I.16. La legge di conservazione del momento angolare

16.1 Il moto dei corpi rigidi

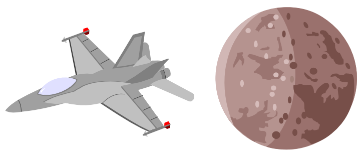
16.1.1 Dai sistemi di N punti materiali ai corpi rigidi

Le leggi della meccanica per il punto materiale e il concetto di sistema fisico, consentono di studiare l'evoluzione temporale del sistema; ma tale studio si fa via via più complicato man mano che cresce il numero di particelle interagenti e la situazione, se si cerca una soluzione esatta, è già molto complicata nel caso di 3 corpi.

Pertanto *sistemi di n punti materiali* vengono studiati, in generale, con metodi approssimati e con l'uso del computer. Quando poi il numero n diventa molto grande si ricorre all'uso della statistica (come si fa in termodinamica).

Esiste però un tipo di sistema che incontriamo nella esperienza comune che, nonostante sia costituito da un numero molto elevato di punti materiali, è relativamente semplice da studiare: si tratta del *corpo rigido*.

Si chiama *corpo rigido un corpo caratterizzato da invariabilità delle distanze tra i punti di cui il corpo è costituito*. Poiché la elasticità e la plasticità sono proprietà associate a qualunque solido ne consegue che il concetto di *corpo rigido* è solo una utile astrazione.



Il corpo rigido è una astrazione per descrivere i corpi reali; si suppone che le distanze tra due punti qualsiasi siano invariabili nel corso del movimento e sotto l'azione delle forze applicate al corpo

I movimenti dei corpi rigidi hanno il vantaggio di poter essere studiati come composizioni di moti traslatori e rotatori, ma ciò richiede la generalizzazione di alcune grandezze fisiche che abbiamo già introdotto e la definizione di alcune grandezze nuove che si rivelano particolarmente utili per il loro studio (momento angolare, momento di inerzia).

16.1.2 Il moto traslatorio dei corpi rigidi si studia come quello dei punti materiali

Nell'analizzare il moto dei punti materiali sono state introdotte alcune grandezze fisiche dinamiche quali: quantità di moto (detta anche *momento lineare* o con termine di origine latina *momentum* [1]), forza, energia cinetica, … Le stesse grandezze possono essere utilizzate anche per descrivere il *moto traslatorio dei corpi rigidi*.

Il moto traslatorio di un corpo rigido si studia come il moto del punto materiale perché tutti i punti massa hanno la stessa velocità e dunque basta studiare il moto del centro di massa

Infatti quando un corpo rigido si muove di moto traslatorio tutti i suoi punti percorrono identiche traiettorie e, conseguentemente, sono dotati della stessa velocità. Per questa ragione le equazioni che definiscono la quantità di moto e l'energia cinetica hanno la stessa forma di quelle del punto materiale.

In generale, la quantità di moto di un corpo è la somma delle quantità di moto dei punti che lo compongono e pertanto se lo consideriamo come costituito da tanti punti massa m_1, m_2, … avremo che:

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = m_1 \vec{v} + m_2 \vec{v} + \ldots + m_n \vec{v} = \vec{v} \sum m_i = m \vec{v} \quad \text{(I.16.1)}$$

[1] è il termine in uso nella letteratura di origine anglosassone.

Allo stesso modo si può ragionare per l'energia cinetica:

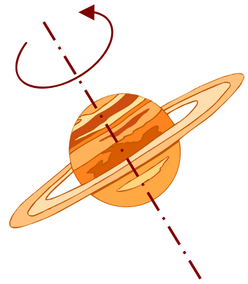
$$\mathcal{E}_k = \sum \mathcal{E}_{k,i} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\, v^2 = \tfrac{1}{2}\, mv^2 \qquad \text{(I.16.2)}$$

Questo ragionamento non si può però estendere al caso del *moto rotatorio* perché in tal caso i diversi punti hanno velocità diverse. In questo caso le grandezze dinamiche devono essere espresse attraverso la velocità angolare (che è la stessa per tutti i punti) ed è per questa ragione che si introducono delle *nuove grandezze fisiche* che meglio si correlano alla velocità angolare: il momento di una forza, il momento di inerzia e il momento angolare o momento della quantità di moto.

16.1.3 Nel moto rotatorio si ha una unica velocità angolare

Nella esperienza quotidiana si incontrano frequentemente corpi in rotazione; nell'elenco si possono includere tutti i tipi di volano, alberi, rotori di motori e generatori, eliche, trapani, frullatori, etc.

La caratteristica principale del moto rotazionale è che *tutti i punti del corpo si muovono lungo circonferenze concentriche i cui centri stanno su uno stesso asse detto asse di rotazione*. Tutti i punti hanno velocità lineari diverse, ma un'unica *velocità angolare* $\omega = \dfrac{\delta\alpha}{\delta t}$.

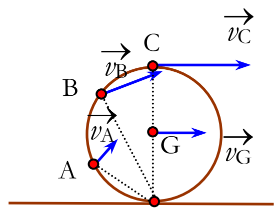


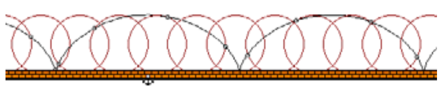
Nel **moto rotatorio** si dovrà introdurre una nuova grandezza che tenga conto del fatto che i diversi punti hanno la stessa velocità angolare pur possedendo velocità lineari diverse

Poiché i diversi punti possiedono velocità lineari diverse, ma una stessa velocità angolare, si pone l'esigenza di trovare una espressione dell'energia cinetica in funzione della velocità angolare. Ciò ci porterà al concetto di *momento di inerzia* di un corpo, concetto che sostituisce la massa nella definizione e che tiene conto della distanza dei diversi punti dall'asse di rotazione.

16.1.4 Un particolare moto rotatorio: il rotolamento

Quando un cilindro (ruota) rotola senza strisciare su di una superficie piana il movimento consiste in una rotazione dell'intero cilindro intorno al punto di contatto con il piano. Il corrispondente asse è detto *asse istantaneo di rotazione.*

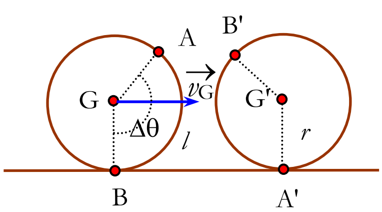




Nel rotolamento tutti i corpi possiedono istantaneamente la stessa velocità angolare mentre la traiettoria di un singolo punto è una cicloide

La situazione è rappresentata graficamente nella immagine qui a lato nella quale il punto P rappresenta l'asse istantaneo di rotazione e si vede che tutti i punti del cilindro sono dotati di una identica velocità angolare e presentano invece dei vettori velocità diversi con direzioni ortogonali al raggio vettore e con moduli dipendenti dalla distanza dall'asse di rotazione. In particolare il centro di massa G ha una velocità pari alla metà di quella del punto C diametralmente opposto a P.

Nella immagine stroboscopica successiva è stata evidenziata la traiettoria di un punto del cilindro soggetto a *rotolamento* che, come è già stato sottolineato in uno dei capitoli introduttivi, ha la forma di una cicloide.

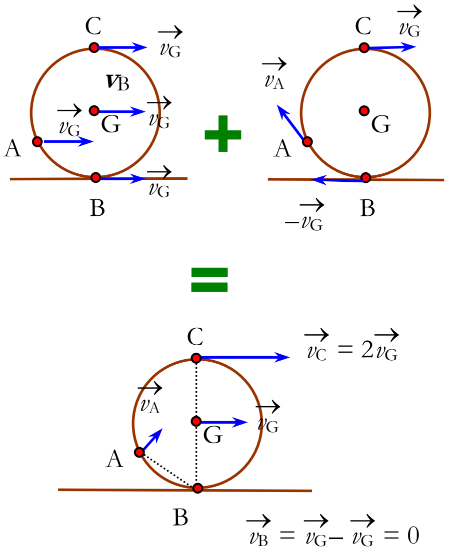


Il centro di massa è dotato di una velocità $v_G = \omega\, r$

Consideriamo ora due istantanee successive: nella prima il punto B della ruota appoggia sul piano mentre il punto A ruota e nella seconda il punto A (indicato con A') è diventato il nuovo punto di appoggio mentre B si trova in B'. Cosa si può dire del percorso BA'? Poiché il corpo non striscia ma rotola sarà:

$$BA' = BA = l = r\,\Delta\theta$$

D'altra parte il centro di massa si sposta con velocità costante:



Il rotolamento può essere analizzato come sovrapposizione di un moto traslatorio e di uno rotatorio intorno al centro di massa

$$v_G = \frac{GG'}{\Delta t} = \frac{BA'}{\Delta t} = \frac{r\,\Delta\theta}{\Delta t}$$

Ma il rapporto $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ è la velocità angolare ω del moto rotatorio intorno all'asse di rotazione istantanea e pertanto:

$$v_G = \omega\, r$$

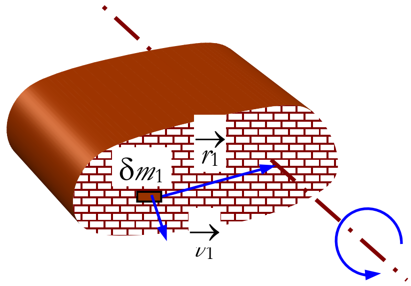
Il *moto della ruota* intorno all'asse istantaneo di rotazione può essere analizzato come sovrapposizione di due movimenti: un moto di traslazione in cui tutti i punti possiedono velocità $\boldsymbol{v}_G$ e un moto di rotazione con velocità angolare ω intorno al centro di massa. La cicloide è proprio la curva generata da questi movimenti.

La figura qui a lato descrive graficamente quanto detto evidenziando in particolare le diverse velocità vettoriali.

Riprenderemo l'argomento con riferimento alla energia cinetica dopo aver studiato le diverse grandezze necessarie a descrivere l'inerzia dei moti di rotazione.

16.2 L’energia cinetica nel moto rotatorio

16.2.1 L’ENERGIA CINETICA DI UN CORPO RIGIDO SI CALCOLA SCOMPONENDOLO IN TANTI PUNTI MATERIALI



L'energia cinetica del moto rotatorio viene calcolata sommando i contributi elementari caratterizzati tutti dalla stessa velocità angolare

Il corpo rigido posto in rotazione può essere visto come un insieme di tanti punti materiali dotati di velocità diverse che sono tutte proporzionali alle distanze dall’asse di rotazione. Dal punto di vista tecnico tale operazione rinvia ad una specifica operazione dell’analisi matematica in cui si sommano infinite grandezze (gli infiniti punti materiali) di tipo infinitesimo (le corrispondenti energie cinetiche riferite a masse infinitamente piccole). [2]

Nei nostri calcoli prescinderemo da queste difficoltà riferendoci, per approssimazione, ad un numero finito di elementi.

Supponiamo dunque che il nostro corpo di massa m venga scomposto in n elementi di massa δm_i ciascuno dei quali si trovi a distanza r_i dall’asse; ciascuno di tali punti sarà dotato della stessa velocità angolare ω.

Allora, in base alla relazione tra velocità angolare e velocità periferica l'energia cinetica del corpo sarà data da:

L'energia cinetica del moto rotatorio contiene un termine che dipende dalla dislocazione delle masse rispetto all'asse di rotazione

$$\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{k,1} + \mathcal{E}_{k,2} + \ldots + \mathcal{E}_{k,n} = \tfrac{1}{2}\,\delta m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}\,\delta m_2 v_2^2 + \ldots + \tfrac{1}{2}\,\delta m_n v_n^2 =$$

$$= \frac{1}{2}[\delta m_1 \omega^2 r_1^2 + \delta m_2 \omega^2 r_2^2 + \ldots + \delta m_n \omega^2 r_n^2] = \frac{1}{2}\omega^2 \sum \delta m_i\, r_i^2$$

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}\omega^2 \sum \delta m_i r_i^2 \qquad \text{(I.16.3)}$$

L’*energia cinetica* viene a dipendere da due elementi: la velocità angolare e un altro termine che ci informa sul modo in cui le diverse masse sono collocate rispetto all’asse di rotazione.

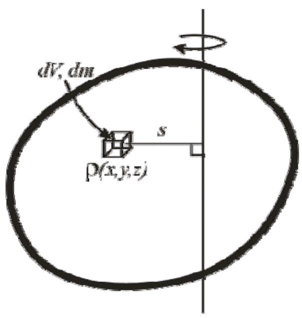
16.2.2 IL MOMENTO DI INERZIA NASCE DALLA ESIGENZA DI SEMPLIFICARE L’ESPRESSIONE DELL’ENERGIA CINETICA

La grandezza fisica

$$I = \sum \delta m_i r_i^2 \qquad \text{(I.16.4)}$$

La definizione di momento di inerzia

è detta *momento di inerzia* del sistema o anche *inerzia rotazionale* e caratterizza la distribuzione delle masse del sistema rispetto all'asse di rotazione.



L'unità di misura del *momento di inerzia* nel S.I. è il *chilogrammo per metro quadro* (kg·m²).

Per un dato corpo il momento di inerzia dipende dalla posizione dell'asse di rotazione mentre, se si utilizza una suddivisione abbastanza fine, non dipende dalla modalità di suddivisione del corpo.

Il calcolo del momento di inerzia di un generico corpo rigido richiede l'uso della analisi matematica e non sarà svolto in generale ma, come vedremo, attraverso ragionamenti di simmetria si può arrivare comunque al risultato in numerosi contesti.

Tenendo conto della (I.16.4) si ottiene:

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}\omega^2 I \qquad \text{(I.16.5)}$$

[2] Si dice che l’energia cinetica è una *grandezza di tipo integrale*

e si dice che *l'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione è pari alla metà del prodotto del momento di inerzia per il quadrato della velocità angolare.*

Questa espressione è simile a quella contenente la massa e la velocità; ma la massa viene sostituita dal momento di inerzia e la velocità dalla velocità angolare.

Il volano applicato ad una affettatrice manuale, ad un motore a scoppio e ad un grande apparato di rotazione

Come detto, il momento di inerzia presenta dei valori facilmente calcolabili nel caso in cui il corpo presenti delle simmetrie. Inoltre quando è noto il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa, grazie ad una proprietà che vedremo nel prossimo paragrafo, sono conseguentemente noti i momenti di inerzia per qualsiasi asse parallelo a quello dato.

Nei fenomeni di rotazione ciò che conta da un punto di vista energetico non è semplicemente la massa posta in rotazione ma, a parità di velocità angolare, la *distribuzione di tale massa* rispetto all'asse di rotazione.

Per esempio in tutti i motori a scoppio è sempre presente un organo, detto *volano*, il cui scopo è di rendere regolare il movimento. Il volano è solitamente costituito da un disco metallico sufficientemente grande e con la parte esterna appesantita in modo di possedere un elevato momento di inerzia.

Ciò rende regolare il movimento in particolare nei motori altamente irregolari quali quelli monocilindrici. Il *volano* fornisce energia cinetica nei momenti in cui il motore richiede energia meccanica (fase di compressione).

16.2.3 IL CALCOLO DEL MOMENTO DI INERZIA E DELLA ENERGIA CINETICA DI UN SISTEMA DI DUE PARTICELLE

Esercizio: Consideriamo due particelle di massa $m_1 = 5$ kg e $m_2 = 7$ kg che si trovano a distanze $r_1 = 1$ m e $r_2 = 30$ cm da un asse di rotazione rispetto al quale ruotano compiendo 30 giri al secondo. Determinare il momento di inerzia e la energia cinetica del sistema.

☹

Il momento di inerzia I è dato da:

$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = 5 \cdot (1)^2 + 7 \cdot (0.3)^2 = 5.63$ kg·m²

La velocità angolare ω si ottiene ricordando che $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ dove la frequenza ν (inverso del periodo) corrisponde al numero di giri al secondo. Pertanto sarà:

$\omega = 2\pi\nu = 6.28 \cdot 30 = 188.4$ rad/s

Infine l'energia cinetica sarà pari a:

$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}\omega^2 I = 0.5 \cdot (188.4)^2 \cdot 5.63 = 9.99 \cdot 10^4$ J

☺

16.3 Il momento di inerzia

16.3.1 Il Teorema dell'asse parallelo

Il *momento di inerzia* dipende, oltre che dalla collocazione reciproca delle masse, anche dalla posizione dell'asse si rotazione come si vede dalla definizione perché se si cambia l'asse di rotazione cambiano le distanze r_1, r_2, …, r_n e pertanto cambia il momento di inerzia.

Basta però conoscere il momento di inerzia rispetto ad un asse per conoscere il momento di inerzia rispetto ad un qualsiasi asse parallelo a quello noto. Vale infatti la relazione:

$$I = I_0 + m\,R^2 \qquad \text{(I.16.6)}$$

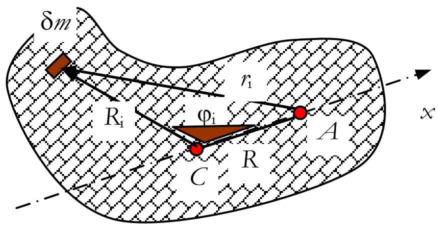
Il teorema dell'asse parallelo $I = I_0 + m\,a^2$

Il momento di inerzia di un sistema rispetto ad un asse arbitrario è pari al momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo a quello considerato e passante per il centro di massa del sistema sommato al prodotto della massa del sistema per il quadrato della distanza tra i due assi (*teorema di Steiner degli assi paralleli*).

Il vantaggio del teorema di Steiner è che noto il valore del momento di inerzia per un particolare asse (solitamente quello passante per il centro di massa) si hanno a disposizione gli infiniti altri.

Inoltre dal teorema discende il fatto che qualsiasi corpo rigido ha *momento di inerzia minimo* quando l'asse di rotazione passa per il centro di massa. Quindi il modo più semplice e meno dispendioso di mettere in rotazione un corpo rigido è quello di farlo ruotare attorno ad un asse passante per il centro di massa.

16.3.2 La dimostrazione del teorema di Steiner



La *dimostrazione del teorema degli assi paralleli* è di tipo geometrico e, nel suo aspetto essenziale, si basa sulla definizione di centro di massa.

Il centro di massa, per definizione, viene calcolato eseguendo una media ponderata delle distanze dei diversi costituenti di un sistema. Ora, se si assume come riferimento per il calcolo di queste distanze il centro di massa stesso, si avrà che rispetto a qualsiasi retta x passante per il centro di massa, dovrà sempre essere:

$$\sum \delta m\, x_i = 0$$

Consideriamo dunque un corpo rigido e due assi di rotazione paralleli uno passante per il centro di massa C e l'altro che passa per A (indichiamo con R la distanza CA). Consideriamo come asse x per le considerazioni che seguiranno proprio la retta r_{CA} ed applichiamo ora la definizione di momento di inerzia.

A questo scopo il corpo viene suddiviso in tante masse elementari e si ha per definizione:

$I = \sum \delta m\, r_i^2$ mentre $I_0 = \sum \delta m\, R_i^2$

Per il *teorema del coseno* [3] si ha che:

[3] Il teorema del coseno può essere dimostrato in maniera elegante con il calcolo vettoriale. Consideriamo due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ con un vertice comune e che formino tra loro un angolo φ; indichiamo con $\vec{c}$ il vettore differenza $\vec{a} - \vec{b}$ che come è noto da terzo lato del triangolo:

$c^2 = (\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$ ☺

$r_i^2 = R_i^2 + R^2 - 2RR_i \cos \varphi_i = R_i^2 + R^2 - 2Rx_i$

Pertanto:

$I = \sum \delta m\, r_i^2 = \sum \delta m\, R_i^2 + \sum \delta m\, R^2 - \sum \delta m\, 2Rx_i =$

$= I_0 + R^2 \sum \delta m - 2R \sum \delta m\, x_i = I_0 + m\, R^2$

visto che il terzo addendo è nullo per quanto osservato sul centro di massa.

16.3.3 Una prima considerazione di natura dimensionale sul momento di inerzia

Per come è stato definito, il *momento di inerzia* ha le dimensioni di una massa per una lunghezza al quadrato e se consideriamo dei corpi di forma definita (cioè simili) potremo affermare che il momento di inerzia dovrà avere una espressione:

$$I = \theta\, m\, l^2 \qquad \text{(I.16.7)}$$

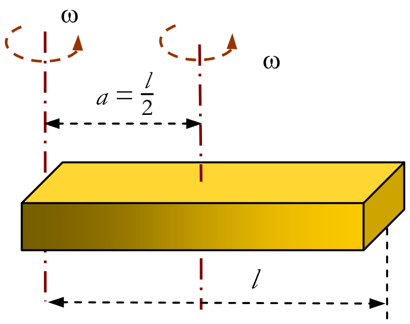
dove θ rappresenta una costante adimensionale dipendente dalla forma dell'oggetto mentre l è una dimensione tipica del corpo che sia in grado di rappresentare compiutamente la collocazione della massa rispetto all'asse di rotazione passante per il centro di massa.

Per esempio nel caso di un cilindro che ruota intorno al suo asse longitudinale l sarà il raggio mentre sarà l'altezza del cilindro quando questo viene fatto ruotare intorno ad un asse passante per metà della altezza.

La proprietà appena richiamata ci dice semplicemente che, *dal punto di vista rotazionale, un corpo rigido è equivalente ad un punto materiale della stessa massa che si trovi a distanza* $\sqrt{\theta}\, l$ *dall'asse di rotazione.*

16.3.4 La sbarra omogenea: calcolo per simmetria

Utilizzeremo il teorema degli assi paralleli per calcolare il *momento di inerzia di una sbarra omogenea* rispetto ad un asse perpendicolare alla sbarra e passante per il centro di massa. Indichiamo con m la massa e con l la sua lunghezza.



In base alla (I.16.7) si può affermare che il momento di inerzia è proporzionale alla massa e al quadrato della dimensione lineare:

$I_0 = \theta\, m\, l^2$

dove θ è una costante adimensionale identica per tutte le sbarre di lunghezza l e massa m.

Per trovare il valore di θ calcoliamo il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per un estremo.

Tale valore può essere calcolato in due modi: usando il teorema di Steiner oppure attraverso un ragionamento per simmetria. Infatti esso dovrà essere la metà di quello riferito al centro di massa di una sbarra di lunghezza $2l$ e di massa $2m$.

Se usiamo il teorema di Steiner avremo:

$I = \theta\, m\, l^2 + m\,(l/2)^2 = ml^2(\theta + \tfrac{1}{4})$

Se ragioniamo sulla simmetria sarà invece:

$I = \tfrac{1}{2}\,[\theta\, 2m\,(2l)^2] = 4\,\theta\, m\, l^2$

Eguagliando le due espressioni si ottiene:

$3\theta = \frac{1}{4}$ e dunque $\theta = \frac{1}{12}$

$$I_0 = \frac{1}{12} ml^2 \qquad (I.16.8)$$

Per la sbarra: $I_0 = \frac{1}{12} ml^2$

Mentre il valore riferito all'estremo risulta

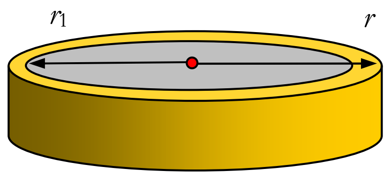
$$I = I_0 + m(\tfrac{1}{2}l)^2 = \frac{1}{3} m\, l^2$$

16.3.5 IL DISCO PIANO CALCOLATO ATTRAVERSO L'ANELLO

Il *momento di inerzia di un disco* rispetto ad un asse passante per il suo centro è ovviamente proporzionale alla sua massa ed al quadrato del raggio secondo la relazione:

$$I = \alpha\, m\, R^2$$

Per determinare il coefficiente adimensionale α calcoliamo dapprima il momento di inerzia I_a dell'anello in figura.



Esso è la differenza tra i momenti di inerzia dei due dischi di raggio r e r_1 di masse m e m_1 con $m_1 = m\frac{r_1^2}{r^2}$. In effetti, a parità di condizioni, la massa è proporzionale alla superficie dei dischi e questa è proporzionale al quadrato del raggio.

$$I_a = I - I_1 = \alpha\, m\, r^2 - \alpha m_1 r_1^2 = \frac{\alpha m}{r^2}(r^4 - r_1^4)$$

La massa dell'anello vale: $m_a = m - m_1 = m\frac{r^2 - r_1^2}{r^2}$

Ma, se l'anello è molto sottile (cioè se $r \approx r_1$), il momento di inerzia può essere calcolato tramite la definizione con lo stesso valore di r per tutte le masse elementari:

$$I_a = \delta m_1 r^2 + \delta m_2 r^2 + \dots + \delta m_n r^2 = r \sum \delta m_i = m_a r^2$$

Di qui se teniamo presente il valore della massa dell'anello già determinata avremo:

$$I_a = m_a r^2 = m\frac{r^2 - r_1^2}{r^2} r^2 = m\,(r^2 - r_1^2)$$

Se confrontiamo le due espressioni per il momento di inerzia dell'anello e semplifichiamo per $m\,(r^2 - r_1^2)$ otteniamo infine:

$$\alpha\,(r^2 + r_1^2) = r^2$$

e, tenendo conto che $r \approx r_1$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

Dunque il momento di inerzia di un disco rispetto ad un asse passante per il suo centro vale:

$$I = \frac{1}{2} mr^2 \qquad (I.16.9)$$

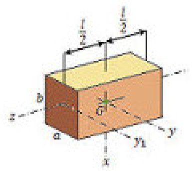
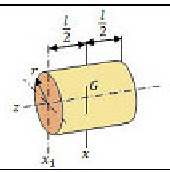
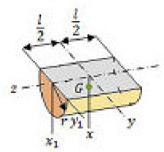
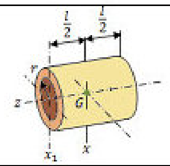
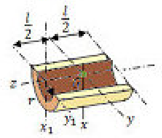
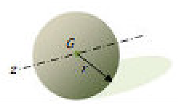
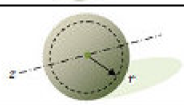
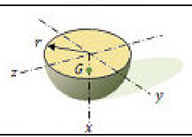
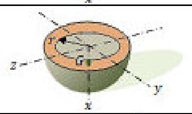
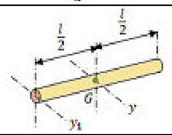
Per il disco piano: $I_0 = \frac{1}{2}$

16.3.6 UNA TABELLA CON ALCUNI VALORI CARATTERISTICI

Come abbiamo già detto il calcolo del momento di inerzia richiede l'uso di strumenti matematici di tipo superiore e ci limitiamo a riportare qualche valore tipico, per completezza

Come si vede dalla *tabella* I.16.1, e come si può intuire in base alla definizione, nel risultato è sempre presente la massa del corpo e il quadrato di una dimensione tipica dell'oggetto considerato. La difficoltà matematica che richiede l'uso dell'analisi sta proprio nel calcolo di questo coefficiente e si basa sulla scelta di masse elementari che consentano di svolgere il calcolo sfruttando le simmetrie che i solidi con caratteristiche di regolarità presentano.

Tabella I.16.1

tipo di corpo	immagine	centro di massa	momento di inerzia
Parallelepipedo rettangolo		–	$I_{xx}=\frac{1}{12}m(a^2+l^2)$ $I_{yy}=\frac{1}{12}m(b^2+l^2)$ $I_{zz}=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$ $I_{y_1y_1}=\frac{1}{12}mb^2+\frac{1}{3}ml^2$
Cilindro pieno		–	$I_{xx}=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1}=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz}=\frac{1}{2}mr^2$
Emicilindro		$\bar{x}=\frac{4r}{3\pi}$	$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1}=I_{y_1y_1}=\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz}=\frac{1}{2}mr^2$
Guscio cilindrico		–	$I_{xx}=\frac{1}{2}mr^2+\frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1}=\frac{1}{2}mr^2+\frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz}=mr^2$
Mezzo Guscio cilindrico		$\bar{x}=\frac{2r}{\pi}$	$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{2}mr^2+\frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1}=I_{y_1y_1}=\frac{1}{2}mr^2+\frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz}=mr^2$
Sfera		–	$I_{zz}=\frac{2}{5}mr^2$
Guscio sferico		–	$I_{zz}=\frac{2}{3}mr^2$
Emisfera		$\bar{x}=\frac{3r}{8}$	$I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=\frac{2}{5}mr^2$
Guscio emisferico		$\bar{x}=\frac{r}{2}$	$I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=\frac{2}{3}mr^2$
Sbarra ad una dimensione		–	$I_{yy}=\frac{1}{12}ml^2$ $I_{y_1y_1}=\frac{1}{3}ml^2$

16.3.7 L'ENERGIA CINETICA DI UN CORPO CHE ROTOLA

Ad inizio capito abbiamo visto che se un corpo a simmetria circolare rotola senza strisciare il suo moto corrisponde ad una rotazione intorno all'asse di istantanea rotazione e che tale moto può anche essere studiato come sovrapposizione di un moto traslatorio con la velocità del centro di massa e di un moto rotatorio intorno al centro di massa con la stessa velocità angolare.

Tutto ciò ha delle implicazioni interessanti con riferimento alla energia cinetica.

Infatti se indichiamo con I il momento di inerzia relativo all'asse di rotazione istantanea, con I_{CM} quello riferito al centro di massa avremo applicando il teorema di Steiner che:

$\mathcal{E}_k = ½\ \omega^2 I = ½\ \omega^2 (I_{CM} + m\ r^2) = ½\ \omega^2 I_{CM} + ½\ \omega^2 m\ r^2$

$\mathcal{E}_k = ½\ \omega^2 I_{CM} + ½\ m\ v_{CM}^2$

Ovvero:

nel rotolamento $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{k,t} + \mathcal{E}_{k,r}$

$$\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{k,r} + \mathcal{E}_{k,t}$$

Quando un corpo a simmetria circolare rotola senza strisciare, la sua energia cinetica è la somma di un contributo traslazionali legato al movimento del centro di massa e di una energia rotazionale in un asse passante per il centro di massa.

Esercizio: Una sfera di ferro di raggio r = 1.20 cm rotola su un piano orizzontale compiendo un giro in un tempo T = 0.25 s. Determinare la energia cinetica associata a tale moto.

☹

Determiniamo la massa attraverso la densità δ = 7.80 kg/dm³ e il calcolo del volume.

$V = \frac{4}{3}\pi\ r^3 = \frac{4}{3}\pi\times 0.120^3 = 7.24\times 10^{-3}$ dm³

$m = \delta\cdot V = 7.80\times 7.24\times 10^{-3} = 0.0564$ kg

Calcoliamo ora, separatamente, la energia cinetica traslazionale e quella rotazionale. Allo scopo ci serviranno la velocità angolare, quella del centro di massa e il momento di inerzia.

Il momento di inerzia della sfera vale:

$$I_{CM} = \frac{2m\ r^2}{5} = \frac{2\times 0.0564\times 0.0120^2}{5} = 3.25\times 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.25} = 25.1 \text{ rad/s}$$

$v_{CM} = \omega\ r = 25.1\times 0.0120 = 0.302$ m/s

$\mathcal{E}_{k,t} = ½\ m\ v_{CM}^2 = 0.500\times 0.0564\times 0.302^2 = 2.57\times 10^{-3}$J

$\mathcal{E}_{k,r} = ½\ \omega^2 I_{CM} = 0.500\times 25.1^2\times 3.25\times 10^{-6} = 1.02\times 10^{-3}$J

Il rapporto tra la energia traslazionale e quella rotazionale è indipendente dalla velocità angolare ma dipende solo dalle caratteristiche geometriche del corpo che rotola; precisamente:

$$\frac{\mathcal{E}_{k,t}}{\mathcal{E}_{k,r}} = \frac{m\ v_{CM}^2}{\omega^2 I_{CM}} = \frac{m\ \omega^2 r^2}{\omega^2 I_{CM}} = \frac{m\ r^2}{I_{CM}}$$

Tipo di oggetto	$\frac{\mathcal{E}_{k,t}}{\mathcal{E}_{k,r}}$
anello di spessore trascurabile	1
cilindro pieno	2
sfera	5/2
crosta sferica	3/2

Se teniamo conto della tabella sui momenti di inerzia avremo così la seguente *tabella* da cui si osserva che il corpo che minimizza la energia rotazionale rispetto a quella traslazionale è la sfera per la quale la prima è 2/5 (40%) della seconda.

Il rapporto tra energia di traslazione ed energia di rotolamento, a parità di condizioni, dipende dalla forma

☺

16.3.8 IL ROTOLAMENTO DI UN CILINDRO E DI UNA SFERA

Esercizio: Supponiamo di far rotolare lungo un piano inclinato una sfera ed un cilindro dello stesso raggio e della stessa massa.

Chi arriverà a terra per primo?

☹

I due corpi per arrivare a terra diminuiscono la loro energia potenziale della stessa quantità e a questa diminuzione corrisponde un eguale aumento di energia cinetica.

Ma a determinare il tempo di discesa concorre la energia cinetica traslazionale.

Nel caso della sfera $\frac{\mathcal{E}_{k,t}}{\mathcal{E}_{k,r}}$ = 5/2 e pertanto $\mathcal{E}_{k,r}$ = 2/5 $\mathcal{E}_{k,t}$. Ne consegue che $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{k,t} + \mathcal{E}_{k,r} = (1 + 2/5)\,\mathcal{E}_{k,t}$ e infine $\mathcal{E}_{k,t} = 5/7\,\mathcal{E}_k \approx 0.71$

Nel caso del cilindro, svolgendo lo stesso tipo di calcolo, si ha:

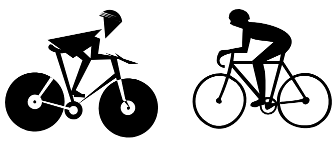
$\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{k,t} + \mathcal{E}_{k,r} = (1 + 1/2)\,\mathcal{E}_{k,t}$ e infine $\mathcal{E}_{k,t} = 2/3\,\mathcal{E}_k \approx 0.67$

Possiamo concludere che la sfera arriva a terra prima del cilindro.

☺

16.3.9 IL MOTO DI UN DISCO PIENO E DI UN ANELLO

Esercizio: Se confrontiamo i momenti di inerzia di un disco piano omogeneo (cioè con la massa uniformemente distribuita) o quello di un anello (simulazione molto rozza della differenza tra la ruota lenticolare e quella classica nel ciclismo) avremo che il rapporto delle energie cinetiche di rotazione vale ½; infatti:

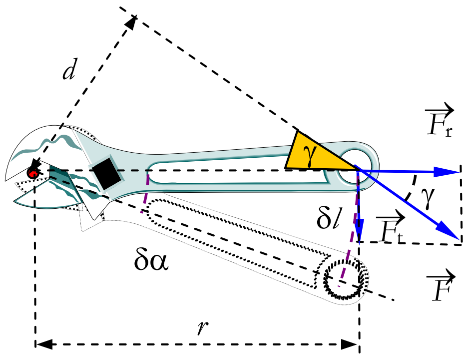


$$\frac{E_{k,dis}}{E_{k,ane}} = \frac{I_{dis}}{I_{ane}} = \frac{\frac{m\,r^2}{2}}{m\,r^2} = \frac{1}{2}$$

e dunque l'anello, a parità di velocità angolare, possiede una energia cinetica doppia nel rispetto del fatto che la massa è più lontana dall'asse di rotazione.

16.4 Il momento di una forza da un punto di vista dinamico

16.4.1 Il legame tra il momento ed il lavoro elementare nei fenomeni di rotazione



Consideriamo una forza F che agisca su un corpo in grado di ruotare intorno ad un asse fisso e calcoliamo il lavoro compiuto da tale forza quando il corpo ruota di un angolo $\delta\alpha$.

In base alla definizione di lavoro elementare si ha:

$$\delta\mathscr{L} = F_t\, \delta l$$

Ma, $F_t = F \sin\gamma$, dove γ è l'angolo formato tra la direzione della forza e la retta che va dal suo punto di applicazione al punto di cerniera, mentre la lunghezza dell'arco $\delta l = r\,\delta\alpha$. Pertanto il lavoro elementare vale:

$$\delta\mathscr{L} = F\, r \sin\gamma \;\; \delta\alpha$$

Ma, come si è visto nel capitolo dedicato alla definizione della forza ed alle problematiche dell'equilibrio, la quantità:

$$M = F\, r \sin\gamma = F\, d$$

è detta *momento della forza rispetto all'asse di rotazione*, mentre la distanza d tra la retta di applicazione della forza e il punto di cerniera è detta *braccio del momento*.

La unità di misura del momento nel S.I. è il *newton·metro* (N·m).

Anche se il N·m ha le stesse dimensioni del Joule, lo si indica come N·m per sottolineare il fatto che non si tratta di una energia ma di una grandezza fisica con significato diverso.

Sostituendo la definizione del momento si ottiene una nuova espressione per il *lavoro elementare*:

momento e lavoro elementare $\delta\mathscr{L} = M\,\delta\alpha$

$$\delta\mathscr{L} = M\,\delta\alpha \qquad \text{(I.16.10)}$$

e cioè, *il lavoro di una forza che fa ruotare un corpo è dato dal prodotto del momento della forza per l'angolo di rotazione.*

La relazione trovata ci spiega anche la relazione relativa all'annullamento dei momenti come condizione necessaria per l'equilibrio dei corpi rigidi. Infatti, se non si avesse l'annullamento dei momenti si avrebbe un lavoro di rotazione e conseguentemente una variazione di energia cinetica.

16.4.2 Il legame tra il momento e la potenza

Se dividiamo il lavoro elementare per il tempo impiegato a compiere la rotazione otterremo la *potenza*.

Sarà dunque $P = \dfrac{\delta\mathscr{L}}{\delta t}$ mentre $\omega = \dfrac{\delta\alpha}{\delta t}$ e pertanto:

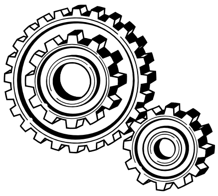
potenza e momento nelle rotazioni

$$P = M\,\omega \qquad \text{(I.16.11)}$$

la potenza istantanea è il prodotto del momento della forza per la velocità angolare.

La relazione (I.16.11) ci consente di illustrare la funzione del *cambio di velocità* delle automobili. Attraverso una serie di ingranaggi accoppiati tra loro viene modificata la velocità angolare degli organi di rotazione e questo fatto modifica in proporzione inversa il momento delle forze disponibili per la rotazione (a parità di potenza del motore).

Così, per esempio, quando si innesta la prima, la velocità angolare diminuisce di molto rispetto a quella del motore e pertanto la coppia disponibile alle ruote presenta un momento molto elevato (ciò che serve a mettere in moto il veicolo vincendo le elevate coppie resistenti dovute alle forze di attrito statico).



Sulle riviste specializzate di automobilismo e di motociclismo, tutte le volte che viene presentato un nuovo motore si pubblica anche il diagramma della coppia in funzione del numero di giri e la presenza di una *coppia costante* ed elevata, indipendentemente dal numero di giri, è considerata un notevole elemento di pregio. Risulta particolarmente importante disporre di una coppia elevata già ai bassi regimi. Questo è l'elemento ricercato nelle moto bicilindriche da turismo.

1996: la mia bicilindrica Guzzi Nevada 750 dopo 8'000 km al bivio per rientrare in Norvegia dalla Lapponia finlandese verso Capo Nord

Di cosa si tratta? Se un motore presenta una coppia elevata e costante, in particolare ai bassi regimi, ciò significa che la potenza erogata cresce in maniera lineare man mano che si preme l'acceleratore e pertanto, per accelerare è sostanzialmente inutile usare il cambio; in altre parole si dispone di un mezzo elastico e immediatamente rispondente alle richieste. Accade il contrario, ovviamente, nei motori molto spinti per i quali il raggiungimento di elevate potenze si gioca tutto sulla crescita del numero di giri. Questi motori, per questioni di natura costruttiva, presentano spesso coppie basse ai bassi regimi e richiedono pertanto un elevato uso del cambio.

16.5 Il momento angolare

16.5.1 LA II LEGGE DELLA DINAMICA PER I MOTI DI ROTAZIONE

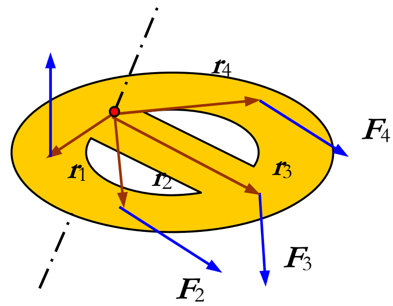
Quando un corpo rigido è sottoposto a *moti di rotazione* esiste una relazione abbastanza semplice e simile alla II legge della dinamica che, invece di connettere le forze e le accelerazioni, connette i momenti delle forze (responsabili delle rotazioni) con le accelerazioni angolari (accelerazioni riferite alla velocità angolare). Al posto della massa compare il suo equivalente e cioè il momento di inerzia.

La relazione è:

$$M = I\frac{\delta\omega}{\delta t} \qquad \text{(I.16.12)}$$

La II legge della dinamica riferita alle grandezze angolari

Per dimostrare la relazione consideriamo un corpo che possa ruotare intorno ad un asse fisso e a cui siano applicate delle forze, come in Figura, ed indichiamo con M la somma algebrica dei momenti.



Abbiamo già visto che la velocità angolare del corpo cambia per effetto dell'azione del momento totale e ciò determina anche una variazione di energia cinetica.

In base alla (I.16.10) si ha:

$$M = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\alpha} = \frac{\delta\mathscr{E}_k}{\delta\alpha} = \frac{\delta(\frac{1}{2}\,\omega^2 I)}{\delta\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\,I\,\delta(\,\omega^2)}{\delta\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\,I\,2\omega\delta\omega}{\delta\alpha}$$

$$= \frac{I\,\delta\alpha\,\delta\omega}{\delta\alpha\,\delta t} = I\frac{\delta\omega}{\delta t}$$ [4]

Considerato un corpo rigido sottoposto ad un vincolo di rotazione i momenti delle forze applicate determinano delle accelerazioni angolari ad esse proporzionali e la costante di proporzionalità è il momento di inerzia del corpo.

16.5.2 IL MOMENTO ANGOLARE

Nella dimostrazione precedente si è ipotizzato che il momento di inerzia non cambiasse nel corso del movimento quando si è spostato I fuori dal segno di variazione.

Tale situazione però non si verifica sempre; infatti si possono avere movimenti nei quali la distribuzione spaziale delle masse cambia nel corso della rotazione (si pensi per esempio all'avvitamento degli atleti durante i salti o a quelli delle ballerine di danza classica).

Per queste ragioni si preferisce scrivere la (I.16.12) in una forma più generale nella quale la variazione viene riferita ad entrambe le grandezze (momento di inerzia e velocità angolare) come si è fatto a suo tempo per la II legge della dinamica riferita alla quantità di moto.

A questo scopo si definisce una nuova grandezza fisica pari al prodotto della velocità angolare per il momento di inerzia che viene detta *momento angolare* (o anche *momento della quantità di moto*): [5]

[4] Si è usata una proprietà matematica generale e cioè: $\delta x^2 = 2x\ \delta x$. Tale proprietà si dimostra così: $\delta x^2 = [(x+\delta x)^2 - x^2] = [x^2+2x\delta x+(\delta x)^2 - x^2] = (2x+\delta x)\ \delta x \approx 2x\delta x$ perché δx è trascurabile rispetto a $2x$.

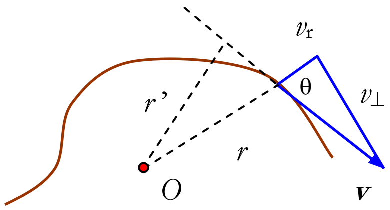
[5] Il *momento angolare* è una grandezza a carattere vettoriale collocata nella direzione perpendicolare al piano formato dal vettore velocità e dal vettore che va dal punto consi-

$$L = I \cdot \omega \qquad \text{(I.16.13)}$$

Il momento angolare e il suo legame con la quantità di moto

Nel caso di una particella in moto lungo una circonferenza di raggio r il momento angolare è pari al prodotto della quantità di moto per il raggio; infatti, applicando la definizione di momento di inerzia si ha:

$$L = I\omega = m\,r^2\,\omega = m\,r\,v = p\,r$$



Se invece la particella si muove su una traiettoria curvilinea generica non è più vero che $v = \omega\, r$ perché tale relazione si riferisce alla componente della velocità perpendicolare al raggio vettore e tale condizione si realizza solo nei moti circolari.

La relazione si generalizza però in maniera molto semplice osservando la figura qui a lato:

$$L = I\omega = m\,r^2\,\omega = m\,r\,v_\perp = m\,r\,v \operatorname{sen}\theta = p\,r\,\operatorname{sen}\theta = p\,r' \quad \text{e quindi}$$

$$L = = p\,r\,\operatorname{sen}\theta = p\,r' \qquad \text{(I.16.14)}$$

Dunque, *il momento angolare può anche essere visto come prodotto della quantità di moto per la distanza della particella misurata in direzione perpendicolare alla velocità*. Da questo elemento si origina il termine *momento della quantità di moto*.

La unità di misura del momento angolare nel S.I. è il *chilogrammo·metro quadro al secondo* (kg·m²/s)

16.5.3 La relazione tra il momento delle forze e il momento angolare

Dalle definizione di momento angolare e dalla equazione (I.16.12) si ottiene:

$$M = \frac{\delta L}{\delta t} \qquad \text{(I.16.15)}$$

momento delle forze e momento angolare

e questa è *la legge fondamentale della dinamica per un corpo rigido in rotazione:* il momento della forza è pari alla variazione del momento angolare nell'unità di tempo.

L'equazione (I.16.15) quando viene riferita a *sistemi costituiti da più masse*, invece che a corpi rigidi, riguarda solo la somma dei *momenti delle forze esterne* perché la somma dei momenti delle forze interne è sempre zero come conseguenza della III legge della dinamica.

Infatti le *forze interne* sono sempre collocate su una stessa retta di applicazione oltre che dar luogo a risultante nulla: pertanto, rispetto ad un qualsiasi asse di rotazione, *danno sempre luogo a due momenti uguali ed opposti*.

16.5.4 Una nuova legge di conservazione

Supponiamo che la *somma algebrica dei momenti delle forze esterne applicate ad un corpo sia nulla* (questa condizione è sempre verificata per un sistema chiuso e per il caso delle forze centrali tra cui la forza elettrica e quella gravitazionale). Dalla (I.16.15) segue che:

conservazione del momento angolare

$\delta L = 0$ o anche

$$M = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = \text{costante} \qquad \text{(I.16.16)}$$

---

derato all'asse di rotazione. Come si è già fatto per la velocità angolare si trascurano questi aspetti per non appesantire la trattazione.

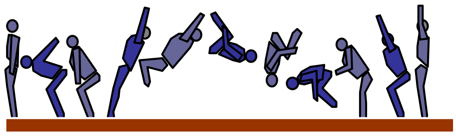
Questo risultato è di notevole importanza ed è detto *legge di conservazione del momento angolare: il momento angolare di un sistema chiuso rimane costante.*

Dalla differenza concettuale tra quantità di moto e momento angolare deriva una importante *conseguenza relativa al modo di concepire l'inerzia.*

Mentre le *forze interne non sono in grado di modificare il comportamento di un corpo soggetto a moto traslatorio* (che si muove come il centro di massa), quando un corpo ruota intorno ad un asse, poiché le forze interne sono in grado di cambiare la distanza tra parti del sistema, *ne possono modificare il momento di inerzia.*

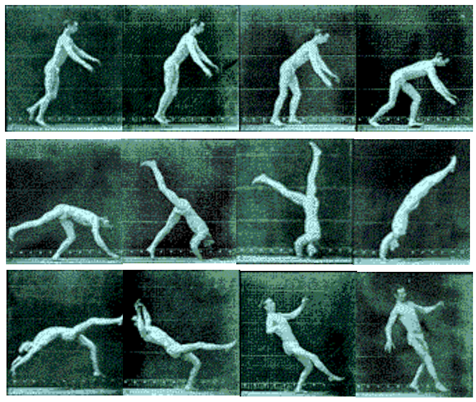
Ma per la legge di conservazione del momento angolare rimane costante $I\,\omega$ e non ciascuno dei due fattori. Pertanto, *se per azione delle forze interne il momento di inerzia diminuisce o aumenta, ne consegue che aumenta o diminuisce la velocità angolare in modo che il prodotto dei due non cambi.*

induzione di rotazioni in un sistema isolato attraverso l'azione di forze interne



16.5.5 LE ROTAZIONI NEI SALTI ACROBATICI

Il risultato appena affermato si presta alla spiegazione di fenomeni ben noti. Consideriamo, per esempio, il modo in cui un acrobata compie il *salto mortale all'indietro.*



Nei salti acrobatici si sfrutta la presenza di una piccola componente di tipo rotatorio per esaltarne l'effetto attraverso opportune modifiche del momento di inerzia nel rispetto della conservazione del momento angolare.

Dopo essersi accovacciato con le braccia all'indietro, l'acrobata scatta verso l'alto portando le braccia in avanti, poi verso l'alto e leggermente all'indietro. Questo movimento impartisce una piccola velocità di rotazione al corpo dell'atleta intorno ad un asse passante per il suo centro di massa (approssimativamente all'altezza della cintola).

Giunto nel punto più alto della traiettoria egli raccoglie improvvisamente le ginocchia verso il mento tenendolo con le mani. Così, spostando le braccia e le gambe verso il suo centro di massa, diminuisce il momento di inerzia e ciò gli fa aumentare la velocità di rotazione consentendogli di completare rapidamente la sua piroetta. Come atterra egli incomincia a stirare le braccia verso l'alto e leggermente in avanti e ciò determina un rallentamento della velocità di rotazione.

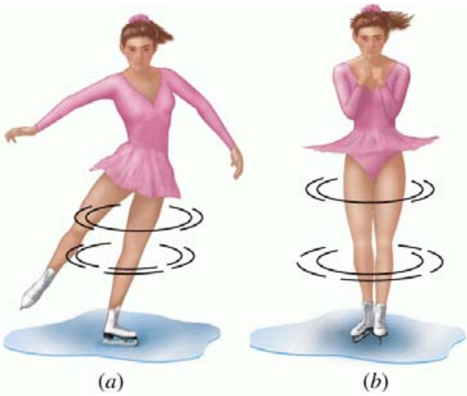
I pattinatori sul ghiaccio e le ballerine classiche usano la stessa tecnica per determinare un avvitamento intorno ad un asse verticale. Stirando le braccia sui lati e raddrizzando ed alzando una gamba il pattinatore incomincia a ruotare lentamente. Raddrizzando bruscamente le braccia e le gambe, il pattinatore riduce bruscamente il momento di inerzia e inizia a ruotare rapidamente.

E' ben nota la capacità del gatto di rovesciarsi in aria per atterrare sempre sulle zampe combinando i movimenti della coda e delle zampe

Una tecnica analoga è utilizzata anche dal *gatto* che, come è noto, nel caso di caduta riesce sempre ad atterrare sulle zampe grazie all'azione congiunta di sensori vestibolari sensibili alla accelerazione di gravità e alla capacità di sfruttare la conservazione del momento angolare.

Se un gatto, anche bendato, cade da una certa altezza con la schiena rivolta verso il basso, si raddrizza durante la caduta e compie un perfetto atterraggio sulle zampe. Il riflesso di raddrizzamento avviene in tempi successivi, ma in rapidissima successione: dapprima l'animale ruota il capo, ritrae gli arti anteriori ed estende quelli posteriori, poi ruota il corpo e gradualmente estende le zampe anteriori finché, compiuta per intero la rotazione, è in grado di cadere sulle zampe senza prodursi fratture o lesioni.

16.5.6 SI CONSERVA IL MOMENTO ANGOLARE, MA NON L'ENERGIA CINETICA



la pattinatrice cambia il suo momento di inerzia, ciò fa crescere la velocità angolare e con essa l'energia: tutto ciò avviene per effetto del lavoro delle forze interne. L'atleta fa fatica anche se apparentemente non spinge nulla

Si può facilmente vedere che nel caso dello *spinning* dei pattinatori l'energia cinetica di rotazione non si conserva.

Infatti se *ω I è costante* e l'energia cinetica di rotazione vale $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}\,\omega^2 I$ quando *I diminuisce si ha un aumento di ω* dovuto alla proporzionalità inversa ma allora la energia cinetica che è proporzionale al quadrato di ω aumenta.

Ma, per aumentare l'energia cinetica si deve compiere del lavoro; *quali sono le forze che lavorano*?

Poiché, in prima approssimazione, il sistema è chiuso, sia nel caso dell'acrobata, sia in quello del pattinatore, la energia cinetica rotazionale aumenta per il lavoro di forze interne e cioè, in ultima analisi, a spese dell'energia interna del sistema rotante.

L'energia cinetica aumenta per effetto del lavoro compiuto dagli atleti nello stirare le braccia e le gambe e questa conclusione, ovviamente, è in pieno accordo con la legge di conservazione dell'energia.

16.5.7 LA II LEGGE DI KEPLER È UNA CONSEGUENZA DELLA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Nell'ambito dei lavori che lo portarono ad enunciare la legge di gravitazione universale *Newton* dimostrò che la prima legge di Kepler (secondo cui i pianeti si muovono su orbite ellittiche aventi il Sole in uno dei fuochi) era la conseguenza del carattere centrale della forza di attrazione.

La velocità dei pianeti lungo la loro orbita è variabile, presenta il suo valore massimo in perielio (punto più vicino al Sole) e quello minimo in afelio (punto più lontano).

Questo risultato può essere dimostrato sia rifacendosi alla conservazione dell'energia sia rifacendosi al teorema dell'energia cinetica.

Nel primo caso si osserva che:

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = \text{costante}$$

al crescere di r diminuisce $G\,\frac{Mm}{r}$ e dunque deve diminuire anche $\frac{mv^2}{2}$; pertanto la velocità dei pianeti è variabile e si riduce al crescere della distanza dal sole.

Nel secondo caso si può anche osservare che quando il pianeta si avvicina al Sole la velocità e la forza formano un angolo acuto e pertanto il lavoro elementare è positivo il che determina aumenti di energia cinetica; accade il contrario nelle fasi di allontanamento.

La II legge di Kepler dice però di più e determina una situazione di regolarità all'interno del movimento orbitale. Kepler riuscì a concludere che *il raggio vettore del pianeta spazza aree uguali in tempi uguali*. Mostreremo ora che questa legge discende dalla legge di conservazione del momento angolare.

Il Sole e i pianeti formano un sistema chiuso per il quale vale la legge di conservazione del momento angolare. Poiché il centro di massa del sistema coincide praticamente con il Sole la velocità del Sole è praticamente nulla e pertanto il momento angolare del sistema è identificabile con quello del pianeta:

$L = m\, v\, r\, sen\, \theta$ = costante

dove con θ si indica l'angolo formato tra il raggio vettore e il vettore velocità. Dalla costanza del momento angolare deriva che:

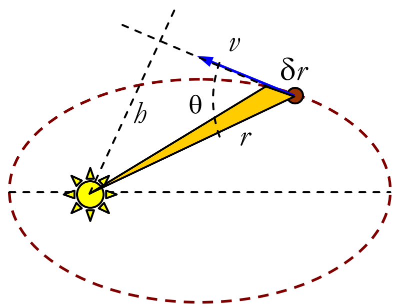
$$m\, v\, r\, sen\, \theta = m \frac{\delta r}{\delta t} r\, sen\, \theta = m \frac{\delta r}{\delta t} h = \text{costante}$$

e pertanto, per identici intervalli di tempo δt si ha:

$\delta r\, h$ = costante

ma tale quantità è il doppio dell'area del triangolo indicata in giallo nella figura.

Si condensa tutto ciò dicendo che *in eguali intervalli di tempo elementare il raggio vettore spazza aree uguali*.



la II legge di Kepler come conseguenza della conservazione del momento angolare

16.6 Un confronto tra moto rotatorio e moto traslatorio

Se confrontiamo le relazioni tra le quantità che caratterizzano il moto di una particella (o di un corpo in moto traslatorio) con le stesse relazioni che descrivono le rotazioni di un corpo intorno ad un asse rimarremo stupiti dalle *analogie profonde* tra queste relazioni.

Consideriamo la tabella I.16.2 in cui sono raggruppate una serie di grandezze e le relazioni che le legano in meccanica newtoniana.

Da essa si vede che, attraverso una semplice sostituzione di variabili, si passa dalla equazione valida per il moto traslatorio alla corrispondente relazione che vale per quello rotatorio.

Una ultima precisazione riguarda il *carattere vettoriale* di alcune grandezze che, nei conti fin qui svolti abbiamo trattato come degli scalari. Si tratta del momento di una forza, della velocità angolare, della accelerazione angolare e del momento angolare.

Nelle considerazioni che abbiamo svolto queste grandezze sono state introdotte sempre con riferimento a movimenti nel piano e ad assi di rotazione perpendicolari a tale piano.

Quando si studiano i moti nello spazio diventa molto più opportuno e conveniente assegnare carattere vettoriale a tutte queste grandezze precisando una direzione che corrisponde a quella degli assi di rotazione.

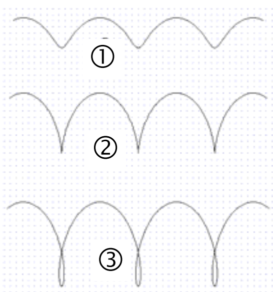
Il verso viene scelto con il criterio dell'avanzamento della vite destrogira. Date queste definizioni si scopre che tutte queste grandezze si sommano proprio con legge vettoriale quando si effettua la loro sovrapposizione fisica e, a questo punto, le corrispondenti relazioni possono essere scritte in forma vettoriale rendendo completamente simmetrico il *confronto tra le leggi* del moto traslatorio (che sono in larga misura vettoriali) e le corrispondenti leggi del moto rotatorio.

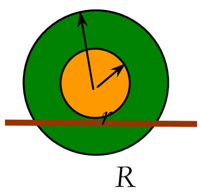
Moto traslatorio	Relazione	Moto rotatorio	Relazione
Spostamento	Δl	Angolo di rotazione	$\Delta\alpha$
Velocità	$\vec{v}$	Velocità angolare	$\vec{\omega}$
Massa	m	Momento di inerzia	I
Quantità di moto	$\vec{p} = m\,\vec{v}$	Momento angolare	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Forza	$\vec{F}$	Momento di una forza	$\vec{M} = \vec{F}\times\vec{r}$
Legge fondamentale della dinamica	$\vec{F} = \dfrac{\delta\vec{p}}{\delta t}$	Legge fondamentale della dinamica	$\vec{M} = \dfrac{\delta\vec{L}}{\delta t}$
Energia cinetica	$\mathcal{E}_k = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$	Energia cinetica	$\mathcal{E}_k = \dfrac{I\omega^2}{2} = \dfrac{L^2}{2I}$
Lavoro elementare	$\delta\mathcal{L} = F_t\,\delta l$	Lavoro elementare	$\delta\mathcal{L} = M\,\delta\alpha$
Potenza	$P = F_t\,v$	Potenza	$P = M\,\omega$

Tabella I.16.2 – confronto tra grandezze e leggi nel moto traslatorio e rotatorio

16.7 Quesiti di fine capitolo

1. Individuare la proposizione *vera*; corpi rigidi a) Il corpo rigido è caratterizzato dal fatto che i suoi punti si muovono tutti allo stesso modo; b) per descrivere le caratteristiche di un corpo rigido basta conoscere il centro di massa e la sua massa; c) il moto di un corpo rigido è completamente noto se si conoscono le caratteristiche del moto di una terna di punti del corpo stesso, d) se sono note posizione e velocità di 3 punti non allineati di un corpo rigido il moto del corpo è univocamente determinato. [6]
2. Individuare la proposizione *falsa*; sistemi complessi e corpi rigidi a) Quando il numero di componenti di un sistema fisico è molto elevato ci si accontenta di conoscenze di carattere statistico; b) Un sistema formato da *n* particelle materiali presenta *3n* gradi di libertà; c) Un corpo rigido reale è un corpo elastico dotato di un valore molto elevato del modulo di Young; d) Lo studio dei corpi rigidi utilizza esattamente le stesse grandezze che si usano per i punti materiali. [7]
3. Individuare la proposizione *vera*; *corpi rigidi e sistemi* a) La quantità di moto di un corpo esteso è la somma algebrica delle quantità di moto dei punti materiali di cui è costituito; b) Nel caso di moto traslatorio il moto di un corpo rigido è del tutto assimilabile a quello di un punto materiale; c) Solo per i corpi rigidi la energia cinetica di un corpo esteso è pari alla somma delle energie cinetiche dei punti materiali di cui è costituito; d) Per i corpi rigidi i diversi punti materiali hanno tutti la stessa velocità angolare. [8]
4. Individuare la *proposizione vera*; traiettorie di rotolamento; la figura qui a lato rappresenta la traiettoria di un punto a distanza *r* dall'asse di rotazione appartenente ad un cilindro di raggio *R* che rotola senza strisciare. a) il caso ① si verifica per $r = R$ b) Il caso ② si verifica per $r < R$ c) Il caso ③ non si verifica mai perché prevede spostamenti all'indietro d) Il caso ③ si verifica quando $r > R$ [9]
5. Individuare la *proposizione falsa*; *rotolamento*. a) Il rotolamento può essere analizzato come sovrapposizione di un moto traslatorio del centro di massa e di uno rotatorio intorno al punto di contatto; b) In un corpo che rotola senza strisciare tutti i punti possiedono istantaneamente la stessa velocità angolare; c) Il rotolamento può essere analizzato come una rotazione intorno ad un asse che cambia





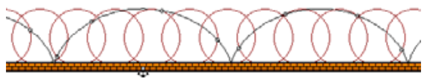
[6] a) Falso: non cambiano le posizioni relative; b) Falso: è vero solo per il moto traslatorio; c) Falso: bisogna specificare che i 3 punti non siano allineati d) Vero

[7] Vero: non sarebbe possibile fare altrimenti; b) Vero, ogni componente ha 3 gradi di libertà c) Vero: il corpo rigido è un modello e l'oggetto reale che lo rappresenta è il corpo elastico che si deformi il meno possibile; d) Falso: entrano in gioco due nuove grandezze importanti il momento di inerzia e il momento angolare.

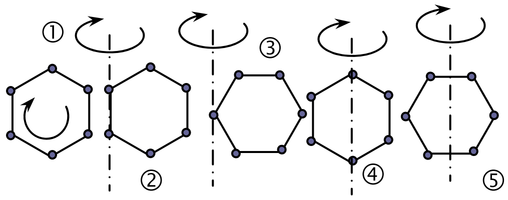
[8] a) Falso: è la somma vettoriale; b) Vero, tutti i punti hanno la stessa velocità; c) Falso, vale per tutti i corpi; d) Falso, ciò accade solo per il moto rotatorio.

[9] a) Falso è il caso ② b) Falso, è il caso ①; c) Falso, si verifica quando $r > R$ d) Vero

continuamente; d) La traiettoria descritta da un punto di un corpo che rotola è una cicloide. [10]



6. La figura qui a lato rappresenta una cicloide generata dal rotolamento di un cilindro; individuare la proposizione *falsa.* a) La lunghezza della cicloide vale $2\pi r$; b) la traiettoria del centro di massa è una retta; c) la traiettoria dei punti interni alla circonferenza è ancora una cicloide ma con un periodo più breve; d) le traiettorie di due punti interni posti su una stessa circonferenza sono congruenti. [11]
7. Dimostrare che il moto di un corpo rigido è completamente descritto se vengono assegnate le coordinate di tre suoi punti qualsiasi che non siano allineati. [12]
8. Ammesso che il moto di un corpo rigido possa essere descritto attraverso tre suoi punti non allineati spiegare perché le coordinate libere (*gradi di libertà*) che ne descrivono il moto sono 6 in tutto. [13]
9. Cercare la proposizione vera, *momento di inerzia* a) Il momento di inerzia si misura in N m; b) Il momento di inerzia è una caratteristica univoca di ogni corpo rigido; c) Il momento di inerzia per un corpo di data forma cresce proporzionalmente alle sue dimensioni lineari; d) il momento di inerzia consente di semplificare il calcolo dell'energia cinetica per i corpi rigidi in rotazione. [14]
10. Cercare la proposizione vera, *momento di inerzia* a) Il momento di inerzia di un corpo dipende esclusivamente dalle sue dimensioni; b) Il momento di inerzia di due corpi congruenti è lo stesso; c)il momento di inerzia di un corpo rigido omogeneo è proporzionale alla sua densità; d) Se un cilindro di raggio r ha momento di inerzia $k\, r^2$ allora un cilindro di raggio $2r$ ha momento di inerzia $4k\, r^2$. [15]



11. Cercare la proposizione vera, *momento di inerzia.* Ai vertici di un esagono regolare sono disposte sei masse uguali. L'esagono ruota ri-

[10] a) Falso: la rotazione va riferita al centro di massa; b) Vero: si tratta della velocità intorno all'asse istantaneo di rotazione; c) Vero, vedi risposta precedente; d) Vero: è la sovrapposizione del moto di traslazione e di rotazione.

[11] a) Vero, se il corpo non striscia quando ha fatto un giro un punto si è mosso complessivamente (cioè lungo la traiettoria) di $2\pi r$; b) Vero, il centro di massa è l'unico punto che non ruota; c) Falso, il periodo è lo stesso, cambia la forma della cicloide che presenta dei cappi; d) Vero, le due traiettorie sono identiche ma sfasate.

[12] Se fisso due punti il corpo può solo ruotare intorno alla retta che li unisce, se ne fisso un terzo che non appartiene alla congiungente i primi due …

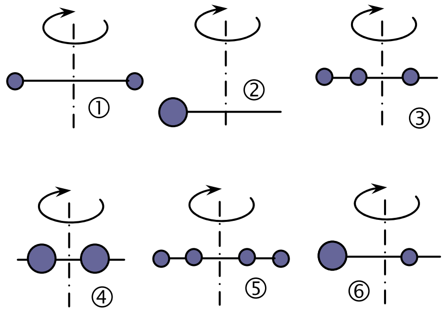
[13] Tre punti non allineati corrispondono a 9 coordinate, ma se il corpo è rigido si possono scrivere …

[14] a) Falso in kg m²; b) Falso un corpo ha infiniti momenti di inerzia, uno per ogni possibile asse di rotazione c) Falso, la massa cresce come l^3 e dunque il momento di inerzia va come l^5 d) vero perché in una unica grandezza esprime la distribuzione della massa rispetto all'asse di rotazione.

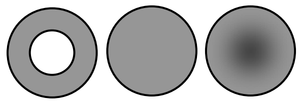
[15] a) Falso, dipende anche dalla densità e dalla posizione dell'asse di rotazione; b) Falso, entra in gioco anche la massa; c) Vero; d) Falso, non si è specificato che si mantiene la stessa densità.

spetto agli assi di rotazione indicati. a) $I_3 = I_2 > I_1 > I_4 = I_5$; b) $I_3 > I_2 > I_1 > I_4 > I_5$; c) $I_3 > I_2 > I_1 = I_4 = I_5$; d) $I_3 > I_2 > I_1 > I_4 = I_5$ [16]

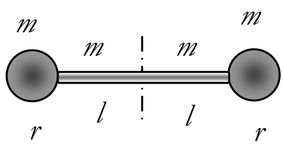
12. Cercare la relazione vera relativamente al momento di inerzia dei sistemi rappresentati in figura nei quali solo le parti in grigio sono dotate di massa non trascurabile (la massa grande è doppia della piccola): a) $I_4 > I_3 < I_2 = I_1 > I_5$; b) $I_4 < I_3 < I_2 = I_1 < I_6 < I_5$; c) $I_4 = I_3 > I_2 = I_1 < I_5 < I_6$; d) $I_4 < I_3 = I_2 < I_1 < I_6 < I_5$ [17]



13. Spiegare la funzione svolta dal volano nei sistemi meccanici sottoposti a rotazione ed illustrarne le caratteristiche costruttive.
14. Perché nel caso dei corpi rigidi in rotazione è conveniente introdurre il momento di inerzia?
15. Si consideri un corpo di massa m caratterizzato da una dimensione caratteristica l. Si spieghi come mai il suo momento di inerzia avrà come espressione $\alpha\, m\, l^2$ dove α è una costante adimensionale dipendente dalla forma del corpo considerato.
16. La figura rappresenta un cilindro cavo, un cilindro pieno ed una sfera dello stesso raggio esterno e della stessa massa. Indicati con I_1, I_2, I_3 i tre momenti di inerzia e senza applicare le relazioni tabellate ma riflettendo sulla definizione precisare la relazione corretta tra essi. a) $I_1 > I_2 > I_3$; b) $I_1 < I_2 < I_3$; c) $I_1 > I_3 > I_2$; d) $I_1 < I_3 < I_2$; e) $I_2 > I_1 > I_3$. [18]



17. Il momento di inerzia rispetto ad un asse longitudinale di un cilindro cavo di raggi r_1 e r_2 vale $I = \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2)$. Si consideri un cilindro di raggi r e $2r$: il momento inerzia rispetto all'asse istantaneo di rotazione vale: a) $5/2\, m\, r^2$; b) $13/2\, m\, r^2$; c) $9/2\, m\, r^2$; d) $7/2\, m\, r^2$; e) $11/2\, m\, r^2$. [19]
18. Tenendo presente che il momento di inerzia di una sbarra e quello di una sfera riferiti al centro di massa valgono rispettivamente $\frac{m\, l^2}{12}$ e $\frac{2m\, r^2}{5}$ quanto vale il momento di inerzia del sistema in figura?



19. Enunciare il teorema di Steiner e quindi spiegarne la utilità.
20. Un cilindro e una sfera di uguale raggio e uguale massa rotolano lungo un piano inclinato. Chi arriva per prima alla base e perché?
21. Discutere la relazione tra energia cinetica rotazionale e traslazionale in un corpo che rotola senza strisciare.

---

[16] Applicando la definizione di momento di inerzia ed indicando con l il lato dell'esagono si ha: $I_1 = 6\, m\, l^2$, $I_2 = 15/2\, m\, l^2$, $I_3 = (9+4\sqrt{3})\, m\, l^2$, $I_4 = 3\, m\, l^2$, $I_5 = 3\, m\, l^2$ pertanto $I_3 > I_2 > I_1 > I_4 = I_5$ e la risposta giusta è la d)

[17] $I_1 = 2(ml^2)$, $I_2 = (2m)l^2$, $I_3 = ml^2 + 2(1/4)\, ml^2 = 3/2\, ml^2$, $I_4 = 2(2\cdot 1/4)ml^2 = ml^2$, $I_5 = (2m)l^2 + 2(1/4)\, ml^2 = 5/2\, ml^2$, $I_5 = (2m)l^2 + (1/4)\, ml^2 = 9/4\, ml^2$ e pertanto $I_4 < I_3 < I_2 = I_1 < I_6 < I_5$ dunque la risposta giusta e la b)

[18] A parità di massa la sfera ha una massa distribuita in maniera meno esterna rispetto al cilindro e pertanto $I_3 < I_2$. Il cilindro cavo, per la stessa ragione ha un momento di inerzia maggiore del cilindro e pertanto la relazione giusta è la a).

[19] Applicando la relazione fornita il momento di inerzia rispetto all'asse longitudinale vale ½ $m\, (r^2 + 4\, r^2) = 5/2\, m\, r^2$. L'asse istantaneo di rotazione si trova a distanza $2r$ dal centro di massa e pertanto, in base al teorema di Steiner si ha: $I' = 5/2\, m\, r^2 + m\, (4r^2) = 13/2 m\, r^2$; pertanto la risposta corretta è la b).

22. Spiegare il significato della relazione $\delta\mathscr{L} = M\,\delta\alpha$ definendo il contesto in cui viene enunciata, il significato dei simboli che in essa compaiono e come venga dedotta.
23. Alla luce della relazione $\delta\mathscr{L} = M\,\delta\alpha$ spiegare perché condizione necessaria per l'equilibrio di un corpo rigido è l'annullamento del momento risultante di tutte le forze che agiscono su di esso.
24. Dopo aver dedotto la relazione $P = M\,\omega$ spiegare il funzionamento del cambio di velocità.
25. Qual è il vantaggio dei motori a coppia costante e perché tale condizione viene ricercata?
26. Ricerca di vero: si consideri la relazione $M = I\,\dfrac{\delta\omega}{\delta t}$ a) M rappresenta la massa del corpo b) I è l'impulso della forza c) $\dfrac{\delta\omega}{\delta t}$ ha le dimensioni di una accelerazione d) la relazione $I\,\dfrac{\delta\omega}{\delta t} = \dfrac{\delta(I\omega)}{\delta t}$ vale quando il momento di inerzia non varia e) La quantità M si misura in Joule [20]
27. La quantità $L = I\cdot\omega$ è detta *momento angolare* a) nei contesti più generali il momento angolare viene definito come un vettore diretto come l'asse di rotazione b) si dimostra che è sempre $L = p\,r$ dove p è la quantità di moto e r è la distanza tra il centro di massa e l'asse di rotazione c) il momento angolare si misura in kg·m²/s d) Il momento angolare è sempre proporzionale al momento delle forze e) Quando il momento delle forze si annulla il momento angolare è costante. [21]
28. Spiegare come le forze interne ad un sistema possano modificarne la velocità di rotazione. Spiegare anche come mai, in assenza di forze esterne, il momento angolare si conservi.
29. Spiegare come mai i gatti, gli atleti e gli acrobati riescano a ruotare in aria senza appoggiarsi a qualche cosa. Discutere in dettaglio un caso.
30. Spiegare nel caso dell'avvitamento di una ballerina come mai si verifichi un incremento di velocità angolare e da dove provenga l'energia cinetica che aumenta.
31. Dimostrare la II legge di Kepler attraverso la conservazione del momento angolare.
32. Scrivere in una tabella a cosa corrispondano nel moto rotatorio le seguenti grandezze o leggi del moto traslatorio: massa, quantità di moto, forza.

---

[20] Vera la d)

[21] a) vero b) falso r è la distanza tra il vettore velocità della particella in moto e il polo rispetto a cui si calcola il momento angolare. c) vero, ha le dimensioni di una quantità di moto per una distanza d) falso, il momento delle forze è la velocità di variazione del momento angolare e) Vero: è la legge di conservazione

16.8 Quesiti dalle Olimpiadi della Fisica

1) Un asteroide in orbita ellittica, si muove dal punto più vicino al Sole (punto P: perielio) percorrendo, in un certo intervallo di tempo, un quarto della sua orbita fino al punto Q. Quali cambiamenti avvengono alla sua energia potenziale gravitazionale U e al modulo del suo momento angolare L (calcolato rispetto al Sole) tra i punti P e Q? (I livello 2011) … [22]

	U	L
A	aumenta	aumenta
B	diminuisce	rimane invariato
C	rimane invariata	diminuisce
D	aumenta	rimane invariato
E	diminuisce	aumenta

2) Una pattinatrice sta ruotando su se stessa con le braccia allargate alla velocità angolare di 3.0 rad/s. In tale situazione il suo momento di inerzia vale 0.8 kgm². Ad un certo istante chiude le braccia lungo il corpo e la sua velocità angolare raggiunge i 7 rad/s. Si può trascurare qualsiasi forma di attrito e la resistenza dell'aria. Qual è il momento di inerzia della ragazza con le braccia lungo il corpo? (I livello 2012) … [23]

A … 0.15 kgm² B … 0.34 kgm² C … 0.56 kgm²
D … 1.5 kgm² E … 1.8 kgm²

3) Una pattinatrice su ghiaccio ha un momento d'inerzia, calcolato rispetto ad un asse di rotazione verticale, di 4.0 kgm² quando le sue braccia sono allargate. Se sta ruotando alla velocità angolare di 3.0 rad/s con le braccia allargate, e poi avvicina le braccia al busto, la sua velocità angolare aumenta fino a 7.0 rad/s in 0.5 s. Si supponga di poter trascurare l'attrito tra pattini e ghiaccio e quello dell'aria. Qual è il momento totale delle forze che agiscono sulla pattinatrice, rispetto all'asse di rotazione, mentre avvicina le braccia al busto? (I livello 2013) …[24]

A … 1.0Nm B … 1.6Nm C … 2.7Nm
D … 5.3Nm E … 0Nm

4) Un corpo A è appoggiato su un tavolo orizzontale privo di attrito e può ruotare, sempre senza attrito, attorno ad un suo punto fisso. Ad esso è collegato - tramite una molla ideale - un secondo corpo B, anch'esso appoggiato sullo stesso tavolo. Il corpo B è libero di ruotare (non necessariamente su un'orbita circolare) attorno ad A.

---

[22] L'energia potenziale gravitazionale aumenta in allontanamento mentre il momento angolare si conserva visto che la forza gravitazionale è una forza centrale e dunque il momento è sempre nullo.

[23] Ci troviamo in un contesto in cui il momento angolare si conserva e dunque $\omega_1 I_1 = \omega_2 I_2$. Ne segue che $I_2 = I_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3.0\cdot 0.8}{7.0} = 0.34$ kg m²

[24] Le forze esterne sono il peso e le reazioni vincolari che essendo parallele all'asse di rotazione hanno momento nullo. Quesito con tanti distrattori: i dati forniti sono infatti ridondanti.

Durante il moto del corpo B si studia l'andamento delle grandezze E, $\vec{p}$, $\vec{L}$ che sono rispettivamente l'energia meccanica, la quantità di moto e il momento angolare totali del sistema dei due corpi, quest'ultimo calcolato rispetto alla posizione di A.

Si considerino le seguenti affermazioni:

1 – L'energia meccanica del sistema si conserva.

2 – La quantità di moto del sistema si conserva.

3 – Il momento angolare del sistema, calcolato rispetto alla posizione di A, si conserva.

Quali sono corrette? (I livello 2014) … [25]

A … Nessuna delle tre. B … Solo la 1. C … Solo la 2.

D … Solo la 1 e la 3. E … Tutte e tre.

[25] Si tratta di un quesito che consente un buon riesame degli ambiti di validità delle tre leggi di conservazione della meccanica.
L'energia meccanica si conserva perché nel testo non si fa riferimento alla presenza di forze dissipative.
La quantità di moto si conserva se il sistema è isolato, cioè se la risultante delle forze esterne si annulla. Le forze peso e le reazioni vincolari del piano si fanno equilibrio ma ciò non accade per la reazione del perno intorno a cui ruota A. Le forze interne sono quelle scambiate con la molla. Dunque la quantità di moto non si conserva.
Il momento angolare si conserva perché il momento della reazione vincolare del perno è nullo e le altre forze esterne hanno momenti che si annullano a coppie.

16.9 Problemi di fine capitolo

Per risolvere i problemi proposti tieni presenti i seguenti elementi:

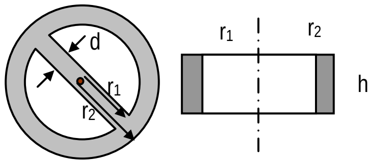
per affrontare i problemi tieni presente che

- Nella rotazione dei corpi rigidi la energia cinetica $\mathcal{E}_k$ vale ½ ω^2 I dove il momento di inerzia I = $\sum \delta m\, r^2$ viene calcolato dividendo il corpo in masse elementari ed r indica la distanza di ogni massa dall'asse di rotazione
- Il momento di inerzia riferito al centro di massa per un corpo di massa M caratterizzato da una dimensione lineare tipica b vale $\alpha M\, b^2$ dove α è un numero puro dipendente dalla forma (si vedano le tabelle)
- Il momento di inerzia relativo ad un asse fisso parallelo ad un asse passante per il centro di massa e posto a distanza R dal centro di massa vale $I = I_{CM} + M R^2$
- I moti di rotolamento possono essere analizzati o come rotazioni intorno all'asse istantaneo di rotazione o come rototraslazioni riferite al centro di massa
- Nei calcoli in cui si usa l'energia cinetica compariranno in generale sia termini di rotazione sia termini di traslazione
- Nei calcoli in cui si usa l'energia potenziale prestare attenzione al fatto che le posizioni si riferiscono al centro di massa ma il corpo non ha dimensioni trascurabili e dunque nei termini di energia potenziale compariranno delle costanti riferibili alle dimensioni del corpo stesso.
- La II legge della dinamica può essere scritta tramite due equazioni: la solita che si riferisce alle variazioni di quantità di moto del centro di massa $R = \frac{\delta \boldsymbol{p}}{\delta t}$ ed una seconda equazione $M = \frac{\delta \boldsymbol{L}}{\delta t}$ dove M è il momento delle forze esterne e $\boldsymbol{L}$ è il vettore momento angolare.
- Il vettore momento angolare rispetto ad un punto fisso è dato dal prodotto vettoriale $L = m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}$ e la definizione si estende per somma nel caso di un sistema
- La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ è un vettore con la direzione dell'asse di rotazione e con il verso che corrisponde all'avanzamento di una vite destrogira.
- Si dimostra che quando L viene calcolato rispetto ad un asse di rotazione $L = \omega\, I$ e che se $M = 0$ il momento angolare si conserva.

Descrizione del corpo rigido	Momento di Inerzia
Anello di spessore trascurabile, di massa m e raggio r rispetto all'asse di simmetria	$I = m\, r^2$
Cilindro cavo di raggio interno ed esterno r_1 ed r_2 e di massa m rispetto all'asse di simmetria del cilindro	$I = \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2)$
Disco pieno o cilindro di raggio r, massa m rispetto all'asse di simmetria	$I = \frac{m\, r^2}{2}$
Cilindro pieno di raggio r, massa m e lunghezza l rispetto ad un asse diametrale passante per il punto medio dell'asse di simmetria	$I = \frac{m\, r^2}{4} + \frac{m\, l^2}{12}$
Sbarra unidimensionale di lunghezza l e massa m rispetto ad un asse ortogonale alla sbarra e passante per il punto medio	$I = \frac{m\, l^2}{12}$
Sfera omogenea di massa m e raggio r rispetto ad un asse diametrale	$I = \frac{2m\, r^2}{5}$
Crosta sferica di raggio r, massa m e spessore trascurabile rispetto ad un asse diametrale	$I = \frac{2m\, r^2}{3}$

1. Caratteristiche di un volano - compito marzo 2003

Esercizio: Una coppia di forze di modulo F = 2.50 N e braccio b = 0.480 m agisce su un volano di ferro del tipo indicato in figura e rappresentato in vista dall'alto e di fianco. Dati: δ_{Fe} = 7.85 kg/dm^3, r_1 = 0.240 m, r_2 = 0.580 m, d = 0.120 m, h = 5.00 cm.



a) Determinare per somma il momento di inerzia del corpo essendo noti quello dell'anello $I_a = \frac{1}{2} m(r_1^2 + r_2^2)$ e quello della sbarra di lunghezza l: $I_l = 1/12\, m\, l^2$. Si consiglia di calcolare preventivamente le masse m_a e m_s dei due componenti il volano.

b) Determinare la accelerazione angolare $\dot{\omega}$ ed utilizzarla per calcolare dopo quanto tempo il corpo raggiunge una energia cinetica $\mathcal{E}_k$ = 1390 J partendo dalla quiete.

☹

a) La sbarra corrisponde ad un prisma a base rettangolare di lati d e h ed altezza $2r_1$ si ha pertanto esprimendo tutte le lunghezze in dm)
$m_s = \delta_{Fe}\, 2r_1\, d\, h = 7.85·2·2.40·1.20·0.500 = 22.6$ kg
L'anello ha una massa determinabile attraverso la differenza delle masse dei due cilindri di raggio r_1 ed r_2:
$m_a = \delta_{Fe}·\pi·(r_2^2 - r_1^2)\, h = 7.85·\pi(5.80^2 - 2.40^2)·0.500 = 343.8$ kg
I due momenti di inerzia si trovano utilizzando le due relazioni fornite:
$I_a = \frac{1}{2} m_a(r_1^2 + r_2^2) = 67.7$ kg m^2 $\qquad I_s = \frac{1}{12} m_s(2r_1)^2 = 0.434$ kg m^2
$I = I_a + I_s = 68.1$ kg m^2

b) Usando la II legge della dinamica relativa al moto di rotazione dei corpi rigidi si ha: $M = I\,\dot{\omega}$;
calcoliamo il momento M della coppia di forze $M = F\, b = 2.50·0.480 = 1.20$ N m
e tramite M la accelerazione angolare $\dot{\omega} = \frac{M}{I} = \frac{1.20}{68.1} = 0.0176$ rad/s^2
Poiché $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}\omega^2 I$ è possibile determinare il valore di ω corrispondente alla energia cinetica data:
$\omega = \sqrt{\frac{2\,\mathcal{E}_k}{I}} = \sqrt{\frac{2·1390}{68.1}} = 6.39$ rad/s
Poiché il corpo accelera con accelerazione angolare costante a partire dalla quiete si ha $\omega = \omega_0 + \dot{\omega}\, t = \dot{\omega}\, t$ e pertanto
$t = \frac{\omega}{\dot{\omega}} = \frac{9.03}{0.0176} = 363$ s.

☺

2. Momento di inerzia della Terra - Compito marzo 2003

Esercizio: La Terra ha una massa $m_T = 5.98·10^{24}$ kg e un raggio medio $R_T = 6.37·10^6$ m.

a) Determinare il suo momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione (passante per il centro) ricordando che il momento di inerzia della sfera vale $\frac{2m\, r^2}{5}$. Ipotizzare che la terra sia una sfera omogenea.

b) Confrontare il valore trovato con il valore reale pari a $I = 8.03·10^{37}$ kg m^2 ed ipotizzare una spiegazione

c) Calcolare la energia cinetica della terra rispetto al suo moto di rotazione $\mathcal{E}_{kr}$

d) Confrontare il valore trovato con quello $\mathcal{E}_{kt}$ dovuto al moto traslazionale della terra nella rivoluzione intorno al sole (si ricorda che la unità astronomica $R_{TS} = 1.50 \cdot 10^{11}$ m)

☹

a) $I_t = \frac{2m_T R_T^2}{5} = \frac{2 \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot (6.37 \cdot 10^6)^2}{5} = 9.71 \cdot 10^{37}$ kg m^2

b) $I/I_t = 0.827$ Il fatto che il valore teorico risulti più elevato di quello reale indica la presenza di un nucleo centrale più denso.

c) Per calcolare la energia cinetica di rotazione dobbiamo esprimere la velocità angolare attraverso il periodo:

$\mathcal{E}_{kr} = ½\, \omega^2 I = ½ \frac{4\pi^2}{T^2} I = ½ \frac{4\pi^2}{(24 \cdot 3600)^2} 9.71 \cdot 10^{37} = 2.57 \cdot 10^{29}$ J

Nel suo moto di rivoluzione intorno al Sole la Terra è assimilabile ad un punto materiale e dunque se indichiamo con v la velocità periferica e con T_r il periodo pari ad 1 anno espresso in s avremo:

$\mathcal{E}_{kt} = ½\, m_T v^2 = ½\, m_T \left(\frac{2\pi R_{TS}}{T_r}\right)^2 = 2 \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 1.50 \cdot 10^{11}}{365 \cdot 24 \cdot 3600}\right)^2 = 2.67 \cdot 10^{33}$ J

Dunque: $\frac{\mathcal{E}_{kt}}{\mathcal{E}_{kr}} = \frac{2.67 \cdot 10^{33}}{2.57 \cdot 10^{29}} = 1.04 \cdot 10^4$

☺

3. La contrazione del Sole - Compito marzo 2003

Esercizio: Il Sole ruota su se stesso con un periodo T = 25.38 giorni, ha una massa $m_S = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg e un raggio $R_S = 6.96 \cdot 10^8$ m.

Ipotizziamo che il Sole giunto al termine del suo ciclo di vita si contragga sino a trasformarsi in una stella di neutroni.

a) Determinare la densità della materia nucleare δ_n sapendo che $m_n = 1.67 \cdot 10^{-27}$kg e che i nucleoni abbiano le dimensioni di 1 Fermi = 10^{-15} m

b) Utilizzare il risultato trovato per determinare il raggio R_n della stella di neutroni

c) Calcolare il momento di inerzia del Sole I_S e attraverso una semplice proporzione determinare quello della stella di neutroni I_n

d) Scrivere, in base alla conservazione del momento angolare la relazione tra T_S e T_n e determinare T_n

e) Determinare la velocità periferica degli strati esterni della stella di neutroni.

☹

a) Possiamo ipotizzare che i neutroni occupino uno spazio pari al volume di un cubo delle dimensioni di un Fermi e pertanto:

$\delta_n = \frac{m_n}{d^3} = \frac{1.67 \cdot 10^{27}}{10^{-45}} = 1.67 \cdot 10^{18}$kg/m^3. Il risultato non muta in maniera sensibile se si assumono configurazioni sferiche e si tratta comunque di una stima di massima.

b) La stella di neutroni occuperà un volume sferico tale $m_S = \frac{4}{3}\pi R_n^3 \delta_n$ e dunque

$R_n = \sqrt[3]{\frac{3m_S}{4\pi\delta_n}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{4\pi \cdot 1.67 \cdot 10^{18}}} = 6.58 \cdot 10^3$ m

Questa determinazione non tiene conto dei vincoli reali che riguardano la condensazione della materia nucleare, vincoli imposti dal principio di indeterminazione.

c) $I_S = \dfrac{2m_S R_S^2}{5} = \dfrac{2 \cdot 1.99 \cdot 10^{30} \cdot (6.96 \cdot 10^8)^2}{5} = 3.86 \cdot 10^{47}$ kg m²

Poiché, a parità di massa il momento di inerzia e proporzionale al quadrato del raggio si avrà:

$I_n = I_S \dfrac{R_n^2}{R_S^2} = 3.86 \cdot 10^{47} \left(\dfrac{6.58 \cdot 10^3}{6.96 \cdot 10^8}\right)^2 = 3.45 \cdot 10^{37}$ kg m²

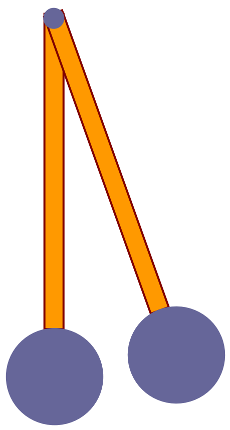
d) Il momento angolare si conserva perché è nullo il momento delle forze esterne e dunque I ω = costante ma ω è inversamente proporzionale a T e pertanto T risulta proporzionale al momento di inerzia. Si ha così:

$T_n = T_S \dfrac{I_n}{I_S} = 25.38 \dfrac{3.45 \cdot 10^{37}}{3.86 \cdot 10^{47}} = 2.27 \cdot 10^{-9}$ giorni $= 2.27 \cdot 10^{-9} \cdot 3600 \cdot 24 = 1.96 \cdot 10^{-4}$ s

e) La velocità periferica della stella di neutroni risulta pari a $v = \dfrac{2\pi R_n}{T_n} = \dfrac{2\pi \cdot 6.58 \cdot 10^3}{1.96 \cdot 10^{-4}} = 2.11 \cdot 10^8$ m/s cioè circa 2/3 della velocità della luce.

☺

4. Il pendolo composto - compito aprile 2003



Esercizio: Un pendolo è costituito da una sbarra cilindrica di rame di raggio r = 1.25 cm e lunghezza l = 75 cm incernierata ad un estremo e da una sfera di ghisa con raggio R = 5.8 cm nell'altro estremo. Determinare:

a) le masse M_{sb} e M_{sf} della sbarra e della sfera.

b) il momento di inerzia della sbarra rispetto al centro di massa I_{sb} e rispetto ad un estremo I'_{sb}

c) il momento di inerzia della sfera rispetto al punto di cerniera I_{sf} (attenzione: riflettere sul tipo di moto della sfera e sulla distanza del suo centro di massa dal punto di cerniera; indicarla con l' nel prosieguo del problema).

d) dopo aver verificato che il momento di inerzia I del pendolo risulta pari a 4.59 kg m² determinare la variazione di energia potenziale ΔU del pendolo nel passare dalla posizione verticale a quella obliqua con angolo α = 35° rispetto alla verticale. Si tratta di calcolare le variazioni di quota del centro di massa della sfera e del centro di massa della sbarra.

e) Se al tempo t = 0 la sfera acquista per effetto di un urto la velocità v = 2.55 m/s quanto vale la energia cinetica del pendolo $\mathcal{E}'_k$ nella configurazione descritta dall'angolo α?

f) In tale caso quanto vale la velocità angolare ω' del pendolo?

Dati: δ_{Cu} = 8.92 kg/dm³; δ_{gh} = 7.45 kg/dm³; momento di inerzia di una sbarra omogenea di massa m e lunghezza b rispetto al baricentro I = 1/12 m b²

☹

a) $M_{sb} = \pi r^2 l \,\delta_{Cu} = \pi (1.25 \cdot 10^{-1})^2 \, 7.5 \cdot 8.92 = 3.28$ kg

$M_{sf} = \dfrac{4}{3} \pi R^3 \delta_g = \dfrac{4}{3} \pi \cdot 0.58^3 \cdot 7.45 = 6.09$ kg

b) $I_{sb} = \frac{1}{12} m_{sb}\, l^2 = \frac{1}{12} 3.28 \cdot 0.75 = 0.154$ kg·m^2

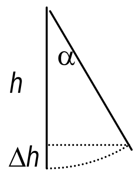
applicando il teorema di Steiner si ha che:

$I'_{sb} = I_{sb} + m_{sb}\, (\frac{1}{2}\, l)^2 = 0.615$ kg·m^2

c) La sfera in rotazione intorno all'estremo della sbarra equivale ad una massa puntiforme che ruota intorno ad un asse distante $l' = l + R = = 0.808$ m. Pertanto:

$I'_{sf} = M_{sf}\, l'^2 = 6.09 \cdot 0.808^2 = 3.976$ kg·m^2

d) $I = I'_{sb} + I'_{sf} = 4.59$ kg·m^2



Le variazioni di energia potenziale sono pari a $mg\Delta h$ e sono in entrambi i casi positive (quando il pendolo si sposta di α dalla verticale i due centri di massa della sbarra e della sfera si alzano). A tali aumenti di energia potenziale corrisponderà una diminuzione di energia cinetica in base al teorema di conservazione dell'energia.

Le due variazioni di energia potenziale possono essere calcolate separatamente attraverso le variazioni di quota che valgono in entrambi i casi $h - h \cos \alpha$ dove h rappresenta la quota del centro di massa pari a ½ l per la sbarra e l' per la sfera.

$\Delta U_{sb} = M_{sb}\, g\, \frac{1}{2}\, l\, (1 - \cos \alpha) = 3.28 \cdot 9.81 \cdot 0.375 \cdot (1 - \cos 35°) = 2.18$ J

$\Delta U_{sf} = M_{sf}\, g\, l'\, (1 - \cos \alpha) = 6.09 \cdot 9.81 \cdot 0.818 \cdot (1 - \cos 35°) = 8.73$ J

L'energia potenziale cambia di $\Delta U = 2.18 + 8.73 = 10.9$ J

e) La energia cinetica iniziale è calcolabile determinando la velocità angolare iniziale e sfruttando poi il momento di inerzia calcolato preventivamente:

$\omega_0 = \frac{v}{l'} = \frac{2.55}{0.818} = 3.16$ rad/s

$\mathcal{E}_{k0} = \frac{1}{2}\, \omega^2\, I = \frac{1}{2}\, 3.16^2 \cdot 4.59 = 22.9$ J

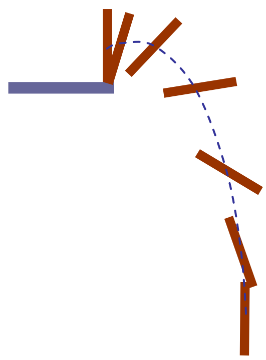
Poiché l'energia si conserva la variazione di energia cinetica è uguale ed opposta a quella di energia potenziale pertanto:

$\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{k0} - \Delta U = 22.9 - 10.9 = 12.0$ J

Ma $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}\, \omega'^2\, I$ e pertanto: $\omega' = \sqrt{\frac{2\,\mathcal{E}_k}{I}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12.0}{4.59}} = 2.29$ rad/s

☺

5. Conservazione del momento angolare - *Compito maggio 2004*



Esercizio: Un tuffatore assimilabile ad un'asta omogenea di massa $m = 70$ kg e lunghezza $h = 1.75$ m si lascia cadere dal bordo di una piattaforma posta ad altezza H dal pelo dell'acqua.

Il tuffatore si lascia cadere ruotando rigidamente intorno ai piedi finché, per effetto della velocità acquisita, si stacca dalla piattaforma e inizia a cadere liberamente.

a) Scrivere, tramite la II legge della dinamica, l'equazione che fornisce il legame tra la velocità angolare ω_0 e l'angolo riferito alla verticale α_0 nel momento in cui avviene il distacco. Suggerimento: quando avviene il distacco quanto vale la reazione vincolare?

b) Tramite la conservazione della energia scrivere il legame generale che esiste tra ω e α.

c) Utilizzare le due equazioni precedenti per dimostrare che il distacco avviene per $\cos \alpha_0 = 6/7$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{12}{7}\frac{g}{h}}$

d) Sino a prima del distacco come è il moto? Dopo il distacco come si muove il centro di massa e perché? Come ruota il tuffatore e perché?

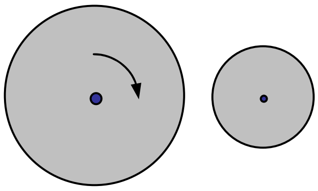
e) Scrivere l'equazione che collega ω con il tempo Δt minimo che consente al tuffatore di entrare in acqua dalla testa e in verticale.

f) Scrivere l'equazione che fornisce il legame tra H e Δt prestando attenzione al fatto che il tuffatore possiede una velocità verticale v_{0y} calcolabile e che lo spazio percorso in verticale è …

g) Determinare il valore di H minimo con i dati forniti. [26]

☹

6. Momento delle forze e momento angolare - *Compito maggio 2004*



Esercizio: Due ruote di massa M_1 = 10 kg e M_2 = 5 kg con raggi R_1= 15 cm e R_2 = 9 cm hanno gli assi di rotazione paralleli $\omega_1 = 2\pi$ rad/s e ω_2 = 0 rad/s.

I loro assi di rotazione vengono progressivamente avvicinati finche le due ruote trascorso un tempo di andata a regime ruotano insieme senza strisciare.

a) Descrivere qualitativamente cosa accade quando le due ruote entrano in contatto.

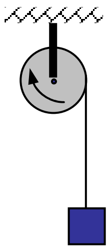
b) Perché non è possibile applicare la conservazione del momento angolare?

c) Quali sono le due leggi che si debbono applicare per determinare le due velocità angolari ω'_1 e ω'_2 quando termina lo strisciamento relativo e le due ruote raggiungono la stessa velocità periferica?

d) Determinare la velocità angolare finale delle due ruote.

☺

7. La II legge per i momenti - *Compito maggio 2004*



Esercizio: Una puleggia di massa M e raggio R regge tramite una fune di massa trascurabile un corpo puntiforme di massa m. Il sistema è inizialmente in quiete.

a) disegnare il diagramma del corpo libero per la puleggia e per la massa

---

[26] a) Il distacco avviene quando si annulla la reazione vincolare e ciò accade per $mg\cos\alpha = \frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, h$

b) si ottiene $\omega^2 h = 12\, g(1 - \cos\alpha)$

c) Basta sostituire e si ottiene quanto detto nel testo

d) Prima del distacco il moto è di tipo rotatorio intorno al vincolo con una accelerazione angolare dovuta all'azione della forza peso. Dopo il distacco l'unica forza esterna (il peso) non ha momento rispetto al centro di massa e dunque il momento angolare si conserva. Poiché I non cambia rimane costante $\omega = \omega_0$

Il tuffatore dunque cade di moto parabolico ruotando intorno al suo centro di massa di moto circolare uniforme.

e) si ha $\omega_0 = \dfrac{\pi - \alpha_0}{\Delta t}$ perché il punto di impatto nelle condizioni richieste corrisponde ad $\alpha = \pi$

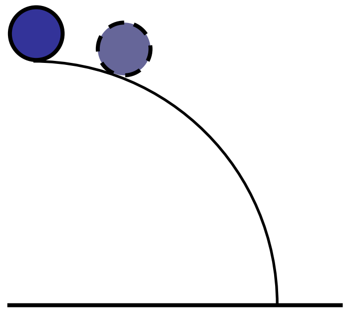
f) la velocità iniziale $v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0 = \dfrac{\sqrt{3\,g\,h}}{7}$ e il corpo cade di moto uniformmente accelerato con accelerazione g dovendo compiere il percorso $H - h/2 + h/2 \cos\alpha_0$

b) scrivere la II legge della dinamica per il moto di rotazione e per quello di traslazione ed utilizzarla per ricavare l'equazione che fornisce la velocità angolare in funzione del tempo dimostrando che si ha $\omega = \dfrac{g\,t}{R\left(1+\dfrac{M}{2m}\right)}$

c) Utilizzare il risultato trovato per calcolare l'energia cinetica del sistema al variare del tempo.

☹

8. Il distacco nel rotolamento - *Compito maggio 2004*



*Esercizio:*Una sfera di massa m e raggio r parte in quiete dalla sommità di una sfera di raggio R. Dopo averne descritta la posizione tramite l'angolo formato con la verticale:

a) Scrivere la II legge della dinamica nel punto di distacco tra le due sfere spiegando cosa avviene nel punto di distacco

b) Determinare l'angolo in cui avviene il distacco dimostrando che si ha $\cos\alpha = 10/17$

c) Calcolare le due componenti v_{0x} e v_{0y} della velocità della sferetta

d) Descrivere qualitativamente il moto della sferetta dopo il distacco

☹

9. Momento di inerzia: Compito maggio 2004

Esercizio: Nella moneta da 2 € un disco di ottone del diametro $d_1 = 1.8$ cm è circondato da un disco di acciaio di diametro esterno $d_2 = 2.5$ cm.

a) Sapendo che $\delta_1 = 8.7$ kg/dm³ e che $\delta_2 = 7.8$ kg/dm³ determinare il momento di inerzia della moneta il cui spessore h = 2 mm.

b) Trovare l'espressione simbolica che fornisce il rapporto dei momenti di inerzia tra la moneta da 2 € e una moneta identica ed omogenea di densità δ_2

☹

10. Conservazione del momento angolare - *Compito maggio 2004*

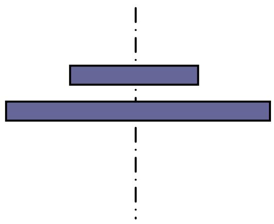
Esercizio: La Terra ha un momento di inerzia $I = 8.03 \cdot 10^{37}$ kg m², una massa $M_T = 5.974 \cdot 10^{24}$ kg e un raggio medio $R_T = 6.3671 \cdot 10^{6}$ m.

a) Determinare il valore di α che caratterizza il suo momento di inerzia.

b) Supporre che, per effetto dello scioglimento dei ghiacci della calotta polare sud, il valore di α aumenti di un punto sulla terza cifra significativa. Determinare l'incremento T' – T nel giorno solare.

☹

11. Conservazione del momento angolare - *Compito maggio 2004*



*Esercizio:*Due ruote a disco fatte dello stesso materiale di densità δ, di spessore h e di raggi $R_1 = ½\ R_2$ hanno gli assi di rotazione coincidenti, ruotano nello stesso verso con $\omega_1 = 8\ \omega_2$ ma non sono a contatto.

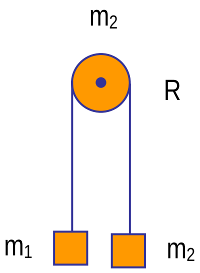
Le due ruote vengono portate progressivamente a contatto e, dopo una fase di strisciamento reciproco. si portano alla stessa velocità angolare ω.

a) Spiegare perché, durante la fase di andata a regime, è possibile utilizzare la legge di conservazione del momento angolare

b) Determinare la velocità angolare dopo l'andata a regime dimostrando che si ha $\omega' = \frac{24}{17}\ \omega_2$

c) Dimostrare che il rapporto tra energia cinetica iniziale e finale vale $\frac{\mathcal{E}_{kf}}{\mathcal{E}_{ki}} = \frac{36}{85}$

12. Macchina di Atwood



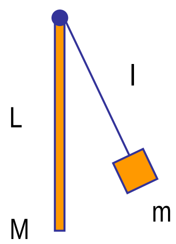
Esercizio: Determinare come cambia la accelerazione di una macchina di Atwood quando la massa M della puleggia di raggio R non è trascurabile.

Indicare con m_1 e m_2 le due masse, trascurare la massa della fune e ipotizzare che la fune non strisci sulla puleggia.

Dopo aver trovata la accelerazione determinare anche i due valori di tensione nei due lati della fune. [27]

☹

13. Urto elastico tra corpi estesi

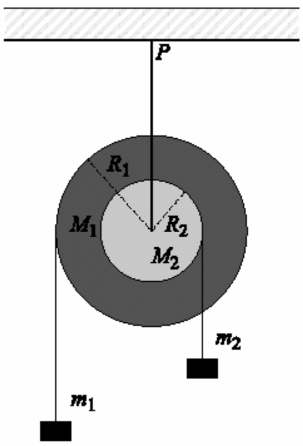


Esercizio: Un pendolo semplice costituito da una massa m sospesa ad un filo di lunghezza l, urta nel punto più basso della traiettoria un'asta rettilinea di massa M e lunghezza L incernierata nello stesso punto del pendolo.

Determinare la relazione che si deve avere tra masse e lunghezze affinché, per effetto di un urto elastico, la massa del pendolo si arresti subito dopo l'urto. [28]

☹

14. Olimpiadi 2003 selezione nazionale: pulegge di massa non trascurabile



Esercizio: Una "doppia puleggia" è formata da due dischi, di forma cilindrica e rigidamente connessi, rispettivamente di raggio R_1 ed R_2 e masse M_1 ed M_2. Ciascun disco porta avvolta una corda inestensibile e di massa trascurabile alla cui estremità è appesa una massa di valore rispettivamente m_1 e m_2, come mostrato in figura. Le corde non scivolano durante il loro moto intorno ai due dischi.

Determinare la condizione che deve essere soddisfatta tra le grandezze in gioco in modo tale che ci sia equilibrio meccanico.

Si assuma ora $m_2 = m_1$, $M_1 = 9m_1$, $M_2 = 3m_1$ e $R_1 = 2R_2$. Con questi valori, in che verso ruotano le pulegge?

Determinare la velocità v_1 della massa m_1, dopo che si è spostata di un tratto h, a partire dalla posizione di quiete.

---

[27] Si trova, applicando la II legge della dinamica ai tre corpi coinvolti che: $a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + I/R^2}\, g$

Per la tensione si ha $T_1 = m_1 (a - g)$ …

[28] Trovare la velocità della sbarra subito dopo l'urto e applicare la conservazione del momento angolare. Si trova $l^2 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{M}{m}}\, L^2$

Determinare le tensioni T_1 e T_2 delle due corde.

La forza totale F che il soffitto esercita nel punto P per sostenere il sistema delle pulegge e delle masse è la stessa sia quando le masse m_1 e m_2 sono ferme sia quando sono in moto? Motivare adeguatamente la risposta e successivamente calcolare la forza F (o le forze, se diverse).

☹

1) In condizione di equilibrio deve essere uguale 0 la risultante dei momenti e dunque (semplificando per g e osservando che i pesi delle pulegge hanno momento nullo)

   $m_1R_1 = m_2R_2$

   Non si prende in esame l'equilibrio delle forze perché esso è automaticamente garantito dalle reazioni vincolari

2) Si osserva che con i dati forniti si ha rottura dell'equilibrio e si tratta pertanto di confrontare i moduli dei nuovi momenti delle masse sospese:

   $\mathcal{M}_1 = m_1gR_1$ mentre $\mathcal{M}_2 = m_2gR_2 = 1/2\ m_1gr_1 = ½\ \mathcal{M}_1$

   dunque la massa m_1 scende e il sistema ruota in verso antiorario.

3) Per rispondere alla domanda bisogna applicare la conservazione dell'energia e tener conto anche delle energie cinetiche rotazionali delle pulegge.

   Quando m_1 scende di h la massa m_2 sale di h' tale che si abbia lo stesso spostamento angolare e ricordando che $\Delta\alpha = \dfrac{\Delta l}{R}$ si ha:

   $\dfrac{h}{R_1} = \dfrac{h'}{R_2}$ da cui $h' = h\dfrac{R_2}{R_1} = ½\ h$

   Dunque la variazione di energia potenziale risulta $\Delta U = -\ m_1\ g\ h + m_2\ g\ h' = -½\ m_1\ g\ h$.

   Le energie cinetiche sono anche loro completamente correlate perché, fissata v_1, sono determinate $\omega = \dfrac{v_1}{R_1}$ e $v_2 = \omega R_2 = \dfrac{v_1}{R_1} R_2 = ½\ v_1$, si ha pertanto che:

   $\mathcal{E}_k = ½\ [m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + I_1\omega^2 + I_2\omega^2]$

   Basta ora trovare i due momenti di inerzia:

   $I_1 = ½\ M_1R_1^2 = \dfrac{9}{2} m_1R_1^2$

   $I_2 = ½\ M_2R_2^2 = \dfrac{3}{8} m_1R_1^2$

   per arrivare alla energia cinetica

   $\mathcal{E}_k = ½\ [m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + I_1\omega^2 + I_2\omega^2] = ½\ m_1v_1^2[1 + ¼ + 9/2 + 3/8] = \dfrac{49}{16} m_1v_1^2$

   Se ora teniamo presente che la variazione di energia cinetica è uguale e contraria a quella di energia potenziale sarà:

   $\dfrac{49}{16} m_1v_1^2 = ½\ m_1\ g\ h$ e infine:

$v_1 = \frac{2}{7}\sqrt{2\,g\,h}$

4) Per determinare le due tensioni T_1 e T_2 è necessario utilizzare la II legge della dinamica applicata alle due masse puntiformi e ciò richiede la determinazione preventiva della accelerazione delle due masse.

A questo scopo utilizzeremo la versione della seconda legge della dinamica che correla i momenti e le variazioni di momento angolare. Infatti $\frac{\delta L}{\delta t}$ dipenderà sia dalle accelerazioni lineari che da quelle angolari che sono a loro volta correlate.

Il momento delle forze esterne applicate al sistema è quello dovuto all'azione dei due pesi:

$\mathcal{M} = m_1 g R_1 - m_2 g R_2 = \frac{1}{2} m_1 g R_1$

$L = I_1\omega + I_2\omega + m_1 v_1 R_1 + m_2 v_2 R_2 = (I_1 + I_2)\omega + m_1 v_1 R_1 + m_1 \frac{1}{2} v_1 \frac{1}{2} R_1$

$= (I_1 + I_2)\omega + \frac{5}{4} m_1 v_1 R_1$

Si ha dunque:

$$\frac{\delta L}{\delta t} = (I_1 + I_2)a_\omega + \frac{5}{4} m_1 a_1 R_1 = \frac{39}{8} m_1 R_1^2 \frac{a_1}{R_1} + \frac{5}{4} m_1 a_1 R_1 = \frac{49}{8} m_1 a_1 R_1$$

Ne consegue che $\frac{1}{2} m_1 g R_1 = \frac{49}{8} m_1 a_1 R_1$ e quindi:

$a_1 = \frac{4}{49} g$ mentre a_2 essendo proporzionale a R ($v = \omega R$) vale $\frac{2}{49} g$

Poiché le due accelerazioni trovate sono costanti possiamo affermare che le due masse si muovono di moto uniformemente accelerato e ciò è una conseguenza della azione di forze e momenti costanti.

In effetti, se applichiamo le leggi che correlano le velocità e lo spazio percorso nel m.u.a. e teniamo conto che la velocità iniziale è nulla avremo che $v_1^2 = 2a_1 h$ e quindi:

$a_1 = \frac{v_1^2}{2a_1 h} = \frac{4}{49} g$

Basta ora scrivere l'equazione del corpo libero per la prima massa per ottenere il valore di T_1:

$m_1 g - T_1 = m_1\, a_1 = m_1 \frac{4}{49} g$ e dunque $T_1 = \frac{45}{49} m_1\, g$

Analogamente si trova che $T_2 = \frac{51}{49} m_1\, g$

5) Il soffitto deve reggere la risultante delle forze peso delle due pulegge e delle due tensioni delle funi che gravano sulle pulegge; ora, quando il sistema è in equilibrio le due tensioni sono pari al peso delle due masse m_1 e m_2 dunque:

$$N = m_1 g + m_2 g + M_1 g + M_2 g = 14\, m_1 g$$

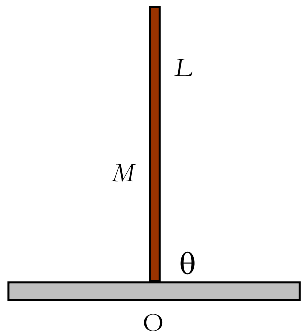
Quando si rompe l'equilibrio le due tensioni, come abbiamo visto, differiscono dai pesi:

$$N = T_1 + T_2 + M_1 g + M_2 g = \frac{45}{49} m_1 g + \frac{51}{49} m_1 g + 12\, m_1 g = \frac{684}{49} m_1 g < \frac{686}{49} m_1 g = 14\, m_1 g$$

☺

15. Olimpiadi 2004 selezione nazionale: La caduta di un'asta rigida

Esercizio: Un'asta omogenea di massa M, lunghezza L e dimensioni trasversali trascurabili è inizialmente appoggiata in posizione verticale su un pavimento orizzontale rigido, in equilibrio instabile.



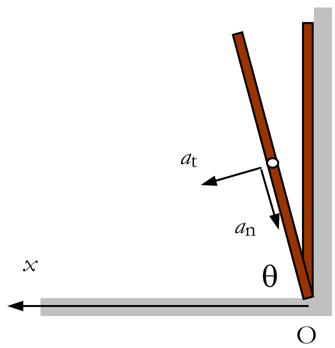
Discutere i casi seguenti, senza considerare l'attrito tranne che quando ciò viene esplicitamente richiesto, e indicando con O il punto iniziale di appoggio e con θ l'angolo che essa forma in ogni istante col piano orizzontale.

Nel primo caso l'asta non ha alcun appoggio tranne il pavimento senza attrito. Essendo l'equilibrio instabile, ad un certo punto inizia a cadere verso destra. Dire a quale distanza da O si trova il centro dell'asta quando esso tocca il pavimento.

In questo secondo caso, l'asta è inizialmente appoggiata contro una parete verticale e inizia a cadere ruotando intorno a O. A un certo punto essa perde il contatto con la parete e, continuando la caduta, inizia a scivolare lateralmente sul pavimento.

a) Calcolare le componenti radiale e tangenziale dell'accelerazione del centro di massa (o centro dell'asta) in funzione dell'angolo θ.

b) Calcolare quanto vale θ e la velocità del centro di massa nell'istante in cui inizia a scivolare lateralmente sul pavimento.



Nel terzo caso l'asta è inizialmente come alla domanda 1, ma sul pavimento è presente un forte attrito statico, con coefficiente μ. Tuttavia, anche con μ comunque grande, si ha certamente uno slittamento del punto di appoggio dell'asta sul pavimento quando θ raggiunge un certo valore limite. Trovare questo valore.

Suggerimento: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto a un asse ortogonale ad essa e passante per un suo estremo è $\frac{1}{3}ML^2$.

☹

1) Lungo l'orizzontale non agiscono forze esterne e pertanto la componente orizzontale della quantità di moto si conserva. Ma il centro

di massa è inizialmente in quiete e si trova sopra O. Così rimane anche al termine della caduta.

2) La rotazione dell'asta è inizialmente dovuta all'azione congiunta della forza peso (costante) e della reazione vincolare (variabile in direzione ed intensità al variare di θ). Queste due forze non si fanno equilibrio come dimostra il moto curvilineo del centro di massa cui corrisponde uno spostamento orizzontale dello stesso. Quando la componente orizzontale della reazione vincolare si annulla l'asta inizia a scivolare lateralmente sul pavimento (come afferma il testo).
Per studiare il moto di rotazione dell'asta useremo l'equazione

$$\mathcal{M} = I\frac{\delta\omega}{\delta t} = I\ \dot{\omega}$$

dove con $\dot{\omega}$ si è indicata la accelerazione angolare.
Il momento $\mathcal{M}$ è dovuto all'azione della sola forza peso Mg con braccio ½ $l\cos\theta$ e sarà dunque:

$$\tfrac{1}{2}\ Mg\,L\cos\theta = I\ \dot{\omega} = \frac{1}{3}ML^2\dot{\omega}$$

e da qui si ottiene il valore della accelerazione angolare in funzione dell'angolo:

$$\dot{\omega} = \frac{3}{2}\frac{g\cos\theta}{L}$$

Il vettore accelerazione del centro di massa (che si muove di moto circolare) presenta una componente tangenziale:

$$a_t = \dot{\omega}\frac{L}{2} = \frac{3}{4}g\cos\theta$$

e una componente normale:

$$a_n = \omega^2\frac{L}{2}$$

che riusciremo a calcolare se sappiamo esprimere l'andamento di ω in funzione di θ.
Come per tutti i calcoli in cui si vuol determinare una velocità in funzione della posizione utilizzeremo la conservazione dell'energia comparando la perdita di energia potenziale dell'asta (dovuta all'abbassamento del centro di massa) con l'incremento di energia cinetica (rotazionale) dell'asta:

$$Mg\frac{L}{2}(1 - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}\,\omega^2 I = \tfrac{1}{2}\,\omega^2\frac{1}{3}ML^2$$

da cui $\omega^2 = 3g\dfrac{1 - \sin\theta}{L}$ e infine:

$$a_n = \omega^2\frac{L}{2} = \frac{3}{2}g\,(1 - \sin\theta)$$

Le due componenti a_t e a_n ci consentono di calcolare la componente orizzontale della accelerazione a_x che, moltiplicata per la massa ci fornirà la componente orizzontale della reazione vincolare. Il distacco dell'asta dalla parete avverrà in corrispondenza dell'istante in cui tale componente, dipendente dall'angolo, si annulla.

$$a_x = a_t\sin\theta - a_n\cos\theta = \frac{3}{4}g\cos\theta\sin\theta - \frac{3}{2}g\,(1 - \sin\theta)\cos\theta$$

$$a_x = \frac{3}{4}g\cos\theta(\sin\theta - 2(1 - \sin\theta)) = \frac{3}{4}g\cos\theta\ (3\sin\theta - 2)$$

Dunque la reazione vincolare spinge la sbarra verso sinistra finché per $\sin\theta = 2/3$ la accelerazione orizzontale si annulla, la componente orizzontale della forza si annulla con essa e la sbarra inizia a traslare verso sinistra.
In questo contesto la velocità del centro di massa vale:

$$v = \omega \frac{L}{2} = \sqrt{3g\frac{1-2/3}{L}}\,\frac{L}{2} = \frac{\sqrt{gL}}{2}$$

3) Vediamo infine cosa accade in presenza di un coefficiente d'attrito. La prima osservazione è che l'azione dell'attrito consente di sostituire l'azione della parete verticale la cui componente di reazione vincolare è sostituita dalla forza d'attrito. Ma mentre la parete (essendo un vincolo) è in grado di soddisfare qualsiasi richiesta lo stesso non accade per l'attrito che presenta un valore massimo dato da μN dove N rappresenta la reazione vincolare della parete orizzontale.
Essa si calcola attraverso la II legge della dinamica lungo la verticale:

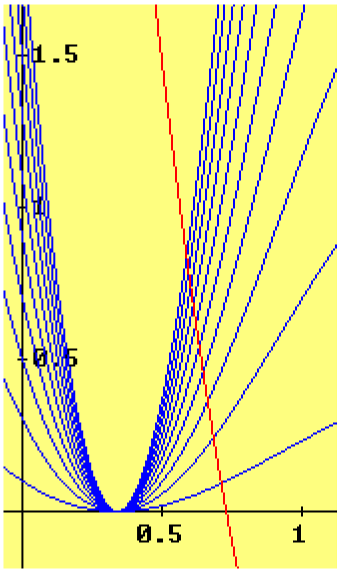
$$Mg - N = Ma_v = M(a_t\cos\theta + a_n\sin\theta) = M\frac{3}{4}g\,(\cos^2\theta + 2\sin\theta - 2\sin^2\theta) = \frac{3}{4}Mg\,(-3\sin^2\theta + 2\sin\theta + 1)$$

Dunque $N = \frac{3}{4}Mg\,(+3\sin^2\theta - 2\sin\theta + 1/3) = \frac{1}{4}Mg\,(+3\sin\theta - 1)^2$

La reazione vincolare si annulla per $\sin\theta = 1/3$ e ciò significa che con qualsiasi valore del coefficiente d'attrito si ha certamente lo scivolamento per angoli inferiori ad $\arcsin(1/3) \approx 19.5°$
Fissato μ l'angolo in corrispondenza del quale inizia lo scivolamento è dato dalla soluzione della equazione:

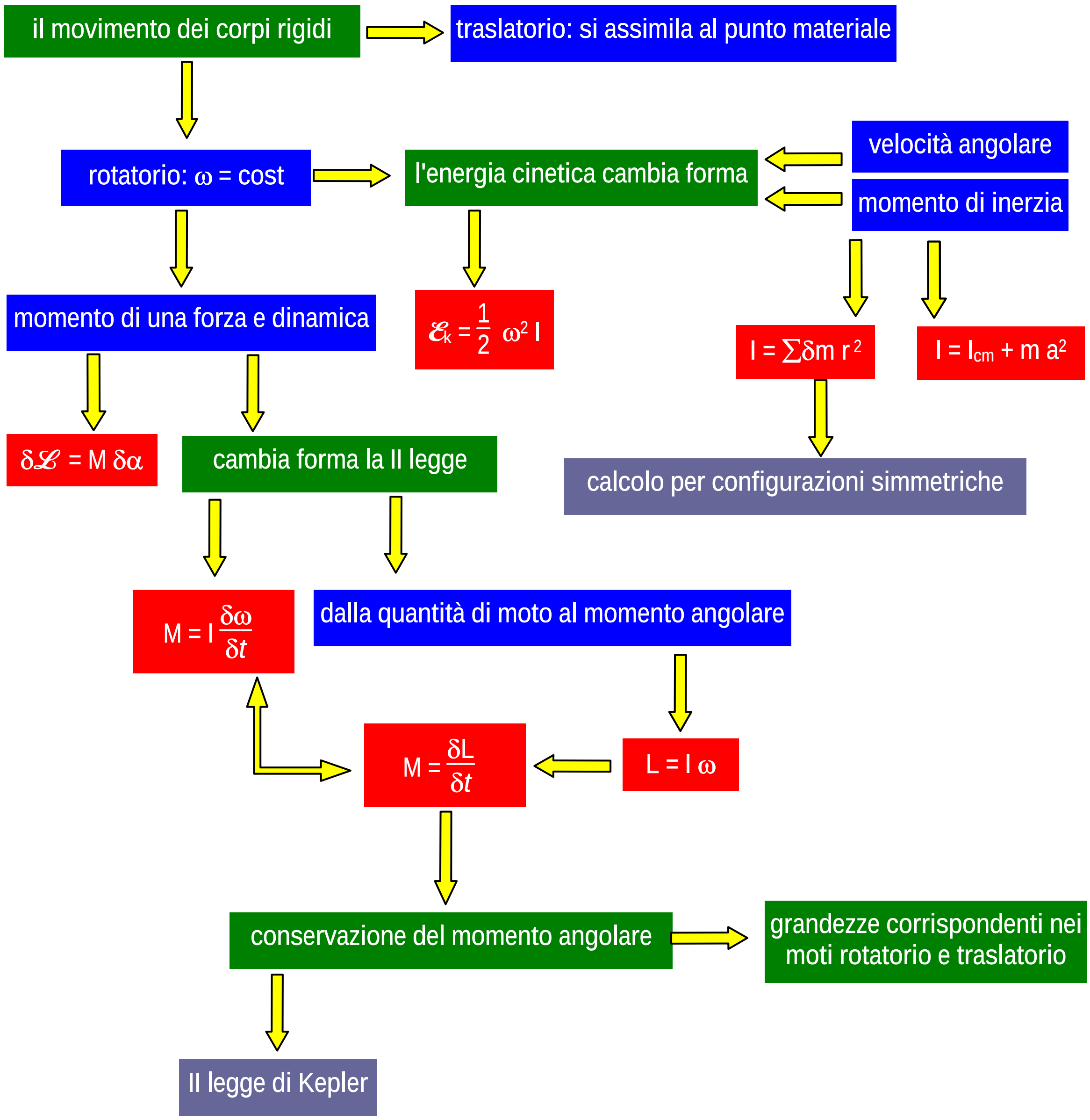
$\frac{1}{4}\mu Mg\,(+3\sin\theta - 1)^2 = \frac{3}{4}Mg\cos\theta\,(2 - 3\sin\theta)$ ovvero:

$$\mu\,(+3\sin\theta - 1)^2 = 3\cos\theta\,(2 - 3\sin\theta)$$



Si tratta di una disequazione trascendente, non risolubile per via elementare, e della quale si possono solo dare soluzioni approssimate Utilizzando Derive abbiamo rappresentato l'andamento (in blù) della famiglia di funzioni corrispondenti al primo membro per valori di μ compresi tra 0.1 e 2 con passo 2 e in rosso del II membro. Come si nota si ha una soluzione compresa tra 0.6 e 0.75 radianti al variare del coefficiente d'attrito.

Indice analitico


il movimento dei corpi rigidi
traslatorio: si assimila al punto materiale
rotatorio: ω = cost
l'energia cinetica cambia forma
velocità angolare
momento di inerzia
momento di una forza e dinamica
$\mathscr{E}_k = \frac{1}{2}\omega^2 I$
$I = \sum \delta m\, r^2$
$I = I_{cm} + m a^2$
$\delta\mathscr{L} = M\,\delta\alpha$
cambia forma la II legge
calcolo per configurazioni simmetriche
$M = I\frac{\delta\omega}{\delta t}$
dalla quantità di moto al momento angolare
$M = \frac{\delta L}{\delta t}$
$L = I\,\omega$
conservazione del momento angolare
grandezze corrispondenti nei moti rotatorio e traslatorio
II legge di Kepler