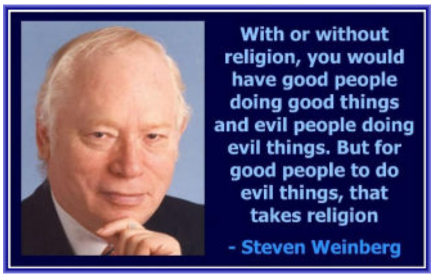
II.5. La teoria della relatività generale

- ⌘ Una visione di insieme
- ⌘ Spazio e tempo nei sistemi di riferimento non inerziali
- ⌘ Una digressione sulla storia delle geometrie non euclidee
- ⌘ L'iter che porta alla formulazione del principio di equivalenza
- ⌘ Cenni alla teoria einsteiniana della gravitazione



Weinberg è un razionalista e riduzionista militante e di conseguenza non ha una grande opinione delle religioni strutturate. Diverso è il suo discorso su Dio

5.1 Una visione di insieme

5.1.1 Premessa alla versione 5.0

Quando ho rimesso mano a questo capitolo la cui stesura mi era costata parecchia fatica non avendo mai fatto nella mia vita un corso e nemmeno un approfondimento sulla *relatività generale* sono rimasto abbastanza insoddisfatto e, in questa revisione, ho cercato di precisare, spiegare, chiarire concetti che, senza la trattazione sistematica, sono destinati a rimanere comunque un po' oscuri.

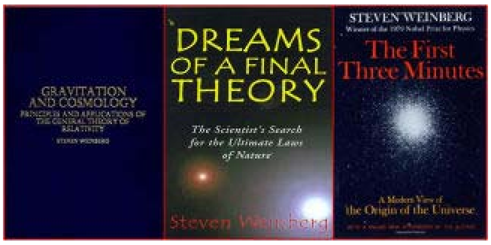
Navigando nella rete mi sono imbattuto nel testo di *Steven Weinberg* "*Gravitation and cosmology*" del 1971 (prima dell'opera in 3 volumi sulla teoria dei campi e sul modello standard) e trattandosi di un premio Nobel colto e capace di grande divulgazione sui temi della fisica teorica di fine 900 ("*I primi tre minuti*" e soprattutto "*Il sogno dell'unità dell'universo*"), ho deciso di guardare se, nelle parti meno tecniche, si poteva estrarre qualche insegnamento.

Scrive Weinberg nella premessa al testo:[1]

Ho visto che in molti testi le idee geometriche giocano un ruolo da protagoniste, così che lo studente che si domanda come mai il campo gravitazionale sia rappresentato da un tensore metrico, o come mai le particelle in caduta libera si muovano lungo le geodetiche, o come mai le equazioni del campo siano covarianti resta con l'impressione che tutto ciò abbia a che fare con il fatto che lo spazio-tempo sia una varietà Riemanniana.
Naturalmente, questo era il punto di vista di Einstein, e la sua genialità preminente plasma necessariamente la nostra comprensione della teoria creata da lui.
Io credo che l'approccio geometrico abbia piantato un cuneo tra la relatività generale e la teoria delle particelle elementari.
Finché si è sperato, e Einstein lo sperava, che la material potesse essere intesa in termini geometrici aveva un senso assegnare alla geometria di Riemann un ruolo primario nella descrizione della teoria della gravitazione. Ma ora il trascorrere el tempo ci ha insegnato che non dobbiamo aspettarci che le interazioni forte, debole ed elettromagnetica possano essere intese in senso geometrico e l'eccesso di enfasi sulla geometria può solo oscurare le connessioni profonde tra la gravitazione e il resto della fisica.
Invece che sulla geometria di Riemann, ho basato la trattazione della relatività generale su un principio derivato dalla esperienza: il principio di equivalenza tra gravitazione e inerzia. Vedremo che oggetti geometrici quali la metrica,la connessione affine e il tensore di curvatura trovano il loro posto naturale in una teoria della gravitazione basata sul principio di equivalenza e, naturalmente,ci si ritrova alla fine nella teoria della relatività generale di Einstein. Tuttavia io ho tentato di rinviare la introduzione dei concetti geometrici sinché non si rivelassero necessari, in modo che la geometria di Riemann appaia solo una utilità matematica per la utilizzazione del principio di equivalenza e non la base fondamentale della teoria della gravitazione.
Ovviamente questo approccio porta a chiederci come mai la gravitazione obbedisca al principio di equivalenza. Secondo me la risposta non può essere trovata nel regno della fisica classica, men che meno nella geometria di Riemann, ma nei vincoli posti

[1] Steven Weinberg "*Gravitation and Cosmology Principles and applications of the general theory of relativity*" preface (1971) John Wiley & Sons – traduzione di Claudio Cereda

dalla teoria quantistica della gravitazione. E' impossibile costruire una teoria quantistica che sia Lorentz invariante per particelle di massa 0 e spin 2, se la corrispondente teoria classica di campo non soddisfa il principio di equivalenza.
Dunque il principio di equivalenza sembra essere il ponte migliore tra la gravitazione e le teorie sulle particelle elementari…
L'approccio non geometrico che ho tenuto, ha in qualche misura influenzato la scelta degli argomenti da trattare. In particolare non ho discusso in dettaglio la deduzione e la classificazione delle complicate soluzioni esatte delle equazioni di campo di Einstein, perché non penso che la gran parte di quel materiale fosse necessaria per la comprensione essenziale della teoria della gravitazione e difficilmente qualcuna di esse potrebbe avere un ruolo significativo per gli esperimenti prossimi venturi. Per effetto di questa omissione, ho lasciato perdere gran parte del lavoro svolto in questo ultimo decennio dagli esperti di relatività generale anche se ho fornito tracce di questo lavoro con richiami e bibliografia…



La prefazione mi ha messo la voglia di leggere ma sono 700 pagine molto impegnative e, in fondo, mi attirano molto di più la QED e il modello standard.

5.1.2 Il passaggio concettuale tra relatività ristretta e relatività generale

Quando *Einstein* inizia a lavorare sulla *Teoria generale di Relatività* la teoria della relatività ristretta è conosciuta solo in un ambito ridotto di scienziati ed è tutt'altro che dominante.

Siamo intorno al 1910, Einstein ha già dato una serie di contributi notevolissimi, in meccanica statistica, alla fondazione della teoria dei quanti, ha concluso il quadro della relatività ristretta con i teoremi relativi alla dinamica relativistica e si butta a corpo morto su quello che considera l'ultimo problema aperto in grado di destare il suo interesse: *costruire una scienza fisica indipendente dagli osservatori.*

Si tratta di un programma di ricerca che impegnerà Einstein sino alla sua morte e che avrà come risultato principale la costruzione di una teoria meccanica entro la quale la gravitazione risulterà essere una previsione della teoria stessa e non un *accidens* che si affianca alla meccanica.

"Lo spazio tempo non è di necessità qualcosa a cui si possa attribuire una esistenza separata, indipendente dagli oggetti effettivi della realtà fisica. Gli oggetti fisici non sono nello spazio, bensì spazialmente estesi. In tal modo il concetto di spazio vuoto perde il suo significato"
Albert Einstein

I risultati principali vanno collocati tra il 1910 e il 1920 ma *Einstein* non mollerà la presa del programma sino alla fine. Lavorerà infatti, con risultati alterni, in stretta connessione con i protagonisti della nascente cosmologia sulle implicazioni della sua teoria legate alle origini e al destino dell'universo e sulla necessità, prendendo spunto dal modello offerto dalla gravitazione, di costruire una fisica teorica unitaria in cui si collocassero armonicamente le diverse interazioni via via scoperte (elettromagnetica e debole).

Queste ricerche non hanno avuto un grande successo nella comunità scientifica negli anni 30 e 40, sono state invece riscoperte ed utilizzate dopo la sua morte, a partire dagli anni 60 del 900; esse costituiscono :

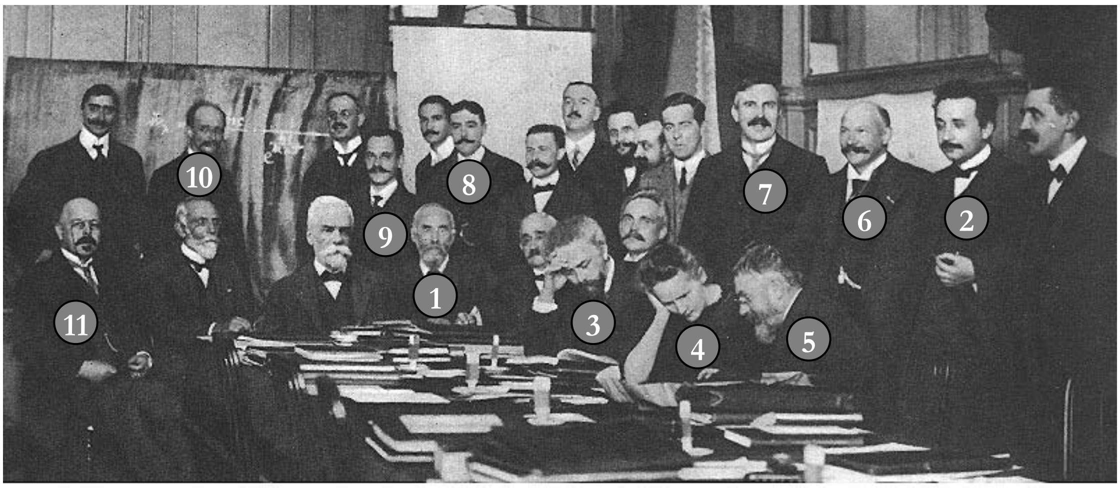
- sul versante della cosmologia, il modello teorico di riferimento sulle problematiche relative alla geometria dell'universo (*apertura-chiusura* e *limitatezza-illimitatezza*)
- sul versante della fisica teorica, il modello da seguire nel tentativo di costruire una *teoria unificata delle interazioni* (modello standard delle particelle e teorie di supersimmetria).

5.1.3 I principali contenuti della teoria

Poiché l'impianto della teoria della relatività generale è molto complesso, sia sul piano concettuale sia sul piano tecnico, essa sarà presentata solo con riferimento alle parti tecnicamente più accessibili

Si ritiene opportuno in sede introduttiva fornire una breve sintesi delle caratteristiche e dei risultati principali.

- Si tratta di una *nuova meccanica* valida per qualsiasi tipo di osservatore anche non inerziale: *le leggi fisiche sono le stesse in qualsiasi sistema di riferimento*.
- La *identità* di massa inerziale e massa gravitazionale non costituisce un *accidens* di cui prendere atto ma una proprietà che si assume come premessa allo sviluppo della teoria.
- La gravitazione con la dipendenza dall'*inverso del quadrato della distanza* discende dal principio di relatività; inoltre i moti dovuti ad effetti gravitazionali risultano del tutto indistinguibili dai moti inerziali e corrispondono ai *moti naturali* entro uno spazio le cui caratteristiche dipendono dai corpi intorno ai quali *lo spazio si genera*.
- Per rendere la teoria indipendente dagli osservatori è necessario utilizzare un sistema di coordinate che non presenta, se non su scala locale, le caratteristiche di uniformità cui siamo abituati. Lo *spazio tempo* che ne risulta ha caratteristiche disomogenee ed è influenzato dalla presenza delle masse.
- Le particelle di luce sono influenzate dai *campi gravitazionali* e seguono le stesse leggi delle masse materiali.



1911 Congresso Internazionale Solvay: accanto allo sponsor E. Solvay (inventore del metodo industriale per la produzione della soda) siede Lorentz (1) che presiederà tutti i congressi

Sono presenti i grandi fisici del momento e Einstein (2) che ha già pubblicato le cose essenziali della teoria della relatività generale è quasi defilato. In prima fila siedono J. Perrin (3 - misura del numero di Avogadro) mentre M. Curie (4 - radioattività) discute con H. Poincaré (5 -fisico, matematico e filosofo padre del convenzionalismo).

In seconda fila si riconoscono Kamerling Onnes (6 – superconduttività e basse temperature), Rutherford (7 – modello nucleare dell'atomo), M. De Broglie (8 – che influenzerà il fratello Louis primo a sostenere il carattere ondulatorio della materia), Sommerfeld (9 – futura meccanica quantistica), Planck(10 – ipotesi dei quanti), Nerst (11 – terzo principio della termodinamica. Non c'è ancora Bohr che avanzerà il suo modello atomico nell'anno successivo.

5.2 Spazio e tempo nei sistemi di riferimento non inerziali

5.2.1 LO SPAZIO DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA È EUCLIDEO

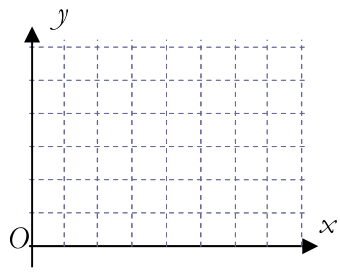
Una delle più note caratteristiche della teoria della relatività generale è quella secondo cui *lo spazio è curvo*. Per capire di cosa si tratta incominciamo a chiarire cosa intendiamo dire affermando che lo spazio delle nostre esperienze quotidiane sia *euclideo*.

Le proprietà di uniformità ed isotropia dello spazio e del tempo cui si è più volte accennato sono alla base della teoria matematica che descrive le proprietà dello spazio: la *geometria euclidea*.

Una delle principali proprietà della geometria euclidea, il cui status è stato largamente discusso e analizzato, è nota come *postulato della unicità della parallela* o *V postulato di Euclide*: dopo aver dimostrato che per un punto esterno ad una retta data è sempre possibile tracciare la parallela, si scopre che non è invece possibile dimostrare la sua unicità e che tale unicità va invece postulata.

Da questo postulato discendono due importanti conseguenze di interesse fisico: il fatto che la *somma degli angoli interni di un triangolo sia pari a un angolo piatto* e quello secondo cui *la linea più breve tra due punti sia quella lungo la linea retta*: nessuna di queste proprietà vale negli spazi non euclidei.

Per illustrare le implicazioni di carattere fisico di uniformità ed isotropia, senza perdita di generalità, ci limiteremo a considerazioni nel piano, per esempio nel piano *xy*.



la uniformità dello spazio si riscontra nella presenza di una griglia uniforme

In uno spazio uniforme e isotropo la lunghezza di un segmento non dipende dal punto dello spazio in cui ci si trova. Se dividiamo i nostri assi in segmenti uguali $\Delta x = \Delta y = l$ e disegniamo una rete di rette parallele passanti per i punti di divisione ne risulta una divisione del piano in tanti quadratini congruenti.

Einstein sottolinea come utilizzando esclusivamente dei righelli rigidi si possa costruire un reticolato di coordinate attraverso la costruzione di quadrilateri con i lati congruenti e con le diagonali congruenti (quadrati). Egli osserva che quando in un vertice si incontrano 3 quadrati la costruzione del successivo è completamente determinata dall'avere già in comune due lati e pertanto non è più necessario verificare la congruenza delle diagonali.

Esattamente allo stesso modo, in base alla uniformità del tempo in un sistema di riferimento inerziale, l'intervallo di tempo Δt tra due eventi è indipendente dal punto temporale in cui questi due eventi accadono.

5.2.2 LO SPAZIO-TEMPO RELATIVISTICO DEI SISTEMI DI RIFERIMENTO NON INERZIALI NON È UNIFORME E NEMMENO ISOTROPO

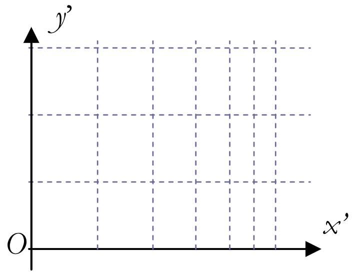
Nei *sistemi accelerati* rispetto a quelli inerziali cadono sia l'uniformità sia la isotropia dello spazio tempo. Per vedere la ragione di questa affermazione basta riferirsi ai risultati della teoria della relatività ristretta.

Come conseguenza della contrazione delle lunghezze (che a sua volta deriva dalle trasformazioni di *Lorentz*) sappiamo che la lunghezza di un segmento è minore in un sistema di riferimento in moto rispetto a quella misurata in un sistema in cui il segmento stesso è in quiete:

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \beta^2}$$

Ma se consideriamo un sistema di riferimento *K'* che acceleri con accelerazione *a* a partire dalla quiete sarà $v^2 = 2\, a\, x$ e pertanto:

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - 2ax/c^2}$$



spazio non uniforme nei sistemi di riferimento accelerati a causa della dipendenza dalla posizione della contrazione delle lunghezze

Ne consegue che *la lunghezza di un segmento, in un sistema di riferimento non inerziale, dipende dalla sua collocazione spaziale*: cade dunque l'idea che i regoli rigidi conservino la stessa lunghezza entro il sistema di riferimento.

D'altra parte un segmento di retta posto lungo l'asse delle ordinate non si modifica perché (nel caso considerato) non c'è movimento lungo quell'asse:

$$\Delta y' = \Delta y.$$

Dunque se si costruisce un reticolo di coordinate in un sistema di riferimento non inerziale, il piano $x'y'$ risulterà diviso in celle di forma allungata la cui larghezza risulterà via via minore man mano che ci si sposta lungo l'asse delle ascisse.

Lo spazio, in un *sistema non inerziale*, non solo è non uniforme, ma è anche anisotropo: basta osservare come, nelle diverse direzioni le diagonali presentino lunghezze diverse.

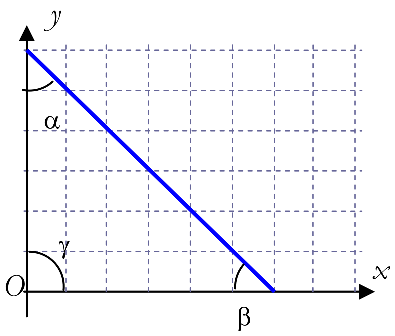
Se poi consideriamo un sistema sottoposto a rotazione uniforme vedremo altre violazioni del carattere euclideo: se per esempio un osservatore posto su una piattaforma rotante esegue una misura della circonferenza osserverà una contrazione delle lunghezze che non si avrà quando si misura il diametro. *Pertanto il rapporto tra la circonferenza e il diametro risulterà minore di π.*

come conseguenza di disuniformità e anisotropia cadono le leggi di conservazione della quantità di moto, del momento angolare e della energia

Ma, in base a quanto detto nel capitolo sulle simmetrie, (t*eorema di E. Noether*), *a causa della disuniformità e anisotropia dello spazio, nei sistemi di riferimento non inerziali ne deriva che non valgano le leggi di conservazione della quantità di moto e del momento angolare* (una buona ragione per considerare insoddisfacente la teoria).

Non ci soffermeremo nel dettaglio su quanto accade per il tempo dopo che ne abbiamo già sottolineato la specularità rispetto allo spazio: *il tempo viene accomunato da un identico destino essendo la quarta coordinata di uno spazio euclideo a 4 dimensioni.* Se ricordiamo il legame tra conservazione della energia e uniformità del tempo concluderemo che *non vale più nemmeno la legge di conservazione dell'energia.*

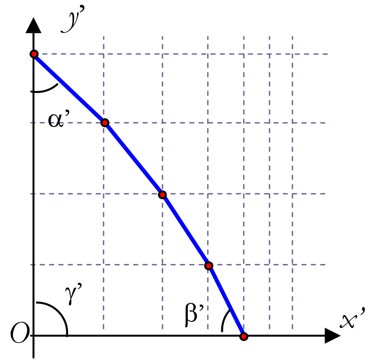
5.2.3 PER DESCRIVERE TUTTO CIÒ CI OCCORRE UNA *GEOMETRIA NON EUCLIDEA*



Mostriamo ora che la non uniformità ed anisotropia dello spazio nei sistemi di riferimento non inerziali rende necessario descrivere le proprietà dello spazio attraverso una *geometria non euclidea*. Per dimostrarlo osserviamo come si presenta un segmento non parallelo agli assi coordinati in un sistema di riferimento inerziale e in un sistema accelerato rispetto ad esso.

Consideriamo dapprima un segmento *AB* inclinato di 45° sull'asse delle ascisse in un sistema di riferimento inerziale. In un sistema di riferimento accelerato come quello descritto in precedenza lo stesso segmento *si* *trasforma in una spezzata* e, di conseguenza, se l'elemento di lunghezza $\Delta x'$ è infinitesimo, il segmento rettilineo si trasforma in un tratto di linea curva.

Ma, in quel caso, la somma degli angoli interni del triangolo curvilineo che si ottiene è maggiore di 180° ($\alpha' + \beta' + \gamma' > 180°$) e dunque la *geometria dello spazio considerato diviene non-euclidea.*



5.2.4 L'INVARIANTE SPAZIO TEMPORALE CI AIUTERÀ NELLA GENERALIZZAZIONE

Sappiamo già che in teoria della relatività ristretta la quantità:

$$\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 - (c\,\delta t)^2$$

detta *intervallo spazio temporale* è costante al cambiare del sistema di riferimento.

Tenendo conto dei lavori di Minkowski si possono introdurre 4 generiche coordinate

$$x_1 = x, \qquad x_2 = y, \qquad x_3 = z, \qquad x_4 = \sqrt{-1}\,c\,t\ ^2$$

in modo di scrivere la distanza elementare (invariante) nello spazio tempo in una forma più simmetrica come:

$$\delta s^2 = \delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 + \delta x_4^2 \qquad \text{(II.5.1)}$$

Questa quantità è invariante per *trasformazioni di Lorentz*; in teoria della *relatività generale* l'espressione verrà generalizzata per tener conto del fatto che cadono sia la rigidità delle unità di misura sia la ortogonalità degli assi secondo la seguente espressione caratterizzata oltre che dalla presenza dei termini quadratici anche da quella dei termini rettangolari:

$$\delta s^2 = a_{11}\delta x_1^2 + a_{22}\delta x_2^2 + a_{33}\delta x_3^2 + a_{44}\delta x_4^2 + a_{12}\delta x_1\delta x_2 + a_{13}\delta x_1\delta x_3 +$$
$$a_{14}\delta x_1\delta x_4 + a_{23}\delta x_2\delta x_3 + a_{24}\delta x_2\delta x_4 + a_{34}\delta x_3\delta x_4 \qquad \text{(II.5.2)}$$

I coefficienti a_{ij} sono quantità variabili da punto a punto il cui valore viene a dipendere dalla distribuzione delle masse e la presenza dei termini rettangolari esprime la non ortogonalità del sistema di coordinate. [3]

[2] Le radici dei numeri negativi sono ben note in matematica dallo studio dei *numeri complessi* e questo insieme è ampiamente utilizzato sia in teoria della relatività sia in meccanica quantistica.

[3] Anche a due dimensioni quando il triangolo non è rettangolo è presente nel calcolo del terzo lato il termine rettangolare (teorema di Pitagora generalizzato).

5.3 Una digressione sulla storia delle geometrie non euclidee

5.3.1 IL CONTESTO DI PARTENZA

Lo spazio della teoria della *relatività generale* è uno spazio non euclideo e riteniamo pertanto opportuno fornire qualche elemento relativo alla storia della geometria sul doppio versante della distinzione tra geometria in senso fisico e in senso matematico e sulla esistenza di possibili infinite geometrie in senso matematico.

La scoperta della possibile esistenza di *geometrie non euclidee* ha avuto un carattere dirompente per la teoria della conoscenza; vogliamo scandire alcuni passi di quel processo, passi che ci aiuteranno a comprendere la portata del risultato finale. Questi passi corrispondono, ciascuno, al lavoro di alcuni personaggi che possiamo considerare i *padri fondatori*: Euclide, Tolomeo, Proclo, Nasir al din al Tusi, Levi ben Gerson, Castaldi, Borelli, Vitale, Valli, Saccheri, Lambert, Legendre, Gauss, Bessel, Bolyai, Lobacewskij, Riemann, Helmholtz, Beltrami, Levi-Civita. [4]

A monte di tutto va fatta una considerazione relativa alle ragioni che hanno reso così difficile dubitare della esistenza di una e una sola geometria: quella di Euclide.

Il *ragionamento geometrico* è apparso alla cultura occidentale, per molti secoli, il modello di ragionamento per eccellenza perché partendo da verità semplici considerate autoevidenti arriva, attraverso ragionamenti, a stabilire altre verità che non sono invece autoevidenti. Per questa ragione la geometria ha fatto da modello alla matematica, e la matematica ha fatto da modello alla filosofia nella cultura greca.

Persino dopo gli sviluppi dell'algebra e dopo la *riduzione della geometria all'algebra* operata da Descartes e Fermat si riteneva che tale approdo fosse utile ma imperfetto. Newton che pure ha creato l'analisi, nei suoi *Principia* svolge le sue faticose dimostrazioni sui moti dei pianeti soggetti alla gravitazione, tutte per via geometrica.

Su altri versanti, per esempio su quello filosofico, la struttura degli *Elementi di Euclide* è apparsa il modello da imitare. Si pensi per esempio all'Ethica di Spinoza il cui titolo completo è *Ethica more geometrico demonstrata* e che procede per 300 pagine tra definizioni, assiomi, proposizioni e dimostrazioni.

La verità della geometria euclidea era indubitabile; la domanda che ci si poneva non era relativa alla certezza delle proposizioni euclidee sullo spazio, ma ci si interrogava semmai, come fece *Kant*, sulle ragioni per le quali la geometria fosse possibile. *Come mai le proposizioni della geometria hanno carattere universale nonostante ci parlino del mondo?* Come mai abbiamo

---

[4] Per chi voglia approfondire l'argomento si consiglia la lettura di:

- *Agazzi, Palladino: le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria,* Est Mondadori
- la presentazione curata da Lucio Lombardo Radice dell'opera di *Lobacevskij, nuovi principi di geometria,* ed. Boringhieri
- *Silvio Maracchia, La matematica come sistema ipotetico deduttivo,* Le Monnier

La prima di queste due opere costituisce a mio parere la migliore presentazione della questione sia dal punto di vista storico, sia dal punto di vista epistemologico.

verità universali in grado di prevedere l'esperienza? Sono gli interrogativi di Kant che lo portano ad elaborare la teoria dei *giudizi sintetici a priori*.

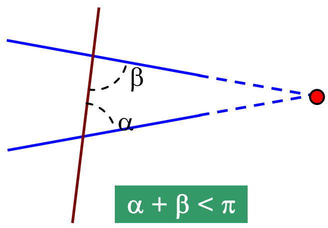
Riportiamo in proposito le righe di apertura di un famoso scritto di *Hermann von Helmholtz* dedicato al significato degli assiomi geometrici:

Il fatto che possa esistere ed essere costruita una scienza come la geometria ha sempre fortemente attirato l'attenzione di tutti coloro che si interessano di fondamenti della teoria della conoscenza…Ad essa non tocca in alcun modo il lungo e faticoso compito di raccogliere i fatti sperimentali, come debbono fare le scienze naturali propriamente dette; il suo metodo scientifico consiste unicamente nella deduzione. Ogni conclusione viene sviluppata da un'altra deduzione, e ciononostante alla fine, nessuna persona di buon senso dubita che queste proposizioni geometriche non abbiano a trovare concreta applicazione nel mondo reale che ci circonda…

Nella risposta alla famosa domanda di Kant "come sono possibili proposizioni sintetiche a priori", gli assiomi geometrici costituiscono certamente gli esempi in apparenza più convincenti del fatto che giudizi sintetici a priori sono in generale possibili. Inoltre la circostanza che tali giudizi esistono e ci si impongono è considerata una prova della tesi che lo spazio è una modalità a priori di ogni percezione esterna. Tale circostanza sembra richiedere perciò, per questa forma a priori, non semplicemente il carattere di uno schema puramente formale e di per sé privo di contenuto nel quale potrebbe adattarsi qualunque contenuto dell'esperienza; al contrario sembra attribuirle certe particolarità che fanno sì che soltanto un certo contenuto – anzi uno delimitato rigorosamente – possa entrare in esso ed essere da noi percepibile. [5]

5.3.2 I TENTATIVI DI DIMOSTRARE IL V POSTULATO E IL CONTRIBUTO DI SACCHERI

Ricordiamo che Euclide nei suoi *Elementi* dimostra un certo numero di teoremi (i primi 28) senza utilizzare il postulato della unicità della parallela che egli, per altro, enuncia in una forma diversa da quella cui siamo abituati e che è ad essa equivalente: *se due rette tagliate da una trasversale formano con essa due angoli la cui somma è diversa da un angolo piatto allora esse si incontrano dal lato in cui la somma è minore di un angolo piatto.*



il postulato della parallela nella formulazione di Euclide riguarda la somma degli angoli coniugati interni: dalla loro somma si fa discendere l'esistenza di una intersezione

Nel corso dei secoli sono state date numerose formulazioni equivalenti del V postulato.

- Proclo (410-485) ateniese e neoplatonico afferma che: *se una linea retta interseca una di due parallele necessariamente intersecherà anche l'altra.*
- John Wallis (1616-1703): *data una qualsiasi figura se ne può sempre costruire una simile ad essa di dimensione qualsiasi.*
- Adrien Marie Legendre (1752-1833): *esiste almeno un triangolo per il quale la somma degli angoli interni equivale a due angoli retti.*

Il fatto che lo stesso *Euclide*, nella prima parte degli Elementi, sia ricorso a dimostrazioni complicate pur di non usarlo ha lasciato aperto per molti secoli il dubbio che tale postulato fosse dimostrabile e che lo stesso Euclide avesse qualche dubbio in proposito.

[5] *Hermann von Helmholtz* :sull'origine e il significato degli assiomi geometrici" (1870). Sulla figura di Helmholtz si vedano i capitoli dedicati al I principio della termodinamica.

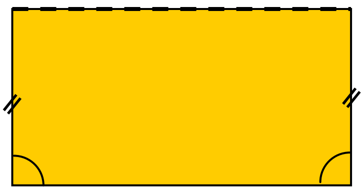
La questione della *indipendenza e non contraddittorietà degli assiomi* è rimasta aperta per quasi 2000 anni ed è stata caratterizzata da tentativi di dimostrazione diretta che finivano per introdurre nascostamente qualche proposizione non dichiarata che risultava equivalente al V postulato.

Il problema si è risolta solo quando ci si è resi conto che, dalla negazione del postulato, derivavano altre geometrie *bizzarre*, diverse da quella cui eravamo abituati, in contrasto con essa, ma assolutamente *coerenti* al loro interno. La esistenza di altre geometrie garantiva la indipendenza del V dagli altri postulati.

Il metodo con cui si dimostra la non contraddittorietà si basa sulla costruzione di un modello della teoria entro un'altra teoria considerata inattaccabile. Se il modello è costruibile allora la teoria sottoposta a verifica presenta lo stesso livello di credibilità di quella giudicata inattaccabile. Per le geometrie non euclidee ciò è stato fatto a fine 800 utilizzando tecniche di geometria algebrica.

Contestualmente ci si è allora resi conto della distinzione tra *geometria in senso matematico* che porta alla esistenza di più di una geometria, e *geometria in senso fisico* come problema di determinazione delle proprietà geometriche dello spazio fisico, problema che, ovviamente, ammette un'unica soluzione una volta che si sia detto cosa si intenda fisicamente con retta, piano, … e come si proceda alle misurazioni.

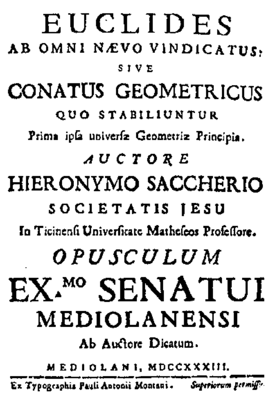
Si veda in proposito il brano famosissimo di *Einstein* ripreso da *Geometria ed Esperienza*: *La geometria può essere o un sistema strutturale basato su assiomi arbitrari, o una teoria fisica. Nel primo caso le conclusioni della geometria sono certe ma non ci dicono nulla circa il mondo dell'esperienza; nel secondo caso possono essere verificate sperimentalmente ma sono più o meno certe come tutte le proposizioni della fisica.*



il quadrilatero birettangolo su cui si svolge la riflessione di Saccheri

Il primo personaggio rilevante della storia delle *geometrie non euclidee* è un padre gesuita *Girolamo Saccheri* (1667-1733): il suo tentativo è ancora interno alla volontà di dimostrare il V postulato. Ma Saccheri invece di tentare delle dimostrazioni prova a dedurre le conseguenze che discendono dalle possibili negazioni del V postulato.

Il suo progetto si basa sull'idea che, se il V postulato è un teorema, dalla sua negazione dovrà, prima o poi derivare una contraddizione logica. *Saccheri* lavora con un particolare quadrilatero con due angoli retti e con i due lati adiacenti congruenti (noto come *quadrilatero birettangolo).* Ci lavora sopra ed analizza le conseguenze della ipotesi che gli altri due angoli, dei quali riesce a dimostrare la congruenza, siano entrambi acuti, entrambi retti o entrambi ottusi.



EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

Saccheri arriva ad un passo dalla ammissione delle geometrie non euclidee

La sua speranza consiste nella possibilità di dimostrare che l'ipotesi degli angoli acuti e quella degli angoli ottusi portino a contraddizioni. Resterebbe così implicitamente dimostrata quella degli angoli retti che gli consentirebbe poi di dedurre la verità del V postulato.

Ma mentre nel caso della terza arriva ad un assurdo logico *"l'ipotesi dell'angolo ottuso è assolutamente falsa perché distrugge se stessa"* nel caso della prima, nonostante una mole di teoremi dedotti, Saccheri non trova contraddizioni; e non può trovarle perché (lo sappiamo oggi) si dimostra che il sistema che ne deriva è coerente.

La sua conclusione, dal punto di vista epistemologico, equivale alla indiretta ammissione di una sconfitta perché dopo tanti teoremi strani può solo dichiarare che poiché si dovrebbe ammettere che certe rette dovrebbero toccarsi all'infinito *"l'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa perché ripugna alla natura della linea retta"*.

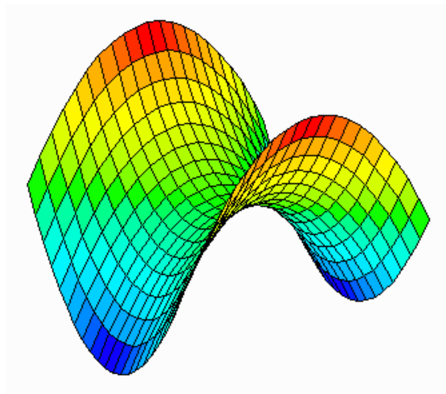
Non si tratta di una confutazione; Saccheri arriva vicinissimo alle geometrie non euclidee; dimostra una lunga serie di teoremi che le riguardano, ma convinto della unicità di quelle euclidee, non riesce a compiere il passo finale e si dichiara vincitore con un appello di natura metafisica che nasconde la accettazione della ennesima formulazione equivalente del V postulato.

5.3.3 I LAVORI DI GAUSS

Gauss Karl Friedrich (1777-1855) considerato il *principe dei matematici del suo tempo* entra nella storia delle geometrie non euclidee come esempio di *mancanza di ardimento.*

Gauss si spinse certamente più avanti di Saccheri nella costruzione di una geometria non euclidea arrivando ad occuparsi del problema per una sessantina d'anni come si evince dalla analisi del carteggio tenuto con numerosi altri matematici.

la superficie a sella ha curvatura negativa ed è un modello di geometria iperbolica

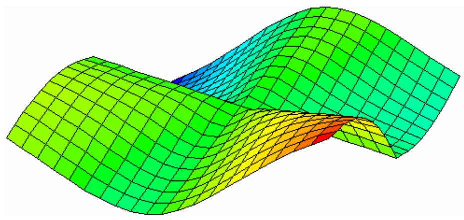


Nonostante avesse ottenuto numerosi risultati non pubblicò mai una teoria non euclidea essenzialmente perché, essendo profondamente convinto della duplice natura (matematica e fisica) delle problematiche dello spazio, *riteneva corretti, ma inutili, i risultati sullo spazio ottenuti per via puramente astratta, in assenza di una loro verifica sperimentale* convincente.

È sintomatico in proposito il seguente brano tratto da una lettera a Bessel: *dobbiamo umilmente ammettere che, mentre il numero è puramente un prodotto del nostro spirito, lo spazio possiede una realtà anche al di fuori del nostro spirito, alla quale noi non possiamo prescrivere le sue leggi completamente a priori.* [6]

Da questo punto di vista la posizione di Gauss è estremamente moderna: egli si è dedicato alla ricerca di contraddizioni nelle conseguenze della negazione del V postulato e non ne ha trovate; la cosa lo ha indotto ad ammettere in via ipotetica la esistenza di geometrie non euclidee; lo induce ad un atteggiamento di cautela nei confronti di esse il legame tra *geometria matematica* e *proprietà dello spazio fisico* che, in assenza di prove sperimentali diverse, lo porta a ritenere corretta la geometria euclidea.

I contributi di Gauss sono profondamente innovatori su un terreno che verrà ripreso da *Riemann*. Nell'ambito di un approccio simile a quello della geometria analitica, Gauss studia a fondo le proprietà delle superfici di forma qualsiasi quando esse vengono descritte da *sistemi di coordinate* più generali di quelle cartesiane (quelle che saranno utilizzate nella teoria della relatività generale).



Nelle superfici a 2 dimensioni immerse nello spazio a 3 dimensioni le coordinate sono costituite da un doppio sistema di linee che si incontrano reciprocamente una volta sola formando dei quadrilateri curvilinei. Vengono lasciate cadere sia la congruenza dei lati elementari sia la loro ortogonalità. Il *sistema di coordinate* si adegua (adagia sulla) alla superficie.

la distanza elementare espressa in coordinate gaussiane

$\delta s^2 = a_{11}\delta x_1^2 + a_{22}\delta x_2^2 + a_{12}\delta x_1\delta x_2$

Gauss attraverso lo studio delle proprietà delle superfici così rappresentate scopre che *esistono delle proprietà invarianti tipiche di ogni superficie e indipendenti dal sistema di coordinate.* Scopre inoltre che è possibile esprimere il

[6] Riportata in Palladino, Agazzi, op. cit.

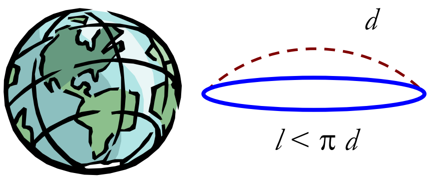
raggio di curvatura della superficie attraverso proprietà della equazione e del sistema di coordinate senza bisogno di passare alla terza dimensione.

Gauss distingue le superfici in base alla curvatura a seconda che abbiano curvatura costante (sfera, piano, cilindro) o variabile. Scopre inoltre che esistono superfici dotate di curvatura negativa oltre che di curvatura positiva.

si può scoprire la curvatura di una superficie a 2 dimensioni senza bisogno di uscire dalla superficie sfruttando la rettificazione della circonferenza

La possibilità di misurare la curvatura di una superficie rimanendo al suo interno è importante perché riferita allo spazio fisico consentirà di parlare di *spazio curvo a 4 dimensioni* rimanendo all'interno delle dimensioni spazio temporali cioè senza bisogno di introdurre una quinta dimensione.

Si tratta di qualcosa di simile a quanto è possibile fare (a 2 dimensioni) su di una superficie sferica: su di essa è possibile comprendere il concetto di curvatura senza bisogno di passare alla terza dimensione attraverso misure di proprietà geometriche della superficie.



Per esempio, in quel caso il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza ed il suo diametro (per effetto della curvatura) risulta minore di π perché quando si misura il diametro lungo la superficie ci si muove lungo un meridiano e così la circonferenza presenta un diametro più lungo di quello che la stessa circonferenza avrebbe se fosse collocata su un piano.

Dopo Gauss abbiamo ormai l'apparato matematico necessario a trattare gli spazi curvi ma non è stata ancora chiarita la possibilità di una geometria non euclidea (Lobačevskij e Bolyai) e nemmeno si pensa a spazi con più di 3 dimensioni (*Riemann*).

5.3.4 IL CONTRIBUTO DI LOBAČEVSKIJ

Nikolaj Ivanovic Lobačevskij (1793-1856)

Con l'opera di *Nikolaj Ivanovic Lobačevskij* (1793-1856) si considera la nascita ufficiale delle geometrie non euclidee. La ragione è duplice:

- Lobačevskij non si limita ad una ridiscussione del V postulato, ma fornisce una nuova formulazione della geometria, alternativa a quella di Euclide; la sua dichiarazione circa la *verità fisica* della geometria è netta: la questione delle parallele *può essere controllata, in modo simile alle altre leggi fisiche, soltanto da esperienze quali, ad esempio, le osservazioni astronomiche.*

la geometria iperbolica nega l'esistenza della parallela ed è rappresentabile mediante le superfici a sella

- L'opinione di Lobačevskij circa le problematiche dell'apriori kantiano è altrettanto netta: *nella natura, noi abbiamo cognizione, propriamente, solo del movimento, senza il quale le impressioni sensoriali sono impossibili. Pertanto, tutti i rimanenti concetti, per esempio quelli geometrici, sono creazioni artificiali della nostra mente, tratte dalle proprietà del movimento; ecco perché, lo spazio in sé, separatamente preso, per noi non esiste.*

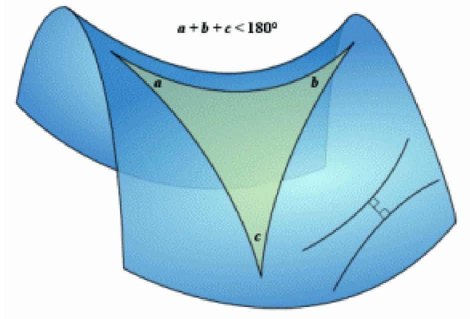
  Dopo di che, nella nostra mente, non vi può essere nessuna contraddizione, se supponiamo che talune forze della natura seguono una geometria e altre un'altra particolare geometria. [7]

la geometria ellittica è quella che rappresenta le caratteristiche dello spazio fisico ed è stata sviluppata da B. Riemann

La geometria di *Lobačevskij* equivale alla accettazione della ipotesi dell'angolo acuto di Saccheri che, a sua volta equivale ad ammettere che per un punto esterno ad una retta data passino infinite parallele.

[7] N. Lobacevskij, Introduzione a *I nuovi principi della geometria,* op. cit.

Le conseguenze che ne derivano sono una *geometria*, detta *iperbolica*, nella quale la somma degli angoli interni di un triangolo non è più costante per ogni triangolo ed è sempre minore di due angoli retti. Il suo modello di rappresentazione bidimensionale sarà una superficie a sella come mostrerà di lì a poco un matematico italiano E. Beltrami.



5.3.5 I LAVORI DI RIEMANN E LA SISTEMAZIONE DEFINITIVA DELLA QUESTIONE

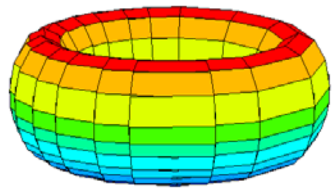
La geometria iperbolica è importante da un punto di vista matematico e metodologico, ma non ha rilevanza sul piano fisico perché lo spazio fisico rinvia alla *geometria ellittica* la cui trattazione analitica è dovuta a *Riemann*.

Con Riemann nasce la geometria ellittica e si sviluppa il formalismo metrico differenziale di Gauss

Con la accettazione in ambito matematico della geometria iperbolica si aprì la strada ad un approfondimento delle possibilità offerte dal mutamento degli assiomi, ed eliminando quelli che rendevano possibile l'esistenza comunque di almeno una parallela, fu possibile ammettere il postulato di non esistenza delle parallele che corrisponde alla ipotesi dell'angolo ottuso di Saccheri.

Si genera così la *geometria ellittica* dovuta ai lavori di *Bernard Riemann* allievo di Gauss (1826-1866). Questa geometria segna una ulteriore svolta perché viene costruita, riprendendo precedenti lavori di Gauss dedicati alla trattazione delle *proprietà geometriche per via algebrica e non più per via sintetica.*

Si tratta di una geometria metrico-differenziale nella quale il punto di partenza è costituito dalla idea di distanza come linea più breve che unisce due punti lungo una superficie immersa nello spazio.



Il toro: un esempio di superficie a due dimensioni con curvatura positiva; la superficie è finita ma illimitata

Ma mentre Gauss aveva lavorato su superfici bidimensionali *Riemann* ragiona ormai in maniera formale su spazi a n dimensioni sui quali è in grado di introdurre il concetto di distanza, di misurare la curvatura e di stabilire quali proprietà siano invarianti al mutare del sistema di coordinate scelto.

La linea più breve tra due punti, chiamata *geodetica*, diventerà uno dei protagonisti della rivoluzione einsteiniana dello spazio curvo e sostituirà la nozione di linea retta.

Esempi semplici di geodetica sono i cerchi massimi su una sfera, le eliche lungo un cilindro e più in generale quelle linee lungo una superficie per le quali *si va sempre diritto*; le caratteristiche della geodetica risultano strettamente correlate all'altra proprietà tipica della superficie: la *curvatura*.

Riemann, pur operando in ambito strettamente matematico trae la sua ispirazione da un modello fisico: *come si deforma una superficie regolare, e di conseguenza il sistema di coordinate, quando su di essa è presente una distribuzione di temperature variabile da punto a punto?* Si tratta della stessa argomentazione che userà *Einstein* per spiegare la necessità di utilizzare le coordinate gaussiane per descrivere lo spazio tempo. [8]

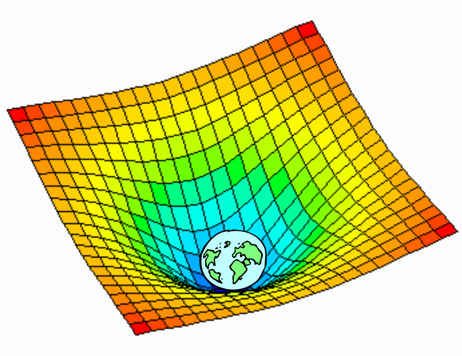
---

[8] Il rapporto tra fisica e matematica sul piano storico è di tipo dialettico. Le due scienze si influenzano a vicenda a volte l'una, a volte l'altra, pongono stimoli o mettono a disposizione strumenti per il progresso di entrambe.

Infine, *Riemann* introduce per la prima volta la distinzione tra infinito e illimitato e tratta di superfici con curvatura positiva che pur non presentando limiti (confini) siano finite. Si incomincia a riflettere sull'idea di uno spazio che si possa chiudere su se stesso.

5.4 L'iter che porta alla formulazione del principio di equivalenza

5.4.1 Le opinioni di Newton sullo spazio assoluto e sul moto assoluto

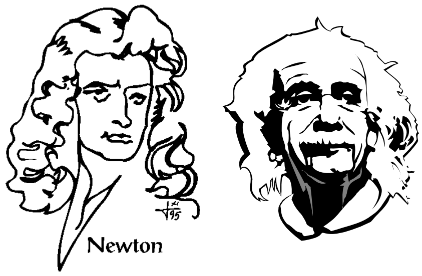


le masse deformano lo spazio

La teoria della relatività generale corrisponde ad una *geometrizzazione* del fenomeno della *gravitazione*, cioè alla trasformazione della gravitazione in una proprietà dello spazio fisico.

Grazie a questa geometrizzazione, che si fonda sulla presa d'atto della *identità di massa inerziale e massa gravitazionale*, dalla fisica *viene eliminata quella particolare asimmetria per la quale le leggi fisiche presentano una forma semplice e razionale solo per gli osservatori inerziali.*

Con la teoria della relatività generale il moto viene governato dalle stesse leggi per tutti gli osservatori e, contemporaneamente, si dà una unica spiegazione in termini di proprietà dello spazio, sia della inerzia sia dei moti accelerati determinati dalla gravitazione. *La materia curva lo spazio e la curvatura dice alla materia come muoversi.*

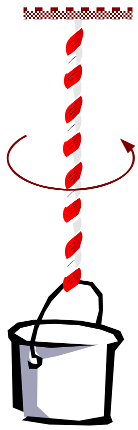


spazio assoluto e moto assoluto

Già Newton si era posto il problema della *stranezza* relativa al ruolo dei sistemi inerziali, sistemi dotati di proprietà particolari e diverse da tutti gli altri e aveva risposto alla questione ipotizzando l'esistenza di uno *spazio assoluto* e di un *movimento assoluto* rispetto a tale spazio che, in qualche modo, spiegasse lo *status speciale* posseduto dai sistemi di riferimento in quiete o in moto uniforme rispetto ad esso.

Newton sostiene di essere riuscito ad evidenziare il cosiddetto *moto assoluto* (cioè il movimento relativo allo *spazio assoluto*) attraverso un esperimento ideale noto come *esperimento del secchio rotante* che parte da una ipotesi: *i moti assoluti si distinguono da quelli relativi perché nel caso di moti circolari assoluti compaiono forze di allontanamento dall'asse di rotazione, mentre nel caso dei moti relativi tali forze non compaiono.*

Si tratta delle forze centrifughe di cui si è già parlato nei paragrafi dedicati ai sistemi di riferimento non inerziali.



l'esperimento del secchio rotante

L'esperimento del secchio rotante consiste nell'osservare il comportamento di una massa d'acqua contenuta in un secchio sostenuto da una corda attorcigliata e si svolge in 4 fasi corrispondenti a 4 diversi momenti della rotazione.

- Quando il secchio viene rilasciato esso comincia a ruotare e all'inizio l'acqua contenuta in esso non entra in rotazione conservando la tipica superficie piana. In questa condizione, dice Newton, c'è moto relativo tra acqua e secchio ma non c'è moto assoluto dell'acqua.
- Con il passare del tempo l'acqua viene messa in rotazione dalle forze di coesione e da quelle d'attrito alle pareti e ad un certo punto acquista la stessa velocità angolare del secchio. Man mano che l'acqua aumenta la sua velocità angolare la sua superficie acquista la forma di un paraboloide di rotazione e questo fatto indica la presenza di forze di allontanamento e dunque di un moto assoluto. Non esiste invece moto relativo rispetto al secchio.
- Se si blocca il secchio e si determina moto relativo con il secchio la superficie dell'acqua continua a rimanere con forma di paraboloide e dunque abbiamo ancora moto assoluto in presenza di moto relativo.

- Infine l'acqua lasciata a se stessa inizia a rallentare e riacquista la posizione piana. Cessano sia il moto relativo sia quello assoluto.

Insomma, argomenta *Newton*, dalla osservazione dei moti di allontanamento dall'asse è possibile misurare i moti assoluti perché si evidenzia dall'esperimento che *le forze centrifughe non compaiono quando si ha moto relativo tra acqua e secchio (casi 1 e 4) ma solo quando si ha moto assoluto (casi 2 e 3).*

5.4.2 LA CRITICA DI MACH AL PUNTO DI VISTA NEWTONIANO

Ernst Mach (1838-1916) filosofo, fisico e fisiologo è uno dei massimi esponenti del tardo positivismo e, in particolare, della corrente nota come *empiriocriticismo.*

Si tratta di una corrente di pensiero il cui contributo alla scienza moderna è egualmente distribuibile in positivo e in negativo.

Tra gli aspetti positivi vanno citati la riflessione metodologica sui fondamenti della conoscenza scientifica e la critica della metafisica e delle correnti idealistico irrazionaliste dell'ottocento.

Quelli negativi sono legati alla esasperazione del primato della sensazione come strumento di conoscenza che li porta a sottovalutare il ruolo delle teorie, a sfiorare la tesi sul carattere puramente convenzionale delle conoscenze e a negare le ipotesi atomistiche proprio nel periodo di affermazione definitiva delle stesse.

Da questo punto di vista è singolare il rapporto di alcuni grandi scienziati con l'eredità di Mach, primo fra tutti *Einstein* che gli è certamente debitore per gli aspetti centrali delle due teorie della relatività e contemporaneamente è un convinto sostenitore del primato delle teorie assiomatiche dedotte da principi generali, quasi metafisici, oltre che un convinto assertore della esistenza del mondo e della sua conoscibilità.

Sentiamo come *Ernst Mach* imposta la questione del moto assoluto e relativo in risposta alle tesi di Newton su spazio e tempo assoluto: [9]

Gli autori moderni che si lasciano convincere dall'argomento newtoniano del vaso d'acqua a distinguere tra moto assoluto e moto relativo, non si rendono conto che il sistema del mondo ci è dato 'una sola volta', e che la teoria tolemaica e quella copernicana sono soltanto 'interpretazioni', ed entrambe ugualmente valide. Si cerchi di tener fermo il vaso newtoniano, di far ruotare il cielo delle stelle fisse e di verificare l'assenza delle forze centrifughe…

Quando diciamo che un corpo K cambia direzione e velocità solamente per influenza di un altro corpo K', facciamo una asserzione a cui sarebbe impossibile arrivare se non esistessero altri corpi A, B, C, … rispetto ai quali è definito il moto di K. Quindi noi riconosciamo l'esistenza di una relazione di K con A, B, C… Se poi facciamo astrazione da A, B, C … e poi parliamo di un movimento di K nello spazio assoluto, cadiamo in un duplice errore. Infatti da un lato ci è impossibile sapere come K si comporterebbe in assenza dei corpi A, B, C…, e dall'altro non possediamo alcun mezzo che ci permetta di valutare il comportamento del corpo K e di verificare la nostra asserzione. Essa perciò non ha alcun significato scientifico…

L'esperimento newtoniano del vaso pieno d'acqua sottoposto a moto rotatorio ci insegna solo che la rotazione relativa dell'acqua rispetto alle pareti del vaso non produce forze centrifughe percettibili, ma che tali forze sono prodotte dal moto rotatorio relati-

---

9 E. Mach, *La meccanica nel suo sviluppo storico critico*, ed. Boringhieri, pag. 246 e seguenti.

vo alla masse della terra e agli altri corpi celesti. Non ci insegna nulla di più. Nessuno può dire quale sarebbe l'esito dell'esperimento, in senso quantitativo e qualitativo, se le pareti del vaso divenissero sempre più massicce, fino ad uno spessore di qualche miglio. Davanti a noi sta quell'unico fatto; il nostro compito è metterlo d'accordo con gli altri fatti che già conosciamo, non con le nostre arbitrarie fantasticherie.

L'ipotesi che siano la massa della terra e la presenza degli altri corpi celesti a determinare l'esistenza dei sistemi inerziali è detta *principio di Mach*.

il coraggio di pensare in grande è il testimone che, in una staffetta ideale, Mach passa nelle mani di Einstein

Mach lascia intravedere alcune idee che poi non sviluppa ulteriormente:

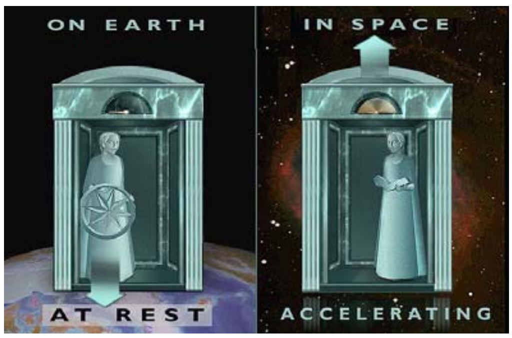
- per descrivere la meccanica così come la conosciamo non abbiamo bisogno dello spazio assoluto ma semmai del sistema di riferimento delle stelle fisse
- la descrizione data rispetto al sistema delle stelle fisse è solo più semplice e più pratica di altre descrizioni (per esempio di quella tolemaica) ma rimane inspiegabile la ragione per la quale il mondo descritto dai sistemi di riferimento inerziali sia più semplice
- si lascia intravedere l'idea che gli effetti centrifughi potrebbero essere dovuti ad un effetto a distanza del moto relativo delle stelle fisse (*cosa succederebbe se le pareti del vaso divenissero improvvisamente più massicce?*).

5.4.3 Le riflessioni di Einstein intorno alla equivalenza di massa inerziale e massa gravitazionale

Einstein è ritornato ripetutamente nei suoi scritti di divulgazione scientifica e di riflessione epistemologica sulle ragioni che lo hanno indotto a considerare insufficiente la formulazione newtoniana della gravitazione. Ci limitiamo qui a riprendere un brano riassuntivo del 1940 dallo scritto intitolato *I fondamenti della Fisica teorica*: [10]

La teoria generale della relatività deve la sua origine al tentativo di spiegare un fatto noto già ai tempi di Galilei e di Newton, ma fino ad allora sfuggito a tutte le interpretazioni teoriche, l'inerzia e il peso di un corpo, due cose di per sé stesse distinte, sono misurati da una stessa costante, la massa. Da questa corrispondenza segue che è impossibile scoprire mediante un esperimento se un sistema è accelerato o se il suo moto è rettilineo ed uniforme e gli effetti osservati sono dovuti ad un campo gravitazionale (principio di equivalenza della relatività generale).

Il sistema di riferimento inerziale viene così distrutto non appena interviene la gravitazione. Si può osservare a questo punto che il sistema inerziale costituisce un punto debole della meccanica galileiana e newtoniana. Infatti in essa si presuppone una proprietà misteriosa dello spazio fisico che condiziona i tipi di sistemi di coordinate per i quali il principio di inerzia e la legge newtoniana del moto sono valide.



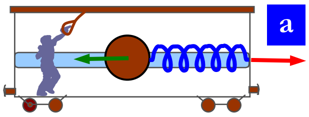
una bella immagine che riassume il principio di equivalenza di Einstein: dentro l'ascensore non si può sapere se si sta accelerando rispetto a un sistema inerziale o si è fermi in un campo gravitazionale

È da queste considerazioni sull'ingiustificato primato dei sistemi inerziali e sulla non giustificabilità del loro status che Einstein completerà l'opera iniziata con la relatività ristretta: la riflessione sulla necessità di *svincolare la scienza dalla particolarità degli osservatori* si concluderà con una teoria che spiegherà la gravitazione e metterà la parola fine al dibattito sulle caratteristiche dello spazio fisico.

---

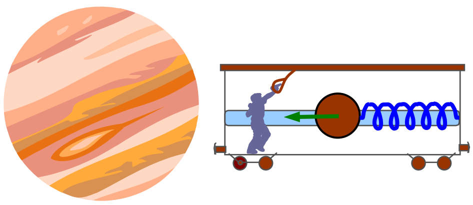
[10] Tra gli scritti divulgativi accessibili ad uno studente liceale segnaliamo *Relatività: esposizione divulgativa*, cap. 2 e *L'evoluzione della fisica*, parte terza entrambi pubblicati nella Universale Scientifica Boringhieri. *I fondamenti della fisica teorica* è pubblicato nelle *Opere scelte*, a cura di Enrico Bellone, ed. Boringhieri.

5.4.4 UN SISTEMA NON INERZIALE E UN SISTEMA INERZIALE UNITO AD UN CAMPO GRAVITAZIONALE SONO EQUIVALENTI



cosa corrisponde alla situazione reale ?

stiamo sentendo una forza apparente o l'effetto di un campo gravitazionale ?



Le forze inerziali, come le forze gravitazionali, sono proporzionali alle masse dei corpi a cui tali forze sono applicate. Pertanto, in un campo di forze inerziali, come in un campo gravitazionale, tutti i corpi si muovono con la stessa accelerazione, indipendentemente dalla loro massa: *le forze inerziali, nei loro effetti, sono indistinguibili da quelle gravitazionali.*

Nell'esempio del carro ferroviario utilizzato nel capitolo sui sistemi di riferimento non inerziali quando il carro è accelerato si osserva che la sfera all'interno è in quiete ma il dinamometro cui è collegata segna.

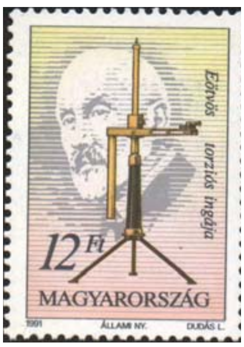
Stando all'interno del carro non siamo però in grado di sapere se siamo all'interno di un sistema non inerziale o se invece non sia comparso sulla destra del carro un effetto gravitazionale dovuto alla comparsa di un grande pianeta.

I fenomeni in un sistema di riferimento inerziale immerso in un campo gravitazionale, e quelli in un sistema di riferimento non inerziale la cui accelerazione è costante in direzione verso ed intensità, avvengono esattamente nello stesso modo.

Questa proposizione fu per la prima volta formulata da Einstein e utilizzata come base per la sua teoria relativistica della gravitazione. Einstein la chiamò *principio di equivalenza.*

Poiché tutto si fonda sulla identità di massa inerziale e massa gravitazionale vale la pena di dare qualche informazione sulla validità empirica di questa affermazione. Useremo come parametro di riferimento l'errore relativo che si commette ad identificare i due concetti.

Newton nei *Principia Mathematica* afferma che esso è inferiore a 10^{-3}; nel 1830 Bessel spostò tale valore a 10^{-5}. Tra il 1891 e il 1922 un gruppo di fisici della università di Budapest coordinato dal barone *Roland von Eötvös* spostò il limite dapprima a 10^{-7} e quindi a 10^{-9}. Negli anni 60 e 70 del 900 fisici americani e russi hanno spostato questo limite dapprima a 10^{-11} e quindi a 10^{-12}.



Roland von Eötvös effettuò le prime misure precise di conferma della equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale

L'idea che sta alla base di questi esperimenti è quella di misurare l'angolo di deviazione dalla verticale di un pendolo semplice dovuta alla azione della forza centrifuga. La tangente goniometrica di tale angolo dipende solo dal rapporto tra la forza centrifuga e la forza di gravitazione e dunque, a parità di condizioni (pendolo e luogo) solo dal rapporto tra la massa inerziale e la massa gravitazionale del pendolo.

Si osserva, ripetendo l'esperimento con corpi diversi che, entro un errore sperimentale quantificabile, l'angolo non dipende dalle caratteristiche del corpo scelto.

Bisogna prestare molta attenzione alla formulazione del principio di equivalenza. Esso vale solo in *piccole regioni dello spazio*: piccole quanto basta a considerare uniforme il campo gravitazionale nella regione considerata. In regioni estese di spazio, dove si evidenzia la non uniformità del campo gravitazionale, è impossibile trovare un sistema di riferimento non inerziale in cui le forze inerziali abbiano la stessa direzione e intensità di quelle gravitazionali.

Infatti il campo gravitazionale è un *campo centrale* e le forze di gravitazione sono dirette verso il centro della massa che genera il campo, per esempio la terra, e la loro intensità decresce con il quadrato della distanza.

Nessuna accelerazione di un sistema di riferimento è in grado di generare forze inerziali di questo tipo.

Dunque il principio di equivalenza non afferma assolutamente che il campo gravitazionale sia solo apparente e che si possa sempre scegliere un opportuno sistema di riferimento in cui il campo gravitazionale non esista.

Einstein stesso mise ripetutamente in guardia contro questa erronea convinzione.

Orbene, noi potremmo facilmente supporre che l'esistenza di un campo gravitazionale sia sempre soltanto apparente. Potremmo anche pensare che, qualunque sia il genere di campo gravitazionale presente, sia sempre possibile scegliere un altro corpo di riferimento tale che non esista rispetto ad esso alcun campo gravitazionale. Ciò non è però assolutamente vero per tutti i campi gravitazionali, ma soltanto per quelli di costituzione del tutto speciale. Risulta impossibile, per esempio, scegliere un corpo di riferimento tale che, giudicato da esso, scompaia (nella sua interezza) il campo gravitazionale terrestre. [11]

Dal principio di equivalenza si può solo dedurre che *le proprietà dello spazio e del tempo in presenza di un campo gravitazionale sono analoghe a quelle in un sistema di riferimento non inerziale*. Semmai Einstein userà l'equivalenza per costruire una teoria più generale della gravitazione entro cui troverà posto quella newtoniana.

[11] A. Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa*, Boringhieri, pag. 98.

5.5 Cenni alla teoria einsteiniana della gravitazione

5.5.1 IL PRINCIPIO DI RELATIVITÀ GENERALE

Con l'espressione "principio generale di relatività" vogliamo intendere la seguente affermazione: tutti i corpi di riferimento K, K', … sono equivalenti ai fini della descrizione dei fenomeni naturali (formulazione delle leggi generali della natura), qualunque possa essere il loro stato di moto. [12]

Nell'opera citata, dopo aver enunciato il principio Einstein inizia una lunga argomentazione che lo porterà, alla fine, alla teoria della relatività generale. Riportiamo qui di seguito i titoli dei diversi paragrafi perché essi aiutano ad evidenziare il filo di un discorso che abbiamo preparato nei paragrafi precedenti (il lettore è invitato a ricostruire per ciascuno dei titoli, soprattutto dei primi, il relativo contenuto che è già stato esposto). Nel seguito saranno riprese le parti mancanti più significative:

- Il *campo gravitazionale*
- L'*uguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale* come argomento a favore del postulato generale di relatività
- *In cosa risultano insoddisfacenti i fondamenti* della meccanica classica e della teoria della relatività ristretta?
- Alcune *inferenze* dal *principio generale di relatività*
- *Comportamento di orologi e di regoli campione* su di un corpo di riferimento in *rotazione*
- Le *coordinate gaussiane*
- Il *continuo spazio-temporale della relatività ristretta* considerato come continuo euclideo
- Il *continuo spazio-temporale della teoria della relatività generale non è un continuo euclideo*
- *Formulazione esatta del principio di relatività*
- La *soluzione del problema della gravitazione* in base al principio generale di relatività
- *Difficoltà cosmologiche della teoria di Newton*
- La possibilità di un *universo finito e tuttavia non limitato*
- La *struttura dello spazio* secondo la teoria della relatività generale.

5.5.2 ALCUNE INFERENZE DAL PRINCIPIO DI RELATIVITÀ GENERALE

La equivalenza di massa inerziale e massa gravitazionale consente entro un s.r.n.i. in moto traslatorio accelerato di interpretare la forza apparente percepita come un effetto gravitazionale. L'osservatore all'interno non può dire se si trova sotto l'azione di un campo gravitazionale o viene invece trascinato verso l'alto dall'azione di una forza costante.

Supponiamo di conoscere l'andamento spazio-temporale di un generico processo naturale, così come esso si svolge nel dominio galileiano relativamente a un corpo di riferimento galileiano K. Per mezzo di operazioni puramente teoriche (cioè semplicemente per mezzo di calcoli) siamo allora in grado di trovare quale apparenza viene ad as-

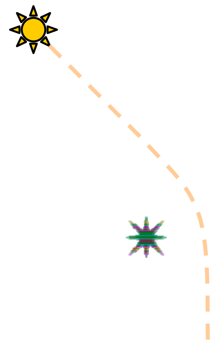
---

[12] Einstein, op. cit. pag. 92

sumere questo processo naturale noto, visto da un corpo di riferimento K' accelerato relativamente a K.

Poiché però esiste un campo gravitazionale rispetto a questo nuovo corpo di riferimento K', la considerazione fatta ci insegna altresì in che modo il campo gravitazionale influenza il processo studiato.

Cosí apprendiamo, per esempio che un corpo in stato di moto rettilineo uniforme rispetto a K (secondo la legge galileiana) compie un moto accelerato e in generale curvilineo rispetto al corpo di riferimento K' (cassa) accelerato. Questa accelerazione o curvatura corrisponde all'influenza sul corpo in moto del campo gravitazionale vigente relativamente a K'. …Otteniamo un nuovo risultato di fondamentale importanza allorché sviluppiamo l'analoga considerazione per un raggio di luce. Rispetto al corpo di riferimento galileiano K, tale raggio di luce si propaga in linea retta con la velocità c. Si può facilmente dimostrare che il percorso del medesimo raggio di luce non è piú una linea retta quando lo consideriamo in riferimento alla cassa accelerata (corpo di riferimento K'). Ne concludiamo che, in generale, i raggi di luce si propagano in linea curva nei campi gravitazionali. [13]



Siamo nel 1916, Einstein ha già fatto presente questa ipotesi nel 1911, ha anche fatto i calcoli di quanto dovrebbe essere la deviazione dei raggi di luce che passano in prossimità del Sole (si veda il calcolo nei prossimi paragrafi) e *Karl Schwartzschild* (1873-1916) lavorando sul fronte boemo dove sta per morire di *mal di trincea* ha avanzato l'ipotesi che possano esistere zone dell'universo fortemente addensate da cui nemmeno la luce possa sfuggire a causa dell'intenso campo gravitazionale che richiederebbe una velocità di fuga maggiore di *c* (i buchi neri).

Come sua abitudine Einstein pone il problema di una verifica sperimentale, ma lo fa con grande sicurezza e prevedendo nuovi domini all'esperienza: *l'esame della correttezza o non correttezza di questa deduzione è un è problema della massima importanza, di cui ci si deve attendere dagli astronomi la prossima soluzione.* [14]

Dunque se i raggi di luce deviano in vicinanza dei campi gravitazionali ciò significa che la legge sulla costanza della velocità della luce non è più vera, o meglio essa è vera entro limiti di campi gravitazionali non troppo intensi, o di misure non troppo accurate.

Ma c'è dell'altro: il principio di equivalenza consente di determinare le caratteristiche di particolari campi gravitazionali (quelli che corrispondono ai sistemi accelerati). Nulla vieta di utilizzare questi particolari campi per determinare la legge generale di gravitazione.

5.5.3 IL CONTINUO SPAZIO-TEMPORALE DELLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ GENERALE NON È UN CONTINUO EUCLIDEO

Abbiamo già osservato che nei sistemi non inerziali (e conseguentemente in presenza di campi gravitazionali) cadono le condizioni che avevano consentito di costruire sistemi di riferimento con caratteristiche comparabili (regoli rigidi e orologi sincronizzabili).

Per questa ragione il continuo spazio temporale della relatività generale viene descritto utilizzando le coordinate gaussiane x_1, x_2, x_3, x_4. La storia

---

[13] Einstein, op. cit. pag. 100

[14] Einstein, op. cit. pag. 101. La verifica avverrà nel 1919 ad opera di Eddington ed Einstein avrà i titoli di prima pagina sul New York Times.

di un punto materiale è una linea nello spazio a 4 dimensioni e un sistema fisico è un insieme di queste linee. Due eventi risultano coincidenti quando due linee si incontrano.

Ogni descrizione fisica si risolve in una serie di enunciati, ciascuno dei quali si riferisce alla coincidenza spazio temporale di due eventi A e B. In termini di coordinate gaussiane, ogni enunciato siffatto si traduce nel fatto che i due eventi hanno le stesse 4 coordinate x_1, x_2, x_3, x_4. *In realtà, dunque, la descrizione del continuo spazio-temporale per mezzo di coordinate gaussiane sostituisce completamente la descrizione mediante un corpo di riferimento, senza presentare i difetti di quest'ultimo metodo di descrizione, essa non risulta vincolata al carattere euclideo del continuo che deve venir rappresentato.* [15]

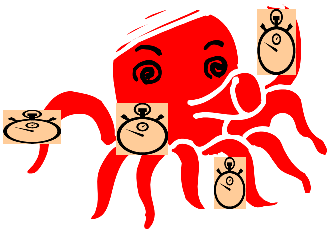
Salvador Dalì nel 1968 così interpreta il mondo della relatività generale con l'orologio ameba dello spazio tempo

5.5.4 FORMULAZIONE ESATTA DEL PRINCIPIO DI RELATIVITÀ

Il passaggio al sistema di coordinate gaussiane e la distruzione del concetto di corpo di riferimento richiede anche una correzione al *principio di relatività* che viene enunciato così:

Tutti i sistemi di coordinate gaussiane sono di principio equivalenti per la formulazione delle leggi generali della natura. [16]

Il concetto di equivalenza va inteso nel senso che *se su di un sistema di coordinate gaussiane si opera una qualsiasi trasformazione arbitraria (non più quella di Lorentz) le equazioni corrispondenti devono trasformarsi in equazioni della stessa forma.*



Il mollusco di riferimento di Einstein

Possiamo pensare al mondo della relatività generale come ad un mondo in cui i corpi rigidi vengono sostituiti da corpi non rigidi che si muovono in maniera qualsiasi e subiscono deformazioni arbitrarie durante il loro moto. A questa *specie di ameba* sono collegati orologi che battono il tempo con una legge qualsiasi con l'unica condizione che le differenze tra orologi contigui siano a loro volta infinitesime (è la richiesta di continuare ad *operare in uno spazio in cui valgano principi di continuità*).

Einstein parla di *mollusco di riferimento*; qualunque mollusco deve andare bene e le leggi di natura devono essere indipendenti dal particolare tipo di mollusco prescelto.

Queste concezioni molto generale dei principi di invarianza e della nozione di osservatore sono gli elemento che sul piano metodologico saranno ripreso dalle teorie fisiche del tardo novecento per indagare le altre interazioni fondamentali.

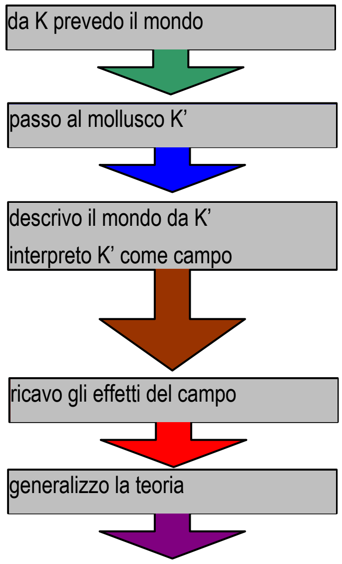
5.5.5 LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DELLA GRAVITAZIONE IN BASE AL PRINCIPIO GENERALE DI RELATIVITÀ

In un sistema di riferimento inerziale *K* e in assenza della gravitazione funziona la relatività ristretta. Riferiamo ora questo mondo ad un *mollusco di riferimento K'*. Noi siamo in grado di calcolare gli effetti di deformazione visti da *K'* su regoli campione, orologi o punti materiali e siamo anche disposti ad associare *K'* ad un particolare campo gravitazionale *G*. Concludiamo che siamo dunque in grado di *valutare gli effetti su materia e sistemi di riferimento dovuti a quel particolare campo gravitazionale che corrisponde alle coordinate gaussiane prescelte.*

[15] Einstein, Op. Cit. pag. 116.

[16] Einstein, Op. Cit. pag. 117.

A questo punto supponiamo che gli effetti che abbiamo calcolato in questo modo continuino a valere, attraverso una generalizzazione delle leggi, per tutti i tipi possibili di campo gravitazionale indipendentemente dalla possibilità di derivarlo da un cambiamento di coordinate.



Nel fare ciò, dice *Einstein*, vengono prese in considerazione le seguenti condizioni:

a) *la generalizzazione richiesta deve soddisfare il postulato di relatività*

b) *se nel dominio considerato è presente una materia qualsiasi, allora, in vista della azione eccitatrice del campo, ha importanza soltanto la sua massa inerziale e quindi soltanto la sua energia;*

c) *il campo gravitazionale e la materia, considerati insieme, devono soddisfare il principio di conservazione dell'energia e della quantità di moto.* [17]

A questo punto Einstein osserva che la teoria così costruita è bella, elimina l'assurdo privilegio dei sistemi inerziali in meccanica classica, si riduce alla meccanica classica per il caso di campi deboli ma è in grado (a differenza della meccanica newtoniana) di spiegare una anomalia già evidenziata dagli astronomi circa il carattere aperto delle orbite dei pianeti vicini al Sole, inoltre è in grado di prevedere la deviazione dalla linea retta dei raggi di luce.

5.5.6 LA STRUTTURA DELLO SPAZIO SECONDO LA TEORIA DELLA RELATIVITÀ GENERALE

Secondo la teoria delle relatività generale *l'universo è quasi euclideo* nel senso che su piccola scala presente le caratteristiche di uno spazio ordinario e si differenzia dal carattere euclideo come *un lago increspato da lievi onde.* La cosa va però intesa bene. Lo spazio nella sua complessità è non euclideo e se non fosse così dovremmo ammettere una densità media di materia uguale a zero.

La presenza della materia curva il nostro spazio con una leggera curvatura positiva che si accentua in corrispondenza di grandi addensamenti.

Se la materia fosse uniformemente distribuita l'universo sarebbe sferico nel senso di una ipersfera a 4 dimensioni (dobbiamo immaginare l'equivalente a 4 dimensioni di quello che è la sfera, superficie a 2 dimensioni, immersa in uno spazio a 3).

Lo *spazio* è pertanto finito ma è illimitato così come lo è una sfera ordinaria che presenta una dimensione fissata dal suo raggio di curvatura ma contemporaneamente non ha confini.

Einstein, nella prima formulazione della teoria si basò su due ipotesi nel disegnare la forma delle sue equazioni:

Aleksandr Fridman

- che la densità media della materia nell'universo fosse tendenzialmente costante (questa ipotesi è oggi largamente confermatata e accettata in cosmologia)
- che il raggio medio dell'universo non dipendesse dal tempo (questa ipotesi avanzata prima della scoperta dello spostamento verso il rosso negli spettri delle galassie è sbagliata)

Per tener conto della seconda ipotesi Einstein introdusse nelle sue equazioni il cosiddetto *termine cosmologico* che non appariva naturale rispetto ai

[17] Op. Cit. pag. 120.

postulati e che manteneva l'universo in una sorta di stato stazionario. Il termine cosmologico introduceva una sorta di forza repulsiva che, opponendosi alla gravitazione, manteneva l'universo in situazione di stabilità.

Già nel 1920 il matematico e cosmologo russo *Aleksandr Fridman* invece di introdurre ipotesi di stabilizzazione fece vedere che la non stabilità dell'universo poteva essere spiegata assumendo che l'universo presentasse le stesse caratteristiche medie quando lo si osserva in una generica direzione e che la stessa cosa fosse vera assumendo un punto di osservazione qualsiasi diverso dalla Terra.

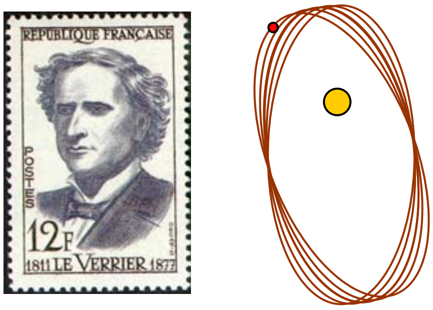
Sotto tale ipotesi le equazioni di campo di Einstein ammettevano una soluzione in cui il raggio dell'universo dipende dal tempo. Einstein fu pronto ad accettare e a questo punto iniziò la discussione sulla espansione dell'universo ben presto confermata dai risultati delle osservazioni di Hubble (1924).

La discussione sul termine cosmologico da introdurre nelle equazioni è ripresa però dopo gli anni 60 del 900 quando in cosmologia si è incominciato ad interrogarsi sulla evoluzione dell'universo (siamo all'interno di un moto pendolare di *big bang* e *big crunch* oppure il processo che stiamo vivendo è unico e l'espansione dell'universo rallenterà progressivamente?).

5.6 Conferme sperimentali della teoria

5.6.1 LA PRECESSIONE DEL PERIELIO DI MERCURIO

Con lo sviluppo delle tecniche osservative nel corso dell'800 erano state evidenziate alcune anomalie nelle traiettorie dei pianeti che non risultavano spiegabili nemmeno introducendo nella teoria le influenze dei pianeti l'uno sull'altro. In particolare *Le Verrier* prima e *Newcomb* poi avevano riscontrato una anomalia nel movimento di Mercurio il pianeta più vicino al Sole.



La precessione del perielio di Mercurio

La traiettoria risulta una linea aperta assimilabile ad una ellisse che ruoti intorno ad un fuoco con un periodo di 43" di grado al secolo.

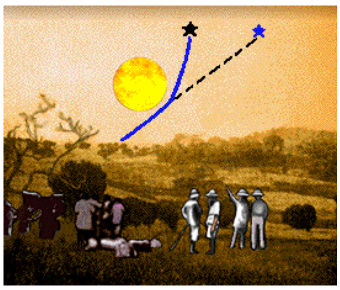
Einstein ha mostrato che le *traiettorie dei pianeti* sono sempre linee aperte e non ellissi; ciascuna di tali curve può essere approssimata con una ellisse il cui asse ruoti lentamente nel piano dell'orbita.

Questo effetto è di difficile evidenziazione per pianeti molto distanti dal sole: Mercurio è il pianeta più vicino; pertanto su di esso si esercita un campo gravitazionale più intenso, la sua velocità è la più elevata e pertanto, su di esso, si evidenziano meglio gli effetti relativistici.

La teoria prevede che la rotazione dell'asse maggiore di Mercurio sia di 43 secondi di arco per secolo. Questo strano comportamento del moto di Mercurio era già stato osservato, ma non spiegato, dagli astronomi fin dalla metà dell'ottocento. Le misure più accurate hanno dato uno spostamento di 42.6 ± 0.9 secondi di arco per secolo, in eccellente accordo con la teoria di Einstein.

5.6.2 LE PREVISIONI OSSERVABILI DELLA RELATIVITÀ GENERALE: LA DEVIAZIONE DEI RAGGI DI LUCE

Il secondo effetto previsto dalla teoria della relatività è la previsione di *curvatura dei raggi di luce* in corrispondenza dei campi gravitazionali. In effetti, la luce si propaga sempre lungo linee geodetiche e le geodetiche (linee rette dello spazio curvo) sono linee curve la cui forma dipende dalle caratteristiche del campo.



La spedizione di Eddington

Se ci si limita al sistema solare il campo gravitazionale più intenso si realizza in corrispondenza della superficie del sole e la curvatura dei raggi luminosi si può ottenere nella maniera seguente.

È necessario fotografare una porzione del cielo vicino al sole e, successivamente fotografare la stessa porzione di cielo in assenza del sole. Le fotografie dovrebbero mostrare uno spostamento angolare α nella posizione delle stelle. Naturalmente, è necessario fotografare il cielo durante una eclissi totale di sole perché in caso contrario i corpi posti in corrispondenza del sole non sarebbero visibili a causa della luce solare diffusa.

Einstein ha dimostrato che un raggio di luce che passi accanto al Sole ad una distanza pari a μR_S l'angolo di deflessione dovrebbe essere (in secondi di grado) pari a:

$$\alpha = \frac{1.7}{\mu}$$

La Royal Society britannica si incaricò di procedere alla verifica sperimentale della previsione di Einstein inviando due spedizioni astronomiche una in Africa Occidentale all'Isola del Principe e l'altra in Brasile a Sobral in occasione della eclissi totale di Sole del 29 maggio 1919.

Le differenze attese tradotte sulla lastra fotografica erano dell'ordine di qualche centesimo di millimetro e si trattò pertanto di una impresa tecnologicamente molto avanzata. Le misure furono eseguite su numerose stelle e furono favorevoli alla teoria con un errore relativo dell'ordine del 10%.

5.6.3 IL RALLENTAMENTO DEGLI OROLOGI

Infine, per effetto della non uniformità del tempo, qualsiasi processo periodico che si svolga in un *campo gravitazionale* dovrebbe svolgersi in maniera leggermente più lenta che in assenza del campo.

Supponiamo che un atomo emetta onde elettromagnetiche di frequenza ν_0 in assenza del campo gravitazionale. Lo stesso atomo, in presenza del campo, dovuto ad un corpo celeste di massa M e raggio r dovrebbe emettere onde di frequenza inferiore ν. Secondo la teoria la variazione relativa di frequenza dovrebbe essere pari a:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -G\frac{M}{r\,c^2}$$

Anche su questo tema, nel 1916 Einstein fa presente che si tratta di effetti difficilmente osservabili (per il Sole si tratta di effetti pari a 2 milionesimi della lunghezza d'onda della radiazione emessa) ma osserva che l'effetto potrà essere prima o poi verificato. Oggi l'effetto è ben noto ed utilizzato in astronomia ed è stato verificato persino con riferimento al campo gravitazionale terrestre.

5.7 Indice analitico

Aleksandr Fridman - 23

apertura-chiusura - 2

assiomi: indipendenza, non contraddittorietà - 9

campi gravitazionali: influenzano la luce - 3

campo gravitazionale: rallentamento degli orologi - 25

coordinate gaussiane: campo gravitazionale corrispondente - 21

curvatura dei raggi di luce - 24

Einstein - 1, 2, 4, 12, 18, 19, 20, 21, 22, 24; citazione su gravitazione e sistemi accelerati - 16; citazione sul principio di equivalenza - 18; citazione sulla generalizzazione e i campi gravitazionali - 22; debitore di Mach - 15; deviazione gravitazionale dei raggi di luce - 20; geometria ed esperienza - 9; la teoria guida le ricerche sperimentali - 20; mollusco di riferimento - 21; previsione della deflessione gravitazionale della luce - 24; previsione delle orbite planetarie aperte e spiegazione retrospettiva della anomalia di Mercurio - 24; principio di equivalenza - 17

empiriocriticismo: primato delle sensazioni - 15

Eötvös: Roland von; bilancia - 17

Ernst Mach: citazione - 15; empiriocriticismo; critica del moto assoluto - 15

Gauss: coordinate, curvatura della superficie come invariante - 10

geodetica - 1, 12, 24

geometria euclidea - 4

geometria non euclidea - 5, 11

geometria non-euclidea - 6

geometrie non euclidee: padri fondatori - 7

Girolamo Saccheri: nega il V postulato e cerca incongruenze - 9

gravitazione: geometrizzazione - 14; inverso del quadrato della distanza; figlia del principio di relatività - 3; teoria della - 1

Helmholtz: *Hermann von*; citazione sulla geometria - 8

identità: massa inerziale e gravitazione non è un accidens - 3

interazioni: teoria unificata - 2

intervallo spazio temporale - 6

Kant: geometria; giudizio sintetico a priori - 7

Karl Friedrich Gauss: non si fida di ciò che trova - 10

Karl Schwartzschild: buchi neri - 20

limitatezza-illimitatezza) - 2

Lobačevskij: geometria iperbolica - 12

Lorentz - 2; trasformazioni - 4

Lorentz: trasformazioni di - 6

lunghezza: dipende dalla sua collocazione spaziale - 5

Mach: principio di - 16

Newton: moto assoluto; esperimento del secchio rotante - 14; forze centrifughe - 15; Principia matthematica - 17

Nikolaj Ivanovic Lobačevskij: contributi e citazione - 11

Noether: teorema su simmetrie e conservazione - 5

nuova meccanica: vale per tutti gli osservatori - 3

postulato: unicità della parallela; V postulato di Euclide - 4

principio di equivalenza - 1, 2, 14, 16; ambito validità - 17; legge della gravitazione - 20; limitazioni spaziali - 18

principio di relatività: formulazione generale; coordinate gaussiane - 21

principio generale di relatività: citazione di Einstein - 19

ragionamento geometrico: modello di ragionamento - 7

relatività generale: distanza elementare invariante - 6; spazio non euclideo - 7

Relatività generale - 2

riduzione della geometria all'algebra - 7

Riemann - 1, 2, 7, 10; distinzione tra infinito e illimitato - 12; geometria a n dimensioni - 11; geometria ellittica - 12

Saccheri: ipotesi dell'angolo acuto - 10; quadrilatero birettangolo - 9

scienza fisica: indipendente dagli osservatori - 2

sistema di coordinate: gaussiane; si adagia - 10

sistema non inerziale: spazio non uniforme e anisotropia - 5

sistemi accelerati: spazio tempo non omogeneo e non isotropo - 4

sistemi di coordinate: generali - 10

sistemi di riferimento non inerziali: non valgono le leggi di conservazione - 5

spazio: curvo - 4; curvo finito e illimitato - 22; euclideo - 4

spazio tempo: disomogeneo - 3

Spinoza: Ethica more geometrico demonstrata - 7

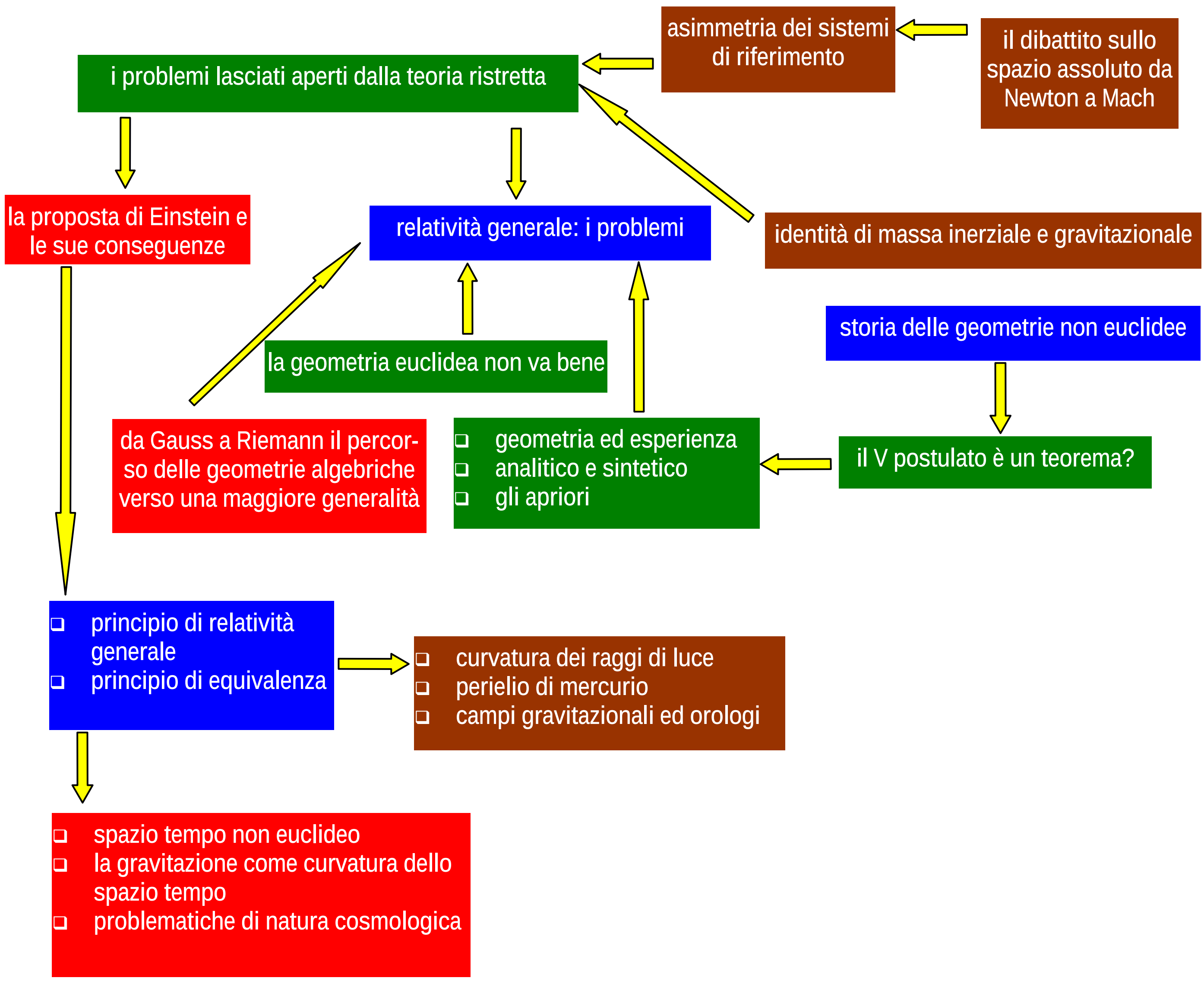
termine cosmologico - 22

traiettorie dei pianeti: precessione - 24

universo: quasi euclideo - 22

varietà Riemanniana - 1

Weinberg Steven: citazione; gravitation and cosmology - 1


asimmetria dei sistemi di riferimento
il dibattito sullo spazio assoluto da Newton a Mach
i problemi lasciati aperti dalla teoria ristretta
la proposta di Einstein e le sue conseguenze
relatività generale: i problemi
identità di massa inerziale e gravitazionale
storia delle geometrie non euclidee
la geometria euclidea non va bene
da Gauss a Riemann il percorso delle geometrie algebriche verso una maggiore generalità
geometria ed esperienza
analitico e sintetico
gli apriori
il V postulato è un teorema?
principio di relatività generale
principio di equivalenza
curvatura dei raggi di luce
perielio di mercurio
campi gravitazionali ed orologi
spazio tempo non euclideo
la gravitazione come curvatura dello spazio tempo
problematiche di natura cosmologica