

   Si vede subito che A∪B ={0,3,5,6,9,10,12, 15, …}, A∩B = C = {0,15,30,45, …}, A∩C= C, A–C= {3,6,9,12,18, …} sono i multipli di 3 che non sono anche multipli di 5, B – A = {5,10,20,25, …} sono i multipli di 5 che non sono anche multipli di 3. Si osservi negli ultimi casi la assenza dello 0 che fa parte della intersezione e pertanto sparisce dalla differenza.

e. Da un'inchiesta tra 100 studenti che non hanno ripetuto classi del Frisi emerge che 50 studiano geografia e 50 studiano filosofia. Tra questi 30 dichiarano di avere studiato fisica quando facevano la prima; 20 studenti di prima dichiarano di studiare anche fisica. Perché non ci sono studenti di seconda? Disegnare il diagramma di Eulero. Quanti studenti frequentano la prima non nel PNI? Quanti frequentano il triennio non nel PNI? Perché se si ammette che ci siano ripetenti non si può risolvere il problema?

   L'insieme universale di 100 studenti viene diviso in due sottoinsiemi: studenti del biennio B (che studiano geografia) e studenti del triennio T (che studiano filosofia) con m(B) = m(T) = 50. Tra quelli del triennio 30 hanno frequentato il biennio nel PNI (perché studiavano fisica in prima); se indichiamo con P l'insieme di quelli del PNI avremo che m(P∩T) = 30. Infine abbiamo che m(P∩B) = 20.



   Non ci sono studenti di seconda perché geografia si fa solo in prima e gli studenti non del triennio sono 50 tanti quanti quelli che studiano geografia.

   Gli studenti del biennio e non Pni sono m(B–P∩B)= 50 –20 = 30

   Il triennio non PNI è frequentato da 50 – 30 = 20 studenti. Se ci fossero nel campione dei ripetenti potrebbero esserci studenti di indirizzo tradizionale che hanno fatto il PNI nel biennio e questo ci impedirebbe di affermare che m(P∩T) = 30

1F 19/12/01 Gli insiemi numerici e le loro proprietà

A) Numeri naturali

1) si chiama differenza tra m e n il numero d = m – n tale che …

d + n = m

2) Si chiama quoziente tra m e n il numero q = m : n tale che …; se q esiste si dice che …; n deve essere diverso da zero perché …

$q \cdot n = m$ m è multiplo di n secondo q se fosse n=0 si dovrebbe avere $q \cdot 0 = m$ e ciò è impossibile se $m \neq 0$ mentre è vera $\forall q$ se m=0; in entrambi i casi la operazione è mal posta

3) Le 4 proprietà fondamentali delle potenze sono … (indicare le basi con a, b e gli esponenti con m, n e precisare il limite di validità se occorre)

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ con $m \geq n$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

4) La seguente frase $\exists n \mid \forall m \Rightarrow n \geq m$ esprime una proprietà falsa; quale?

afferma che esiste un numero naturale più grande di qualsiasi altro naturale e ciò contrasta con il carattere illimitato superiormente dell'insieme N

5) La sottrazione gode della proprietà associativa ? (scrivere la proprietà e motivare la risposta)

No $(a-b)-c \neq a-(b-c)$ come si può vedere con un qualsiasi controesempio $(7-4)-2=1 \neq 7-(4-2)=5$

6) Un numero primo è …

Un numero divisibile solo per se stesso e per 1 (il solo è essenziale perché qualunque numero è divisibile per se stesso e per 1)

7) $m \cdot 0 = 0$ perché …

$m=[A_m]$ e $0 = [\varnothing]$ ma $A_m \times \varnothing = \varnothing$ e pertanto $m \cdot 0 = 0$

B) Numeri Interi

1) Siano $\alpha = -a$ e $\beta = -b$ allora $\alpha + \beta = \ldots$

$\alpha + \beta = -(a+b)$

2) $\alpha - \beta = \gamma \Leftrightarrow \ldots$

$\gamma + \beta = \alpha$

3) In Z la sottrazione è una operazione chiusa cioè … infatti $\alpha - \beta = \ldots$ dove $(-\beta) =$ è …

la sottrazione si può sempre eseguire come addizione con l'opposto del sottraendo $\alpha - \beta = \alpha + \overline{\beta}$

4) Dato $\alpha = \pm a$ il suo opposto $\overline{\alpha}$ è definito come …

quel numero $\overline{\alpha}$ tale che $\overline{\alpha} + \alpha = 0_Z$ e si ottiene invertendo il segno del numero α con lo stesso valore assoluto

5) Si consideri il seguente calcolo composto da 5 eguaglianze $3 - (4 - 9) = (+3) - [(+4) - (+9)] = (+3) - [(+4) + (-9)] = (+3) - [(-5)] = (+3) + [(+5)] = (+8)$. Tra le proprietà numerate nella tabella finale quali vengono usate (completare la tabella qui sotto):

1=	1	2=	4,12	3=	5	4=	4,12	5=	5

1) Dati α e $\beta = \pm b$ definire α^β nei due casi $\alpha^{+b} = \ldots$ e $\alpha^{-b} = \ldots$

$\alpha^{+b} = \alpha^b$ $\alpha^{-b} = \dfrac{1}{\alpha^b}$

2) Dati α, $\beta = +b$, $\gamma = -c$ si consideri la seguente catena di uguaglianze $(\alpha^\beta)^\gamma = (\alpha^b)^\gamma = \dfrac{1}{(\alpha^b)^c} = \dfrac{1}{\alpha^{bc}} = \alpha^{-(bc)} = \alpha^{\beta\gamma}$.

Cosa si è dimostrato? Tra le proprietà numerate nella tabella finale quali vengono usate (completare la tabella qui sotto)

1=	6	2=	7	3=	9	4=	7	5=	11

C) Numeri razionali assoluti Q

1) $\dfrac{m}{n} \sim \dfrac{p}{q} \Leftrightarrow \ldots$

$m \cdot q = p \cdot n$

2) $\dfrac{m}{n} \sim \dfrac{mr}{nr}$ infatti … e la proprietà si chiama …

$m \cdot (nr) = (mr) \cdot n$ per le proprietà associativa e commutativa del prodotto in N; la proprietà si chiama proprietà invariantiva delle frazioni

3) Un numero razionale è …

la classe di equivalenza di tutte le frazioni equivalenti ad una frazione data $\frac{m}{n}$ e si indica con $\left[\frac{m}{n}\right]$

4) Nell'insieme dei numeri razionali da quali frazioni è formato il numero $\left[\frac{1}{1}\right]$ e perché è l'elemento neutro rispetto al prodotto?

$\left[\frac{1}{1}\right] = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \dots\right\}$ $\quad \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{n}$

5) Siano $\alpha = \frac{m}{n}$ e $\beta = \frac{p}{q}$ con $p \neq 0$. Dimostrare (ricordando il significato di divisione) che $\alpha : \beta \sim \frac{mq}{np}$

$\alpha:\beta=\gamma \Leftrightarrow \gamma\cdot\beta=\alpha$ pertanto dovrà essere $\gamma\cdot\beta = \frac{p}{q} \cdot \frac{mq}{np} = \frac{pmq}{qnp} = \frac{m(pq)}{n(pq)} \sim \frac{m}{n} = \alpha$ ☺

1	Isomorfismo tra N e Z^+	7	Definizione di potenza ad esponente negativo
2	Isomorfismo tra N e frazioni apparenti	8	Proprietà associativa
3	Definizione di prodotto in Z per fattori concordi	9	Proprietà commutativa
4	Teorema sulla sottrazione in Z	10	Teorema sulla potenza di potenza ad esponente naturale
5	Definizione di addizione in Z	11	Definizione di prodotto in Z per fattori discordi
6	Definizione di potenza a esponente positivo	12	Calcolo dell'opposto

A	1	2	3	4	5	6	7	
B	1	2	3	4	5	6	7	
C	1	2	3	4	5			

1F 19/12/01 Proprietà delle potenze ed espressioni numeriche

Completare i seguenti calcoli con uso delle proprietà delle potenze:

$[(-3^2)^{-2}]^3 = + 3^{-12}$ il segno + deriva dall'elevamento di – a esponente pari (–6)		$(-3)^2\cdot 3^5\cdot(1/3)^{-12} = 3^2\cdot 3^5\cdot 3^{12} = 3^{19}$	$\dfrac{\frac{-3}{-3}}{-3} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$	$\text{mcm}(2^8\cdot 3^7\cdot 5^5;\ 2^6\cdot 3^8\cdot 5^4) = 2^8\cdot 3^8\cdot 5^5$
$\dfrac{3}{\frac{-3}{3}} = \dfrac{3}{-1} = -3$	$\text{MCD}(2^8\cdot 3^7\cdot 5^5;\ 2^6\cdot 3^8\cdot 5^4) = 2^6\cdot 3^7\cdot 5^4$	$(2^3)^2 : 2^{(3^2)}\cdot 2^4 = 2^6 : 2^9\cdot 2^4 = 2^1 = 2$	$27^3:(-1/3^4) = (3^3)^3:(-3^{-4}) = -3^{9+4} = -3^{13}$	
$2^{100}:4^{50}\cdot 8^6:16^3 = 2^{100}:2^{100}\cdot 2^{18}:2^{12} = 2^6$		$2^{13}\cdot 5^8:10^8 = 2^{13}\cdot 5^8:(2^8 5^8) = 2^5$		

Risolvere le seguenti espressioni:

$\boxed{1.}$ $\left[\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\right]:\left(-\frac{17}{27}\right)-1:\left(-\frac{4}{3}\right)$

$$\left[\left(\frac{1}{9}\right)^2-\left(\frac{9-5}{15}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\cdot\left(-\frac{27}{17}\right)+1\cdot\frac{3}{4}=\left[\frac{1}{81}-\frac{16}{225}\cdot\frac{25}{9}+\frac{1}{2}\right]\cdot\left(-\frac{27}{17}\right)+\frac{3}{4}=\left[\frac{1}{81}-\frac{16}{81}+\frac{1}{2}\right]\cdot\left(-\frac{27}{17}\right)+\frac{3}{4}=$$

$$=-\frac{27}{17}\cdot\frac{2-32+81}{162}+\frac{3}{4}=-\frac{27}{17}\cdot\frac{51}{162}+\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}\cdot+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$\boxed{2.}$ $\left[\dfrac{\left(\frac{11}{3}+\frac{3}{5}\right):\left(1-\frac{7}{9}\right)+\frac{4}{5}}{2\cdot\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{6}\right)}-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right):\left(-\frac{13}{7}\right)\right]^3\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)$

$$\left[\frac{\frac{55+9}{15}\cdot\frac{2}{9}+\frac{4}{5}}{2\cdot\frac{20}{6}}+\frac{7+6}{14}\cdot\frac{7}{13}\right]^3\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)=-\left[\frac{\frac{64}{15}\cdot\frac{9}{2}+\frac{4}{5}}{\frac{20}{3}}+\frac{13}{14}\cdot\frac{7}{13}\right]^3\cdot\frac{1}{7}=-\left[\left(\frac{96}{5}+\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{3}{20}+\frac{1}{2}\right]^3\cdot\frac{1}{7}=-\left[20\cdot\frac{3}{20}+\frac{1}{2}\right]^3\cdot\frac{1}{7}=$$

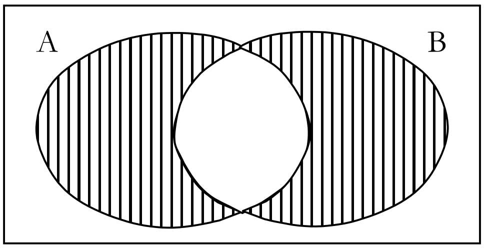
$$-\left(\frac{7}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{7}=-\frac{49}{8}$$

$\boxed{3.}$ $\dfrac{-\frac{3}{2}\cdot(-2)^4+5\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}+3^2\cdot 2^{-2}\left(-\frac{8}{9}\right)+1}{[(-2)^4+5]\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{4}\left(2+\frac{2}{5}\right)}+\dfrac{\left(-2+\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}{\left(-1+\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)+\frac{3}{10}}$

$$\frac{-24+45-2+1}{(16+5)\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{4}\frac{12}{5}}+\frac{-\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)+\frac{3}{10}}=\frac{20}{\frac{21}{3}+3}+\frac{-1}{\frac{1}{5}+\frac{3}{10}}=\frac{20}{10}-\frac{1}{\frac{5}{10}}=2-2=0$$

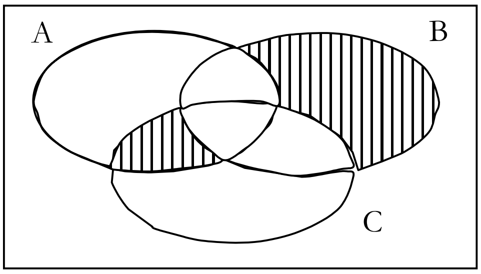
1F 10 ottobre 2006 logica e teoria insiemi

1. Dati gli insiemi in figura scrivere nello spazio riservato la espressione corrispondente alla prima e alla seconda immagine retinata.



Prima immagine scritta come unione: _____(A – B) ∪ (B – A)

Prima immagine scritta come differenza: __(A ∪B) – (B ∩ A)



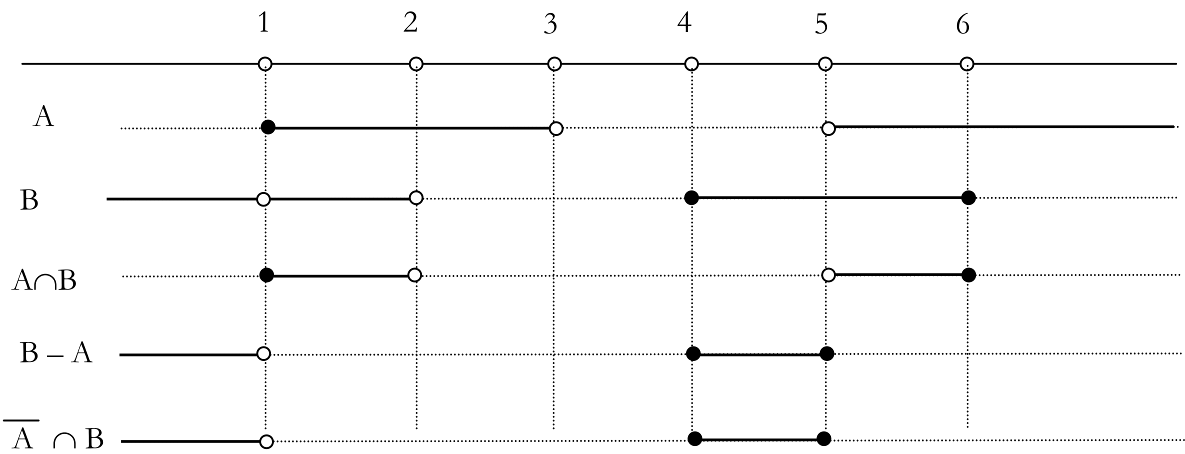
Seconda immagine scritta come unione:

(B – A – C) ∪ (A∩C – B)

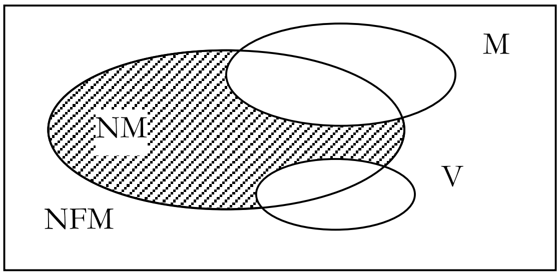
Nota di correzione: quando si scrive una espressione insiemistica bisogna farlo nella maniera più sintetica; ad esempio è inutile scrivere A – A∩B se si può scrivere A – B

Qualcuno non ha neanche capito in cosa consisteva rispondere; qualcuno ha invertito le prime due risposte.

2. Sono dati gli insiemi: $A = \{x \mid 1 \leq x < 3 \vee x > 5\}$ e $B = \{x \mid x < 2 \vee 4 \leq x \leq 6\}$ rappresentarli nello schema sottostante e rappresentare inoltre le operazioni indicate nelle altre righe.

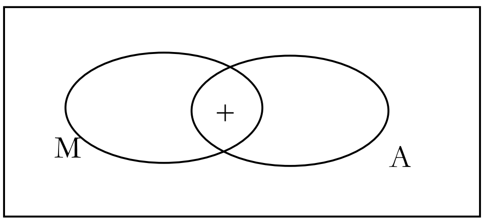


3. In 1F ci sono alunni residenti a Monza (M) e alunni residenti fuori Monza (FM). Alcuni alunni sono nati a Monza (NM) ma i nati a Monza non sono tutti residenti a Monza. Alcuni alunni abitano a Villasanta (V) e qualcuno di essi è nato a Monza. Disegnare il diagramma insiemistica di Eulero assumendo come insieme universale la 1F e, dopo aver disegnato correttamente gli insiemi tratteggiare l'insieme che rappresenta gli alunni nati a Monza ma che non risiedono né a Monza né a Villasanta.



Nota di correzione: Gli studenti di 1F (insieme universale = rettangolo) si dividono in NM e in NFM che sono il complementare (visto che da qualche parte si deve nascere). La corretta collocazione degli insiemi è una competenza di base necessaria ad affrontare i problemi in cui bisogna calcolare la dimensione delle diverse parti di cui sono composti (vedi raccolta compiti)

4. Sapendo che nessuno degli insiemi considerati è l'insieme vuoto rappresentare secondo la convenzione dei diagrammi di Venn la proposizione "qualche mammifero vive in acqua" dove M e A rappresentano l'insieme dei mammiferi e l'insieme di coloro che vivono in acqua.
   Cosa si può concludere dalla rappresentazione?



Si tratta di mettere una croce nella lente tra M e A. L'informazione sul fatto che nessuno degli insiemi è vuoto era ridondante visto che la proposizione data è di tipo esistenziale.

Sulla base del diagramma che è simmetrico si conclude che "qualche animale acquatico è un mammifero".

5. Utilizzando le tabelle di verità dimostrare che $p + \overline{p}\ q = p + q$.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p}\ q$	$p + \overline{p}\ q$	p + q		
V	V	F	F	V	V		
V	F	F	F	V	V		
F	V	V	V	V	V		
F	F	V	F	F	F		

Ripetere la dimostrazione utilizzando la proprietà distributiva della somma logica rispetto al prodotto logico.

$p + \overline{p}\ q = (p + \overline{p})(p + q) = V\ (p + q) = p + q$

Nota di correzione: quando si usano le proprietà formali occorre prestare attenzione all'uso delle parentesi e conviene usare come simboli gli stessi che si usano in algebra che sono più rapidi da scrivere. Qualcuno non ha capito che la seconda dimostrazione andava fatta come calcolo formale e ha riempito a vanvera la tabella di verità

6. Usando le proprietà formali delle operazioni logiche, tra cui quella dimostrata nell'esercizio precedente dimostrare la seguente tautologia: [(p→q)(q→r)]→(p→r) (cioè bisogna sviluppare i calcoli e dimostrare che viene sempre vero).

La dimostrazione sfrutta l'equivalenza del condizionale materiale, le leggi de Morgan e la proprietà di assorbimento dell'esercizio precedente $[(p\to q)(q\to r)]\to(p\to r) = \overline{(\overline{p}+q)(\overline{q}+r)} + \overline{p} + r = \overline{(\overline{p}+q)} + \overline{(\overline{q}+r)} + \overline{p} + r = p\,\overline{q} + q\,\overline{r} + \overline{p} + r$ $= (\overline{p} + p\,\overline{q}) + (r + q\,\overline{r}) = \overline{p} + \overline{q} + r + q = \overline{p} + r + V = V$

Nota di correzione: molte persone non hanno capito che le implicazioni dovevano essere tolte di mezzo subito per non appesantire inutilmente il calcolo.

7. Se la mia stampante funziona (SF), posso concludere il lavoro che ti ho promesso (CL) nel caso in cui il computer non si rompa ($\overline{CR}$). Il computer non si rompe eppure non posso concludere il mio lavoro. Come mai? Dimostrare in maniera formale che la stampante non funziona.

(SF) $\overline{CR} \to$ CL è vera; inoltre $\overline{CR}$ = V e CL = F si ha dunque (SF) V → F = $\overline{SF}$ + F = V e pertanto $\overline{SF}$ = V ovvero la stampante non funziona.

Nota di correzione: difficoltà a decodificare la frase iniziale (dove mettere il computer non si rompe)

8. Se un numero è multiplo di 6 allora è multiplo di 3. Scrivere la contronominale e la contraria.

contronominale " se un numero non è multiplo di 3 allora non è multiplo di 6" frase vera come la diretta
contraria " se un multiplo non è multiplo di 6 allora non è multiplo di 3" frase falsa come la conversa come dimostra il numero 9 che è multiplo di 3 ma non è multiplo di 6.

Nota di correzione: in molti non hanno compreso che l'esercizio consisteva semplicemente nell'applicare alla frase data la definizione di contrnominale e di contraria

9. Si considerino i numeri $(a)_{10} = 23$ e $(b)_{10} = 31$. Convertirli in base 2 e calcolare il prodotto ab facendo vedere che si perviene allo stesso risultato. Scrivere negli spazi i risultati intermedi e svolgere i calcoli qui a lato (se non basta lo spazio, ma dovrebbe bastare, aggiungere un foglio).

$(a)_2$ si trova eseguendo ripetutamente la divisione per 2 e scrivendo i resti in ordine inverso (i numeri più a sinistra sono quelli che corrispondono alle potenze del 2 di grado più elevato). Per ragioni di spazio metto le divisioni in tabella riportando sulla prima riga il quoziente e sulla seconda il resto.

23	11	5	2	1	0
1	1	1	0	1	

Dunque $(a)_2 = 10111$
Per calcolare $(b)_2$ basta osservare che 31 è 32 – 1 e cioè 11111
$(ab)_{10} = 23\cdot 31 = 713$
$(a)_2\ (b)_2$ richiede di svolgere una moltiplicazione in binario. I numeri forniti per la moltiplicazione comportano numerosi riporti. Per questa ragione si dedica una riga ai soli riporti. Per esempio se capita 1+1+1+1+1 cioè 5 decimale esso dovrà essere scritto come 101 e dunque si avrà un 1 e un altro 1 di riporto spostato di 2 colonne. I riporti vengono aggiornati man mano e per questo capitano degli 1 + 1 .

						1	0	1	1	1	X
						1	1	1	1	1	=
						1	0	1	1	1	
					1	0	1	1	1	0	
				1	0	1	1	1	0	0	
			1	0	1	1	1	0	0	0	
		1	0	1	1	1	0	0	0	0	
riporti		1	1+1	1	1	1+1	0	1			
somma	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	

Eseguiamo ora o la conversione in binario di 713 o la conversione in decimale del prodotto appena calcolato.

713	356	178	89	44	22	11	5	2	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	

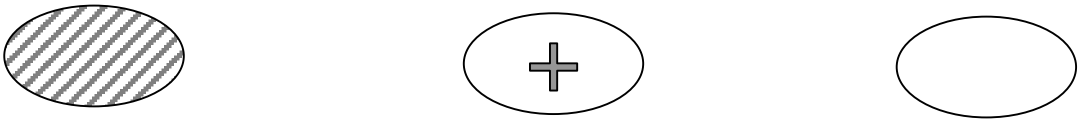
Dunque $(713)_{10} = (1011001001)_2$

Nota di correzione: esercizio inserito pere verificare la capacità di svolgere i conti nei due sensi e verificare quella di scrivere in maniera ordinata. Nella economia del compito faceva un po' da completamento.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	totale	voto
3	5	3	3	4	4	3	2	5	32	

1F 13/11/2006: teoria degli insiemi e relazioni

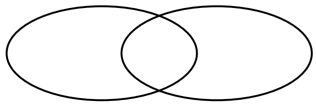
1) Nella rappresentazione di Venn chi sono gli insiemi (scrivere la risposta sotto la figura)



L'insieme vuoto — Un insieme non vuoto — Un generico insieme (vuoto oppure no)

Nota di correzione: la notazione di Venn viene introdotta perché consentendo di distinguere con un simbolo speciale il pieno dal vuoto dal dubbio permette con una stessa figura di esaminare tutti i casi possibili. La maggioranza non ha studiato nemmeno la definizione come si vede dall'esito degli esercizi 2 e 3

2) A è l'insieme degli abitanti di Monza e B è l'insieme dei pizzaioli, dare qui a lato la rappresentazione di Venn utilizzando le croci, il tratteggio e gli spazi bianchi.

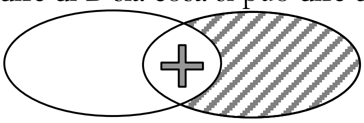


A B

Va messa una croce nelle due lunule e nella lente infatti esistono pizzaioli monzesi, pizzaioli non monzesi e monzesi non pizzaioli

Nota di correzione: nonostante i suggerimenti a rivedere in corso di svolgimento, la non conoscenza della definizione non ha permesso di essere corretti. Si sono visti errori di tutti i tipi (croce solo nella lente, resinatura delle lunule, ...).

3) Il seguente diagramma di Venn come si legge? Rispondere nello spazio indicato precisando sia cosa si può dire di B sia cosa si può dire di A



A B

Tutti i B sono A, A non è l'insieme vuoto; non si sa se A coincida con B oppure no e dunque $B \subseteq A$

4) Calcolare e semplificare le seguenti espressioni insiemistiche

a) $A \cap [B \cup (A \cap B)] =$ __ $A \cap B$ perché $(A \cap B) \cup B = B$

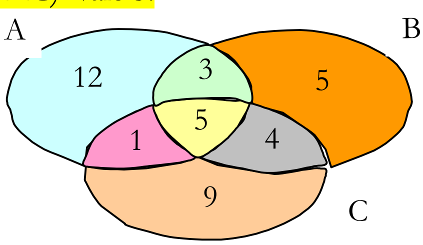
b) $(A \cap B) \cup \overline{(A \cap B)} =$ __ $\mathcal{U}$ perché i due insiemi di cui si fa l'unione sono complementari

c) $(A \cup A \cap A) \cup (\varnothing \cap B) =$ __ $A \cup \varnothing = A$

d) $\overline{A \cap (A \cup B)} =$ _ $\overline{A}$ perché A è un sottoinsieme di $A \cup B$

5) Tre insiemi A, B e C hanno le seguenti dimensioni $m(A \cup B \cup C) = 39$ cioè l'unione dei tre insiemi è formata da 39 elementi; $m(A - B - C) = 12$; $m(A) = 21$; $m(A \cap B - C) = 3$; $m(A \cap B \cap C) = 5$; $m(B) = 17$; m(insieme i cui elementi appartengono ad almeno due insiemi) = 13. Rispondere sul foglio e attenersi alla simbologia indicata, usare una figura e svolgere i conti che consentono di determinare le informazioni via via necessarie indicando l'operazione svolta. Determinare a) $m(B - A)$ b) $m(C - A - B)$ c) $m(C)$

Lo svolgimento consiste nel misurare la numerosità della partizione dell'insieme universale che nel nostro caso è $A \cup B \cup C$. Il totale delle misure degli insiemi disgiunti fa 39. La parte in azzurro ($A - B - C$) ha misura 12, quella in verde chiaro ($A \cap B - C$) ha misura 3 e quella in giallo ($A \cap B \cap C$) vale 5.



Poiché $m(A) = 21$ si ha che $m(A \cap C) = 21 - (12 + 3 + 5) = 1$ (parte in rosa)

Poiché $m(B) = 17$ si ha che $m(B - A) = 17 - 8 = 9$ ☺

Ma l'insieme i cui elementi appartengono ad almeno due insiemi $(A \cap B) \cup (C \cap B) \cup (A \cap C)$ ha misura 13 e dunque la parte in grigio ha m(grigio) $= 13 - (3+5+1) = 4$ e m(arancione) $= 17 - (3+5+4) = 5$ $m(C - B - A)$.

Poiché conosciamo il totale $m(C - A - B) =$ m(marrone chiaro) $= 39 - (12+3+5+1+4+5) = 9$ ☺

Infine $m(C) = 1+5+4+9 = 19$ ☺

Nota di correzione: molti errori formali, inutile copiatura dei dati, mancata connessione dei diversi passaggi. Non è obbligatorio lavorare con i colori, si possono usare nomi simbolici, ad esempio A_1 = A–B–C etc.

6) Sia A = {0,1,2,3}e si consideri in A×A la relazione (1,0), (2,1), (3,2).

a) Qual è il dominio $\mathcal{D}$? __{1,2,3}___________________________________

b) Con quale legge sono state costruite le coppie? __(a,b)$\in\mathcal{R}\Leftrightarrow$ a – b = 1________________________

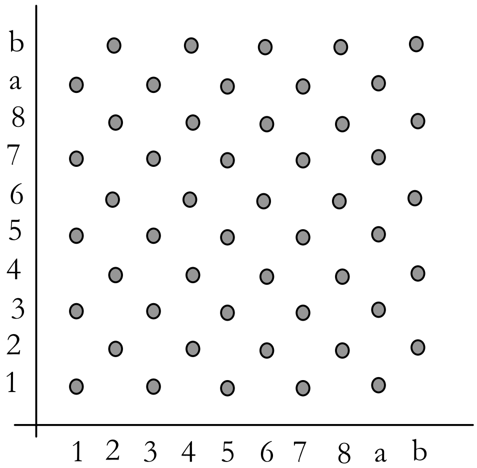
Nota di correzione: dominio tra {} (espressione denotativa di un insieme)

7) Considera in ℕ×ℕ la relazione (m,n)$\in\mathcal{R}\Leftrightarrow$ "m è multiplo di n". Si dimostra (e non ti è richiesto farlo) che si tratta di una relazione di ordine largo. Perché la relazione è di ordine parziale? Rispondi sul foglio

Effettivamente la relazione essere multiplo è antisimmetrica, riflessiva e transitiva, ma presa una coppia qualsiasi di numeri naturali appartenenti al dominio non è detto che l'uno sia multiplo dell'altro. Per esempio 12 è multiplo di 3, 49 è multiplo di 7 ma 12 e 49 non sono multipli l'uno dell'altro e dunque non sono confrontabili in termini di ordinamento.

Nota di correzione: non basta dire che ogni tanto non si può confrontare, bisogna dire quando, anche con un solo controesempio

8) L'insieme A = {1,2,3,4,5,6,7,8,a,b}presenta la seguente rappresentazione. Si tratta di una relazione di equivalenza. Rispondi alle seguenti domande



a) quante sono le classi di equivalenza e come sono costituite? Indicale qui sotto in forma denotativa e con il corrispondente simbolo [ ]

sono 2[1] ={1,3,5,7,a} ____________

____ mentre [2] ={2,4,6,8,b}_______________

b) Se a e b fossero dei numeri naturali quali numeri potresti mettere al loro posto? (spiega)

un numero dispari al posto di a e un pari al posto di b

Nota di correzione: se sappiamo già che si tratta di classe di equivalenza, tutte gli elementi di una stessa colonna fanno parte di una stessa classe di equivalenza e dunque la determinazione è molto semplice perché la terza colonna ci dice le stesse cose della prima, della terza, …Ripassare cosa vuol dire classe di equivalenza e come la si indica.

1,2	2,2	3,2	4,2	5,5	6,2	7,2	8,3	

21 dicembre 2006 1F campi numerici e linguaggio simbolico: 2 ore

Consegne: il compito è diviso in 5 parti che saranno tutte valutate separatamente; si prega pertanto di organizzare il tempo disponibile per rispondere a tutto. Anche per la parte A dai la risposta sul tuo foglio. Rispondi in maniera sequenziale dedicando una pagina diversa ai diversi quesiti di ogni gruppo

A. Saper usare il linguaggio simbolico

1) Indichiamo con r una retta giacente in un piano α. Quale tra queste scritture simboliche è quella corretta:

a $r\in\alpha\times\alpha$ b $r\in\alpha$ c $r\subset\alpha$ d $\alpha\in r$ e $r = \alpha\cup r$

La c) la retta è un sottoinsieme proprio del piano. La a) è insensata. La b) ipotizza che la retta sia un elemento ed è sbagliata grammaticalmente, la retta è un insieme di punti (lo spazio, il piano e la retta sono tutti insiemi di punti). La d) è sbagliata sia concettualmente sia grammaticalmente. La e) dice che la retta coincide con il piano visto ed è visibilmente assurda.

2) Sia $\mathscr{F}$ una figura, cioè un insieme fatto di punti che indicheremo con le lettere maiuscole. Quali di queste scritture rappresenta la definizione di figura convessa

a $\forall(P_1, P_2)\Rightarrow P_1P_2 \subseteq \mathscr{F}$ b $\forall(P_1, P_2) \Rightarrow P_1P_2 \in \mathscr{F}$ c $\exists(P_1, P_2) \mid P_1P_2 \subseteq \mathscr{F}$

d $\forall(P_1, P_2)\Rightarrow r_{P1P2} \subseteq \mathscr{F}$ e $\forall(P_1, P_2)\Rightarrow \exists P, P\in P_1P_2 \wedge P\notin \mathscr{F}$

La a) che afferma che qualsiasi segmento avente come estremi punti della figura giace interamente nella figura. Le altre risposte sono sbagliate o per ragioni grammaticali (ad esempio la b) o di sostanza

3) Sia $\mathscr{F}$ un insieme dotato di una relazione di ordine totale stretto che indicheremo con $\prec$ ($P\prec Q$ si leggerà *P viene prima di Q*). La frase "*$\mathscr{F}$ non è dotato di un limite inferiore*" si scrive in forma simbolica:

a $\forall P, P\in\mathscr{F}\Rightarrow \forall Q, Q\in\mathscr{F} \mid P\prec Q$ b $\forall P, P\in\mathscr{F}\Rightarrow \exists Q, Q\in\mathscr{F} \mid P\prec Q$ c $\exists P, P\in\mathscr{F} \mid \forall Q, Q\in\mathscr{F} \mid P\prec Q$

d $\exists P, P\in\mathscr{F} \mid \forall Q, Q\in\mathscr{F} \mid Q\prec P$ e $\forall P, P\in\mathscr{F}\Rightarrow \exists Q, Q\in\mathscr{F} \mid Q\prec P$

La e). La a) è assurda e non significa nulla; la b) è la definizione di illimitatezza superiore; la c) definisce il minimo; la d) definisce il massimo.

4) Siano A, B, C tre generici punti appartenenti ad un piano α. Consideriamo le seguenti proposizioni scritte in forma simbolica

I $A\in\alpha \wedge B\in\alpha \wedge C\in\alpha$ II $\{A,B,C\}\subset\alpha$ III $r_{AB} \equiv r_{AC}$

Quale combinazione di verità rappresenta le tre frasi

a FVF b VVV c VFF d VVF e FFV

La risposta giusta è la d) infatti la I è giusta perché i tre punti appartengono al piano per ipotesi; la II è giusta perché è ancora la I scritta con il linguaggio dei sottoinsiemi; la III è sbagliata perché significa che i tre punti sono allineati e ciò non fa parte dell'ipotesi.

B. Conoscere i postulati base e il linguaggio della geometria della geometria

1) Indichiamo con P_1, P_2, P_3 tre postulati. Cosa significa dire che il postulato P_4 è indipendente da P_1, P_2, P_3?

Etimologicamente vuol dire che non dipende nemmeno parzialmente dai precedenti e cioè che nemmeno una parte della sua affermazione può essere dimostrata dai primi tre. Dal punto di vista operativo lo si dimostra se assumendo la sua negazione si costruisce una teoria esente da contraddizioni.

2) In geometria qual è il legame tra i postulati e gli enti primitivi?

I postulati sono relazioni tra gli enti primitivi ammesse come vere e costituiscono una definizione implicita degli enti stessi.

3) Indichiamo con A, B, C *tre punti di un piano* α *non allineati*; scrivi in forma simbolica questa proprietà

$\{A,B,C\}\subset\alpha \wedge C\notin r_{AB}$ e cioè i tre punti costituiscono un sottoinsieme proprio del piano e uno di essi, per esempio C, non appartiene alla retta passante per gli altri due (tale retta esiste in virtù di un postulato precedente).

4) Cosa significa questo postulato: $\forall\alpha \Rightarrow \exists A \mid A\notin\alpha$?

Che lo spazio è più esteso del piano; diciamo che ha tre dimensioni mentre il piano ne ha due.

5) Nella geometria razionale viene data una definizione esplicita di congruenza? Se sì qual è? Se no, come si fa ad usare la congruenza senza averla definita?

Non viene data una definizione esplicita di congruenza e si assume come modello quello dei movimenti rigidi (geometria in senso fisico). La congruenza viene definita indirettamente attraverso i postulati che la riguardano (relazione di equivalenza, trasporto di angoli e segmenti, I criterio dei triangoli).

C. Conoscere i principi che stanno alla base della costruzione degli insiemi numerici.

1) Cosa dice il *principio di persistenza delle proprietà formali*?

Quando si costruisce un insieme numerico a partire da un altro insieme numerico strutturato (cioè dotato di due operazioni munite di elemento neutro e in cui valgono la proprietà commutativa, associativa e distributiva) si danno una nuova relazione di equivalenza e nuove definizioni delle operazioni. Oltre a ciò bisogna che nel nuovo insieme in cui varrà qualche nuova proprietà, valgano anche le precedenti.

2) Utilizzando per aiutarti l'insieme dei naturali e quello degli interi spiega la nozione di *isomorfismo tra i naturali e gli interi positivi*.

L'isomorfismo è una corrispondenza biunivoca tra un insieme e un sottoinsieme di un altro insieme che si conserva attraverso le operazioni tra elementi dei due insiemi. Essa consente di operare con elementi di insiemi diversi senza correre il rischio di ambiguità o di impossibilità di operare.

Nel caso citato la corrispondenza è n ↔ (+,n) e ne viene dato un esempio qui sotto.

2	+	3	=	5
↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓
(+2)	⊕	(+,3)	~	(+,5)

Nel definire le nuove operazioni si fa in modo di garantire la validità delle proprietà formali e di rispettare l'isomorfismo.

3) Supponiamo che sia α☺β = γ come è definita l'operazione inversa ☹ ?

α☺β = γ ⇔ γ☹α = β

4) Indichiamo con α, β, … i numeri di un insieme numerico dotato di una operazione interna commutativa α☺β = γ e sia 1 l'elemento neutro. Cos'è l'inverso $\overline{\alpha}$ di un generico numero α?

α☺1 = 1☺α = α ⇔ α ☺ $\overline{\alpha}$ = 1

5) Negli insiemi numerici qual è il legame tra esistenza dell'inverso ed eseguibilità della operazione inversa? Utilizza i simboli delle domande precedenti per rispondere.

E' dato da un teorema che garantisce la eseguibilità della operazione inversa attraverso l'esistenza dell'inverso: precisamente:

α ☹ β = α ☺ $\overline{\beta}$

Dimostrazione

Basta dimostrare che aggiungendo uno stesso numero si ottiene uno stesso risultato

(α ☹ β) ☺ β = α per definizione di operazione inversa

(α ☺ $\overline{\beta}$)☺ β = α ☺ ($\overline{\beta}$ ☺ β) = α ☺ 1 = α

↑ associativa ↑ defin inverso ↑ elemento neutro

D. Conoscere l'insieme dei naturali ℕ

1) Quando due insiemi A e B si dicono equipotenti? (si scrive A~B)

Quando si può trovare una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dei due insiemi.

Nota bene: non è la stessa cosa che dire che i due insiemi sono in corrispondenza biunivoca (le corrispondenze possibili sono più di una e non è detto che vadano tutte bene).

2) Conosci qualche insieme A⊂B per il quale sia A ~ B?

Per esempio n ↔ 2n mette in corrispondenza i naturali e i numeri pari che sono un loro sottoinsieme proprio.

3) Quando si scrive che il numero naturale m = [M] cosa si vuol dire (ti ricordo che [ ] vuol dire classe di equivalenza)

Si vuol dire che m rappresenta la proprietà comune (equipotenza) di tutti gli insiemi che si possono mettere in corrispondenza biunivoca con M. Ciò genere un nuovo ente matematico (definizione per astrazione) detto numero naturale.

4) Perché 0 = [∅] è l'elemento neutro rispetto alla addizione nell'insieme dei naturali?

Perché la addizione viene definita attraverso l'unione di insiemi senza elementi comuni e dunque, tenuto conto che l'insieme vuoto è l'elemento neutro rispetto alla unione si ha:

m + 0 = [M ∪∅] = [M] = m

5) Come viene definita la moltiplicazione m·n con m = [M] e n = [N] ?

m·n = [M×N] ovvero moltiplicare numeri naturali vuol dire valutare la potenza dell'insieme formato da tutte le coppie degli insiemi M e N rappresentativi della classe di equivalenza.

Si dimostra poi che m·n = m + m + … m (considerati n volte).

E. Conoscere l'insieme delle frazioni $\mathbb{F}$ e quello $\mathbb{Z}$ degli interi

1) Dato l'insieme $\mathbb{N}$ come si definisce $\mathbb{F}$? Ricordarsi di precisare la relazione che definisce l'equivalenza tra frazioni

$\mathbb{F} = \mathbb{N}\times\mathbb{N}_0$ cioè l'insieme delle coppie ordinate di numeri naturali con il secondo elemento diverso da zero.

La relazione di equivalenza dice che $(n,m)\sim(p,q) \Leftrightarrow n\cdot q = p\cdot m$

Si osservi che la relazione di equivalenza è completamente riferita ai numeri naturali e fa da base alla costruzione delle proprietà delle frazioni. La prima e più importante (invariantiva) dice che $(m,n)\sim(m\cdot r,n\cdot r)$ e consente di effettuare la cosiddetta *riduzione ai minimi termini*

2) Chi è il numero $\mathbb{1}$ nell'insieme delle frazioni? Spiegare perché è lui.

$\mathbb{1} = (1,1)\sim(n,n)$ infatti con riferimento alla moltiplicazione tra frazioni che consiste nel moltiplicare tra loro numeratori e denominatori si ha $(m,n)\cdot \mathbb{1} = (m,n)\cdot(1,1) = (m\cdot 1,n\cdot 1) = (m,n)$

3) Data una generica frazione $\frac{m}{n}$ con $m \neq 0$ fai vedere che la frazione inversa esiste e si tratta di $\frac{n}{m}$

La dimostrazione è di tipo diretto $\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m} = \frac{m\cdot n}{n\cdot m} = \frac{m\cdot n}{m\cdot n} = \frac{1}{1} = \mathbb{1}$

4) Supponiamo di aver definito la addizione nel solito modo usando la definizione di sottrazione come operazione inversa della addizione dimostra che $\frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{rq - ps}{sq}$ cioè che $\frac{rq - ps}{sq} + \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$

Si aggiunge ad entrambi i termini la frazione $\frac{p}{q}$

$\left(\frac{r}{s} - \frac{p}{q}\right) + \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ per definizione di operazione inversa

$\frac{rq - ps}{sq} + \frac{p}{q} = \frac{(rq - ps) + ps}{sq} = \frac{rq}{sq} = \frac{r}{s}$ per la definizione di addizione tra frazioni, di operazione inversa nei naturali e per la proprietà invariantiva

5) Dimostra che la relazione $(m,n)\sim(p,q) \Leftrightarrow m + q = p + n$ gode della proprietà transitiva. A cosa serve questa relazione di equivalenza?

La relazione di equivalenza fornita permette di definire i numeri interi come coppie di numeri naturali associati alla relazione di equivalenza fornita. Ciò permette di definire gli interi in maniera naturale senza inventare il + e il – e le assurde regole che riguardano la definizione di addizione.

Sia dunque vere (1) $(m,n)\sim(p,q)$ e (2) $(p,q)\sim(r,s)$

dobbiamo dimostrare (3) $(m,n)\sim(r,s)$ e cioè che $m + s = n + r$

per la (1) si ha $m + q = n + p$

per la (2) si ha $p + s = q + r$

sommiamo i primi e i secondi membri delle due eguaglianze e avremo

$m + q + p + s = n + p + q + r$

raggruppiamo secondo l'ordine che ci interessa (proprietà commutativa e associativa)

$(m + s) + (q + p) = (n + r) + (q + p)$

sottraiamo il termine comune $q + p$ e avremo che

$m + s = n + r$

☺

A					B						C				
1	2	3	4		1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
D					E										
1	2	3	4		1	2	3	4	5						