

## II.6. Il principio di indeterminazione

- ⌘ Le condizioni iniziali e gli apparati di misura
- ⌘ Il principio di indeterminazione di Heisenberg
- ⌘ Quantità di moto ed energia di una particella localizzata
- ⌘ Lo zero assoluto e la temperatura di degenerazione dei gas
- ⌘ Esercizi

### 6.1 Le condizioni iniziali e gli apparati di misura

#### 6.1.1 LE SPERANZE VANE DEL DETERMINISMO MECCANICISTA

Nella prima parte si è iniziata la discussione sui problemi del *determinismo meccanista*. Secondo la meccanica newtoniana e i suoi sviluppi del tardo settecento culminati con la creazione della *meccanica razionale* ad opera di *Pierre-Simon Laplace* (1749 - 1827) e *Joseph-Louis Lagrange* (Torino 1736 - Parigi 1813), la descrizione del mondo era completamente racchiusa nelle leggi della meccanica e l'unico problema era quello di potenziare le capacità di calcolo e di migliorare la precisione delle misure necessarie a determinare le condizioni iniziali del moto.

Questa impostazione non si modificò in maniera sostanziale nel corso dell'ottocento quando i campi di indagine della fisica si ampliarono (ottica, termodinamica, elettromagnetismo). Si scoprirono nuove leggi, si affermarono nuove teorie, ma lo studio del movimento e il modello della meccanica rimasero modelli da imitare.

Anche quando in *termodinamica statistica* si incominciò a riflettere sulla necessità di utilizzare il calcolo delle probabilità come strumento di un nuovo tipo di previsione (non deterministica in senso stretto), la cosa venne giustificata solo con la necessità di analizzare sistemi composti da un numero troppo elevato di componenti per poter essere sottoposti al calcolo deterministico della meccanica.

Solo alla fine dell'ottocento *H. Poincarè* (1854-1912) iniziò a demolire uno dei santuari di tale *determinismo*: era diffusa la convinzione, basata sull'idea di continuità, che ad un *errore piccolo a piacere* nella determinazione delle condizioni iniziali del moto, corrispondessero evoluzioni del sistema che differivano l'una dall'altra per differenze piccole a piacere.

*Poincarè* mostrò con un teorema di matematica che tale speranza era vana. Preso un sistema, anche relativamente semplice, una lievissima differenza nelle condizioni iniziali del moto può determinare evoluzioni completamente diverse del sistema.

Il secondo momento di crisi si ebbe quando, incominciando a studiare sistemi microscopici, ci si rese conto che non si poteva più ritenere trascurabile la perturbazione indotta sul sistema dal processo di misurazione.

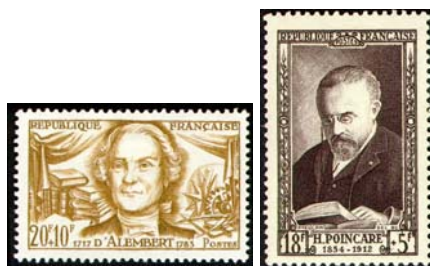
Questa seconda questione troverà una sistemazione definitiva con il *principio di indeterminazione* di *Heisenberg* di cui tratteremo nel presente capitolo. Con la teoria di Heisenberg la indeterminazione - che era già entrata in fisica dalla finestra, attraverso le leggi statistiche della termodinamica - entrerà in fisica dalla porta principale.

#### 6.1.2 INDETERMINAZIONE DI POSIZIONI E VELOCITÀ PER OGGETTI MACROSCOPICI

Cercheremo ora di capire l'origine di questa impossibilità utilizzando un esempio e proveremo ad analizzare, in termini generali, le operazioni



L. Lagrange fisico e matematico di lingua francese operò a Torino e diede grandi contributi all'analisi e alle sue applicazioni alla meccanica razionale



D'Alembert filosofo, matematico e astronomo illuminista e H. Poincaré: una perturbazione infinitesima può cambiare completamente l'evoluzione di un sistema

strumentali che bisogna compiere per misurare le coordinate e la velocità dei corpi.

Per determinare le coordinate di un aereo si usa solitamente una apparecchiatura *radar* <sup>(1)</sup>. L'antenna dell'apparecchiatura trasmette onde radio centimetriche sotto forma di brevi impulsi. Queste onde, viaggiando alla velocità della luce, raggiungono l'aereo vengono riflesse e ritornano all'antenna. Sullo schermo del monitor vengono registrati due impulsi corrispondenti al segnale trasmesso e a quello ricevuto.

Conoscendo la velocità  $u$  con cui il pennello luminoso si muove sullo schermo, la velocità delle onde radio ( $c = 3 \times 10^8$  m/s) e, misurando la distanza  $l$  tra i due impulsi sullo schermo, possiamo trovare la distanza dall'aereo. Infatti uguagliando i due intervalli temporali coinvolti si ha:

$$\frac{l}{u} = \frac{2x}{c} \text{ da cui si ricava: } x = \frac{c}{2u} l$$

e poiché la quantità  $\frac{c}{2u}$  è una costante nota, basta tarare opportunamente la scala di lettura per leggere direttamente sullo schermo la distanza  $x$ .

Per misurare la *velocità istantanea* dell'aereo è necessario realizzare una variante del radar in modo di renderlo in grado di confrontare la frequenza delle onde trasmesse con quella delle onde ricevute. <sup>(2)</sup>

Quando esiste un moto relativo tra sorgente ed osservatore, come sappiamo, si produce per effetto Doppler relativistico una variazione nella frequenza dell'onda elettromagnetica trasmessa. <sup>3</sup>

Se l'aereo viaggia con velocità  $v$  il flusso del tempo (il suo tempo proprio) in un sistema di riferimento legato all'aereo, cambia rispetto al tempo della apparecchiatura radar e, di conseguenza, cambia la frequenza delle onde. Questo fenomeno sarà visibile sullo schermo del radar.

Quando l'aereo si allontana dal radar le onde sullo schermo si allargheranno mentre si stringeranno quando l'aereo si avvicina.

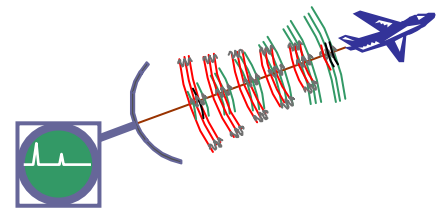
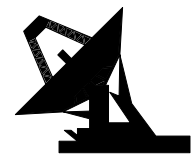
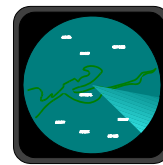
In base ai calcoli relativistici sull'effetto Doppler si ha:

$$v' = v \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tag{II.6.1}$$

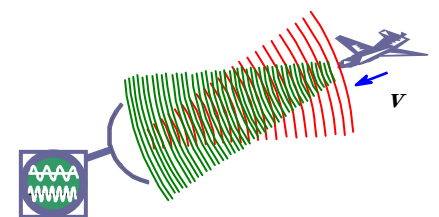
con  $\beta$  positivo in caso di avvicinamento e negativo in allontanamento.

Basta invertire la relazione e si ottengono  $\beta$  e  $v$ .

Ma, *uno strumento in grado di misurare la velocità dell'aereo* (e di conseguenza la sua quantità di moto) *non ci permette di determinarne le coordinate*. Infatti, per misurare la velocità tramite l'effetto Doppler serve un'onda sinusoidale, mentre per misurare le coordinate di un aereo servono dei *treni d'onda* <sup>(4)</sup> che non hanno mai carattere sinusoidale a causa della loro estensione spaziale finita.



il radar a impulsi per determinare la distanza



il radar a onde per determinare la velocità

<sup>1</sup> Sigla che sta per *RA*dio *D*etection *A*nd *R*anging

<sup>2</sup> La lunghezza d'onda  $\lambda$  è la dimensione spaziale dell'onda mentre la frequenza  $\nu$  è il numero di oscillazioni nell'unità di tempo. Se l'onda si propaga con velocità  $v$  si ha sempre  $v = \lambda\nu$ .

<sup>3</sup> Si veda il capitolo sulla cinematica relativistica

<sup>4</sup> In fisica si chiama *treno d'onda* una successione di impulsi aventi carattere ondulatorio. Le caratteristiche dei treni d'onda sono discusse nella IV parte del testo.

Quindi, per misurare simultaneamente le coordinate e la velocità di un corpo in movimento è necessario utilizzare due strumenti distinti, uno che misuri le coordinate e l'altro che misuri la velocità.

### 6.1.3 LA COMPLEMENTARIETÀ

Niels Bohr (1885-1962), uno dei padri della moderna meccanica quantistica, ha dimostrato che tutti gli strumenti di misura possono essere divisi in due classi tali che gli strumenti di una classe misurano dati *complementari* a quelli dell'altra classe.



Niels Bohr uno dei grandi padri della meccanica quantistica; nonostante abbia dato i suoi contributi solo alla preistoria di essa, fu intorno alla sua persona che si formò il gruppo dei fondatori della nuova meccanica tra il 1920 e il 1930

Per esempio, una classe di strumenti è in grado di misurare le coordinate, e l'altra di misurare le velocità o le quantità di moto. Le informazioni sul moto del corpo si possono ottenere solo combinando l'uso degli strumenti di entrambe le classi.

La situazione, arrivati a questo punto sembrerebbe ancora tranquilla. Invece di usare un solo strumento bisogna usare due strumenti. Sembrerebbero non esistere particolari restrizioni all'idea che sta alla base del determinismo meccanicista circa la possibilità di misurare le condizioni del moto ad un istante particolare con un grado di precisione qualsiasi. Misurate le condizioni del moto, ci dice la meccanica classica potrò conoscere deterministicamente passato e futuro del sistema.

La determinazione delle condizioni iniziali non può essere simultanea e deve essere condotta con strumenti che si influenzano reciprocamente

Ma le cose non vanno così. *Tutti gli strumenti utilizzati* per misurare le coordinate e la velocità di un corpo *interagiscono con il corpo stesso*. Così quando un'onda radio colpisce un aereo e ne viene riflessa, esercita su di esso una forza ben definita che ne cambia la posizione e la velocità. Naturalmente, nel caso di un aereo, tali variazioni sono così piccole da poter essere trascurate anche nei calcoli più precisi. Ma quando si indaga il *mondo sub atomico* diventa evidente che uno *strumento di misura può introdurre perturbazioni apprezzabili* nel moto di una micro particella, e che l'interazione dello strumento con l'oggetto non può più essere trascurata. Tutto ciò viene associato con quel particolare comportamento delle micro particelle di cui ci occuperemo nei capitoli dedicati alla meccanica quantistica.

## 6.2 Il principio di indeterminazione di Heisenberg

### 6.2.1 L'ENUNCIATO DEL PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE

Werner Heisenberg (1902-1976) fornì negli anni 1926 e 1927 l'impianto concettuale su cui si organizzò la nuova meccanica necessaria per analizzare il comportamento del mondo microscopico.

In quell'ambito Heisenberg derivò dai principi della meccanica quantistica una legge estremamente semplice da comprendere, ma assolutamente controintuitiva.

Tale legge era già stata intuita analizzando il risultato di tutti i possibili esperimenti ideali che si possano pensare per misurare le coordinate spaziali e la velocità (o quantità di moto) di una particella quando si tenga conto della interazione tra oggetto di misura e strumento di misura.

La legge afferma che la misura simultanea delle coordinate spaziali e della quantità di moto di una particella introduce sempre incertezze (o indeterminazioni) nei loro valori indicate con  $\Delta x$  e  $\Delta p_x$ . Tali incertezze, dice il principio di indeterminazione, sono collegate tra loro dalla relazione:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi} = \hbar \quad (\text{II.6.2})$$

dove la costante  $h$ , detta *costante di Planck*, vale

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

e pertanto  $\hbar = 1.0546 \times 10^{-34} \approx 10^{-34} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$  <sup>(5)</sup>.

La costante  $h$  è una delle costanti più importanti della fisica, gioca un ruolo fondamentale nella descrizione del mondo sub atomico e la si incontra costantemente in meccanica quantistica (interazioni tra radiazione e materia, energia e quantità di moto dei fotoni, principio di indeterminazione).

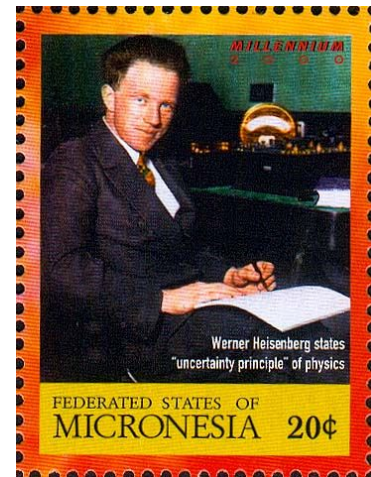
Senza entrare troppo in dettaglio si può affermare che *per osservare la particella bisogna illuminarla, ma illuminarla vuol dire farla interagire con almeno un fotone la cui energia è proporzionale alla frequenza attraverso la costante di Planck. L'interazione della particella con il fotone modifica lo stato della particella e lo modifica tanto più intensamente quanto più si vuole determinare con precisione la posizione. Infatti il fotone è tanto più preciso spazialmente quanto maggiore è la sua frequenza, ma questo fatto ne aumenta l'energia e dunque produce effetti sempre più imprevedibili sulla velocità della particella dopo l'urto.*

Le coordinate e le corrispondenti quantità di moto lungo gli altri due assi sono legate da relazioni simili.

Se confrontiamo la *soluzione classica del problema della dinamica* con il principio di indeterminazione vediamo subito che essi sono in contraddizione.

In effetti, nello scrivere le equazioni del moto bisogna specificare, con la massima accuratezza, le condizioni iniziali; ma, in base al principio di indeterminazione le condizioni iniziali possono essere determinate solo in maniera approssimata ed esiste un limite al di sotto del quale non si può scendere. Come è possibile allora che le leggi del moto della meccanica

<sup>5</sup> La quantità  $\hbar$  si legge *acca tagliato* ed interviene in molti conti di meccanica quantistica.

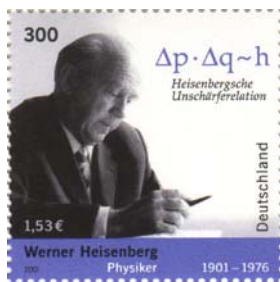


principio di indeterminazione

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi} \text{ con } h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$



I tre fondatori della meccanica quantistica: Dirac, Heisenberg, Schrodinger a Stoccolma nel 1930 per ricevere il premio Nobel con le rispettive *signore*. Si osservi la diversità dei personaggi



classica possano essere determinate con un grado di precisione considerato arbitrario?

Tenteremo di rispondere a tale questione analizzando tre problemi tipici nella indagine del mondo fisico:

- il moto di un corpo macroscopico (per esempio un razzo)
- il moto di una particella (per esempio un elettrone) in moto su una traiettoria macroscopica
- il moto di una particella lungo un cammino microscopico

### 6.2.2 OGGETTO MACROSCOPICO IN MOTO SU DIMENSIONI MACROSCOPICHE.

*Esercizio.* Consideriamo un satellite di massa  $10^3$  kg in moto circolare intorno alla terra con raggio orbitale di 6'500 km e velocità di 8 km/s <sup>(6)</sup>. Con che accuratezza si possono specificare il raggio orbitale e la velocità?



Per mantenere il razzo in un'orbita circolare il vettore velocità deve sempre essere perpendicolare al raggio e ciò significa che la componente radiale della velocità deve essere uguale a zero. Ma se questa componente fosse *esattamente* uguale a zero ciò significherebbe che dovrebbe essere zero anche la indeterminazione  $\Delta v_r$ , e, in tal caso, dovrebbe diventare infinitamente grande la indeterminazione su  $r$ .

Si tratta di cercare un compromesso tra le due esigenze: supponiamo che l'orbita sia specificata con una indeterminazione  $\Delta r$  e che la componente radiale della velocità sia nulla con una indeterminazione  $\Delta v_r$ , che può essere calcolata tramite la relazione di Heisenberg:

$$\Delta r \times \Delta p_r \geq \hbar$$

Se le incertezze su  $r$  e su  $v$  sono molto minori dei valori delle grandezze stesse, si può supporre che il problema sia risolto con sufficiente accuratezza.

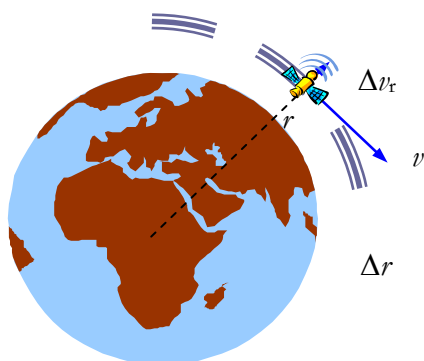
Supponiamo che sia  $\Delta r \approx 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ , cioè che la incertezza sia pari alla dimensione atomica. Ovviamente l'errore sperimentale di qualunque sistema di misura è molto più grande. Allora la indeterminazione nella componente radiale della quantità di moto è:

$$\Delta p_r \geq \frac{\hbar}{\Delta r} = \frac{10^{-34}}{10^{-10}} = 10^{-24} \text{ kg m/s}$$

e pertanto la incertezza sulla componente radiale della velocità vale:

$$\Delta v_r = \frac{\Delta p_r}{m} \geq \frac{\hbar}{m \Delta r} = \frac{10^{-34}}{10^3 \times 10^{-10}} = 10^{-27} \text{ m/s}$$

Ma la velocità orbitale è di  $8 \times 10^3 \text{ m/s}$  e cioè incommensurabilmente più grande del grado di incertezza!



per studiare il moto di un satellite il principio di indeterminazione non ha rilevanza pratica

<sup>6</sup> I due valori forniti per il raggio orbitale e per la velocità orbitale corrispondono al caso di un satellite posto in orbita ai limiti degli strati alti della atmosfera con velocità orbitale corrispondente al valore necessario a produrre la accelerazione centripeta uguale alla accelerazione di gravità a quella quota. Si vedano i capitoli sul moto circolare uniforme e sulla gravitazione nella prima parte.

Abbiamo visto che *l'incertezza non ha alcuna rilevanza in problemi di tipo macroscopico*. Possiamo completamente trascurare la indeterminazione nella posizione e nella velocità assumendo che le condizioni iniziali possano essere specificate con il grado desiderato di precisione e che, pertanto, il problema fondamentale della dinamica possa essere risolto nell'ambito della meccanica classica.



**6.2.3 OGGETTO MICROSCOPICO SU DIMENSIONI MACROSCOPICHE.**

*Esercizio:* Si consideri un elettrone in moto all'interno di un *betatrone* (acceleratore circolare relativistico di elettroni) su una traiettoria circolare di 2.5 m di raggio e con una velocità pari al 99% della velocità della luce  $v = 0.99 c = 2.97 \times 10^8$  m/s. Con che livello di precisione si possono caratterizzare orbita e velocità?



A differenza del problema precedente, qui si deve considerare l'incremento relativistico della massa. La massa di riposo dell'elettrone vale  $m_0 = 9.1 \times 10^{-31}$  kg e, alla velocità indicata, la massa vale:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0.99^2}} \approx 7.1 m_0.$$

Poiché la massa di un elettrone è molto minore di quella del razzo il raggio dell'orbita elettronica non può essere specificato con un così alto grado di accuratezza come nel problema precedente. Tuttavia, se anche assumiamo che la indeterminazione su  $r$  sia 0.05 mm, l'orbita risulterà molto ben caratterizzata perché l'errore relativo sarà:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{0.05 \times 10^{-3}}{2.5} = 2 \times 10^{-5} = 0.002\%$$

La corrispondente incertezza sulla velocità radiale risulta

$$\Delta v_r \geq \frac{\hbar}{m\Delta r} = \frac{10^{-34}}{7 \times 9 \times 10^{-31} \times 5 \times 10^{-5}} \approx 0.3 \text{ m/s}.$$

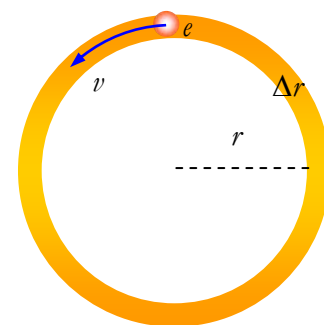
Con un elettrone che si muove pressoché alla velocità della luce una componente radiale della velocità pari a 30 cm/s può essere certamente trascurata e considerata nulla. Dunque, anche nel caso di una particella microscopica che si muova lungo una traiettoria macroscopica il principio di indeterminazione non porta a conseguenze apprezzabili. Le condizioni iniziali possono ancora essere assegnate con un alto grado di precisione e il problema può esser risolto con i metodi classici (a condizione di tenere conto degli effetti relativistici).

Vedremo nel seguito che la natura complessa delle particelle elementari (elettroni, protoni, neutroni, etc.) non consente di trattarle come punti materiali (o particelle nel senso sin qui utilizzato) e che le loro traiettorie non possono essere determinate così semplicemente. Tuttavia in casi simili a quello trattato un tale approccio al problema del moto è considerato accettabile.



**6.2.4 OGGETTO MICROSCOPICO SU DIMENSIONI MICROSCOPICHE**

*Esercizio:* Consideriamo infine il moto di una micro particella su di una micro orbita; per esempio, il moto di un elettrone in un atomo. Il raggio dell'atomo è, approssimativamente,  $r = 0.5 \text{ \AA} = 0.5 \times 10^{-10}$  m; la velocità orbitale di un elettrone è circa  $v \approx$



nel caso di traiettorie macroscopiche il principio di indeterminazione non è rilevante neanche per le particelle microscopiche

$10^6$  m/s. <sup>(7)</sup> A questi valori di velocità gli effetti relativistici sono trascurabili e la massa dell'elettrone può essere considerata pari alla sua massa di riposo.

Supponiamo ancora che la indeterminazione sul raggio orbitale sia dell'uno per cento e cioè  $\Delta r \approx 0.01 r = 5 \times 10^{-13}$  m. Stabilire se bisogna tener conto del principio di indeterminazione.

☹

La indeterminazione nella componente radiale della velocità risulta:

$$\Delta v_r \geq \frac{\hbar}{m\Delta r} = \frac{10^{-34}}{9 \times 10^{-31} \times 5 \times 10^{-13}} \approx 2.2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

cioè quasi la velocità della luce.

Abbiamo trovato che la incertezza nella componente radiale della velocità è circa 220 volte più grande della velocità orbitale e pertanto non ha senso considerare il moto dell'elettrone lungo la sua orbita perché la sua velocità è completamente indeterminata.

D'altra parte, se assumiamo una incertezza ragionevole nel valore della velocità radiale, per esempio

$\Delta v_r/v = 1\%$  non possiamo dire nulla sulla traiettoria. In effetti, se  $\Delta v_r = 0.01v = 10^4$  m/s, la indeterminazione sul raggio risulta:

$$\Delta r \geq \frac{\hbar}{m\Delta v_r} = \frac{10^{-34}}{9 \times 10^{-31} \times 10^4} \approx 1.1 \times 10^{-8} \text{ m} = 110 \text{ \AA}$$

cioè 220 volte il valore del raggio! Evidentemente non ha alcun senso parlare di orbita in tali condizioni.

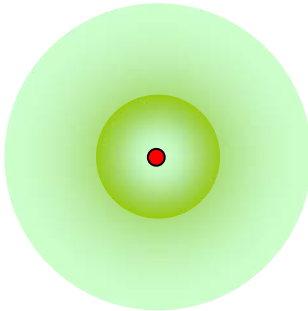
☺

### 6.2.5 IN SINTESI

Abbiamo dunque visto che il *principio di indeterminazione* non influenza la applicabilità della meccanica newtoniana e della teoria della relatività agli *oggetti macroscopici*. Utilizzando le forze e le condizioni iniziali possiamo scrivere la legge del moto di un corpo assimilabile ad un punto materiale con un grado qualsiasi di precisione preassegnata. Il principio di indeterminazione non limita nemmeno la applicazione di queste leggi alle *micro particelle* entro regioni *macroscopiche*. Per esempio, ha perfettamente senso parlare di traiettoria di un elettrone in un tubo a raggi catodici o in un acceleratore.

Nel campo *microscopico*, come nei reticoli cristallini dei solidi, negli atomi o nei nuclei è tutta un'altra questione. Qui, in accordo con il principio di indeterminazione, i metodi della meccanica classica sono assolutamente inapplicabili. I concetti classici come *equazione del moto* di una particella, *traiettoria*, *velocità istantanea*, etc. diventano assolutamente privi di significato. Non ha senso parlare di traiettoria di un elettrone in un atomo o di velocità di un protone nel nucleo atomico. Tali problemi richiedono di essere affrontati con i metodi della *meccanica quantistica*.

Ovviamente la formulazione delle leggi della meccanica quantistica ha portato ad un approfondimento di cosa si debba intendere per determi-



all'interno degli atomi cade completamente il concetto di orbita e se si specifica la posizione la velocità diviene del tutto imprevedibile



Bohr, Heisenberg e Pauli: tre protagonisti della meccanica quantistica



Bohr e Einstein nel periodo delle discussioni sui fondamenti della meccanica quantistica

<sup>7</sup> Questo valore di velocità è determinabile applicando la II legge della dinamica con problema analogo a quello di tipo gravitazionale utilizzando per la forza la espressione della forza elettrica tra cariche puntiformi.

nismo nonché sulla possibilità di concepire separatamente l'azione del conoscere dall'oggetto che viene conosciuto.

Questo dibattito ha visto partecipare tutti i maggiori fisici e molti filosofi del 900 e prevalere, all'inizio degli anni 30, una interpretazione del *conoscere* in senso fisico oggi nota come *interpretazione di Copenaghen della teoria dei quanta*. La interpretazione prevalente, che ha portato ad una ridefinizione di significato della parola *conoscere*, ha visto sull'altro fronte una *bataglia strenua e perdente da parte di Einstein* sostenitore del carattere decisamente provvisorio e incompleto della teoria quantistica.

Alcune delle osservazioni di Einstein sulla *incompletezza* della meccanica quantistica sono oggetto, in questi anni di una ripresa di dibattito tra i fisici teorici anche se la meccanica quantistica, per effetto della larga massa di risultati sperimentali e di previsioni confermate, ha cessato sin dagli anni 30 e 40 di essere considerata una teoria *provvisoria* o in via di definizione e rappresenta, nelle versioni più approfondite via via elaborate, la teoria standard per lo studio delle mondo delle particelle. <sup>(8)</sup>



<sup>8</sup> Su questi argomenti si consiglia la lettura di *Fisica e Filosofia* di Werner Heisenberg, ed. Il Saggiatore. In questo testo uno dei *padri fondatori* della meccanica quantistica discute il contenuto epistemologico di questa teoria fisica. Si consiglia inoltre la lettura dei capitoli dedicati a questo argomento di *Logica della scoperta scientifica* di Karl Popper, edizioni Einaudi. Sulla questione della completezza e incompletezza vista con gli occhi di oggi consiglio “*un'occhiata alle carte di Dio*” di Gian Carlo Ghirardi ed. Il Saggiatore un bellissimo testo in cui si discute di completezza, di determinismo e di violazioni della causalità tramite l'entanglement quantistico



### 6.3 La quantità di moto e l'energia di una particella localizzata

#### 6.3.1 ENERGIA E QUANTITÀ DI MOTO MINIME



il confinamento di una particella crea una indeterminazione energetica  $\mathcal{E}_k \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2}$

Una delle conseguenze *sconcertanti* del principio di indeterminazione è la perdita di significato del concetto di *energia cinetica nulla*. Per il fatto di essere confinata in una determinata regione spaziale una particella viene a possedere una sua energia propria dipendente dalla condizione di *confinamento*; a livello quantistico confinare qualcosa equivale a fissare una indeterminazione su quantità di moto ed energia (*ciò che è confinato non è immobile*).

Il risultato che ci apprestiamo a ricavare dice che una particella la cui posizione spaziale sia stabilita entro un valore  $a$  possiede un limite inferiore alla propria quantità di moto ed energia dati rispettivamente da:

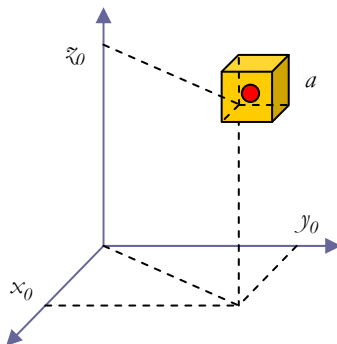


$$p \geq \frac{\hbar}{a} \qquad \mathcal{E}_k \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2} \qquad \text{(II.6.3)}$$

Una particella si dice *localizzata* in una certa regione di spazio di dimensione tipica  $a$  quando le sue coordinate spaziali soddisfano alle relazioni:

$$x_0 \leq x \leq x_0 + a \qquad y_0 \leq y \leq y_0 + a \qquad z_0 \leq z \leq z_0 + a$$

e ciò significa che la particella si trova all'interno del cubo indicato in figura.



particella racchiusa in uno cubo di spigolo  $a$

In questo caso la incertezza nella determinazione delle coordinate della particella coincide con la dimensione tipica della regione di spazio in cui si trova localizzata. Pertanto:

$$\Delta x \approx \Delta y \approx \Delta z \approx a$$

Applicando la relazione di indeterminazione si trova la corrispondente indeterminazione sulle componenti della quantità di moto:

$$\Delta p_x \approx \Delta p_y \approx \Delta p_z \approx \frac{\hbar}{a}$$

Cerchiamo ora di determinare un limite inferiore al valore della quantità di moto tenendo presente che le considerazioni che seguono hanno solo un valore semiquantitativo, servono cioè a determinare degli ordini di grandezza, più che dei valori.

Poiché la indeterminazione nella proiezione della quantità di moto è dell'ordine di  $\hbar/a$  il limite inferiore per  $p$  è dunque pari almeno alla indeterminazione e cioè si ha  $p \geq \frac{\hbar}{a}$

Ricaviamo ora l'espressione della energia cinetica media per una particella localizzata. In base alla definizione classica si ha:  $\mathcal{E}_k = \frac{p^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2}$

Nel caso di una particella ultra relativistica, la energia cinetica vale  $pc$  e pertanto si ottiene una espressione ancora più semplice:

$$\mathcal{E}_{k,rel} \approx \langle p \rangle c \geq \frac{\hbar c}{a} \qquad \text{(II.6.4)}$$

Le relazioni che abbiamo determinato trovano una immediata ed interessante applicazione nel caso di sistemi di molte particelle quando si utilizza il *concetto di concentrazione*. Se indichiamo con  $n$  il numero di parti-

celle per unità di volume (cioè la concentrazione) avremo che  $na^3 = 1$ , e pertanto  $a = n^{-1/3}$ .

Se sostituiamo il valore di  $a$  nelle equazioni relative all'energia cinetica minima avremo rispettivamente:

$$\mathcal{E}_k \geq \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m} \quad (\text{II.6.5})$$

$$\mathcal{E}_{k,rel} \geq \hbar c n^{1/3} \quad (\text{II.6.6})$$

A prima vista l'idea di una energia cinetica sempre diversa da zero sembra paradossale e contraddire l'esperienza quotidiana in cui noi osserviamo un gran numero di corpi in stato di quiete. I prossimi due problemi ci consentiranno di riflettere su questo apparente paradosso e di risolverlo.

### 6.3.2 QUANDO IL FENOMENO È RILEVANTE E QUANDO NON LO È

*Esercizio:* Consideriamo una moneta (di massa  $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$ ) appoggiata ad un tavolo e vediamo di stimarne la velocità media e la quantità di moto di origine quantistica.

☹

La regione di localizzazione non può essere inferiore alle dimensioni della moneta:  $a \approx 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$ . Pertanto la quantità di moto media in quiete vale:

$$\langle p \rangle \approx \frac{\hbar}{a} \cong \frac{10^{-34}}{10^{-2}} = 10^{-32} \text{ kg m/s}$$

e la velocità media corrispondente vale

$$\langle u \rangle = \frac{\langle p \rangle}{m} \cong \frac{10^{-32}}{10^{-3}} = 10^{-29} \text{ m/s}$$

Naturalmente, un tale valore di velocità può essere trascurato ed è lecito supporre che la moneta sia immobile. Come abbiamo già visto le conseguenze della relazione di indeterminazione possono essere trascurate nel dominio della meccanica newtoniana.

☺

*Esercizio:* Vediamo di calcolare la quantità di moto e l'energia di un elettrone localizzato in un atomo delle dimensioni approssimative di  $1 \text{ \AA}$  ( $a \approx 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ).

☹

Nel caso considerato:

$$\langle p \rangle \approx \frac{\hbar}{a} \cong \frac{10^{-34}}{10^{-10}} = 10^{-24} \text{ kg m/s}$$

e la velocità media vale

$$\langle u \rangle = \frac{\langle p \rangle}{m} \approx \frac{10^{-24}}{9 \times 10^{-31}} = 10^6 \text{ m/s}$$

Come si vede l'elettrone, nell'atomo si muove con una velocità elevata, anche se non ancora relativistica.

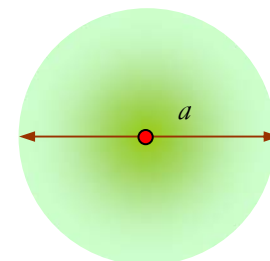
La energia cinetica media vale:

$$\langle \mathcal{E}_k \rangle \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2} \approx \frac{10^{-68}}{2 \times 9 \times 10^{-31} \times 10^{-20}} \approx 5 \times 10^{-19} \text{ J} \approx 3 \text{ eV}$$

due importanti limitazioni per l'energia in funzione della concentrazione



la moneta di Newton non si metterà improvvisamente a saltare per effetto del principio di indeterminazione



gli elettroni hanno energia per il solo fatto di essere confinati negli atomi

Quando avremo ottenuto maggiori conoscenze sulla struttura atomica, vedremo che, quello ottenuto, è un buon ordine di grandezza dei valori reali.



Dunque, nell'ambito della fisica atomica, non è possibile applicare le concezioni e le leggi della meccanica newtoniana. In questo caso solo le idee quantistiche, ivi compreso il principio di indeterminazione, portano a risultati corretti.

A proposito dell'ultimo esempio vale la pena di riflettere sul fatto che, entro teorie complesse, è possibile ottenere delle buone stime anche applicando leggi relativamente semplici.

## 6.4 Lo zero assoluto e la temperatura di degenerazione dei gas

### 6.4.1 LO ZERO DELLA SCALA DELLE TEMPERATURE

Il livello zero nella scala assoluta delle temperature è detto zero assoluto e corrisponde alla temperatura di  $-273.15\text{ }^\circ\text{C}$  nella scala Celsius.

Si tratta della temperatura più bassa possibile nel senso che non esistono esperimenti che consentano di raggiungere lo zero assoluto ed è impossibile raggiungere temperature al di sotto di esso. La ragione di questo fatto è legata alla validità di una delle grandi leggi della termodinamica, il II principio (si vedano i capitoli sulla termodinamica nella parte IV).

La realizzazione di basse temperature, prossime allo zero, è di eccezionale interesse perché a quelle temperature le proprietà della materia cambiano in maniera radicale. Si osservano un gran numero di fenomeni interessanti quali la superfluidità dell'elio, la superconducibilità, etc. Al giorno d'oggi, con metodologie sperimentali che è troppo complesso descrivere in questa sede, si raggiungono temperature sino a un decimillesimo di Kelvin.

### 6.4.2 LO ZERO DELLE TEMPERATURE NON È LO ZERO DELL'ENERGIA

A prima vista, in base alla definizione classica di energia, si potrebbe pensare che lo zero assoluto corrisponda al punto di energia nulla in corrispondenza del quale tutto è fermo e non si avrebbe più pressione.

Ma a temperature prossime allo zero assoluto, l'energia cinetica media delle molecole non è più proporzionale alla temperatura e la ragione di ciò sta nel presentarsi, in prossimità di tali temperature, delle proprietà quantistiche delle molecole.

In particolare la energia cinetica delle molecole non tende a zero quando tende a zero la temperatura come si dovrebbe inferire in base alla definizione. Essa tende invece ad un valore minimo di energia corrispondente a quello di una particella localizzata.

Come conseguenze del principio di indeterminazione una particella confinata in una regione di spazio di dimensione  $a$  presenta sempre una indeterminazione sulla energia pari a  $\frac{\hbar^2}{2ma^2}$ .

Il valore di  $a$  si può ottenere osservando che se  $N$  molecole occupano il volume  $V$ , il volume a disposizione di una molecola è  $V / N = 1 / n$  dove con  $n$  si indica la concentrazione molecolare; pertanto  $a = \sqrt[3]{\frac{1}{n}}$  e per la indeterminazione sulla energia si ottiene infine:

$$\langle \mathcal{E} \rangle \geq \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m} \quad (\text{II.6.7})$$

Si può pertanto affermare che a basse temperature il gas degenera, e la equazione secondo cui la temperatura è proporzionale alla energia media non è più valida. La temperatura di degenerazione può essere calcolata dalla relazione:

$$\frac{3}{2} k_B T \geq \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2m_0}$$

da cui si ottiene:



P. Kapitza e L. Landau premi Nobel per gli studi sulla fisica delle basse temperature

$$T_{\text{deg}} = \frac{h^2 n^{2/3}}{3k_B m_0} \quad (\text{II.6.7})$$

Dunque esiste una temperatura di degenerazione al di sotto della quale il gas non può più essere esaminato con le leggi che ci sono ben note. Tale temperatura (a parte le costanti universali) dipende da due fattori: la concentrazione (con esponente 2/3) e la massa (proporzionalità inversa).

Per esempio, nel caso dell'elio ad una concentrazione  $n \approx 10^{25} \text{ m}^{-3}$  <sup>(9)</sup> si ottiene:

$$T_{\text{deg}} \approx \frac{10^{-68} \times 10^{50/3}}{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 0.7 \times 10^{-26}} \approx 2 \times 10^{-3} \text{ K}$$

Come si vede la temperatura di degenerazione di un gas è molto bassa; così si giustifica la utilizzazione del modello classico di descrizione del gas anche a bassa temperatura.



Nel caso del gas di elettroni che permea un metallo, invece, si ha degenerazione pressoché a qualsiasi temperatura perché la massa elettronica è tra 3 e 4 ordini di grandezza minore della massa molecolare e ciò comporta temperature di degenerazione ben superiori a quelle a cui si opera normalmente; pertanto le proprietà del *gas di elettroni* risultano molto diverse da quelle di un gas ideale. <sup>(10)</sup>

#### 6.4.3 ALLO ZERO ASSOLUTO CI SONO ANCORA MOTI MOLECOLARI

Dunque, in prossimità dello zero assoluto, la energia cinetica media delle molecole non è più proporzionale alla temperatura, ma è espressa da una funzione più complessa. *La affermazione, spesso contenuta in molti testi di divulgazione scientifica, secondo cui il movimento molecolare termina in corrispondenza dello zero assoluto è sbagliata.*

La fisica moderna consente di affermare che i moti molecolari non cessano mai, nemmeno allo zero assoluto, dove si hanno le cosiddette *vibrazioni del punto zero*. Queste vibrazioni corrispondono alla *energia del punto zero*, cioè a quel valore minimo di energia che non può essere ulteriormente eliminata per raffreddamento andando al di sotto dello zero assoluto. Le vibrazioni del punto zero sono osservabili attraverso lo *scattering* della luce da parte di sostanze a temperature prossime allo zero.

*Il modello di gas ideale non ha senso in prossimità dello zero assoluto e qualunque estrapolazione della equazione del gas perfetto è sbagliata. Tale equazione vale solo per temperature lontane dallo zero assoluto, e, in particolare, al di sopra della temperatura di degenerazione.*

<sup>9</sup>La concentrazione molecolare ha l'ordine di grandezza del *numero di Loschmidt*

<sup>10</sup>Questo aspetto sarà ripreso nei capitoli dedicati alla conduzione elettrica nei solidi per spiegare la coesistenza in equilibrio di due temperature molto diverse quella del gas di elettroni e quella del reticolo cristallino in cui il gas si trova immerso.

## 6.5 Esercizi

### 6.5.1 INDETERMINAZIONE DI VELOCITÀ PER OGGETTI LOCALIZZATI DI VARIO TIPO

*Esercizio:* Determinare la indeterminazione sulla velocità di un elettrone, di un protone e di una gocciolina d'acqua delle dimensioni  $d = 0.1 \mu\text{m}$  confinati entro una regione di dimensione  $\Delta x = 1.0 \mu\text{m}$

☹

Ricordiamo che  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ ,  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{kg}$  mentre la massa della goccia sarà:  $m_g = \delta d^3 = 10^3 10^{-21} = 10^{-18} \text{kg}$

In base al principio di indeterminazione

$\Delta v_x \geq \frac{\hbar}{m \Delta x}$  e si ha pertanto nei 3 casi:

$$\Delta v_{xe} \geq \frac{10^{-34}}{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-6}} \approx 10^2 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_{xp} \geq \frac{10^{-34}}{1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{-6}} \approx 6 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

$$\Delta v_{xg} \geq \frac{10^{-34}}{10^{-18} \cdot 10^{-6}} \approx 10^{-10} \text{ m/s}$$

☺

### 6.5.2 DIMENSIONE DELL'ORBITA ELETTRONICA E INDETERMINAZIONE

*Esercizio:* Ipotizzando che gli elettroni ruotino su orbite sotto l'azione della forza elettrica determinare un limite inferiore per tali orbite sulla base del principio di indeterminazione.

☹

Come sappiamo la energia cinetica di un oggetto classico orbitante è pari a  $-\frac{1}{2} U$  e pertanto:

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} k \frac{Z e^2}{r}$$

Se assumiamo il raggio orbitale come dimensione della localizzazione della particella avremo che:

$$\mathcal{E}_k \geq \frac{\hbar^2}{2mr^2} \text{ e pertanto dovrà essere:}$$

$$r \geq \frac{\hbar^2}{k m Z e^2}$$

La quantità:

$r_0 = \frac{\hbar^2}{k m e^2} = 5.29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$  è noto come *primo raggio di Bohr* perché corrisponde al diametro semiclassico della prima orbita dell'atomo di idrogeno secondo il modello di Bohr.

Si osservi infine che, come ci suggerisce anche l'intuizione, al crescere di  $Z$  il limite inferiore per le orbite decresce proporzionalmente.



Il calcolo è stato svolto ipotizzando che l'elettrone nell'atomo sia non relativistico. In effetti nel caso dell'atomo di idrogeno le energie sono di una decina di eV mentre la energia di riposo è di 0.5 MeV.



### 6.5.3 ENERGIA MINIMA NECESSARIA A LOCALIZZARE UN ELETTRONE IN UN NUCLEO



*Esercizio:* Ipotizzando che il nucleo atomico abbia una dimensione tipica di  $10^{-15}$  m determinare un limite inferiore per la energia di un elettrone che possa penetrare nel nucleo atomico.



Cerchiamo un metodo che ci consenta, a priori, di stabilire se dovremo usare le relazioni classiche o relativistiche; già il confronto con l'esercizio precedente e il fatto che le dimensioni sono 100'000 volte più piccole lascia presagire una risultato reletivistico; vediamo come fare:

La indeterminazione sulla posizione corrisponde ad una indeterminazione sulla quantità di moto:

$$p \geq \frac{\hbar}{a} \approx \frac{10^{-34}}{10^{-15}} = 10^{-19} \text{ kg m/s}$$

Ma  $p = m v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \beta c$  e ciò ci consente di determinare  $\beta$

$$\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{p}{m_0 c} = \frac{10^{-19}}{10^{-30} \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 330 \Leftrightarrow \beta^2 = 10^5 (1 - \beta^2) \Leftrightarrow \beta = \sqrt{\frac{10^5}{1 + 10^5}} \approx 0.999995$$

come si vede dal risultato siamo in pieno ambito ultrarelativistico e pertanto:

$$\mathcal{E}_{k,rel} \approx \langle p \rangle c \geq \frac{\hbar c}{a} = 3 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 1.87 \cdot 10^8 \text{ eV} = 187 \text{ MeV}$$

un valore di circa un ordine di grandezza superiore alla elevate energie per nucleone che si sviluppano nei processi legati alla energia nucleare.



## 6.6 Una conversazione tra Heisenberg ed Einstein

Nel 1925 Heisenberg aveva 24 anni mentre Einstein, diremmo oggi, era il *non plus ultra* nel mondo della fisica.

Qualche mese fa leggendo *Fisica ed oltre* (ed. Bollati Boringhieri) un libro in cui *Heisenberg* racconta momenti importanti della sua vita mi sono imbattuto in un episodio che mi è sembrato significativo per trasmettere una dimensione umana del processo di conoscenza scientifica. Ve lo propongo integralmente nonostante occupi qualche pagina. Del libro di Heisenberg vi consiglio anche il capitolo *Rivoluzione e vita universitaria* dedicato al 1933, l'anno dell'avvento al potere dei nazisti.

Nel semestre estivo del 1925 ripresi il lavoro di ricerca all'Università di Gottinga - nel luglio del 1924 ero divenuto *Privatdozent* presso quella Università - e in un primo momento cercai di elaborare le formule matematiche in base alle quali esprimere le intensità delle righe spettrali dell'idrogeno: a questo scopo mi proponevo di impiegare grosso modo gli stessi metodi che si erano rivelati tanto fruttuosi a Copenaghen lavorando sulla teoria di Kramers. Quasi subito vidi però che avevo imboccato un vicolo cieco: mi trovai infatti impelagato in un intrico inestricabile di equazioni quanto mai complesse, senza modo di uscirne. Ma il tentativo mi fu utile egualmente, perché mi convinsi della necessità di lasciar perdere il problema delle orbite degli elettroni all'interno dell'atomo, e di prendere invece in considerazione le frequenze e le ampiezze associate alle righe spettrali, che ne erano ottimi surrogati. Si trattava comunque di grandezze osservabili direttamente; e, come aveva fatto notare il mio amico Otto durante il giro in bicicletta al lago Walken, è indispensabile, per il fisico che voglia risolvere l'enigma dell'atomo, occuparsi solo di grandezze osservabili. Il tentativo di applicare questo metodo all'atomo di idrogeno aveva fatto fiasco proprio per la grande complessità matematica di questo problema specifico. Decisi allora di ricercare un modello matematico più semplice, e lo trovai nel pendolo, le cui oscillazioni possono rappresentare le vibrazioni molecolari di cui si occupano i fisici atomici. In quel periodo mi ammalai: ma la malattia non rallentò affatto il mio lavoro, e si dimostrò anzi utilissima.

Verso la fine di maggio del 1925 presi un terribile raffreddore da fieno: così terribile, invero, che fui costretto a chiedere a Born un congedo di due settimane. Me ne andai nell'isola di Helgoland, dove speravo di rimettermi presto respirando l'aria di mare, priva di polline. Arrivai col volto gonfio e tumefatto: alla padrona della pensione bastò un'occhiata per decidere che avevo fatto a botte, e che le avevo prese; comunque, promise che mi avrebbe trattato bene. Mi diede una stanza al secondo piano, e poiché la casa sorgeva a mezza costa dalla finestra godevo di una vista bellissima: vedevo il villaggio, le dune di sabbia della spiaggia e, in fondo, il mare. Ammirando il paesaggio riflettei su quanto Bohr mi aveva detto una volta: guardando il mare, sentiamo di poter afferrare una Parte dell'infinito.

Facevo ogni giorno lunghe passeggiate e nuotate: l'isola rocciosa di Helgoland non aveva altro da offrirmi che mi distraesse dal mio problema. Nel giro di pochi giorni feci progressi rapidissimi, e mi sbarazzai di quella zavorra matematica che sempre opprime gli inizi di tentativi del genere, giungendo a una più semplice formulazione del problema. Pochi giorni ancora ed ebbi chiarissimo ciò che si doveva fare se si voleva costruire la fisica atomica solo su grandezze osservabili: occorreva modificare a fondo il concetto di condizioni quantiche avanzato da Bohr e da Sommerfeld. Era inoltre ovvio che in questo modo si poneva un limite essenziale alla teoria. Mi resa quindi conto che non potevo sapere se la nuova formulazione matematica si sarebbe potuta applicare senza contraddizioni. In particolare non potevo sapere se il principio di conservazione dell'energia avrebbe mantenuto la sua validità, e sapevo



Heisenberg cambia la priorità sulle cose da indagare e aderisce all'idea di "osservabili"



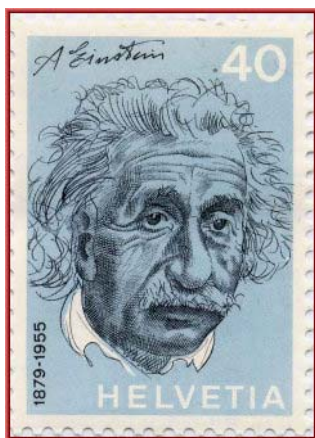


benissimo che la validità della mia formulazione dipendeva in tutto e per tutto dalla validità di questo principio.

A parte ciò, però, i miei calcoli confermavano che la nuova formulazione era coerente. Mi dedicai quindi a dimostrare che la legge della conservazione dell'energia era rispettata e finalmente una sera mi accorsi che ero ormai pronto a determinare i singoli elementi della tabella dell'energia, o, come diremmo oggi della matrice dell'energia, mediante una serie di calcoli che oggi sarebbe ritenuta estremamente goffa. Calcolai i primi tre termini e con mia grande eccitazione, trovai che rispettavano il principio di conservazione dell'energia. A questo punto incominciai a fare errori di aritmetica l'uno dopo l'altro e, per completare i calcoli, andai avanti a lavorare sino alle tre di mattina. Avevo ora i risultati finali dai quali risultava che il principio di conservazione era sempre rispettato. Non dubitavo più adesso della coerenza e della validità matematica della meccanica quantistica di nuovo tipo che i miei calcoli prospettavano. La mia prima reazione fu di sgomento: ebbi l'impressione di osservare, oltre la superficie dei fenomeni atomici, un livello più interno di misteriosa bellezza. Il pensiero che ora mi sarebbe toccato di indagare più a fondo questo nuovo mondo matematico mi dava le vertigini. Ero troppo eccitato per andare a dormire e così uscii che appena albeggiava e mi arrampicai su un picco roccioso a strapiombo sul mare che da parecchi giorni desideravo scalare. Non incontrai particolari difficoltà e vidi sorgere il sole dalla vetta.



Il lavoro creativo, le ansie e la natura



Einstein scienziato e filosofo è incuriosito da questo giovanotto

Quella notte a Helgoland ebbi solo una visione fugace, come quella volta che, tra la nebbia, vidi per un attimo la parete rocciosa illuminata dal sole; però quando riferii le mie conclusioni a Pauli, il mio critico più severo, egli mi incoraggiò a proseguire lungo la via che avevo appena imboccato. A Gottinga, Max Born e Pascual Jordan cominciarono a esaminare le nuove possibilità; a Cambridge il giovane matematico Paul Dirac elaborò metodi suoi per risolvere i nuovi problemi. Bastarono pochi mesi perché gli sforzi congiunti di queste grandi menti portassero all'elaborazione di un modello matematico coerente che prometteva di abbracciare tutti gli aspetti più disparati della fisica atomica. Qui però non farò cenno all'intensissimo lavoro di quei mesi; riferirò piuttosto una conversazione che ebbi con Einstein dopo una conferenza sulla nuova meccanica quantistica tenuta a Berlino.

L'Università di Berlino era allora considerata la roccaforte della fisica in Germania: vi lavoravano scienziati famosi come Planck, Einstein, von Laue, Nernst. Qui Planck aveva elaborato la teoria dei quanti, che Rubens aveva confermato sperimentalmente misurando la radiazione termica; qui Einstein aveva formulato, nel 1916, la teoria della relatività generale e della gravitazione. Cuore della vita scientifica era il cosiddetto Colloquio di Fisica, inaugurato probabilmente da Helmholtz a cui partecipavano di solito tutti gli studiosi del Dipartimento di Fisica. Nella primavera del 1926 ricevetti l'invito a tenere una relazione di fronte a questo illustre consesso sulla nuova meccanica quantistica. Era la prima volta che avevo occasione di rivolgermi a scienziati tanto famosi, e quindi badai bene a illustrare con la massima esattezza i concetti e i fondamenti matematici di una teoria così poco convenzionale. Evidentemente Einstein trovò qualche motivo d'interesse nella mia relazione perché mi chiese di accompagnarlo a casa, in modo da potergli esporre più esaurientemente le mie idee.

Per strada mi chiese di parlargli dei miei studi e delle ricerche che avevo compiuto in precedenza. Appena fummo a casa sua affrontò immediatamente le implicazioni filosofiche della mia teoria. "Trovo molto strano quanto ci ha detto oggi. Lei ammette l'esistenza degli elettroni nell'atomo, e in questo ha molto probabilmente ragione; però non ne prende in considerazione le orbite sebbene il moto degli elettroni sia perfettamente visibile nella camera a nebbia. Vorrei che mi spiegasse meglio i motivi che l'hanno spinto ad abbracciare questa bizzarra posizione."

"Non siamo in grado di osservare le orbite degli elettroni", credo di aver risposto. "Osserviamo invece la radiazione emessa dall'atomo, in base alla quale deduciamo le frequenze e le ampiezze degli elettroni. Del resto, anche secondo la fisica classica le ampiezze e i numeri d'onda rappresentavano le orbite degli elettroni. Ora, giacché

una buona teoria deve fondarsi su grandezze direttamente osservabili, ho ritenuto più corretto limitarmi ad esse e basarmi sull'ipotesi, poi verificata, che rappresentino le orbite degli elettroni."

"Ma dice sul serio?" ribatté Einstein incredulo. "Dunque, secondo lei, una teoria deve basarsi esclusivamente su grandezze osservabili?"

"Ma... così ha fatto anche lei con la teoria della relatività", dissi con una certa sorpresa. "Lei stesso ha affermato che non ha senso parlare di tempo assoluto proprio perché il tempo assoluto non è osservabile; lei stesso ha detto che solo il tempo indicato dall'orologio, misurato in un sistema sia in moto sia in quiete, ha valore per la determinazione del tempo."

"Può essere che abbia detto una cosa del genere", ammise Einstein. "Ma, comunque sia, non ha senso. Forse potrei esprimermi in modo meno reciso dicendo che i dati osservativi hanno un certo valore euristico; ma in linea di principio è sbagliatissimo tentare di fondare una teoria esclusivamente su grandezze osservabili. Anzi, in realtà avviene esattamente il contrario: è la teoria che decide cosa dobbiamo osservare. Lei si renderà certo conto che il processo d'osservazione è cosa estremamente complessa. Il fenomeno in osservazione provoca certi eventi nell'apparecchiatura di misurazione che, in seguito ad altri processi, induce alla fine alcune impressioni sensibili, e contribuisce a stabilizzare gli effetti del fenomeno osservato nella nostra coscienza. Lungo tutto l'itinerario che va dal fenomeno all'individuazione di questo nella coscienza dobbiamo sempre saper dire come funziona il reale: insomma, dobbiamo conoscere le leggi naturali se non altro da un punto di vista empirico prima di poter affermare che abbiamo osservato qualche cosa. Solo la teoria, cioè la conoscenza delle leggi naturali, ci permette di dedurre quali siano i fenomeni che determinano le nostre impressioni sensibili. Diciamo che abbiamo osservato qualche cosa di nuovo: in realtà dovremmo dire che, sebbene stiamo per formulare nuove leggi naturali che non concordano con quelle già note, ipotizziamo tuttavia che le leggi esistenti — quelle in base alle quali si svolge l'itinerario dal fenomeno alla coscienza — funzionano in modo tale per cui possiamo affidarci ad esse, e quindi possiamo parlare di 'osservazione'.

"Nella teoria della relatività, ad esempio, noi presupponiamo che, anche nel sistema di riferimento mobile, i raggi luminosi che dall'orologio colpiscono l'occhio dell'osservatore si comportino secondo le modalità che abbiamo sempre previsto. E nella sua teoria lei dà per scontato che tutto il meccanismo della trasmissione luminosa, dall'atomo vibrante allo spettroscopio o all'occhio, funzioni come si è sempre ipotizzato, cioè sostanzialmente secondo le leggi di Maxwell. Ma se ciò non fosse vero, è evidente che le grandezze che lei chiama osservabili non sarebbero osservabili affatto. Dunque, la sua affermazione secondo cui prende in considerazione solo grandezze osservabili non è in realtà altro che un'ipotesi relativa a una proprietà della teoria che cerca di formulare. Lei in realtà ipotizza che la sua teoria non è in contrasto con i fenomeni della radiazione così come sono stati finora descritti. Avrà magari ragione, ma non può esserne certo."

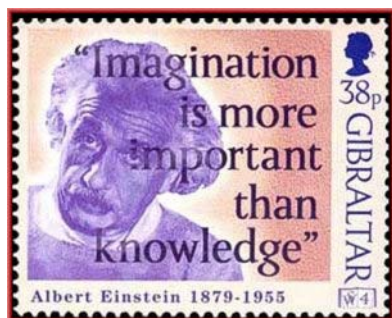
Gli argomenti di Einstein mi sembrarono validissimi, ma certo non mi aspettavo una reazione del genere. "L'idea secondo cui una buona teoria è semplicemente un condensato di osservazioni compiute secondo il principio dell'economia del pensiero — dissi allora — risale sicuramente a Mach. Si è detto da più parti, infatti, che la sua teoria della relatività s'impenna su concetti sviluppati appunto da Mach. Però quanto mi dice adesso mi sembra orientato in tutt'altra direzione. Che conclusioni devo trarre? O, meglio, che conclusioni ne trae lei stesso?"

"È una storia lunga che, se ha tempo, possiamo ripercorrere insieme. Il concetto di economia del pensiero avanzato da Mach è probabilmente almeno in parte fondato, ma mi sembra un po' semplicistico. Vediamone prima gli argomenti a favore. È evidente che percepiamo il mondo per mezzo degli organi di senso. Il bambino impara a parlare e a pensare proprio perché è possibile descrivere impressioni sensibili complesse, ma in qualche modo tra loro imparéntate mediante un'unica parola: la



Costruzioni teoriche e grandezze osservabili





Ovviamente se si parla del rapporto tra teoria ed esperienza entra in scena Mach

parola 'palla', ad esempio. Il bambino impara il processo dagli adulti, con cui può in questo modo comunicare. In altre parole, possiamo dire che la formazione della parola 'palla' e quindi del concetto corrispondente si fonda su un principio di economia del pensiero che permette al bambino di collegare in modo semplice impressioni sensibili molto complesse. Mach non affronta neppure la questione dei meccanismi mentali e fisici presenti nell'uomo e nel bambino che permettono la comunicazione. Sappiamo che negli animali l'attività comunicativa si svolge in modo molto meno efficiente, ma non è il caso di addentrarci adesso in quest'altro aspetto della questione. Ora, Mach ritiene che le teorie scientifiche anche di grande complessità si formino in modo analogo: cerchiamo di dare un ordine ai fenomeni, di ridurli a una forma via via più semplice finché siamo in grado di descriverne un gran numero ricorrendo ad alcuni semplici concetti.

"Mi sembra una posizione molto ragionevole, ma mi chiedo in che senso si applica in questo caso il principio dell'economia del pensiero. Si tratta di economia psicologica o logica? In altre parole, affrontiamo l'aspetto soggettivo o quello oggettivo dei fenomeni? Quando il bambino formula il concetto di 'palla' introduce nel reale una semplificazione puramente psicologica — nel senso che egli associa complesse impressioni sensibili per mezzo di questo concetto semplice — oppure la palla ha una sua esistenza reale? Mach avrebbe risposto che i due enunciati esprimono lo stesso fatto. Tuttavia, non potrei accettare una simile risposta. In primo luogo, anche l'enunciato 'la palla ha una sua esistenza reale' ha impliciti altri enunciati relativi a possibili impressioni sensibili che possono darsi in futuro. Ora, è evidente che le possibilità e le aspettative relative al futuro hanno gran peso nella realtà degli uomini, e quindi non è possibile ignorarle. Inoltre, occorre tener presente che il pensiero umano si fonda essenzialmente sulla capacità di trarre inferenze dalle impressioni sensibili. Quindi, se volessimo limitare il nostro discorso solo alle impressioni sensibili, dovremmo fare a meno della lingua e del pensiero. In altre parole: Mach non dà peso a sufficienza al fatto che il mondo ha una sua esistenza reale, e che le impressioni sensibili si fondano su qualcosa di oggettivo.

"Non ho alcuna intenzione di farmi sostenitore di un realismo volgare e semplicistico. So benissimo che si tratta di questioni oltremodo complesse: proprio per questo il concetto di osservazione avanzato da Mach mi sembra troppo semplicistico. Egli ritiene di sapere perfettamente che cosa vuol dire 'osservare', e pensa che ciò lo esoneri dal dover fare una distinzione tra fenomeni 'oggettivi' e fenomeni 'soggettivi'. Non mi meraviglia che il principio da lui avanzato abbia preso un nome che puzza di commerciale: 'economia del pensiero'.

Il suo concetto di semplicità è, a parer mio, eccessivamente soggettivo. In effetti, anche la semplicità delle leggi naturali è un fatto oggettivo: quindi uno schema concettuale corretto deve temperare l'aspetto soggettivo di questa semplicità con quello oggettivo. Si tratta di un compito difficilissimo, naturalmente.

"Ma, tornando alla sua relazione, ho il sospetto che proprio per i motivi di cui ho detto in precedenza la sua teoria un giorno o l'altro la metterà nei guai. Ora mi spiego. Non ha mutato affatto il concetto di osservazione, ma si direbbe che il consueto linguaggio descrittivo delle scienze vada ancora benissimo. Ma se davvero fosse così dovrebbe dire: nella camera a nebbia possiamo osservare la traiettoria degli elettroni; ma nel contempo lei sostiene che le orbite degli elettroni non esistono. Ciò è assurdo, perché non ha senso dire che gli elettroni non orbitano intorno al nucleo dopo aver ristretto lo spazio attraverso il quale si muove l'elettrone."

Cercai di difendere la nuova meccanica quantistica. "Al momento non ho la minima idea di quale linguaggio occorra utilizzare per descrivere i processi atomici. È vero che disponiamo di un linguaggio matematico: abbiamo, cioè, un modello matematico per determinare gli stati stazionari dell'atomo o le probabilità di transizione da uno stato all'altro; però non sappiamo in che modo questo linguaggio è collegato a quello della fisica classica. E naturalmente è indispensabile conoscere questo collegamento se vogliamo applicare la teoria a livello sperimentale. Infatti, quando si scende sul

terreno sperimentale ricorriamo invariabilmente al linguaggio tradizionale. Quindi non possiamo affermare che abbiamo veramente 'capito' la meccanica quantistica. Ipotizziamo che il modello matematico funzioni, ma ancora non abbiamo stabilito un collegamento con il linguaggio tradizionale. E finché questo collegamento non sarà stato stabilito, non sarà possibile parlare della traiettoria dell'elettrone rivelata dalla camera a nebbia senza incappare in contraddizioni interne al nostro stesso discorso. Ecco perché ritengo che sia ancora troppo presto per risolvere i problemi che ha sollevato."

"Beh, sì, effettivamente è così", rispose Einstein. "Ne riparleremo tra qualche anno. Vorrei però farle un'altra domanda. Dalla sua relazione si direbbe che la teoria dei quanti ha due aspetti. Da un lato, come ha fatto giustamente notare Bohr, la teoria spiega la stabilità degli atomi, e perché le stesse forme si mantengono nel tempo. Dall'altro spiega anche la discontinuità e l'incostanza della natura, che osserviamo distintamente guardando lo schermo di un contatore a scintillazione. Questi due aspetti sono evidentemente collegati tra loro, e nella sua meccanica quantistica lei deve tener conto di entrambi: ad esempio, quando affronta il problema dell'emissione di luce da parte degli atomi. Lei è in grado di calcolare i valori energetici discreti degli stati stazionari: la sua teoria può quindi dar conto della stabilità di certe forme che non si mutano continuamente l'una nell'altra, ma differiscono per quantità finite e si direbbero capaci di riformarsi continuamente. Ma che cosa avviene durante l'emissione luminosa? Come sa, ho avanzato l'ipotesi che, quando un atomo passa improvvisamente da un valore energetico stazionario a quello immediatamente inferiore, l'energia in più viene emessa in forma di pacchetto: si tratta del cosiddetto quanto di luce. Abbiamo dunque, in questo caso, un esempio di discontinuità particolarmente evidente. Ritiene corretto il modo in cui descrivo il fenomeno? Oppure pensa di poter descrivere il passaggio da uno stato stazionario all'altro in modo più preciso? "

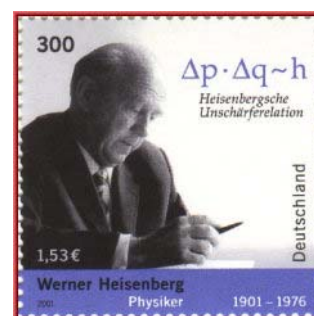
Credo di aver risposto pressappoco così: "Ho imparato da Bohr che non si può descrivere questo processo ricorrendo ai concetti tradizionali, cioè collocandolo nel tempo e nello spazio. Dicendo ciò, naturalmente abbiamo detto molto poco: in realtà ci siamo limitati ad ammettere la nostra ignoranza. Per adesso non saprei come considerare il concetto di quanto di luce. Vi è d'altra parte un elemento di continuità — sto pensando ad esempio ai fenomeni d'interferenza - che si può descrivere con maggior semplicità ricorrendo alla teoria ondulatoria della luce. Naturalmente lei ha tutte le ragioni per chiedersi se la meccanica quantistica abbia o meno qualcosa di nuovo da dire su questi così complessi problemi. Credo sia lecito sperare nel futuro.

"Penso, ad esempio, che potremmo avere risultati interessanti se studiasimo le fluttuazioni d'energia di un atomo nel corso di reazioni con altri atomi o con un campo di radiazione. Se l'energia cambiasse in modo discontinuo, come previsto dalla sua teoria sui quanti di luce, la fluttuazione - o per meglio dire la fluttuazione quadratica media - sarebbe maggiore di quanto non avverrebbe se l'energia cambiasse in modo continuo. La mia impressione è che la meccanica quantistica indicherebbe un valore superiore, confermando quindi la discontinuità. D'altro canto va preso in considerazione anche l'elemento di continuità che appare nei fenomeni d'interferenza. Potremmo forse paragonare il passaggio da uno stato stazionario all'altro a una dissolvenza cinematografica. Il cambiamento non è improvviso: un fotogramma svanisce gradualmente mentre nel contempo l'altro si fa più preciso di modo che, per un istante, entrambi i fotogrammi sono sfocati e non è possibile riconoscere l'uno dall'altro. Può darsi che, allo stesso modo, esista uno stato intermedio in cui non è possibile determinare se un atomo si trova nello stato superiore o in quello inferiore."

"Guardi che sta camminando su ghiaccio molto sottile", ammonì Einstein. "Infatti ora lei sta parlando di ciò che sa sulla natura e non di ciò che fa la natura, cosa di cui deve occuparsi la scienza. Infatti, potrebbe darsi che lei e io sappiamo, sulla natura, cose molto diverse. Ma a chi potrebbe interessare questo? Forse a lei e me soltanto: a tutti gli altri la cosa potrebbe risultare del tutto indifferente. In altre parole: se la sua



Cosa succede all'atomo durante la fase in cui l'elettrone salta?



teoria è corretta, bisogna che prima o poi mi dica che cosa fa l'atomo quando passa da uno stato stazionario al successivo."

"Forse ha ragione", credo risposi. "Tuttavia ho l'impressione che lei attribuisca alle parole un senso un po' troppo stretto. Comunque, riconosco che tutto ciò che potrei dire in questo momento suonerebbe pochissimo convincente. Siamo dunque a vedere cosa ci dirà la fisica atomica."



Vidi che Einstein era perplesso. "Ma come può aver tanta fede nella sua teoria quando tanti problemi fondamentali rimangono completamente irrisolti?"

Credo di aver meditato piuttosto a lungo prima di rispondere. "Sono convinto, come lei del resto, che la semplicità delle leggi naturali abbia un carattere oggettivo e che non sia solo il risultato dell'economia del pensiero. Se la natura ci porta a forme matematiche di grande semplicità e bellezza – e con il termine 'forme' intendo indicare sistemi coerenti di ipotesi, di assiomi eccetera – che ci erano sconosciute in precedenza, perché non ritenerle vere, nel senso che rivelano aspetti della natura realmente esistenti? Può darsi che queste forme derivino anche da una nostra relazione soggettiva con la natura che cioè riflettano elementi dell'economia del nostro pensiero. Ma solo il fatto che mai avremmo potuto elaborare queste forme con le nostre forze soltanto, ma che ci sono state rivelate dalla natura, indica che esse fanno parte della realtà e non solo del nostro pensiero sulla realtà.

«Si può obiettare che, parlando di semplicità e bellezza, faccio della verità una questione di estetica; e devo francamente ammettere che ammiro moltissimo la semplicità e la bellezza dei modelli matematici che la natura ci offre. Credo che questa emozione non sia ignota nemmeno a lei: anche lei avrà sperimentato la semplicità e l'assolutezza quasi spaventevoli dei rapporti che di colpo la natura dispiega sotto i nostri occhi e che ci giungono del tutto inaspettati. Si tratta di un'emozione diversa dalla gioia che proviamo per aver eseguito in modo particolarmente brillante un certo compito. Questo è uno dei motivi per cui spero che i problemi di cui abbiamo oggi parlato avranno prima o poi una soluzione. Nel caso particolare, la semplicità del modello matematico comporta anche la possibilità di concepire molti esperimenti i cui risultati sono prevedibili per mezzo della teoria. E se gli esperimenti dovessero confermare le previsioni, sarà fuor di dubbio che la teoria rispecchia esattamente la natura di questo campo specifico.»

"La verifica sperimentale - convenne Einstein - è naturalmente un requisito fondamentale per stabilire la validità di una teoria. Tenga però presente che non si può verificare sperimentalmente tutto: ecco perché mi sembra importante il suo concetto di semplicità. Questo però non significa che condivida fino in fondo il concetto di semplicità delle leggi naturali."

La semplicità e la bellezza, un terreno su cui Einstein ed Heisenberg concordano

## 6.7 Indice analitico

- basse temperature*: degenerazione di un gas - 12
- Bohr*: Niels; complementarietà - 3
- confinamento* - 9
- costante di Planck* - 4
- determinismo meccanicista* - 1
- energia cinetica nulla*: perdita di significato - 9
- errore piccolo a piacere* - 1
- Esercizio*: accuratezza nelle coordinate di un oggetto macroscopico - 5; accuratezza nelle coordinate di un oggetto microscopico in ambito macroscopico - 6; accuratezza nelle coordinate di un oggetto microscopico su dimensioni microscopiche - 6; energia necessaria ad un elettrone per penetrare in un nucleo - 15; indeterminazioni per un elettrone, un protone e una goccia d'acqua confinati - 14; stima di velocità media e quantità di moto di origine quantistica per un elettrone in un atomo - 10; stima di velocità media e quantità di moto di origine quantistica per una moneta - 10; vincoli dimensionali all'orbita di un elettrone - 14
- gas di elettroni*: degenera sempre - 13
- gas perfetto*: limitazioni della legge - 13
- Heisenberg*: Einstein; citazione - 16; principio di indeterminazione - 1; Werner - 4
- interpretazione di Copenaghen* - 8
- Lagrange*: Joseph Louis - 1
- Laplace*: Pierre Simon - 1
- meccanica razionale* - 1
- Poincaré*: Henry - 1; teorema sulle condizioni iniziali - 1
- primo raggio di Bohr* - 14
- principio di indeterminazione*: ambito macroscopico e microscopico - 7; enunciato - 4
- problema della dinamica*: soluzione classica - 4
- radar* - 2
- superconducibilità* - 12
- superfluidità* - 12
- temperatura di degenerazione* - 12
- termodinamica*: II principio - 12
- termodinamica statistica* - 1
- velocità istantanea*: variante del radar - 2
- vibrazioni del punto zero* - 13
- zero assoluto* - 12

