

V.1. Le forze elettriche

1.1 Fenomeni elettrici elementari

1.1.1 FATTI TRATTI DALLA ESPERIENZA QUOTIDIANA

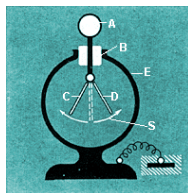
Il mondo in cui viviamo è dominato dalla elettricità ed esistono anche fenomeni di esperienza comune nei quali si evidenziano forze di natura diversa da quelle elastiche, d'attrito o d'urto su una questione essenziale: sono forze sia attrattive sia repulsive.

Fanno però parte della esperienza quotidiana la elettrizzazione e relativa repulsione dei capelli asciutti e spazzolati, la difficoltà nel separare fogli di carta e superfici plastiche che in giornate particolarmente secche tendono a rimanere incollate e a riattaccarsi dopo essere state separate, fenomeni di attrazione e repulsione nelle vicinanze di uno schermo Tv o del monitor di un computer.

Teniamo presente però che, al di là del come ci appaiono sul piano sensoriale, quasi tutte le proprietà elementari della materia hanno origine elettrica perché sono le forze di origine elettrica che tengono insieme gli atomi e che determinano le interazioni tra essi a formare i solidi ed i liquidi.

Per evidenziare i fenomeni elettrici sul piano qualitativo è stato storicamente utilizzato uno strumento (*l'elettroscopio*) che, opportunamente perfezionato, è diventato uno strumento quantitativo per la misura di una importante grandezza elettrica: *l'elettrometro come misuratore del potenziale*.

Quando l'elettroscopio viene posto a contatto con un corpo elettricamente carico le foglie dell'elettroscopio divergono e rimangono aperte. Se il pomello A viene toccato con le mani le foglie dell'elettroscopio si riportano in posizione verticale. Per ora non indagheremo il meccanismo di funzionamento e utilizzeremo l'elettroscopio come indicatore dello stato di elettrizzazione.



L'elettroscopio a foglie

A – sferetta metallica; B – supporto materia plastica; C,D – foglie metalliche sottili; E – contenitore vetro e metallo

L'elettroscopio funziona sull'equilibrio tra la forza elettrica repulsiva agente sulle foglie e la forza peso

1.1.2 L'ELETTRIZZAZIONE PER STROFINIO

Da tempi molto remoti si è osservato che, strofinandole tra loro, molte sostanze acquistano la capacità di attirarsi o respingersi e, se le si mette a contatto con l'elettroscopio, le foglie dello strumento divergono.

L'esperienza dello strofinare non è in realtà fondamentale; ciò che conta è il contatto tra corpi eterogenei e lo strofinio serve solo a migliorare il contatto stesso. Quando due corpi eterogenei vengono posti a contatto alla superficie di separazione avvengono sempre trasferimenti di elettroni¹ dall'uno all'altro dei due corpi.

Il processo è basato sulla diffusione degli elettroni e sulla loro tendenza a ripristinare una sorta di equilibrio tra le rispettive concentrazioni: si tratta di qualcosa di simile a quello che fanno due gas inizialmente separati se vengono posti in uno stesso contenitore. Il fenomeno quantistico



quando il gatto strofina il vetro: il primo diventa negativo e il secondo positivo; una tipica attrezzatura da laboratorio per la elettrizzazione da strofinio: panni, aste in vetro e plastica, elettroscopio

¹ L'elettrone è uno dei componenti fondamentali della materia ed è anche il granulo elementare di elettricità. Dell'elettrone ci occuperemo molto a fondo nei prossimi capitoli.

coinvolto è noto come *effetto tunnel* ed è lo stesso su cui funzionano i moderni *nanoscopi* che hanno raggiunto risoluzioni inferiori a 10^{-9} m.

Si possono così mettere in ordine le diverse sostanze a seconda della maggiore o minore tendenza a perdere elettroni e costruire una tabella come quella qui a fianco rappresentata detta tabella di *triboelettricità*². Due materiali presenti nella tabella producono una maggiore elettrizzazione reciproca quanto più sono distanti tra loro nella tabella.

Nell'eseguire l'esperienza della elettrizzazione per strofinio si osserva che mentre sostanze quali il legno, il vetro, la plastica, il cuoio, la gomma si caricano agevolmente, altre sostanze quali i metalli richiedono, per evidenziare l'elettrizzazione, di essere maneggiate attraverso un manico fatto da una delle sostanze precedenti (ciò ci porterà alla distinzione tra isolanti e conduttori).

1.1.3 ELETTRICITÀ POSITIVA E NEGATIVA

Nell'eseguire l'esperienza della elettrizzazione per strofinio si osserva che i due corpi elettrizzati per strofinio, una volta allontanati, tendono ad attirarsi; si osserva anche che i corpi che sono stati strofinati si possono dividere tra loro in due categorie A e B:

- i corpi di tipo A si respingono tra loro e la stessa cosa fanno i corpi di tipo B
- ogni corpo di tipo A attira ogni corpo di tipo B
- corpi omogenei appartengono sempre ad una stessa classe

Questi fenomeni hanno portato ad assegnare alle due classi una valenza legata alla elettricità: le sostanze di tipo A, cui appartiene il vetro, sono state associate alla **elettricità vetrosa** (o positiva); le sostanze di tipo B, cui appartiene l'ambra³ sono state associate all'**elettricità resinosa** (o negativa).

Oggi sappiamo che l'elettrizzazione di un corpo solido è sempre dovuta a perdita o acquisto di elettroni (carichi negativamente) e pertanto quando un corpo è carico positivamente vuol dire che ha perso elettroni e non che ha acquistato cariche positive.

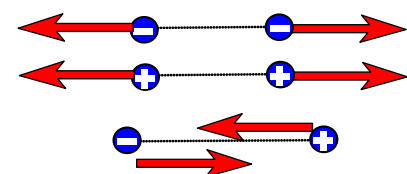
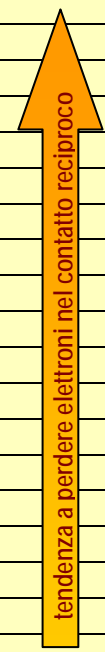
Alla luce di quanto indicato nella tabella sulla triboelettricità osserviamo che non ha senso associare in maniera assoluta una sostanza ad un determinato tipo di elettricità; infatti il vetro si carica positivamente se viene strofinato con la seta o con il pelo di gatto (che ricevono gli elettroni ceduti dal vetro e diventano negativi), ma lo stesso vetro strofinato con l'amianto (Franklin che introdusse la distinzione non lo sapeva) si carica negativamente.

Le sostanze che si trovano alla estremità inferiore della tabella sono tutte le resine plastiche che, a partire dagli anni 60 del 900, hanno invaso ogni ambiente e momento della nostra vita. Così sono comparse nuove, semplici, molteplici e spesso fastidiose esperienze di elettrizzazione.

² Dal greco *tribein* (sfregare)

³ Resina naturale derivata dalla fossilizzazione delle resine appiccicose delle conifere e che ha dato il nome all'elettricità e poi all'elettrone (dal greco *elektron*).

Amianto
Pelo di coniglio
Vetro
Capelli
Nylon
Mica
Lana
Quarzo
Pelo di gatto
Piombo
Seta
Pelle umana
Alluminio
Carta
Cotone
Acciaio
Legno
Ambra
Rame
Ottone
Argento
Oro
Gomma
Poliestere
Polistirolo
Poliuretano



sulla base della triboelettricità si possono definire la elettricità positiva e negativa ed individuare le prime leggi che riguardano l'interazione tra esse



B. Franklin introduce la distinzione tra elettricità positiva (**vetrosa**) e negativa (**resinosa**). Lo stesso Franklin avanza le prime ipotesi sulla dipendenza della forza dall'inverso del quadrato della distanza

1.1.4 CONDUTTORI ED ISOLANTI

Si è già osservato che i metalli si caricano per strofinio solo se sono impugnati attraverso un manico di vetro o di resina. Si vede anche che, mentre un pezzo di vetro strofinato possiede proprietà elettriche solo nella zona in cui è stato strofinato, il metallo strofinato ridistribuisce immediatamente la proprietà elettrica sull'intero corpo.

Questo fatto ci porta a stabilire una ulteriore classificazione delle sostanze in due classi: conduttori ed isolanti. ⁽⁴⁾

Chiamiamo *isolanti* quei materiali caratterizzati da elevata difficoltà nello spostamento delle cariche elettriche e *conduttori* quelli nei quali le cariche elettriche (con o senza trasporto di materia) si muovono in maniera relativamente libera.

Negli isolanti, quando si deposita su di essi della carica elettrica, tale carica rimane tendenzialmente collocata dove è stata posta. Sono isolanti quasi tutti i materiali organici ed inorganici allo stato solido (con la eccezione dei metalli), la maggioranza dei liquidi (con la eccezione delle soluzioni acide, basiche o saline) e i gas in condizioni ordinarie.

Nei conduttori, quando si deposita una carica elettrica, tale carica si ridistribuisce fino al raggiungimento di un particolare tipo di equilibrio le cui caratteristiche saranno analizzate nel prossimo capitolo.

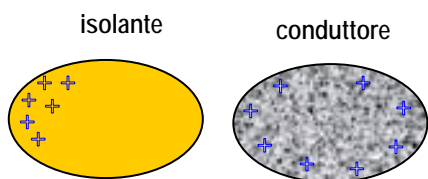
Siamo ora in grado di spiegare come funziona l'elettroscopio: quando un corpo carico viene posto a contatto con la sfera metallica una parte della carica si trasferisce sull'elettroscopio e pertanto le due foglie, che risultano cariche allo stesso modo si respingono. Si spiega anche perché basta toccare la sfera per scaricare l'elettroscopio: il corpo umano e la terra sono dei conduttori e quando si tocca l'elettroscopio la carica si ridistribuisce su un conduttore molto più grande sostanzialmente annullandosi.

Anche se siamo abituati a pensare agli isolanti come ai nemici della elettricità è singolare sul piano storico il fatto che i materiali solidi che oggi chiamiamo isolanti siano stati chiamati storicamente *materiali elettrici* perché è dal loro contatto che si osservarono le prime forme di elettricità.

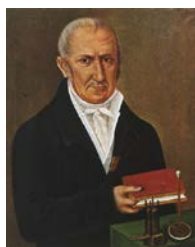
Per esempio, Alessandro Volta nella lettera del 20/3/1800 al Presidente della Royal Society sir Joseph Banks in cui descrive l'invenzione della pila si esprime così a proposito del fatto che la sua nuova apparecchiatura non utilizza i comuni materiali elettrici (gli isolanti) ma i conduttori: *“invece di consistere come le bottiglie o le batterie elettriche ordinarie, in una o più lamine isolanti, in strati sottili di quei corpi reputati essere i soli elettrici, armate di conduttori o corpi così detti non elettrici...”* ⁽⁵⁾

L'elettricità può anche essere trasferita per contatto di corpi carichi ma questo tipo di elettrizzazione (che determina una redistribuzione di carica) funziona bene solo con i conduttori data la tendenza degli isolanti a mantenere le cariche non equilibrate esattamente dove sono state create.

Pertanto, mentre è piuttosto semplice scaricare un conduttore (basta porlo a contatto con un conduttore scarico molto più grande, per esem-



dopo lo strofinio la carica dell'isolante rimane dove è avvenuto lo strofinio invece nei conduttori la carica si ridistribuisce sulla intera superficie



Alessandro Volta

una curiosità: l'elettricità nasce associata agli *isolanti* che sono chiamati *corpi elettrici* mentre i *conduttori* sono detti *non elettrici*



⁴ Esiste anche una categoria intermedia di elementi del IV gruppo detti *semiconduttori* (carbonio, silicio, germanio) che si sono rivelati strategici a partire dagli anni 60 del XX secolo per lo sviluppo della moderna elettronica e microelettronica. Il termine *semiconduttori* sta ad indicare un comportamento intermedio tra isolante e conduttore.

⁵ Opere scelte di A. Volta ed. Utet pag. 514.

pio la terra), è molto più arduo scaricare un isolante ed è altrettanto arduo spostare le cariche equilibrate sempre presenti su di esso.

Per questa ragione quando si compiono esperimenti di elettrostatica che comportino l'utilizzo di isolanti bisogna prestare molta attenzione ai dettagli: se si maneggia un isolante occorre controllare che non sia già carico perché basta la presenza di cariche residue per determinare risultati inattesi e insensati.

1.2 La legge di Coulomb

1.2.1 LA CARICA ELETTRICA E LA SUA CONSERVAZIONE

La grandezza fisica che descrive la capacità dei corpi di evidenziare interazioni di tipo elettrico e che determina la intensità delle forze elettriche è detta *carica elettrica* e il fenomeno di redistribuzione della carica sui corpi è detto *elettrizzazione*.

La carica elettrica è già presente in natura come costituente elementare della materia. Essa si presenta sempre in granuli elementari sull'elettrone e sul protone con cariche identiche e di segno opposto. Inoltre in tutti i fenomeni associati con la redistribuzione di carica elettrica in un sistema isolato la somma algebrica delle cariche elettriche rimane costante.

La carica elettrica, per quanto ne sappiamo, a differenza della massa è indistruttibile. Questa *legge di conservazione della carica elettrica* costituisce una delle grandi leggi della fisica ampiamente confermata dall'esperienza e posta addirittura alla base delle modalità di costruzione delle nuove teorie.

1.2.2 LA BILANCIA DI TORSIONE DI COULOMB

Lo studio della elettricità ha avuto luogo nel corso del 700 in un contesto in cui non si aveva alcuna conoscenza sulla sua origine microscopica e si pensava piuttosto ad una sostanza fluida ma il modello di interazione gravitazionale ha comunque spinto a ricercare leggi di interazione tra cariche puntiformi.

Nel 1785, usando una bilancia di torsione, lo scienziato francese Charles Augustin de Coulomb scoprì per via sperimentale la legge di interazione delle cariche puntiformi.

Le ricerche di Coulomb si collocano a fine 700 quando si sta passando dalla fase in cui l'elettricità è una sorta di gioco da salotto (in cui si cercano ed evidenziano le sensazioni prodotte dalla elettrizzazione sul corpo umano) ad uno studio più sistematico e dunque quantitativo.

Le forze elettriche di interazione tra corpi estesi dipendono, in maniera complessa, dalla forma dei corpi e dalla distribuzione della carica su di essi e pertanto non esiste una legge semplice e di natura generale; tale legge si può invece enunciare nel caso di *cariche puntiformi*.

Il concetto di carica puntiforme è una astrazione, fatta per ragioni di convenienza, simile a quella di punto materiale. Dal punto di vista operativo diremo che una carica puntiforme è la carica di un corpo le cui dimensioni siano piccole rispetto a tutte le altre distanze coinvolte.

Nella bilancia di Coulomb un filo molto sottile di argento a regge una sbarretta b isolata con ceralacca che reca ad un estremo una sferetta di sambuco c e all'altro un contrappeso d . La parte superiore del filo è collegata ad una vite micrometrica che consente una lettura accurata degli angoli. Una seconda sfera c' identica a c viene fissata rigidamente ad un sostegno e . Il tutto viene racchiuso in un cilindro di vetro che assicura la protezione contro correnti d'aria e consente una lettura delle distanze angolari tra le due sferette.

Coulomb aveva effettuato precedenti studi sulle caratteristiche di elasticità dei fili e ciò gli consentiva di ricondurre le distanze tra equipaggio fisso e mobile alle forze corrispondenti.

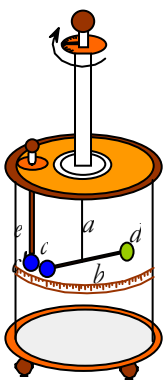
Il principio di conservazione della carica: la carica totale di un sistema isolato è costante



fine 700: dai giochi da salotto rappresentati in questa stampa con Coulomb si passa ad una visione quantitativa dei fenomeni elettrici



Charles Augustin de Coulomb 1736-1806 scopre la prima legge quantitativa sulla interazione tra cariche elettriche



Schema di bilancia di torsione e modellino ottocentesco della stessa; la bilancia opera solo con cariche dello stesso segno perché è in grado di misurare solo forze repulsive

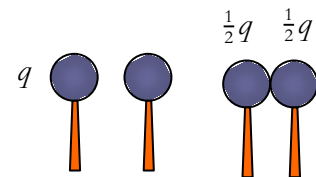
Egli descrive così il suo esperimento: *Si carichi un piccolo conduttore a spillo conficcato in una barretta di ceralacca e lo si inserisca nella apertura dello strumento in modo che la testa dello spillo vada a toccare la sferetta c che, a sua volta, tocca la sferetta c'. Dopo aver rimosso lo spillo, entrambe le sfere, che portano la medesima carica si respingono sino ad una certa distanza deducibile dalla lettura della scala. A questo punto si ruota l'indicatore in alto nel verso della freccia per avvolgere il filo di sospensione e trovare le distanze tra le sferette in corrispondenza di angoli di rotazione diversi.*



In questo modo Coulomb riuscì a stabilire la dipendenza di F dall'inverso del quadrato della distanza. Lo stesso risultato era già stato ottenuto con una metodologia meno diretta, ma più accurata, da Cavendish (l'inventore della bilancia di torsione) nel 1771. Ma queste ricerche rimasero sconosciute e furono pubblicate da Maxwell solo nel 1879.

Il caso delle forze attrattive non è indagabile con la stessa bilancia perché quando le distanze risultano piccole il sistema non è stabile e le due sferette finiscono per venire a contatto annullando la carica. Per queste ragioni Coulomb progettò un secondo dispositivo teso a verificare la interazione tra cariche di segno opposto

Diversamente dall'esperienza di Cavendish per la misura della costante gravitazionale, in cui le masse coinvolte erano note, nella esperienza di Coulomb non c'era modo di misurare la carica sulle sfere. Coulomb aggirò l'ostacolo nel modo seguente: pose in contatto due sfere identiche, una carica e l'altra scarica e poi le allontanò. In tal modo poté affermare (per simmetria) che la carica rimasta era la metà di quella originale e verificò che, in tal caso, la forza si riduceva a metà.



Coulomb valuta il valore della carica attraverso considerazioni di simmetria basate sulla ammissione del principio di conservazione della carica.

Attraverso la ripetizione di esperimenti di questo tipo Coulomb arrivò ad affermare che la forza era direttamente proporzionale al prodotto delle cariche coinvolte.

1.2.3 L'ENUNCIATO DELLA LEGGE

Gli esperimenti di Coulomb non erano molto accurati a causa delle dimensioni delle sfere e della scarsa precisione nella misura delle forze. Inoltre venivano condotti in aria che, seppur debolmente, influenza i risultati. Ciò nonostante Coulomb fu molto abile nell'intuire ed enunciare la validità di una legge che sarebbe stata indirettamente confermata dalle successive analisi dei diversi fenomeni elettrici. Il suo enunciato per quanto riguarda la intensità della forza è il seguente: *la forza di interazione tra due cariche puntiformi nel vuoto è direttamente proporzionale al prodotto delle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della distanza:*

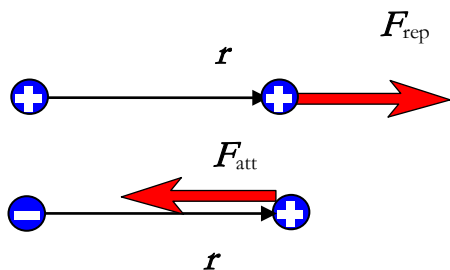
$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{V.1.1}$$

La legge di Coulomb: $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$

dove	F è la forza di interazione
	q_1 e q_2 sono le cariche che interagiscono
	r è la distanza tra le due cariche
	k è una costante universale di proporzionalità il cui valore dipende dal sistema di unità di misura scelto.

L'enunciato completo della legge richiede però di precisare che:

- le forze compaiono a coppie e rispettano la III legge della dinamica
- le due forze hanno come retta di applicazione la congiungente



Segno uguale: forza repulsiva - contrario: forza attrattiva

- le due forze sono attrattive per cariche di segno contrario e repulsive per cariche dello stesso segno

La questione se esistessero due fluidi elettrici o uno solo è stata ampiamente discussa nel 700. I fenomeni indicavano infatti solo la repulsione tra materiali dello stesso genere e la attrazione tra un tipo e l'altro di materiale (per esempio il vetro con l'ambra). Una scuola sosteneva la esistenza di 2 fluidi elettrici mentre l'altra sosteneva la esistenza di un solo tipo di elettricità e spiegava attrazione e repulsione come effetti di carenza ed eccesso (da qui sono venuti i nomi positivo, visto come aumento, e negativo legato alla carenza di fluido).

La forza di repulsione esercitata su una carica ha lo stesso verso del vettore posizione che va dal punto di applicazione verso la seconda carica, mentre quella di attrazione ha verso opposto.

La legge di Coulomb tiene già conto del segno delle cariche perché il prodotto di due numeri positivi e di due numeri negativi (forza repulsiva) è positivo, mentre il prodotto di un numero positivo per uno negativo è negativo. Pertanto usando la notazione vettoriale, si scriverà in ogni caso:



$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \text{vers}(\mathbf{r}) = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r} \tag{V.1.2}$$

mentre per la forza gravitazionale, poiché le masse sono positive sempre e la forza è attrattiva:

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{vers}(\mathbf{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \tag{V.1.3}$$

La forza di Coulomb è conservativa e ciò ci consentirà di definire una energia potenziale elettrica

La somiglianza tra la forza elettrica e la forza gravitazionale ci consente di affermare immediatamente una importante proprietà delle forze coulombiane: *le forze coulombiane sono forze conservative, cioè il lavoro da esse compiuto nel portare una carica da un punto ad un altro non dipende mai dalla traiettoria seguita.*⁷

1.2.4 IL COULOMB E LA COSTANTE DELLA FORZA

Nel S.I. l'unità di carica è il *coulomb* (C) e la sua definizione operativa viene data tramite la unità di corrente elettrica *Ampere* (simbolo A) che viene definita, a sua volta, attraverso le misura delle interazioni tra fili percorsi da correnti.

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \times 1 \text{ s}$$

La carica elettrica di 1 C corrisponde alla quantità di carica che attraversa una sezione di circuito elettrico percorsa dalla corrente elettrica di 1 A per 1 s.

Data la definizione del Coulomb, la costante della forza k che compare nella equazione (V.1.1) può essere determinata sperimentalmente e vale:



$$k = 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$$

⁶ Ricordiamo che la quantità $\frac{\mathbf{r}}{r}$ detta versore \mathbf{r} , si indica con $\text{vers}(\mathbf{r})$ corrisponde ad un vettore di modulo 1 con la stessa direzione e verso del vettore \mathbf{r} .

⁷ Si consiglia di rivedere i capitoli sulla energia e in particolare quelli sulla energia potenziale che saranno richiamati e utilizzati a fondo nel seguito.

Pertanto si dice che *due cariche puntiformi di 1 C poste alla distanza di 1 m interagiscono con una forza pari a 8.99×10^9 N*. Si osservi che con numeri così grandi la relazione appena enunciata risulta esclusivamente concettuale e poco praticabile sul piano sperimentale.

Nel Sistema Internazionale la legge di Coulomb si scrive solitamente dando alla costante k la forma:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (V.1.4)$$

e la costante ϵ_0 viene chiamata *costante dielettrica del vuoto*. Ovviamente si tratta solo di un modo diverso di scrivere k ; dal confronto delle due scritte si ha:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{ C}^2 / \text{N m}^2 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N m}^2 \text{ }^8$$

La abitudine ad indicare la costante della forza tramite ϵ risale al fatto che, in molte applicazioni legate alla determinazione della forza di sistemi di cariche distribuite nello spazio, comparirebbe, la costante 4π nei risultati. Così facendo il 4π si semplifica e rimane solo ϵ .

La presenza del fattore 4π deriva dal fatto che mentre le somme di grandezze relative all'intero piano determinano la comparsa del valore dell'angolo giro (2π radianti) la stessa cosa eseguita relativamente all'intero spazio produce la comparsa del corrispondente valore di angolo solido giro (pari a 4π steradiani).⁹

1.2.5 COULOMB ED ELETTRONE

Visto che non esistono cariche elettriche di valore inferiore all'elettrone sembrerebbe naturale assumere l'elettrone come unità di carica. Facendo così si avrebbe il vantaggio concettuale che la carica di un corpo sarebbe sempre rappresentata da un numero intero, pari al numero di elettroni acquistati o perduti durante il processo di elettrizzazione.

Tuttavia, poiché al momento della scoperta dell'elettrone, l'unità di carica era già stata fissata, si preferì misurare sperimentalmente la carica dell'elettrone. La carica dell'elettrone (o carica elementare, indicata dal simbolo e) è pari a:

$$1 e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

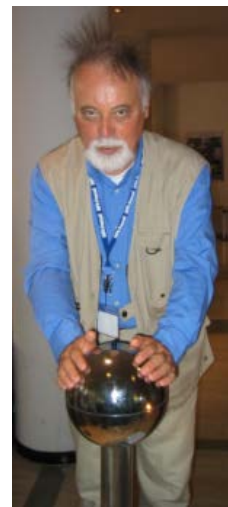
da cui si ha che:

$$1 \text{ C} = 6.24 \times 10^{18} e$$

Come vedremo studiando più a fondo i fenomeni elettrici il C è una unità di misura *improporzionabile* per i fenomeni di natura elettrostatica perché la forza di repulsione tra cariche dello stesso segno rende praticamente

⁸ In realtà nel S.I. tutte queste grandezze si legano al valore della velocità della luce nel vuoto tramite le costanti del magnetismo. Il valore migliore per ϵ_0 risulta = $8.854188 \cdot 10^{-12}$ cui corrisponde un valore di $k = 8.98755 \cdot 10^9$ che con 3 cifre significative viene arrotondato a $8.99 \cdot 10^9$. La questione viene ripresa nel capitolo dedicato alle onde elettromagnetiche.

⁹ La definizione dell'angolo solido in questo testo si trova nel capitolo dedicato alla misura delle unità fotometriche nella parte IV.



quando si carica fortemente il corpo umano (tenendolo ben isolato rispetto a terra) si hanno fenomeni suggestivi come questo



impossibile riuscire a collocare su di un corpo di dimensioni accettabili l'unità di carica.

Altrettanto non accade quando si opera con le cariche in moto. In quel caso è assolutamente normale trattare con movimenti di cariche di qualche C al secondo. Dovremo pertanto abituarci, quando si lavora con cariche statiche, ad operare con i sottomultipli del C.

1.2.6 APPLICAZIONI DELLA LEGGE DI COULOMB



1.2.6.1 Un confronto tra forza elettrica e forza gravitazionale

Per avere una idea delle intensità delle forze elettriche proviamo a confrontare la forza elettrica e quella gravitazionale tra due particelle identiche, per esempio, due elettroni.



$$F_{el} = \frac{k_e e^2}{r^2} \text{ mentre } F_{gr} = \frac{Gm^2}{r^2}$$

dove si è indicato con m la massa dell'elettrone $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg. Pertanto:

$$\frac{F_{el}}{F_{gr}} = \frac{k_e e^2}{Gm^2} = \frac{1.602^2 \times 10^{-38} \times 9.00 \times 10^9}{6.67 \times 10^{-11} \times 9.11^2 \times 10^{-62}} = 4.18 \times 10^{42}$$

La situazione non cambierebbe di molto se invece di considerare gli elettroni si considerassero i protoni la cui massa è 2000 volte più grande. Invece di 10^{42} ci verrebbe 10^{38} che è sempre un numero molto grande.

Dunque, quando si studiano fenomeni di natura elettrica nel mondo degli atomi, delle molecole o dei nuclei, si possono trascurare completamente le forze gravitazionali rispetto a quelle elettriche. Solo nei problemi di natura astronomica, riguardanti corpi dotati di grande massa (pianeti o stelle), le forze gravitazionali diventano dominanti.



1.2.6.2 La forza elettrica su scala atomica e su scala nucleare



Quanto vale la forza elettrica di attrazione tra protone ed elettrone nell'atomo di idrogeno? Tenere presente che la distanza media è di 0.53×10^{-10} m. Determinare poi la forza repulsiva tra due protoni in un nucleo atomico tenendo presente che la distanza tipica per le particelle nucleari è dell'ordine di 2×10^{-15} m



$$F_{\text{atomo}} = \frac{k_e e^2}{r^2} = \frac{9.00 \times 10^9 \times (1.602 \times 10^{-19})^2}{(0.53 \times 10^{-10})^2} = 8.2 \times 10^{-8} \text{ N}$$

$$F_{\text{nucleo}} = \frac{k_e e^2}{r^2} = \frac{9.00 \times 10^9 \times (1.602 \times 10^{-19})^2}{(2 \times 10^{-15})^2} = 58 \text{ N}$$

Come si vede tra i due valori ci sono ben 9 ordini di grandezza; inoltre, visto che i nuclei atomici sono molto stabili aspettiamoci che nel nucleo agisca qualche forza attrattiva molto più intensa di quella elettrica.



1.2.6.3 Equilibrio tra forza elettrica e forza gravitazionale



Due masse puntiformi m a distanza r si attirano gravitazionalmente e si respingono elettricamente grazie alla repulsione delle due cariche q che si tro-

vano su ogni massa. Dimostrare che si ha equilibrio se $m = \sqrt{\frac{k}{G}} q$. Nel caso le cariche siano due protoni quanto devono valere le masse m ?

⊗

In equilibrio si ha $G \frac{m^2}{r^2} = k \frac{q^2}{r^2}$ e da qui si ottiene $m = \sqrt{\frac{k}{G}} q$

Se le cariche sono protoni con carica $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C si ha:

$$m = \sqrt{\frac{k}{G}} q = \sqrt{\frac{9.00 \times 10^9}{6.67 \times 10^{-11}}} \times 1.602 \times 10^{-19} = 1.86 \times 10^{-9} \text{ kg.}$$

⊙

1.2.6.4 Equilibrio tra cariche elettriche

Quattro cariche positive di valore Q sono collocate nei vertici di un quadrato di lato l . Determinare il valore di una carica negativa q da collocare nel centro in modo che tutte le cariche del sistema siano in equilibrio.



Stabilire infine se la configurazione ottenuta sia di equilibrio stabile o instabile.

⊗

Per ragioni di simmetria la carica q collocata nel centro è in equilibrio qualsiasi sia il suo valore (su di essa agiscono 4 forze con la stessa intensità e collocate lungo le diagonali con versi antiparalleli che pertanto si fanno sempre equilibrio).

La situazione è diversa nei vertici del quadrato. Sulle cariche Q agiscono 4 forze:

- due forze repulsive dovuto alla interazione con le cariche sui vertici adiacenti; sono ortogonali tra loro e dirette come i lati; il modulo è:

$$F = k \frac{Q^2}{l^2}$$

- una forza repulsiva esercitata dalla carica sul vertice opposto, diretta come la diagonale e di modulo $F' = k \frac{Q^2}{(\sqrt{2}l)^2} = k \frac{Q^2}{2l^2}$

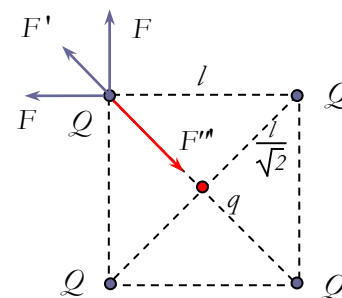
- una forza attrattiva esercitata da q , diretta come la diagonale e di modulo $F'' = k \frac{Qq}{\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2} = k \frac{2Qq}{l^2}$

Si ha equilibrio quando la somma vettoriale delle 4 forze si annulla e ciò accade se le forze hanno la stessa componente lungo la diagonale¹⁰; ciò equivale alla condizione:

$$k \frac{Q^2}{l^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) = k \frac{2Qq}{l^2} \text{ ovvero:}$$

$$q = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) Q = 0.957 Q$$

Se la carica q viene spostata anche di poco dal centro la situazione diviene immediatamente instabile perché se per esempio ci si muove lungo la



¹⁰ in realtà il problema presenta una tale simmetria che andrebbe bene anche l'annullamento della proiezione lungo una delle direzioni dei lati

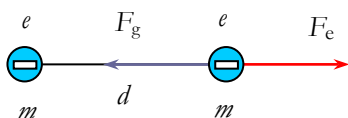
diagonale la forza F'' aumenta per una carica (quella verso cui avviene l'avvicinamento) ma diminuisce per la carica ad essa contrapposta e ciò determina una definitiva rottura delle condizioni di equilibrio.



1.2.6.5 Anche un piccolo squilibrio elettrico può determinare grandi effetti in termini di forze.



Due gocce d'acqua di raggio r poste a distanza d si attirano gravitazionalmente. Le due gocce risultano essere in equilibrio se si aggiunge ad entrambe un elettrone. Determinare il raggio delle gocce ed usare tale risultato per confrontare la carica dell'elettrone con la carica di tutti gli elettroni presenti in ciascuna goccia.



Osserviamo in via preliminare che la soluzione del problema non dipende dalla distanza d infatti sia la forza elettrica sia quella gravitazionale dipendono da d allo stesso modo e la dipendenza si semplifica nella equazione; si avrà equilibrio se: $G m^2 = K e^2$ dove m dipende dalle dimensioni r delle gocce.

$$m = \sqrt{\frac{K}{G}} e = \sqrt{\frac{9.00 \cdot 10^9}{6.67 \cdot 10^{-11}}} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} = 1.86 \cdot 10^{-9} \text{ kg} = 1.86 \cdot 10^{-6} \text{ g}$$

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \delta \text{ e pertanto dovrà essere:}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\delta}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1.86 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 10^3}} = 7.63 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0.076 \text{ mm}$$

Nella molecola d'acqua sono presenti 2 atomi di idrogeno (2 elettroni) e 1 atomo di ossigeno (8 elettroni) per un totale di 10 elettroni; d'altra parte la massa d'acqua considerata (visto che il peso molecolare μ dell'acqua è 18 g/mol) corrisponde ad un numero n di moli pari a:

$$n = \frac{m}{\mu} = \frac{1.86 \cdot 10^{-6}}{18} = 1.033 \cdot 10^{-7} \text{ moli}$$

Le molecole presenti sono dunque:

$$N_m = n \mathcal{N}_A = 1.033 \cdot 10^{-7} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 6.22 \cdot 10^{16} \text{ molecole}$$

Gli elettroni presenti in una goccia sono dunque pari a:

$$N = N_m \cdot 10 = 6.22 \cdot 10^{17} \text{ elettroni}$$

ma ne basta uno solo in più o in meno per bilanciare la forza gravitazionale!



1.2.6.6 Ripassiamo il calcolo vettoriale



Tre cariche elettriche positive $q_1 = 1.00 \text{ nC}$, $q_2 = 0.50 \text{ nC}$, $q_3 = 1.00 \text{ nC}$ formano un triangolo rettangolo con cateti $r_{12} = 10.0 \text{ cm}$ e $r_{23} = 4.0 \text{ cm}$.

Determinare:

- l'angolo α formato tra i vettori \vec{r}_{12} e \vec{r}_{13}
- I moduli delle forze F_{13} e F_{23} esercitate dalle cariche 1 e 2 sulla carica 3
- Le componenti R_x e R_y della forza $\vec{R} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$

d) Il modulo R e l'angolo β formato da $\overset{\oplus}{R}$ con il vettore $\overset{\oplus}{r}_{12}$.

Si consiglia di aiutarsi con una ordinata rappresentazione grafica e di far coincidere le direzioni dei vettori posizione con quelle degli assi.

☹

Nella immagine qui a lato è stata tracciata a grandi linee la situazione da analizzare.

Si osserva subito che $\tan \alpha = \frac{4}{10} = 0.4$ da cui $\alpha = 21.801^\circ$

Per trovare F_{13} tramite la legge di Coulomb è necessario calcolare r_{13}

$$r_{13} = \frac{r_{12}}{\cos \alpha} = 10.77 \text{ cm} = 0.108 \text{ m}$$

$$F_{13} = k \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} = 8.99 \cdot 10^9 \frac{10^{-9} \cdot 10^{-9}}{0.108^2} = 7.71 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

$$F_{23} = k \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} = 8.99 \cdot 10^9 \frac{10^{-9} \cdot 0.5 \cdot 10^{-9}}{0.04^2} = 28.1 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

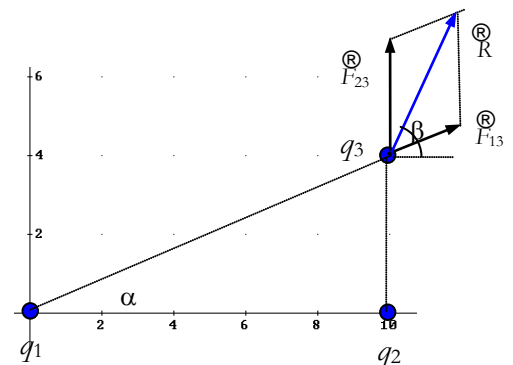
$$R_x = F_{13} \cos \alpha = 7.17 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

$$R_y = F_{13} \sin \alpha + F_{23} = 30.97 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

$$\tan \beta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{30.97}{7.17} = 4.32 \text{ da cui } \beta = \tan^{-1}(4.32) = 77.0^\circ$$

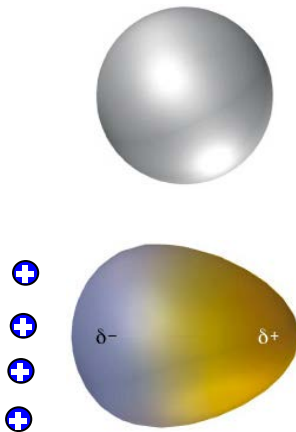
$$R = R_y / \sin \beta = 31.8 \text{ N}$$

☹



1.3 Il dipolo

1.3.1 COS'È E COME NASCE



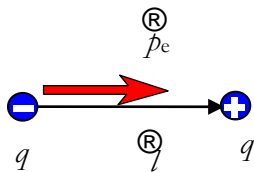
Il sistema di cariche più semplice che si possa studiare, dopo la carica puntiforme, è quello costituito da due cariche uguali e con segno contrario; un tale sistema è detto *dipolo*. La ragione per la quale si studia in fisica il comportamento dei dipoli è data dal fatto che sia gli atomi, sia le molecole, in prima approssimazione, possono essere considerati dei dipoli.

Consideriamo per esempio un atomo di idrogeno che si trovi in presenza di altre cariche positive. A causa di ciò la nube elettronica verrà attratta e l'atomo perderà la sua originaria simmetria sferica per assumere una simmetria di tipo longitudinale che sarà poi schematizzata come un dipolo.

1.3.2 IL MOMENTO DI DIPOLO

Le caratteristiche elettriche di un dipolo sono descritte da una grandezza vettoriale detta *momento elettrico di dipolo*:

$$\vec{p}_e = q \vec{l} \tag{V.1.5}$$



Il vettore \vec{l} ha direzione e verso dalla carica negativa a quella positiva e la sua intensità l viene chiamata *braccio del dipolo*. Il vettore \vec{p}_e è diretto come il vettore \vec{l} .

il momento elettrico di dipolo ne descrive tutte le caratteristiche importanti per le interazioni

A prima vista si potrebbe pensare che, essendo elettricamente neutro, il dipolo non presenti interazioni elettriche, ma si tratta di una conclusione affrettata. Il dipolo interagisce perché le due cariche di cui è costituito sono collocate in punti diversi dello spazio.



Eseguendo i calcoli che proponiamo come esercizio qui di seguito si scopre che *la interazione a grande distanza tra dipoli decresce come la quarta potenza della distanza ed è proporzionale ai momenti di dipolo*.

1.3.3 APPROFONDIMENTO: LA INTERAZIONE TRA DIPOLI

Consideriamo la interazione tra due dipoli identici aventi un asse in comune; indichiamo con r la distanza tra i dipoli e supponiamo che tale distanza sia molto maggiore del braccio, $r \gg l$. Ci proponiamo di determinare la forza di interazione.

☹

La forza di interazione è formata da 4 componenti: due forze di attrazione tra cariche di segno contrario e due forze di repulsione tra cariche dello stesso segno. Così:

$$\begin{aligned} F &= + k \frac{(-q)(-q)}{r^2} + k \frac{(+q)(+q)}{r^2} + k \frac{(-q)(+q)}{(r-l)^2} + k \frac{(-q)(+q)}{(r+l)^2} = \\ &= k q^2 \left(\frac{2}{r^2} - \frac{1}{(r-l)^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right) \end{aligned}$$

e dopo alcune trasformazioni algebriche di tipo semplice si ottiene:

$$F = -6q^2 l^2 k \cdot \frac{r^2 - (l^2/3)}{r^2(r^2 - l^2)^2}$$



Sostituendo p_e al posto di $q l$ e trascurando i termini in l^2 che risultano molto minori di quelli in r^2 otteniamo:

$$F \approx -\frac{6p_e^2 k}{r^4}$$

Questa espressione può essere facilmente generalizzata al caso di interazione tra dipoli di momento \mathbf{p}_{1e} e \mathbf{p}_{2e} :

$$F \approx -\frac{6p_{1e}p_{2e}}{4\pi\epsilon_0 r^4} \quad (\text{V.1.6})$$

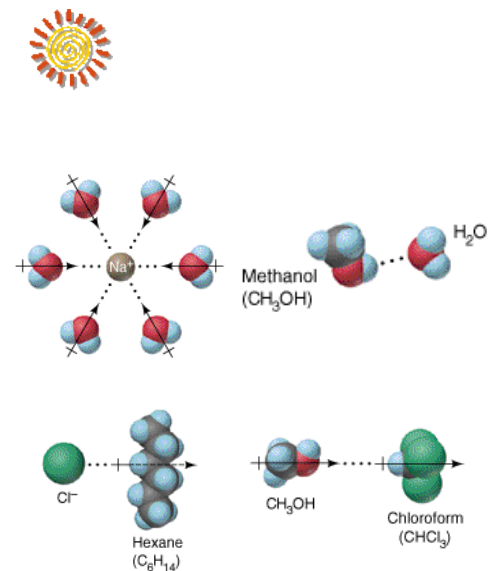
dunque due dipoli con momento di dipolo sulla stessa retta e nello stesso verso sono attirati tra loro e la forza di attrazione è proporzionale al prodotto dei momenti di dipolo e inversamente proporzionale alla quarta potenza della distanza. La interazione tra dipoli diminuisce molto più rapidamente di quella tra cariche puntiformi al crescere della distanza.

Lasciamo allo studente il compito di dimostrare che, nel caso di dipoli di verso opposto, la forza è repulsiva ed ha ancora la stessa intensità della equazione (V.1.6).

Nel caso di dipoli disposti perpendicolarmente rispetto all'asse su cui si misura la interazione bisogna comporre vettorialmente le forze e si arriva a trovare $F' = \frac{F}{2}$. Anche questo calcolo viene lasciato per esercizio.

Osserviamo che la forza di interazione tra dipoli dipende sia dalla mutua disposizione sia dalla distanza e ciò è in contrasto con le caratteristiche delle forze centrali (come quella gravitazionale e quella coulombiana) che dipendono solo dalla distanza tra i corpi interagenti. Le forze nucleari hanno proprietà di questo tipo.

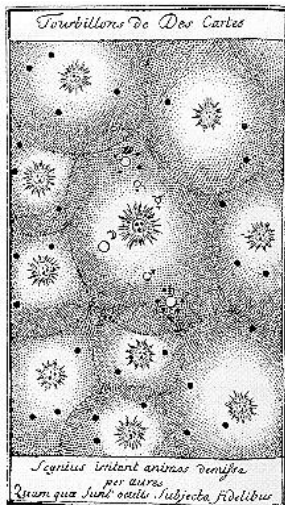
La interazione tra dipoli gioca un ruolo estremamente vitale in fisica. Si è infatti scoperto che qualunque sistema di tipo elettrico formato da cariche disposte in maniera asimmetrica e tali che la somma algebrica sia nulla, si comporta, in prima approssimazione come un dipolo. Ciò permette di dare una buona spiegazione del comportamento delle forze di interazione molecolare.



esempi di interazioni molecolari in cui sono coinvolti i dipoli: ione-dipolo, legame idrogeno, ione-dipolo indotto, dipolo-dipolo indotto

1.4 Il vettore campo elettrico

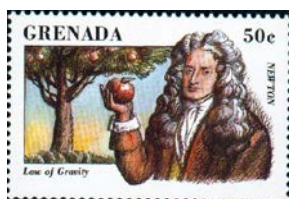
1.4.1 QUALCHE OSSERVAZIONE SUL CONCETTO DI CAMPO



Una delle *dispute filosofiche* sorte immediatamente dopo l'affermarsi della teoria newtoniana della gravitazione riguardò la modalità di trasmissione della interazione gravitazionale. Il panorama scientifico europeo, prima di Newton, era propenso ad accettare la teoria cartesiana dei vortici secondo la quale l'universo è composto da materia sottile che trasmette movimento attraverso una complessa azione di vortici.

La teoria della gravitazione newtoniana per un verso distrugge l'idea dei vortici cartesiani (incompatibili con alcune conseguenze della gravitazione), ma per l'altro non si pronuncia sulla origine della gravitazione e sulla modalità di trasmissione della interazione.

Newton nello Scolio Generale ai Principia afferma, dopo aver descritto la gravità come un fenomeno che riguarda ogni singola particella di materia, *non ho ancora potuto dedurre dai fenomeni la ragione di tali proprietà della gravità, e non immagino alcuna ipotesi. Perché tutto ciò che non può essere dedotto dai fenomeni è una ipotesi: e le ipotesi, siano esse metafisiche, fisiche, meccaniche o di qualità occulte, non devono essere accettate dalla filosofia sperimentale. In questo genere di filosofia le proposizioni si deducono dai fenomeni naturali generalizzando in seguito per induzione. In tal modo abbiamo potuto conoscere l'impenetrabilità, la mobilità, la forza dei corpi, le leggi del movimento e della gravità. Ed è sufficiente che la gravità esista, che agisca secondo le leggi da noi enunciate, e che possa spiegare tutti i movimenti dei corpi celesti e del mare.*



La teoria newtoniana si rivelerà vincente e spazzerà via nel giro di una cinquantina d'anni le ipotesi cartesiane che tendevano a spiegare l'azione a distanza come una azione che si propagava per contiguità. In questo quadro tutta la fisica, compresa l'ottica verrà interpretata in chiave corpuscolare.

Non ci si chiederà, in mancanza di fenomeni che pongano il problema, se la gravitazione si propaga a velocità finita o infinita; cosa accade ad una data massa quando in un punto diverso appare istantaneamente una seconda massa? L'interazione gravitazionale si propaga con una velocità infinita oppure no?

Nel modello newtoniano il problema sembra insensato perché la massa *esiste da sempre*. Così il modello newtoniano, basato sul non chiedersi cosa sia la gravità ma sul prendere atto della sua esistenza con determinate caratteristiche, si afferma progressivamente e con esso si fa strada l'idea di interazioni che si propagano a velocità infinita e che sono sempre l'effetto di interazioni tra corpuscoli.

Eppure esistono in fisica, e sono già ben noti ai tempi di Newton, fenomeni che si propagano per contiguità: il suono, le onde sull'acqua. In questi fenomeni la perturbazione ondosa si trasmette attraverso un mezzo mediante l'azione delle particelle di un mezzo su quelle contigue e non richiede le *azioni a distanza* ma semmai il suo opposto e cioè l'*azione per contatto*.

Sul lungo periodo hanno avuto ragione entrambe le ipotesi: la gravitazione per propagarsi non ha bisogno di un mezzo materiale che trasmetta per contiguità i suoi effetti, ma è anche vero che la propagazione della gravitazione, così come di qualsiasi altro fenomeno non avviene istanta-

neamente e le equazioni che descrivono la propagazione del fenomeno assomigliano a quelle della propagazione ondosa (con una differenza non banale: il mezzo non serve e la propagazione può avvenire anche nel vuoto).

1.4.2 IL VETTORE CAMPO GRAVITAZIONALE

Per fornire una descrizione quantitativa della capacità delle masse di determinare proprietà di attrazione nello spazio che le circonda introduciamo una nuova grandezza fisica $\overset{\textcircled{R}}{g}$ che chiameremo *vettore campo gravitazionale* data dal rapporto tra la forza gravitazionale che si esercita su un corpo di prova e la massa gravitazionale del corpo stesso:

$$\overset{\textcircled{R}}{g} = \frac{\overset{\textcircled{R}}{F}}{m} \quad (\text{V.1.7})$$

Ma, in base alla legge di gravitazione, il rapporto $\frac{\overset{\textcircled{R}}{F}}{m}$ non dipende da m

perché se $\overset{\textcircled{R}}{F}$ è dovuta alla sovrapposizione di forze di origine gravitazionale, ciascuna delle componenti è proporzionale alla massa e pertanto, dividendo per la massa del corpo di prova avremo una grandezza che non dipende dal particolare corpo considerato.

Spieghiamoci con un esempio: un corpo disposto sulla superficie lunare risentirà prevalentemente di tre attrazioni gravitazionali, quella della Luna, della Terra e del Sole. Queste tre forze determineranno una risultante che è proporzionale alla massa del corpo di prova, ma il campo corrispondente dipenderà esclusivamente da dove siamo e da quali corpi ci circondano.

- Dunque il primo aspetto del concetto di campo è quello di essere un *descrittore degli effetti gravitazionali indipendente dalla massa del corpo* sul quale tali effetti agiscono. Trattandosi di una forza diviso una massa il campo ha le dimensioni di una accelerazione e, in effetti, quando il corpo generatore è uno solo, corrisponde a quella che chiamiamo accelerazione di gravità.

Nel caso degli effetti gravitazionali dovuti all'azione di un solo corpo di massa M a distanza R si ha:

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

La intensità del campo gravitazionale è determinata dalla massa del corpo che lo genera (*sorgente del campo*) e dalla distanza tra questo corpo e il punto considerato; non dipende invece dalla massa del corpo di prova.

Dal punto di vista fisico la intensità viene a coincidere con l'accelerazione del corpo di prova e poiché l'intensità non dipende dalla massa del corpo di prova ne consegue che, in un campo gravitazionale, tutti i corpi si muovono con la stessa accelerazione indipendentemente dalla loro massa.

- Ma il campo non è solo un artificio matematico per descrivere gli effetti gravitazionali; come abbiamo osservato nel paragrafo precedente esso esprime un contenuto più sottile; per la fisica di oggi *si tratta di*

Il vettore campo gravitazionale corrisponde alla accelerazione di gravità



un elemento della realtà. Qualunque interazione si propaga a velocità finita e se in questo istante si dovesse verificare in un punto dello spazio distante da noi due anni luce un fenomeno di creazione di materia, noi ne verremmo informati dalla percezione di un campo tra due anni. Tutto ciò sembra un tentativo di spaccare un capello in quattro, ma non è così. La fisica ha la pretesa di descrivere l'universo e il suo ruolo non viene meno perché certe fenomeni non appartengono alla nostra percezione comune; anzi.

1.4.3 IL CAMPO COULOMBIANO



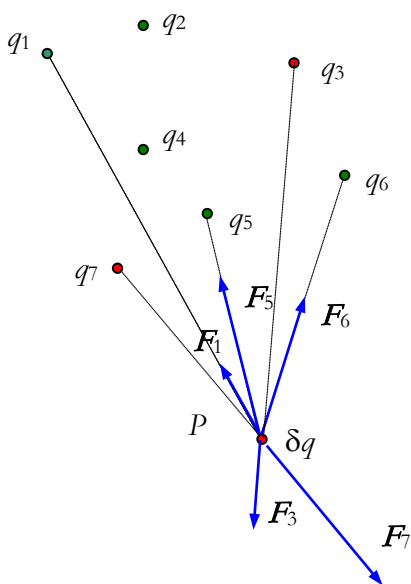
Come si è fatto per il campo gravitazionale introdurremo ora il concetto di campo elettrico, una grandezza che serve a descrivere il modo in cui un sistema di cariche elettriche influenza lo spazio circostante rendendolo sede di una sorta di *deformazione* che si esplicita come forza elettrica quando in un punto viene collocata una carica in grado di interagire con le cariche originarie. Dal punto di vista terminologico useremo la dizione di *cariche generatrici del campo e carica esploratrice del campo*.

Le cariche generatrici saranno gli *agenti del processo* mentre la carica esploratrice sarà la nostra *sonda* in grado di indagare le azioni prodotte dalle cariche generatrici.

Naturalmente la distinzione tra carica generatrice e carica di prova o carica esploratrice è del tutto fittizia perché, dato il carattere reciproco della interazione, i due ruoli possono essere scambiati.

La ragione per la quale i campi vengono molto più studiati in elettricità che non in riferimento ai fenomeni gravitazionali sta nel fatto che mentre nel caso della interazione gravitazionale solitamente si ha un solo centro di forza principale, nel caso della elettricità è del tutto normale trattare con sistemi di numerose cariche distribuite nello spazio nessuna delle quali gioca un ruolo di *prima donna*.

Nel ragionare in termini di campo ci rappresenteremo l'interazione elettrica secondo il seguente schema



la carica genera un campo che influenza una carica

con ogni carica che produce un campo in grado di influenzare le altre cariche.

Il campo elettrico nella concezione moderna è una forma di esistenza della materia. Esso esiste indipendentemente dalla nostra conoscenza di esso e può essere rivelato dagli effetti che determina sui diversi oggetti fisici, per esempio sugli strumenti di misura.

Consideriamo dunque un insieme di n cariche, non importa di quale segno, collocate nello spazio e indaghiamo come queste cariche, supposte in equilibrio (e quindi mantenute da qualche causa esterna nelle rispettive posizioni) influenzino una generica carica elementare δq collocata in un punto dato P dello spazio.

Supponiamo che la carica δq sia piccola in modo di trascurare la perturbazione che essa genera sulle diverse cariche generatrici.

Ciascuna carica generatrice determinerà su δq una forza diretta lungo la congiungente, attrattiva o repulsiva a seconda che i segni siano discordi o concordi, e di intensità inversamente proporzionale al quadrato della

cariche generatrici e carica esploratrice: il campo viene visto come la modalità con cui le cariche generatrici rendono lo spazio sede di forze elettriche

distanza. In figura abbiamo indicato in rosso le cariche positive e in verde quelle negative.

Nel punto P riscontreremo la presenza di una forza $\overset{\textcircled{R}}{F}$ risultante delle diverse forze $\overset{\textcircled{R}}{F}_i$ dovute alle diverse cariche generatrici.

$$\overset{\textcircled{R}}{F} = \sum \overset{\textcircled{R}}{F}_i$$

La grandezza fisica caratteristica del campo elettrico è una quantità vettoriale chiamata *vettore campo elettrico*, $\overset{\textcircled{R}}{E}$ definita come:

$$\overset{\textcircled{R}}{E} = \frac{\overset{\textcircled{R}}{F}}{\delta q} \tag{V.1.8}$$



Definizione del vettore campo elettrico

Si osservi che poiché l'interazione elettrica (in base alla legge di Coulomb) è sempre proporzionale alla carica su cui agisce, il rapporto $F/\delta q$ è indipendente dalla particolare carica δq considerata.

Si osservi ancora che anche il verso di $\overset{\textcircled{R}}{E}$ non dipende dal segno di δq perché se δq cambia segno anche la forza si inverte e il loro rapporto non cambia.

Poiché il verso del campo elettrico coincide con quello della forza quando la carica esploratrice è positiva e poiché il campo è indipendente dalle caratteristiche della carica esploratrice, solitamente si sottintende come positiva tale carica. Anche noi ci adegueremo a questa consuetudine e dunque, a meno che sia dichiarato diversamente in modo esplicito, supporremo d'ora in poi che le cariche di prova siano positive.

1.4.4 LA RAPPRESENTAZIONE DEL CAMPO ELETTRICO

Un metodo efficace di rappresentare pittoricamente il campo elettrico è quello proposto da Michael Faraday (1791-1867) basato sulle linee di forza.

Nella concezione di Faraday le linee di forza non sono una finzione matematica ma rappresentano una sorta di realtà fisica. Le interazioni tra cariche si trasmettono come deformazioni dello spazio fisico ed è attraverso questo paradigma che Faraday analizzerà, seguito poi da Maxwell che ne opererà la matematizzazione, i diversi fenomeni elettromagnetici.

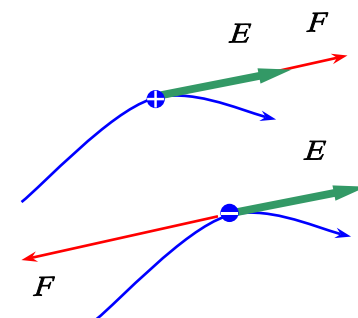
Una *linea di forza*¹¹ è una linea (retta o curva) la cui tangente in ogni punto coincide con la direzione del campo elettrico in quel punto. Alla linea di forza si assegna un verso identificandolo con quello del campo elettrico.

Se la carica generatrice è positiva la forza che agisce su una carica positiva è repulsiva e dunque il campo ha la stessa direzione e verso del raggio vettore, mentre se la carica è negativa ha verso opposto. Pertanto possiamo affermare che le linee di forza si originano in corrispondenza delle cariche positive e terminano sulle cariche negative.

Si suppone inoltre di disegnare le linee di forza più o meno addensate a seconda della intensità del campo elettrico.



Michael Faraday (1791-1867)

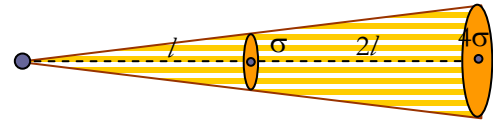


La linea di forza dà il verso e la direzione del campo; la forza è parallela o antiparallela a seconda del segno della carica; la densità di linee descrive la intensità del campo.

¹¹ Sarebbe meglio parlare di *linea di campo* perché nel caso del campo magnetico la direzione del campo non coincide con la direzione della forza.

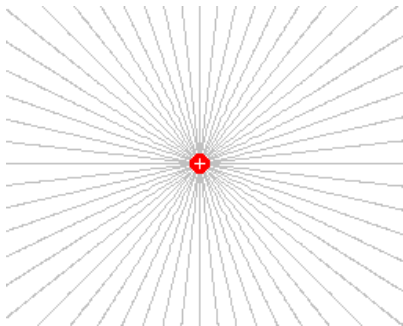
Se si conviene di disegnare le linee di forza in maniera che inizino o terminino su una carica o all'infinito si osserverà subito che la densità di linee di forza su una superficie ortogonale alla linea di forza decresce come l'inverso del quadrato della distanza dalla carica che le genera e questo è proprio ciò che accade anche al campo (per effetto della legge di Coulomb).

In Figura si è rappresentato un fenomeno individuato da linee (raggi) che si dipartono da una sorgente. Tali linee vanno verso l'infinito. Come si osserva, raddoppiando la distanza le stesse linee cadono su una superficie 4 volte più grande e pertanto la densità di linee diventa un quarto proprio come accade al campo elettrico.



l'intensità dei fenomeni che vanno come $1/r^2$ può essere descritta dalla densità delle linee di campo

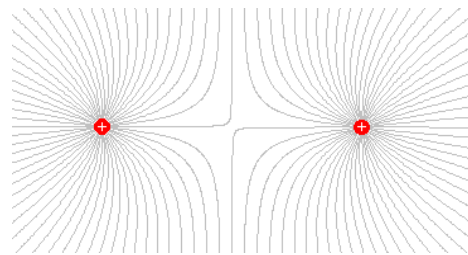
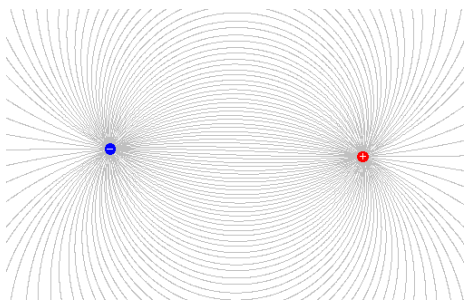
Quanto descritto consente di osservare che qualsiasi fenomeno che varia con la legge dell'inverso del quadrato della distanza è descrivibile tramite la densità delle linee e che qualunque fenomeno che irradia nello spazio conservandosi deve decrescere in intensità con l'inverso del quadrato della distanza. E' quanto accade per esempio alla intensità di una sorgente luminosa e questo comportamento viene utilizzato in astronomia per stimare la distanza delle stelle una volta che si sia potuta stimare, con qualche altro metodo, la loro luminosità intrinseca, cioè l'energia emessa nell'unità di tempo).



campo radiale della carica puntiforme

Le linee di forza non devono essere accreditate di alcun significato diverso dall'essere una pura e semplice rappresentazione del campo. Non si deve pensare che il campo sia fatto di linee di forza come una spazzola è fatta di setole. Basta pensare che teoricamente potremmo disegnare una linea di forza per ogni punto e dunque ne dovrebbero esistere infinite.

Oggi si utilizzano le linee di forza solo come uno strumento di descrizione e visualizzazione del campo, ma storicamente le cose sono andate diversamente e le linee di forza, come si è già sottolineato, venivano viste come *reali deformazioni* dello spazio fisico tanto da far sì che le grandezze della *analisi vettoriale* usate per descriverlo siano state mutuate concettualmente e terminologicamente dalla meccanica dei fluidi (linee di corrente, rotori, divergenze, flussi, ...).



campo di dipolo e campo di due cariche identiche

Dietro la descrizione del campo attraverso le linee di forza sta la necessità, presente in tutta la fisica classica, di pensare ad ogni dominio della fisica *come ad un pezzo della realtà* posto l'uno dentro l'altro come in una serie di scatole cinesi. In questa visione lo spazio sarebbe una sorta di contenitore in cui operano i diversi livelli del reale: la materia (di cui si occupa la gravitazione), il calorico (di cui si occupa la termodinamica), il fluido elettrico e quello magnetico (che si esplica nell'etere elettromagnetico), la luce che si esplica nell'etere luminifero, ...

Quando si sollecita un corpo solido elastico nascono al suo interno delle linee di tensione che ci danno un'idea degli sforzi interni (provare a snervare un pezzo di plastica per rendersene conto) e, all'inizio, l'effetto dei campi viene visto come deformazione di un ipotetico spazio (l'*etere elettromagnetico*) nel quale le interazioni si trasmettono per contiguità attraverso la deformazione del mezzo stesso (come si trasmette la deformazione della superficie dell'acqua prodotta da un sasso).

Questo spazio (l'etere), alla luce delle teorie di Maxwell della seconda metà dell'800, che prevede il carattere trasversale delle onde elettromagnetiche, dovrebbe avere le proprietà di un solido elastico molto rigido e contemporaneamente essere del tutto penetrabile dai corpi materiali.

La discussione sulla natura e le caratteristiche dell'etere ha avuto termine solo con l'affermarsi della teoria della relatività ristretta che eliminando l'idea di sistema di riferimento privilegiato per il campo elettromagnetico elimina anche il substrato che ne doveva discendere. Anche se oggi, alcuni elementi di meccanicismo insiti nelle teorie ottocentesche ci fanno sorridere si tenga presente che la teoria della relatività avanzata nel 1905 è stata accettata dalla comunità scientifica solo gradualmente e in un tempo dell'ordine dei 15 anni.

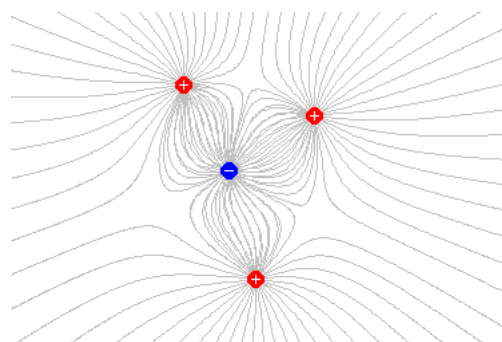
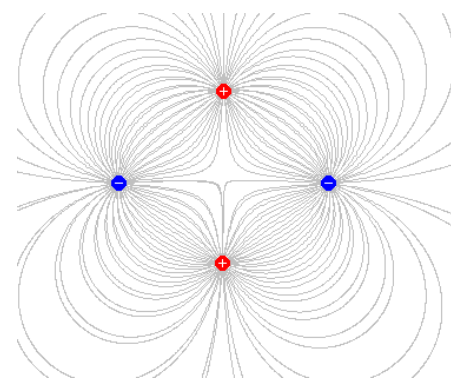
In questa pagina e nella precedente sono state rappresentate esemplificativa le caratteristiche delle linee di forza di alcune distribuzioni di carica tipiche.

- La carica puntiforme presenta linee di forza di tipo radiale che vanno verso l'infinito.
- Il dipolo ha un campo elettrico più intenso in vicinanza delle due cariche e nella zona compresa tra esse. Le linee di forza tendono a chiudersi sempre più lontano verso l'infinito.
- Due cariche identiche ma dello stesso segno sono caratterizzate da una sorta di repulsione delle linee di forza.

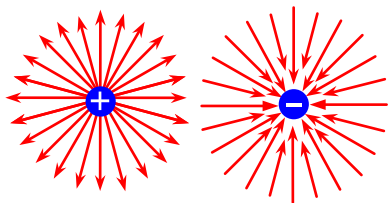
Seguono poi due distribuzioni con 4 cariche: la prima presenta cariche simmetriche e la simmetria si ripercuote nell'andamento delle linee di forza. Nella seconda non c'è simmetria ma si può osservare bene la presenza di zone in cui si ha una influenza multipla e di zone in cui a causa della distanza prevale l'effetto della singola carica.

Concludiamo mettendo in guardia contro un errore molto diffuso: quello di pensare che la linea di forza rappresenti anche la traiettoria delle cariche immerse nel campo.

Non è così perché in generale il vettore velocità, che ha la direzione della traiettoria, non ha la stessa direzione della accelerazione (e dunque della forza). Ciò accade solo quando la linea di forza è rettilinea e il vettore velocità iniziale ha la stessa direzione della forza.



1.5 Come si calcola il campo elettrico



linee di forza per una carica puntiforme

1.5.1 LA CARICA PUNTIFORME

La carica puntiforme determina un campo di tipo radiale, uscente per quelle positive ed entrante per quelle negative. La sua intensità deriva immediatamente dalla legge di Coulomb e vale:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (V.1.9)$$

1.5.2 UN SISTEMA DI CARICHE: PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Poiché il campo è, in base alla definizione, una grandezza vettoriale, si può sempre calcolare il campo di un sistema eseguendo la somma vettoriale dei campi prodotti da ogni singola carica.



Questa proprietà prende il nome di *principio di sovrapposizione* ed è particolarmente utile perché consente di ricondurre tutte le proprietà del campo elettrico generato da un sistema complesso di cariche alle proprietà del campo di ogni singola carica puntiforme.

Tale calcolo, tecnicamente, può essere piuttosto complicato e ci limitiamo a fornire un esempio che serve a richiamare le tecniche d'uso del calcolo vettoriale. Il processo di calcolo consiste nel determinare direzione e modulo dei vettori coinvolti e ciò richiede sia l'uso della legge di Coulomb sia l'uso della goniometria per risalire agli angoli necessari al calcolo delle componenti.

1.5.2.1 Determinazione del campo elettrico con uso del calcolo vettoriale



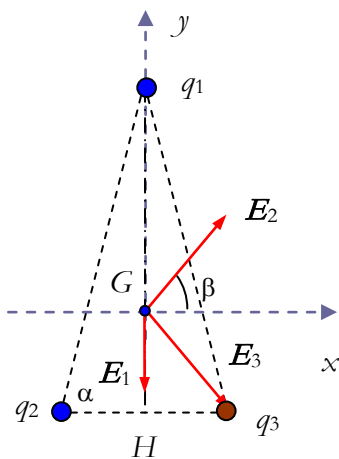
Determinare il campo nel baricentro di un triangolo isoscele di base $b = 2$ m e angoli alla base $\alpha = 70^\circ$ sapendo che nei vertici sono collocate 3 cariche uguali di carica $q = 2.00 \times 10^{-7}$ C con q_1 e q_2 positive e q_3 negativa.



Ricordiamo che il baricentro G divide la mediana in parti una doppia dell'altra e dopo aver individuato G disegniamo sulla figura i 3 campi: $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ la cui somma vettoriale ci fornirà il campo \vec{E} richiesto.

Fissiamo un sistema di riferimento xGy con origine nel baricentro; le componenti del campo elettrico si troveranno sommando le diverse componenti elementari.

I moduli dei diversi campi richiedono la determinazione delle distanze G_1, G_2, G_3 .



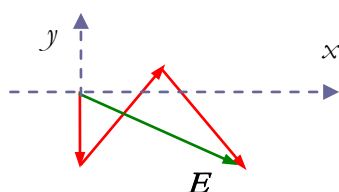
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{b/2} \Rightarrow h = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \alpha = 2.747 \text{ m}$$

$$\overline{GH} = \frac{1}{3} b = 0.916 \text{ m} \quad r_1 = \overline{G1} = \frac{2}{3} b = 1.832 \text{ m}$$

$$r_2 = r_3 = \overline{G2} = \sqrt{\overline{GH}^2 + \overline{2H}^2} = 1.356 \text{ m}$$

In tutti i calcoli relativi al campo si tratta di valutare la quantità kq/r^2 in cui kq ha sempre lo stesso valore pari a:

$$8.99 \times 10^9 \times 2.00 \times 10^{-7} = 1.80 \times 10^2 \text{ N m}^2 / \text{C}$$



$$E_2 = E_3 = \frac{k q}{r_2^2} = \frac{1.80 \times 10^2}{1.356^2} = 0.979 \text{ N/C}$$

$$E_1 = \frac{k q}{r_1^2} = \frac{1.80 \times 10^2}{1.832^2} = 0.536 \text{ N/C}$$

Il vettore \vec{E}_1 ha componenti $E_{1x} = 0$ e $E_{1y} = -E_1$

Il vettore $\vec{E}_2 + \vec{E}_3$ ha componenti $E_{23x} = 2E_2 \cos\beta$ e $E_{23y} = 0$

Dobbiamo dunque calcolare $\cos\beta = \frac{b/2}{r_2} = 0.737$

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x} = 2E_2 \cos\beta = 1.444 \text{ N/C}$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} + E_{3y} = -E_1 = -0.536 \text{ N/C}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 1.540 \text{ N/C}$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{E_y}{E_x} = -0.371 \Rightarrow \gamma = -20.4^\circ$$

☺

1.5.2.2 Determinazione di una condizione di equilibrio come effetto dell'annullamento del campo

Due cariche $q_1 = +Q$ e $q_2 = -3Q$ sono collocate lungo una retta orientata a distanza l . Dopo aver scelto opportunamente l'origine del sistema stabilire se esistono dei punti lungo l'asse per i quali il campo si annulla

☹

Collochiamo l'origine del sistema di riferimento in corrispondenza di una delle due cariche come in figura e analizziamo cosa accade a sinistra di q_1 nella zona compresa tra le due cariche e oltre q_2 .

Nel primo caso si ha $x < 0$ e

$$E_1 = k \frac{Q}{x^2} \quad E_2 = k \frac{3Q}{(l-x)^2}$$

I due vettori campo sono antiparalleli e si ha equilibrio se $E_1 = E_2$ e cioè:

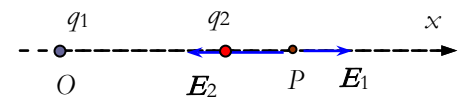
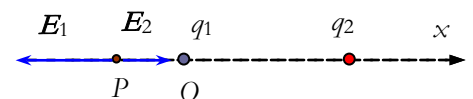
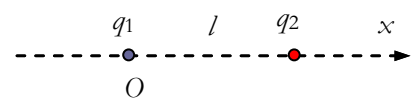
$$k \frac{Q}{x^2} = k \frac{3Q}{(l-x)^2} \Leftrightarrow \frac{(l-x)^2}{x^2} = 3$$

Se indichiamo con $\alpha = \frac{x}{l} < 0$ avremo che $(\frac{1}{\alpha} - 1)^2 = 3$ o anche $\frac{1}{\alpha} - 1 = -\sqrt{3}$. Dunque deve essere $\frac{1}{\alpha} = 1 - \sqrt{3}$ e cioè $\alpha = \frac{1}{1 - \sqrt{3}} \approx -1.37$

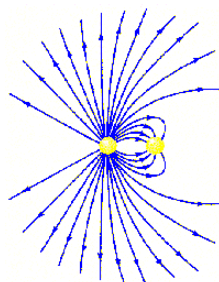
Nel secondo caso i due vettori risultano paralleli e pertanto nei punti interni il campo non si può annullare.

Oltre q_2 i vettori sono nuovamente antiparalleli ma non si può mai avere equilibrio perché $E_2 > E_1$ per ogni x infatti la carica è maggiore e la distanza minore.

☺



1.5.2.3 Determinazione delle caratteristiche delle cariche generatrici a partire dallo spettro delle linee di forza



Nella immagine qui a lato sono rappresentate le linee di forza di due cariche sconosciute. Determinarne il segno e la intensità relativa.

☹

Le linee di forza si dirigono dalla carica di sinistra verso quella di destra pertanto quella di sinistra è positiva mentre l'altra è negativa.

Dalla carica di sinistra partono 32 linee di forza e di esse solo 8 arrivano sulla seconda carica (le altre vanno all'infinito o si chiudono su altre cariche non rappresentate). Pertanto la prima carica ha una intensità 4 volte più elevata della seconda.

☺



1.5.2.4 Il campo lungo l'asse generato da un anello circolare uniformemente carico

Un anello circolare di spessore trascurabile e di raggio a è caratterizzato da una carica q uniformemente distribuita. Determinare le caratteristiche del campo elettrico lungo l'asse di simmetria z al variare della distanza dal centro dell'anello.

☹

Osserviamo in via preliminare che il vettore campo elettrico è diretto lungo l'asse z perché tutte le componenti nel piano perpendicolare a z si annullano per simmetria (per ogni elemento δl che produce una componente di campo nel piano ortogonale esiste un elemento diametralmente opposto che produce una componente uguale ed opposta).

Se consideriamo una porzione elementare δl dell'anello essa produrrà un campo elettrico elementare $\delta \vec{E}$ che forma con l'asse z un angolo α dipendente dalla posizione in cui si calcola il campo.

L'elemento δl possiede una carica $\delta q = q \frac{\delta l}{2\pi a}$ e produce un campo la cui componente lungo z vale:

$$\delta E_z = k\delta q \frac{1}{r^2} \cos\alpha = k\delta q \frac{1}{z^2+a^2} \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} = k\delta q \frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}$$

$$E = \sum \delta E_z = k \frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}} \sum \delta q = k q \frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}$$

☺

1.5.2.5 Esercitiamoci con il calcolo vettoriale



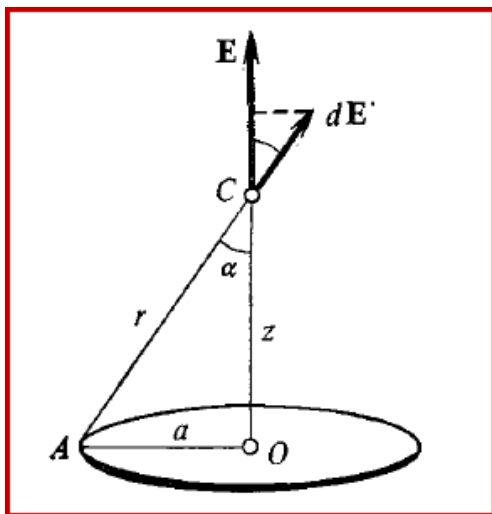
Due cariche positive q_1 e q_2 sono caratterizzate da vettori posizione \vec{r}_1 e \vec{r}_2 .

Determinare il valore q_3 e il vettore posizione \vec{r}_3 di una carica negativa affinché la forza su ciascuna delle tre cariche si annulli.

☹

Per ovvie ragioni legate alla condizione di equilibrio (direzione delle forze in gioco) la carica q_3 va posta lungo la congiungente di q_1 e q_2

Indichiamo con \vec{j} un vettore unitario diretto lungo la congiungente e con verso da 1 a 2. Per l'equilibrio di q_3 dovrà essere:



$$-\frac{q_1 q_3 \vec{j}}{|\vec{r}_{13}|^2} + \frac{q_2 q_3 \vec{j}}{|\vec{r}_{23}|^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2} = \frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2} \Leftrightarrow \sqrt{q_1} |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = \sqrt{q_2} |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|$$

ma i due vettori sono antiparalleli e dunque \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \sqrt{q_1} (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) = -\sqrt{q_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \Leftrightarrow \vec{r}_3 (\sqrt{q_2} + \sqrt{q_1}) = \sqrt{q_1} \vec{r}_2 + \sqrt{q_2} \vec{r}_1$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}_3 = \frac{\sqrt{q_1} \vec{r}_2 + \sqrt{q_2} \vec{r}_1}{\sqrt{q_2} + \sqrt{q_1}}$$

Analogamente, per l'equilibrio di q_1

$$-\frac{q_1 q_2 \vec{j}}{|\vec{r}_{12}|^2} + \frac{q_1 q_3 \vec{j}}{|\vec{r}_{13}|^2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} + \frac{q_3}{|\vec{r}_{13}|^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$q_3 = q_2 \frac{|\vec{r}_{13}|^2}{|\vec{r}_{12}|^2} = q_2 \frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2}{|\vec{r}_{12}|^2} = q_2 \frac{\left| \vec{r}_1 - \frac{\sqrt{q_1} \vec{r}_2 + \sqrt{q_2} \vec{r}_1}{\sqrt{q_2} + \sqrt{q_1}} \right|^2}{|\vec{r}_{12}|^2} =$$

$$= \frac{q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \left| \frac{\vec{r}_1 (\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}) - (\sqrt{q_1} \vec{r}_2 + \sqrt{q_2} \vec{r}_1)}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} \right|^2 =$$

$$= \frac{q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \left| \frac{\vec{r}_1 \sqrt{q_1} - \sqrt{q_1} \vec{r}_2}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} \right|^2 = \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \left| \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} \right|^2 = \frac{q_1 q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}$$

☺

1.5.3 IL CAMPO DI DIPOLO

Il campo elettrico generato da un dipolo risulta essere direttamente proporzionale al momento di dipolo e inversamente proporzionale al cubo della distanza. La direzione modifica solo le costanti moltiplicative.

La dimostrazione generale è molto semplice ma richiede l'uso del potenziale e sarà svolta nei capitoli successivi.

Questo risultato va tenuto presente perché verrà utilizzato per spiegare la interazione tra le molecole (dipoli) e le nubi elettroniche di altre molecole.

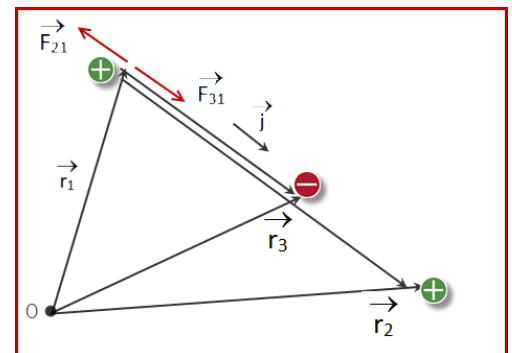
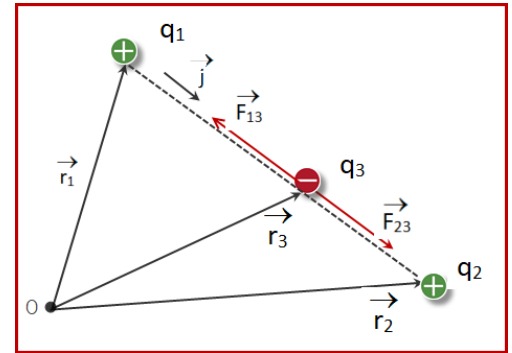
Si consiglia di eseguire per esercizio il calcolo lungo la direzione del dipolo e lungo l'asse del dipolo distanza $r \gg l$.

Si troverà rispettivamente:

$$E_{\parallel} = \frac{2p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad E_{\perp} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{V.1.10})$$

Inoltre è bene memorizzare l'andamento delle linee di forza già presentato nel paragrafo precedente e che presenta peculiarità da memorizzare sia in vicinanza sia in lontananza dalle cariche.

Il campo di dipolo va tenuto presente nelle applicazioni relative alle interazioni molecolari perché, pur essendo meno intenso di quello ionico,



sarà comunque in grado di determinare sia la nascita di nuovi dipoli sia la interazione con altri dipoli già esistenti.