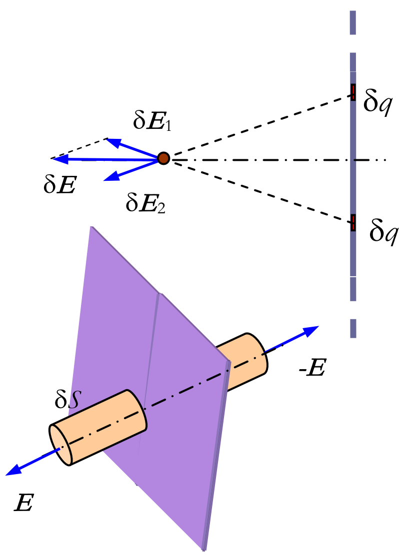
V.3 I condensatori e la misura della carica dell'elettrone

3.1 La capacità di un conduttore e il condensatore piano

3.1.1 IL CAMPO ELETTRICO DI UNA LASTRA PIANA INDEFINITA

Presentiamo in questo paragrafo una particolare proprietà dei corpi conduttori estesi e piani che trova poi applicazione relativamente ai condensatori.

Un conduttore piano con estensione molto elevata presenta un campo elettrico ortogonale alla superficie non solo in prossimità della superficie stessa. Considerato infatti un punto qualsiasi dello spazio, se lo proiettiamo sulla superficie otterremo un asse di simmetria rispetto al quale le cariche sono egualmente distribuite. Se consideriamo due cariche egualmente poste rispetto all'asse esse genereranno due campi per i quali si annulla ogni componente parallela alla superficie e si sommano le componenti ortogonali. Poiché questa operazione si può svolgere per l'intera superficie si otterrà in ogni punto un campo ortogonale alla superficie.



Campo di una piastra indefinita

$E = \text{cost} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$

A prima vista si potrebbe pensare che tale campo diminuisca man mano che ci si allontana dalla lastra ma non è così (o almeno non è così per le lastre di estensione infinita) e per vederlo basta applicare il teorema di Gauss ad un cilindro di area elementare δS ugualmente posto rispetto alla lastra e con altezza qualsiasi. Sulla circonferenza della piastra si troverà una carica $\delta q = \sigma \delta S$.

Il flusso attraverso tale cilindro è semplicemente la somma dei flussi attraverso le due basi del cilindro e pertanto:

$$\Phi_{\text{cil}} = \Phi_{\text{basi}} = 2\, E\, \delta S = \frac{\sigma \delta S}{\varepsilon}$$

se si ricava E si ha:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \qquad \text{(V.3.1)}$$

Si tratta di un risultato indipendente dalla distanza dalla piastra delle due basi del cilindro e dunque il campo creato è non solo perpendicolare alla piastra ma anche uniforme.

3.1.2 LA NECESSITÀ DI ACCUMULARE CARICHE ELETTRICHE

Il condensatore che oggi trova applicazioni essenzialmente in ambito elettronico è stato scoperto per caso a partire da una esigenza concreta. Nel corso del 700 le uniche sorgenti di elettricità disponibili si basavano su elettrizzazioni per induzione e per strofinio e corrispondevano a sorgenti di carica elettrica piuttosto limitate in grado di produrre fenomeni suggestivi ma di breve durata.

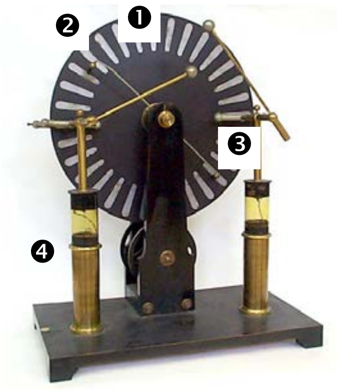
La disponibilità di grandi quantità di carica sarà risolto definitivamente da due scoperte che segneranno il passaggio dalla *elettricità delle scosse* alla elettricità delle applicazioni scientifiche e tecnologiche:

- l'invenzione della pila che produce energia elettrica partendo da energia legata al legame chimico e che aprirà le porte agli studi sul magnetismo
- la scoperta della induzione elettromagnetica che consentirà la conversione diretta di energia meccanica in energia elettrica.

Le macchine elettrostatiche del 700 producevano delle d.d.p. definite e abbastanza elevate tra due corpi conduttori che si caricavano rispettivamente con elettricità positiva e negativa ma le quantità di carica prodotte erano piuttosto esigue e, una volta raggiunta la d.d.p. tipica della macchina, non si aveva più accumulo di cariche.

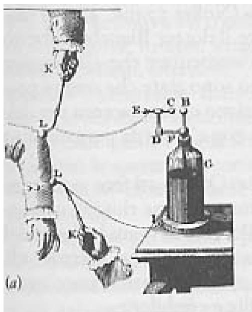
Si aveva però la necessità di disporre di sorgenti più continuative di quelle elettrostatiche anche per lo studio dei fenomeni allora indagati e poiché le teorie materialistiche settecentesche trattavano l'elettricità come un fluido si ipotizzò che attraverso una bottiglia si potesse immagazzinare tale fluido, come si fa con l'acqua.

Il primo condensatore era costituito da una bottiglia (*la bottiglia di Leida*) in cui veniva fatto entrare un conduttore che andava a toccare la parete interna e che doveva servire a trasferire il fluido elettrico dalla macchina alla bottiglia. La mano dello sperimentatore che impugnava la bottiglia faceva da seconda armatura del condensatore (ed era assolutamente fondamentale per il suo funzionamento, anche se la cosa non era nota). Si osservava che tale strumento (dopo essere stato caricato con una macchina elettrostatica) risultava in grado di dare effetti fisiologici o luminosi alla scarica più intensi e duraturi di quelli prodotti dalla macchina stessa. Era nato il primo condensatore.



La macchina di Wimshurst una delle macchie perfezionate dopo la scoperta del condensatore (i due cilindri in basso ❹)

E' costituita da due dischi di ebanite ❶ uguali, posti in un piano verticale ad una distanza molto piccola. Essi ruotano attorno allo stesso asse orizzontale in senso opposto e recano in prossimità del bordo un gran numero di striscioline di stagnola. Due coppie di spazzole fisse ❷ sfregano sui settori dell'uno e dell'altro disco elettrizzandosi per strofinio. La carica prodotta tramite le spazzole viene trasferita per induzione agli elettrodi attraverso due coppie di pettini metallici ❸ che abbracciano i dischi ad estremi opposti di un diametro orizzontale.



Bottiglia di Leyda in una stampa settecentesca utilizzata per produrre contrazioni muscolari tra il gomito e il polso

3.1.3 LA CAPACITÀ DI UN CONDUTTORE ISOLATO

Se consideriamo un conduttore isolato osserveremo che, man mano che lo si carica, il suo potenziale aumenta. Ciò significa che, man mano che il corpo viene caricato, risulta sempre più oneroso trasportare su di esso dell'altra carica. In effetti, al crescere della carica depositata sul conduttore aumenta il campo circostante e di conseguenza aumenta il potenziale.

Poiché $V \propto \mathscr{L} \propto E \propto Q$ (1) ne consegue che la carica sul conduttore e il potenziale del conduttore sono tra loro proporzionali. La costante di proporzionalità, con un ragionamento mutuato dal modello sulla elettricità come fluido, è stata chiamata *capacità del conduttore.*

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \text{(V.3.2)}$$

Capacità di un conduttore isolato $C = \frac{Q}{V}$

Il termine capacità è stato mutuato dalla capacità termica; così come si chiama capacità termica la costante di proporzionalità tra la quantità di calore e il suo livello (la variazione di temperatura) si chiama capacità elettrica il rapporto tra la carica accumulata e il suo livello (il potenziale).

[1] Si ricordi che il calcolo del potenziale di un punto si riduce al calcolo di un particolare lavoro connesso allo spostamento di una carica elementare dal punto considerato al riferimento, diviso per la carica trasportata. A sua volta il $\mathscr{L}$ è una grandezza integrale cioè è una somma di quantità in cui entra il campo nei diversi punti, ma poiché la proporzionalità tra Q ed E vale in tutti i punti dello spazio si può affermare che anche il lavoro è proporzionale alla carica.

Quando queste definizioni vengono proposte sia l'elettricità, sia il calorico vengono considerati due fluidi.

Sul piano puramente qualitativo possiamo osservare che la capacità dipenderà dalle caratteristiche geometriche del conduttore ed in particolare dalle sue dimensioni. Al crescere delle dimensioni la stessa carica elettrica determina una minore densità superficiale e quindi una diminuzione del campo elettrico. Ma se diminuisce il campo elettrico diminuisce anche il potenziale.

Affinché la grandezza appena definita abbia un significato univoco il conduttore deve essere lontano da altri corpi carichi e da conduttori anche scarichi. Infatti la presenza di corpi carichi (o di conduttori scarichi che si caricano per induzione) modifica il campo circostante e modifica di conseguenza il potenziale del corpo conduttore considerato.

3.1.4 L'unità di misura della capacità: il Farad

L'unità di misura della capacità nel S. I. è il *farad* pari alla capacità di un conduttore per il quale una variazione di carica di 1 Coulomb produce un cambiamento di potenziale di 1 Volt. Pertanto:

Il Farad e i sottomultipli

$$1\ \mathrm{F} = \frac{1\ \mathrm{C}}{1\ \mathrm{V}}$$

Il *farad* risulta però essere una unità eccessivamente grande (perché il Coulomb è una unità di carica grande) e nelle applicazioni di carattere elettronico si usano i suoi sottomultipli: il *microfarad* (1 μF = 10^{-6} F), il *nanofarad* (1 nF = 10^{-9} F) e il *picofarad* (1 pF = 10^{-12} F).

In effetti se si cerca di portare su di un conduttore di dimensioni ordinarie la carica di 1 C (cioè circa 10^{19} elettroni) il suo potenziale raggiunge valori di centinaia di milioni di V e ciò significa che la sua capacità (in Farad) è molto piccola.

3.1.4.1 La capacità della sfera conduttrice

Determinare la capacità di una sfera conduttrice di raggio *r*.

☹

Il potenziale della sfera, calcolato nel capitolo precedente, vale:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}$$

Una bottiglia di Leyda

La capacità vale pertanto:

$$C = 4\pi\varepsilon\, r$$

e poiché $4\pi\varepsilon$ in aria vale circa 10^{-10} abbiamo una chiara visione di come, misurate in farad, le capacità dei corpi siano espresse da numeri piccoli.

Il corpo umano è un conduttore e la sua capacità ha come ordine di grandezza le centinaia di picofarad.

☺

3.1.4.2 Capacità di una sfera circondata da un dielettrico

Determinare la capacità di una sfera conduttrice di raggio R_1 circondata da un dielettrico sferico di costante dielettrica relativa ε_r e raggio R_2

☹

Supponiamo di aver caricato con una carica q la sfera conduttrice; per definizione il potenziale corrispondente è $\underset{R_1\to\infty}{\mathcal{L}}(q)$ ma questo lavoro, per la presenza del dielettrico richiede di essere spezzato nella somma di due termini $R_1 \to R_2$ e $R_2 \to \infty$.

Si ricordi che il campo di una sfera conduttrice carica è assimilabile a quello di una corrispondente carica puntiforme.

$$\underset{R_1\to\infty}{\mathcal{L}}(q) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r^2}\,dr + \int_{R_2}^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,dr$$ [2]

$$V = \underset{R_1\to\infty}{\mathcal{L}}(q) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{1}{r^2}\,dr + \int_{R_2}^{\infty}\frac{1}{r^2}\,dr\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{R_2}\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{\varepsilon_r}{R_2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}(\varepsilon_r - 1))\right]$$

Indichiamo con $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ a questo punto la capacità C vale:

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}(\varepsilon_r - 1)} = 4\pi\varepsilon\frac{R_1R_2}{R_2 + R_1(\varepsilon_r - 1)} =$$

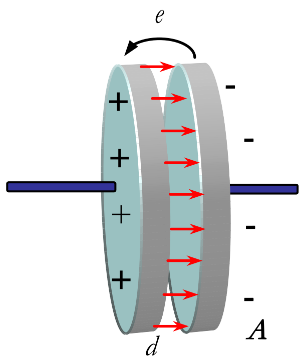
$$= 4\pi\varepsilon\frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}(\varepsilon_r - 1)}$$

☺

3.1.5 Il condensatore: un dispositivo progettato per avere alta capacità

Se si tiene presente che anche la presenza di conduttori scarichi modifica il campo di un conduttore carico (per effetto del fenomeno di elettrizzazione per induzione), ne consegue che la capacità di un conduttore è una grandezza poco utile dal punto di vista pratico, a causa della sua variabilità e dipendenza dal contesto considerato.

Esistono però sistemi di conduttori progettati in maniera da creare situazioni in cui lo stato elettrico non venga influenzato dalla presenza di altri corpi e contemporaneamente si realizzino capacità elevate: si tratta dei condensatori il più semplice dei quali (inventato da B. Franklin) è il condensatore piano.



Il condensatore piano: man mano che le cariche vengono trasferite da una armatura all'altra compare un campo elettrico tra le armature

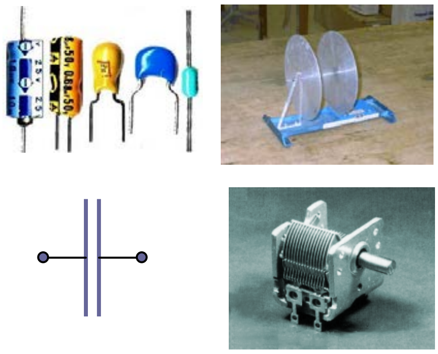
Si chiama *condensatore piano* un sistema costituito da una coppia di piastre metalliche piane poste l'una di fronte all'altra. Le due piastre sono anche dette *armature del condensatore.*

Indichiamo con A l'area delle due piastre e con d la distanza tra di esse che si suppone nettamente inferiore alla dimensione lineare delle piastre

---

[2] $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}$ e se F(x) è la funzione generata dall'integrale indefinito (operatore inverso della derivata) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

stesse. Sotto queste condizioni si può supporre che le piastre siano infinitamente grandi e trascurare la distorsione del campo alle due estremità.



❶ condensatori tipici per applicazioni elettroniche ❷ condensatore piano ad uso didattico ❸ simbolo del condensatore ❹ condensatore ad armature variabili utilizzato per la sintonizzazione delle stazioni negli apparecchi radiofonici

Il condensatore viene sempre caricato separando le cariche originariamente già presenti sulle armature in modo di violare la originaria condizione di neutralità ottenendo, alla fine, una carica Q e $-Q$ sulle due armature. Si può pensare ad un meccanismo di pompaggio in grado di spostare le cariche da una armatura all'altra attraverso le *pompe di elettricità* (i generatori) oppure di portare fisicamente una carica $+Q$ su una armatura mentre l'altra viene collegata a terra e ciò determinerà la comparsa su di essa di una carica $-Q$ (per induzione).

Il condensatore viene visto come un oggetto in grado di accumulare cariche elettriche sulle armature e la sua abilità nel realizzare l'obiettivo viene descritta attraverso il rapporto costante tra il risultato (la carica accumulata) e l'onere (la d.d.p. tra le armature). Un buon condensatore deve essere in grado di accumulare molta carica senza far aumentare troppo il campo tra le armature e, conseguentemente, la d.d.p.

Per questa ragione la definizione di capacità di un conduttore viene generalizzata e si pone:

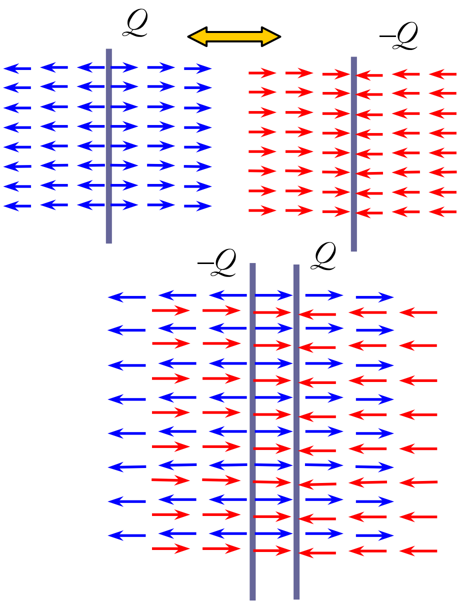
$$C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad \text{(V.3.3)}$$

Il fatto che il rapporto sia costante dipende, oltre che dalla proporzionalità già evidenziata relativamente ai conduttori, dal fatto che nei condensatori il campo tra le armature è così intenso da essere influenzato molto poco dalla presenza di altri corpi estranei al sistema.

Il simbolo del condensatore piano usato negli schemi elettrici è quello indicato in Figura. Ma i condensatori non sono solo particolari dispositivi progettati per realizzare una determinata funzione. Un qualsiasi corpo conduttore, considerato insieme ai corpi conduttori circostanti (compresa la terra), può sempre essere pensato come un condensatore a capacità distribuita nello spazio.

La presenza di questa capacità distribuita, in generale, crea difficoltà ai processi di trasmissione, e va sempre messa in conto nella progettazione di apparecchiature.

3.1.6 LA CAPACITÀ DEL CONDENSATORE PIANO



se si avvicinano due piastre indefinite cariche di segno opposto il campo si annulla all'esterno e raddoppia all'interno: nasce così il condensatore piano

Il condensatore piano può essere pensato come il risultato prodotto dall'avvicinamento di due piastre piane indefinite con carica di segno contrario che vengono accostate sino a disporsi parallelamente l'una all'altra.

Poiché non esistono piastre di dimensione infinita si introduce la condizione che la distanza sia trascurabile rispetto alle dimensioni delle piastre.

Se si avvicinano le due lastre nella zona compre tra di esse i due campi si sommano producendo una campo di intensità $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ mentre nelle zone esterne i due campi che hanno verso contrario si sommano annullandosi come si vede nella figura qui a lato.

La capacità di un condensatore piano dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche del condensatore stesso. In effetti, applicando la definizione di d.d.p. (che nel caso di campo uniforme porta a $E\ d$) e il valore del campo appena determinato si ha:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{E\ d} = \frac{A\ \sigma}{E\ d} = \varepsilon \frac{A}{d} \qquad \text{(V.3.4)}$$

Dunque per aumentare la capacità di un condensatore bisogna aumentare la superficie delle armature, usare sostanze di capacità dielettrica relativa più elevata, oppure diminuire la distanza. Ma la distanza non può essere ridotta a piacere perché esiste il limite della rigidità dielettrica.

Solitamente i condensatori vengono utilizzati in ambiti entro i quali la d.d.p. di funzionamento è fissata e, riducendo la distanza, a parità di condizioni si aumenta il campo. Se il campo supera la rigidità dielettrica il condensatore si perfora.

Vale la pena di spendere qualche parola a commento della (V.3.4) analizzandone il significato dal punto di vista delle grandezze fisiche coinvolte.

Al crescere di A, a parità di carica diminuisce σ e ciò fa diminuire il campo e dunque la d.d.p.. Se diminuisce d.d.p. aumenta C.

Al crescere di d aumenta a parità di condizioni la d.d.p. Se si usano mezzi di costante dielettrica elevata diminuisce E e dunque a parità di condizioni diminuisce la d.d.p.

Condensatori di capacità abbastanza elevata vengono prodotti utilizzando speciali sostanze polari e si riesce così ad arrivare a capacità del micro e del milli farad. Questi condensatori sono detti condensatori elettrolitici e, in virtù delle caratteristiche su cui sono progettati, possono funzionare solo con campi di tipo monodirezionale.

3.1.7 Esercizi di fine paragrafo

3.1.7.1 Perché le cariche si addensano sulle zone di grande curvatura?

Si consideri il seguente modello in grado di spiegare la concentrazione delle cariche nelle zone di grande curvatura. Sono date due sfere conduttrici di raggio di curvatura r_1 e r_2 molto distanti tra loro e unite da un sottile filo conduttore. Dimostrare che le densità di carica sono inversamente proporzionali al raggio di curvatura.

☹

Quando le due sfere vengono collegate le cariche su di esse si ridistribuiscono in modo di formare una unica superficie equipotenziale di potenziale V.

Pertanto potremo scrivere che: $\frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1}{C_2}$

D'altra parte se le due sfere sono sufficientemente distanti esse possono essere considerate come sfere cariche di capacità $C = 4\pi\varepsilon r$ e pertanto

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

In base alla definizione di densità superficiale sarà dunque:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1}{S_1}\frac{S_2}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_2}{r_1}$$

La densità di carica è inversamente proporzionale al raggio di curvatura

☺

3.1.7.2 Distribuzione di carica tra due conduttori posti a contatto

Due sfere distanti di raggi di curvatura r_1 = 10 cm e r_2 = 15 cm sono cariche positivamente con carica $q_1 = 1.20 \cdot 10^{-8}$ C e $q_2 = 1.50 \cdot 10^{-8}$ C e vengono collegate da un sottile filo conduttore. Determinare la distribuzione di carica che si determina dopo l'andata all'equilibrio e il potenziale a cui si portano le due sfere. Da questo dato dedurre la capacità del sistema.

☹

Indichiamo con q_1' e q_2' i valori delle cariche dopo la connessione. Poiché una volta raggiunto l'equilibrio le due sfere si trovano allo stesso potenziale sarà:

$$\frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_2'}{C_2} \text{ ovvero } \frac{q_1'}{4\pi r_1} = \frac{q_2'}{4\pi r_2}$$

Dunque $q_2' = q_1' \dfrac{r_2}{r_1} = 1.5\ q_1'$

Inoltre, per il principio di conservazione della carica deve essere:

$q_2' + q_1' = 2.70 \cdot 10^{-8}$ C

Ne segue dalle due equazioni che:

$2.5 \cdot q_1' = 2.70 \cdot 10^{-8}$ e dunque $q_1' = 1.08 \cdot 10^{-8}$ C e $q_2' = (2.70 - 1.08) \cdot 10^{-8}$ C $= 1.62 \cdot 10^{-8}$ C

Il potenziale comune è pari a:

$$V = k\frac{q_1'}{r_1} = 8.99 \cdot 10^9 \frac{1.08 \cdot 10^{-8}}{0.10} = 972 \text{ V}$$

La capacità del sistema è data dalla carica totale divisa per il potenziale e vale:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{2.70 \cdot 10^{-8}}{972} = 2.78 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

☺

3.1.7.3 Aggregazione di un conduttore liquido

Due gocce di mercurio vengono caricate in maniera identica e ciascuna si porta ad un potenziale V quando le due gocce sono così distanti da non risentire della azione reciproca. Le due gocce vengono forzate ad unirsi in una unica goccia sfruttando le forze di coesione del mercurio. Determinare a che potenziale si porta la goccia così formata.

☹

Indichiamo con r e con C rispettivamente il raggio di curvatura e la capacità di ciascuna goccia.

Quando le gocce si uniscono si ha $q' = 2q$ mentre poiché il volume raddoppia ed esso è proporzionale al raggio al cubo si ha $r' = \sqrt[3]{2}\, r$

Ne consegue che (essendo la capacità di una sfera proporzionale al suo raggio) $C' = \sqrt[3]{2}\, C$

Per quanto riguarda il potenziale si ha: $V' = \dfrac{q'}{C'} = \dfrac{2q}{\sqrt[3]{2}\, C} V = 2^{2/3}\, V$

☺

3.1.7.4 Capacità di un condensatore piano

A riprova del fatto che il Farad è una unità molto grande calcoliamo la capacità di un condensatore piano di superficie A = 1 m^2, distanza $d = 10^{-3}$ m con dielettrico in mica $\varepsilon_r = 5$

☹

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} = 5\times 8.85\times 10^{-12} \frac{1}{10^{-3}} \approx 4.6\times 10^{-8}\text{ F}$$

☺

3.1.7.5 Caratteristiche di funzionamento e costruttive di un condensatore piano

Un condensatore piano collegato ad una d.d.p. ΔV = 40.0 V accumula una carica q = 1.50 μC. a) Determinare la capacità C b) Sapendo che l'isolante è teflon (ε_r = 2.20) dello spessore d = 0.250 mm determinare la superficie σ delle armature c) Sapendo che il campo elettrico massimo E_M che il teflon è in grado di sopportare è pari a 200 kV/cm quanto vale la d.d.p. massima ΔV_M cui il condensatore può funzionare senza bruciare?

☹

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{1.50\cdot 10^{-6}}{40.0} = 3.75\cdot 10^{-8}\text{ F}$$

$$C = \varepsilon_r\varepsilon_0 \frac{\sigma}{d} \text{ pertanto } \sigma = \frac{Cd}{\varepsilon_r\varepsilon_0} = \frac{3.75\cdot 10^{-8}\cdot\ 0.250\cdot 10^{-3}}{2.20\cdot 8.85\cdot 10^{-12}} = 0.482\text{ m}^2$$

$\Delta V_M = E_M\cdot d = 200\cdot 10^3\cdot 0.250\cdot 10^{-1}$ = 5'000 V il valore può essere indicato senza molte cifre significative perché si tratta di un valore di larga massima su cui non si possono pretendere considerazioni di precisione.

☺

3.1.7.6 Caratteristiche di funzionamento e costruttive di un condensatore piano

Un condensatore piano ha una delle due armature collegata a terra e viene caricato sino a portarsi alla d.d.p. ΔV = 40.0 V. La distanza tra le armature d = 5.00 cm quando tra le armature viene inserita una lastra piana metallica di spessore trascurabile ad una distanza d' = 3.00 cm dalla armatura posta a terra. Determinare il potenziale a cui si porta la piastra metallica interna, come si ripartisce il campo elettrico nelle due zone che si vengono a creare. Stabilire infine se la capacità del condensatore cambia oppure no.

☹

La lastra metallica si carica per induzione con cariche di segno opposto ad una carica uguale a quella già presente sulle armature; ne consegue, per il teorema di Coulomb che non cambia il campo elettrico tra le armature.

Ma ciò comporta la formazione di due d.d.p. ΔV_1 e ΔV_2 proporzionali alle distanze in cui viene ripartita la distanza d.

Si ha precisamente:

$$\Delta V_1 = \Delta V \frac{3.00}{5.00} = 24\text{ V}$$

$$\Delta V_2 = \Delta V \frac{2.00}{5.00} = 16\text{ V}$$

Poiché non cambiano né la carica né la d.d.p. non cambia nemmeno la capacità.

☺

3.1.7.7 Un condensatore piano con due dielettrici diversi

Un condensatore piano ha tra le armature due dielettrici diversi posti uno dopo l'altro. Indicate con ε_1 e ε_2 le due costanti dielettriche e con d_1 e d_2 i due spessori discutere il funzionamento del dispositivo. Quindi determinare la relazione tra gli spessori e le costanti dielettriche che consente una eguale distribuzione della d.d.p.

☹

Sulle due armature la carica è la stessa ed è pertanto la stessa anche la densità superficiale. Il campo elettrico nelle due regioni presenta invece due valori diversi in base al teorema di Coulomb e vale:

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} \text{ e } E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$$

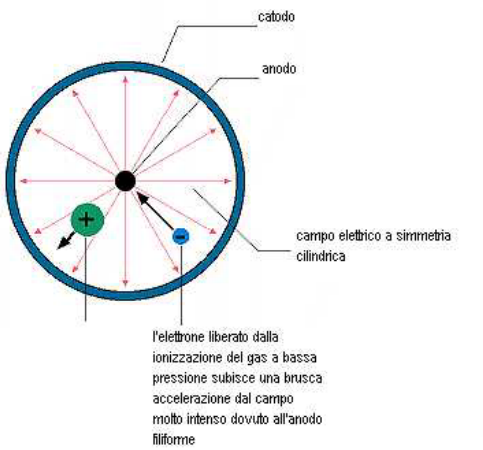
Pertanto sono diverse anche le d.d.p. agli estremi dei due dielettrici e poiché nei campi uniformi $\Delta V = E\, d$ si ha:

$$\frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{E_1\, d_1}{E_2\, d_2} = \frac{\varepsilon_2\, d_1}{\varepsilon_1\, d_2}$$

Dunque le d.d.p. diventano uguali quando gli spessori sono inversamente proporzionali alle d.d.p.

☺

3.1.7.8 Un condensatore a campo radiale che fa da rivelatore di particelle



Il condensatore piano non è il solo tipo di condensatore possibile. Se per esempio si considera un cilindro metallico cavo e, in corrispondenza dell'asse di simmetria, si pone un filo metallico sottile si ottiene un particolare condensatore caratterizzato da un campo radiale molto intenso in corrispondenza del filo centrale (zona di curvatura elevata).

Una configurazione del genere realizzata in condizioni prossime alla scarica disruptiva viene utilizzata per costruire i più semplici rivelatori di particelle. Quando una particella proveniente dall'esterno entra nella zona di campo intenso ionizza il dielettrico (gas) che si trova già prossimo alla scarica e si ha una brusca scarica che, opportunamente segnalata, diviene un indicatore del passaggio della particella.

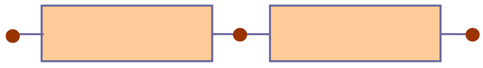
3.2 Il collegamento in serie e parallelo dei condensatori

3.2.1 IL CONCETTO DI BIPOLO

Nelle applicazioni fisiche e tecnologiche capita frequentemente di studiare fenomeni e processi caratterizzabili attraverso un modello costituito da *scatola nera* dotata di due estremità (a volte dotate di polarità, cioè di un ingresso ed una uscita, altre volte simmetriche).

Una scatola del genere è detta *bipolo*. Tra i dispositivi studiati fino ad ora sono dei bipoli i condensatori e le molle, ma incontreremo anche i generatori, le resistenze e le induttanze con caratteristiche analoghe.

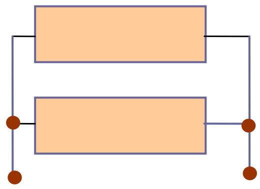
Dati due bipoli essi possono essere collegati tra loro, a livello elementare, secondo due modalità:



collegamento in serie: i bipoli si seguono uno dietro l'altro; si crea un unico percorso

collegamento in serie: è quello nel quale la uscita del primo si connette all'ingresso del secondo e si può dunque realizzare un percorso dotato di un inizio ed una fine (percorso sequenziale).

collegamento in parallelo: è quello nel quale si connettono insieme tutte le estremità di ogni lato creando delle diramazioni di percorso.



collegamento in parallelo: i bipoli connettono insieme gli estremi; si creano delle diramazioni

Si osservi che il collegamento in serie e in parallelo sono ampiamente usati anche nel mondo della produzione: il primo è quello della *specializzazione* ed è altamente critico perché una sola interruzione blocca l'intero processo; il secondo è quello della *cooperazione*, ognuno fa le stesse operazioni contemporaneamente.

Dal caso di due bipoli, che studieremo per semplicità, i concetti si generalizzano naturalmente al caso di *n* bipoli.

3.2.2 IL CONCETTO DI GRANDEZZA TOTALE OD EQUIVALENTE IN UN COLLEGAMENTO DI BIPOLI

Supponiamo che i nostri bipoli siano caratterizzati da una grandezza α definita come rapporto costante tra due grandezze x e y e che tali grandezze si comportino diversamente nei due tipi di collegamento.

In un tipo di collegamento la prima si somma e la seconda rimane costante, nel secondo collegamento accade il contrario.

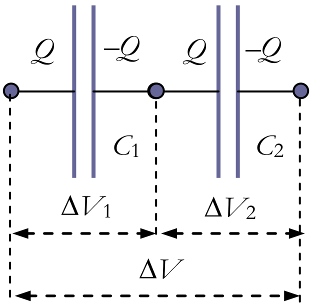
$$\alpha = \frac{x}{y} \qquad \text{(V.3.5)}$$

Per esempio, nel caso dei condensatori collegati in serie la carica Q è la stessa su tutti i condensatori (basta pensare al processo di carica per rendersene conto) mentre le d.d.p. sono diverse poiché sono diverse le capacità.

Nel collegamento in parallelo, invece, gli estremi dei condensatori sono collegati ad un unico conduttore e dunque la d.d.p. è la stessa, conseguentemente, se sono diverse le capacità sono diverse anche le cariche sulle armature.

Si chiama *valore equivalente della grandezza* α in un collegamento di due o più bipoli quel valore corrispondente ad un solo bipolo funzionante con gli stessi valori di x e di y.

3.2.3 LA CAPACITÀ TOTALE NEL COLLEGAMENTO IN SERIE



collegamento in serie

$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$

Dati due condensatori di capacità C_1 e C_2 su cui si deposita una carica Q dando luogo a due d.d.p. ΔV_1 e ΔV_2 diverse, la capacità equivalente nel collegamento in serie è la capacità di un singolo condensatore che garantisca la stessa Q con la d.d.p. $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$.

$$\frac{1}{C} = \frac{\Delta V}{Q} = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{Q} = \frac{\Delta V_1}{Q} + \frac{\Delta V_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$ [3]

In generale si ha dunque:

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} \qquad \text{(V.3.6)}$$

Nel caso particolare in cui le capacità siano solo 2 la (V.3.6) assume la espressione più semplice (e facile da memorizzare)

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \qquad \text{(V.3.7)}$$

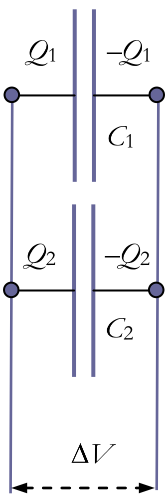
Si osservi che, poiché collegando in serie dei condensatori, a parità di Q si ha sempre un aumento di d.d.p. ne consegue che, essendo la d.d.p. inversamente proporzionale alla capacità, la capacità diminuisce sempre.

Ci si potrebbe chiedere, a questo punto, a cosa serva il collegamento in serie, visto che ha come effetto una diminuzione di capacità.

Come si è già osservato al paragrafo precedente ogni condensatore ha un valore limite di d.d.p. a cui è in grado di lavorare, superato il quale il condensatore si perfora.

Il collegamento in serie serve appunto a superare questa limitazione perché la d.d.p. di potenziale viene ripartita tra i diversi condensatori in maniera inversamente proporzionale alla loro capacità.

3.2.4 LA CAPACITÀ TOTALE NEL COLLEGAMENTO IN PARALLELO



collegamento in parallelo

$C = \sum C_i$

Dati due condensatori di capacità C_1 e C_2 cui viene applicata la stessa d.d.p. ΔV e su cui si depositano due cariche diverse Q_1 e Q_2, la capacità equivalente nel collegamento in parallelo è la capacità di un singolo condensatore che garantisca la stessa ΔV con carica $Q = Q_1 + Q_2$.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V} = \frac{Q_1}{\Delta V} + \frac{Q_2}{\Delta V} = C_1 + C_2$$

In generale si ha dunque:

$$C = \sum C_i \qquad \text{(V.3.8)}$$

Collegando in parallelo dei condensatori la capacità equivalente aumenta sempre, perché ciò equivale ad aumentare la carica a parità di d.d.p.

Nel caso particolare in cui i condensatori collegati sono tutti uguali le espressioni per il calcolo della capacità equivalente si semplificano notevolmente e si ha: $\frac{C}{n}$ nel collegamento in serie e $n\,C$ nel collegamento in parallelo.

---

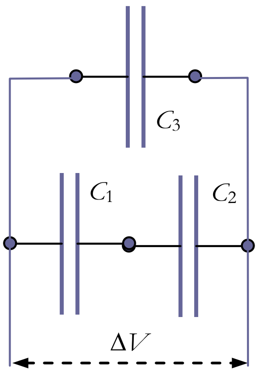
[3] Si è lavorato con $\frac{1}{C}$, invece che con C, per poter utilizzare la proprietà di decomposizione delle frazioni che come è noto funziona solo quando la somma si presenta al numeratore

3.2.5 ESEMPI DI ANALISI E SINTESI

Nei problemi di analisi la configurazione di collegamento è data ed applicando le leggi sul collegamento bisogna determinare la grandezza equivalente e le singole grandezze elettriche del circuito.

3.2.5.1 Calcolo di una capacità equivalente nel collegamento in parallelo

Sono dati 3 condensatori $C_1 = 2.00\ \mu$F, $C_2 = 3.00\ \mu$F, $C_3 = 1.50\ \mu$F con C_3 in parallelo alla serie di C_1 e C_2. Al circuito viene applicata una d.d.p. $\Delta V = 150$ V. Determinare la capacità equivalente e la carica e la d.d.p. ai capi di ogni condensatore.



☹

$$C_{12} = \frac{C_1\,C_2}{C_1+C_2} = 1.20\ \mu\text{F} \qquad C_{eq} = C_{12} + C_3 = 2.70\ \mu\text{F}$$

$$Q_3 = C_3\,\Delta V = 1.50\cdot10^{-6}\cdot150 = 2.25\cdot10^{-4}\text{C}$$

$$Q_{eq} = C_{eq}\,\Delta V = 2.70\cdot10^{-6}\cdot150 = 4.05\cdot10^{-4}\text{C}$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_{eq} - Q_3 = 1.80\cdot10^{-4}\text{C}$$

$$\Delta V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{1.80\cdot10^{-4}}{2.00\cdot10^{-6}} = 90.0\ \text{V}$$

$$\Delta V_2 = \Delta V - \Delta V_1 = 60.0\ \text{V}$$

Nei problemi di sintesi bisogna invece stabilire la configurazione di collegamento sulla base del soddisfacimento di un obiettivo prestabilito.

☺

Come collegare condensatori di caratteristiche di etichetta fissate

Si dispone di 4 condensatori con capacità identiche $C = 2.5\ \mu F$ e con delle differenze di potenziale di lavoro di 100 V. I condensatori devono essere collegati ad una sorgente di d.d.p. $\Delta V = 150$ V. Stabilire come collegarli in modo che i condensatori non brucino e la capacità equivalente non diminuisca.

☹

Per evitare che i condensatori brucino bisogna collegarli in serie. Collegandone due in serie si ottiene un condensatore di capacità C' = ½ C e, ad ogni condensatore risultano applicati 75 V.

Se si fa lo stesso lavoro anche per gli altri due e poi si collegano le due coppie in parallelo si ottiene un condensatore equivalente di capacità doppia di C', cioè C e ad ogni condensatore della quaterna sono applicati 75 V.

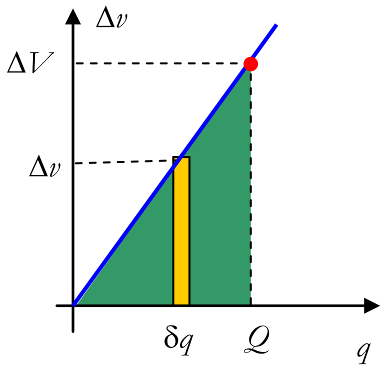
Se ne avessimo collegati 3 in parallelo tra loro e uno in serie ad essi la capacità $C_{123} = 3C$ e C_{1234} sarebbe stata $\frac{3C\ C}{3C + C} = 3/4\ C$ più bassa che nel caso precedente. Inoltre poiché la d.d.p. si ripartisce in modo inversamente proporzionale alla capacità avremmo avuto 3/4 di 150 V sul C_4 e 1/4 di 150 V sui 3 condensatori in parallelo.

☺

3.3 L'energia del condensatore carico e la densità di energia del campo elettrico

3.3.1 L'energia di carica del condensatore

Ci proponiamo di stimare l'energia elettrica immagazzinata in un condensatore carico. Per calcolare tale valore è sufficiente calcolare il lavoro compiuto per caricarlo e poiché le forze elettriche sono conservative possiamo percorrere il cammino più semplice.



Il calcolo dell'energia di carica corrisponde all'area del diagramma e così compare il fattore ½

Ipotizziamo cioè di trasportare delle cariche elementari δq lungo la linea di forza del campo elettrico che si viene a potenziare man mano che la dislocazione procede, calcoliamo i vari lavori elementari sino al raggiungimento della carica Q e poi li sommiamo per trovare il lavoro compiuto dalle forze del campo.

Man mano che il processo di carica procede aumenta la d.d.p. tra le armature, ma la relazione tra carica accumulata e d.d.p. è molto semplice, le due grandezze sono proporzionali e la costante di proporzionalità è la capacità del condensatore.

Se rappresentiamo la relazione tra q e ΔV su un sistema d'assi avremo una retta passante per l'origine come in Figura.

Il lavoro elementare $\delta\mathscr{L}$ è dato da $\delta q\ \Delta v$ per definizione di d.d.p. ma tale prodotto è pari all'area del rettangolo elementare in giallo. Pertanto il lavoro compiuto per caricare il condensatore, cioè l'energia di carica $\mathscr{E}$ vale:

$$\mathscr{E} = \mathscr{L} = \text{area} = \frac{1}{2} Q\, \Delta V$$

Se si tiene conto della definizione di capacità la espressione appena trovata si può scrivere in tre forme equivalenti:

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} Q\, \Delta V = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C\, \Delta V^2 \qquad \text{(V.3.9)}$$

3.3.2 Dove va a finire l'energia di carica?

Se ci si limita a considerazioni di natura elettrostatica è impossibile stabilire dove sia concentrata l'energia elettrostatica: se sui corpi carichi o nello spazio circostante.

Ma nel caso di campi variabili si ha a che fare con campi che possono esistere indipendentemente dalle cariche; si tratta di campi che possono propagarsi sotto forma di onde elettromagnetiche e che trasportano energia; pertanto l'energia deve essere associata al campo stesso.

Questa ipotesi fu avanzata per la prima volta da Maxwell. Egli introdusse anche il concetto di *densità di energia u associata ad un elemento di volume* $\delta\mathscr{V}$:

$$u = \frac{\delta\mathscr{E}}{\delta\mathscr{V}}$$

Se ci riferiamo al caso del condensatore piano, nel quale l'energia è uniformemente distribuita a causa del campo uniforme di volume $\mathscr{V} = A\, d$ e applichiamo la (V.3.9) avremo che:

$$u = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{U}} = \frac{C\,\Delta V^2}{2A\,d} = \frac{\varepsilon\,A\,E^2\,d^2}{d\,2A\,d} = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,E^2 \qquad \text{(V.3.10)}$$

La relazione trovata in questo caso particolare ha una validità generale per i campi elettromagnetici che si propagano nel vuoto: *la densità di energia, di solito associata alla intensità del fenomeno è proporzionale al quadrato della ampiezza del campo elettrico associato.*

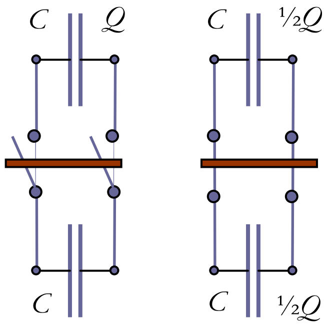
L'argomento verrà ripreso trattando delle onde elettromagnetiche per le quali la densità di energia verrà associata ad una grandezza nota come *intensità dell'onda*.

3.3.3 ESERCIZI DI FINE PARAGRAFO

3.3.3.1 Che fine fa l'energia?

Un condensatore di capacità *C* viene caricato con una carica *Q*. Ad un istante predeterminato il condensatore carico viene collegato in parallelo ad un condensatore scarico e identico sino a creare una nuova configurazione di equilibrio. Calcolare la energia elettrostatica cumulata prima e dopo il collegamento; commentare il risultato trovato.

☹



Quando l'interruttore viene chiuso la carica si distribuisce tra i due condensatori ripartendosi a metà. e pertanto la d.d.p. ai capi dei due condensatori si dimezza rispetto a quella originale.

Prima della chiusura dell'interruttore si aveva immagazzinata una energia elettrostatica:

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C}$$

Dopo la chiusura si ha:

$$\mathcal{E}\,' = 2\,\frac{(\frac{1}{2}Q)^2}{2C} = \tfrac{1}{2}\,\mathcal{E}$$

Che fine fa l'energia immagazzinata?

La risposta non può essere data per via elettrostatica. Durante la fase di andata all'equilibrio si ha una brusca accelerazione delle cariche presenti nel primo condensatore: si crea una corrente elettrica più o meno rapidamente variabile e l'energia mancante prende due strade: in parte viene dissipata sotto forma di calore nei conduttori che consentono la connessione, in parte viene emessa sotto forma di onde elettromagnetiche.

3.3.3.2 Cosa succede in un condensatore carico e isolato quando si cambia il dielettrico?

Si consideri un condensatore piano e si indichino con *C*, S e d la capacità, la superficie delle armature e la distanza. Supponiamo che il condensatore sia stato caricato alla carica *Q*. Cosa accade se un dielettrico solido di costante relativa ε_r viene inserito al posto del vuoto tra le armature?

☺

Accadono due cose diverse a seconda che il condensatore sia o meno collegato ad un generatore.

Nel primo caso la d.d.p. è fissata dalle caratteristiche del generatore e pertanto visto che cambia la capacità, per il cambiamento di costante dielettrica cambierà anche la carica sulle armature.

$C \propto \varepsilon_r$ e poiché $q \propto C$ ne consegue che la carica cambia in modo proporzionale a ε_r

In questo caso la energia immagazzinata aumenta e l'ulteriore energia è fornita dal generatore.

Se invece il condensatore è isolato per effetto dell'inserimento del dielettrico non cambia la carica sulle armature ma cambia il campo elettrico perché $E \propto 1/\varepsilon_r$. Ma anche $\Delta V \propto E$ e pertanto la d.d.p. cambia in ragione inversa con la costante dielettrica.

Domanda per il lettore: se diminuisce la d.d.p. senza che cambi la carica diminuisce anche la energia immagazzinata. Che fine fa questa energia?

Suggerimento: il dielettrico viene risucchiato per via elettrostatica dal condensatore.

☺

3.3.3.3 Quanta energia meccanica bisogna fornire per allontanare le armature di un condensatore carico?

Su un condensatore piano e carico vengono allontanate le armature in modo di far passare la capacità da C a C' (C' < C). Determinare come cambia la energia elettrostatica immagazzinata e dedurre da ciò il lavoro necessario ad allontanare le armature.

Considerato un condensatore di capacità $C = 2.5 \cdot 10^{-6}$ F con una distanza $d = 2.2$ mm che è stato caricato con una d.d.p. $\Delta V = 2'500$ V stabilire di quanto cambia la energia quando viene portata la distanza al valore $d' = 3.9$ mm. Calcolare anche il nuovo valore della d.d.p.

☺

Delle tre forme attraverso cui si può esprimere la energia del condensatore conviene utilizzare quella contenente i parametri coinvolti e cioè $\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C}$ infatti nel caso considerato cambia la capacità mentre non cambia la carica sulle armature.

Si ha dunque:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C'} - \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C'} - \frac{1}{C}\right) > 0$$

A questo aumento di energia immagazzinata deve corrispondere un equivalente lavoro meccanico (uguale e contrario al lavoro elettrico) necessario per allontanare le armature che per azione elettrostatica si attirano.

Poiché in un condensatore, a parità di condizioni, $C \propto 1/d$ si ha che:

$$C' = C\frac{d}{d'} = 2.5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2.2}{3.9} = 1.41 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

La carica sulle armature vale $Q = C \cdot \Delta V = 2.5 \cdot 10^{-6} \cdot 2'500 = 6.25 \cdot 10^{-3}$ C a cui corrisponde una energia

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(6.25 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 2.5 \cdot 10^{-6}} = 7.8 \text{ J}$$

$$\mathcal{E}' = \frac{Q^2}{2C'} = \frac{(6.25 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 1.41 \cdot 10^{-6}} = 13.9 \text{ J}$$

$\Delta\mathcal{E} = 13.9 - 7.8 = 6.1$ J.

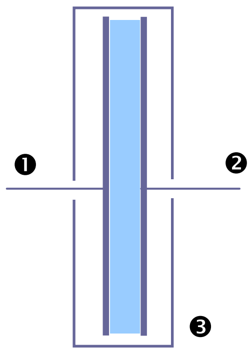
Infine $\Delta V' = \dfrac{Q}{C'} = \dfrac{6.25\cdot10^{-3}}{1.41\cdot10^{-6}} = 4'430$ V

☺

3.3.3.4 Chiudiamo un condensatore in una scatola conduttrice

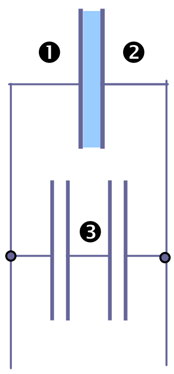
Un condensatore piano è costituito da due piastre metalliche di superficie S = 3.50 m^2 separate da una lastra di vetro (ε_r = 7.0) dello spessore d = 2.00 mm. Cosa accade alla capacità del condensatore se esso viene racchiuso in un contenitore metallico le cui pareti distano 1.5 mm dalle armature?

Dopo aver calcolato il nuovo valore della capacità calcolare la variazione relativa di energia che si realizza quando il condensatore carico viene posto nel contenitore. Infine discutere cosa accade al crescere della d.d.p. (rigidità dielettrica del vetro 50 kV/mm e dell'aria 2.4 kV/mm).☹



Le due armature del condensatore vengono a formare con le pareti del contenitore altri due condensatori ad aria che risultano collegati come nella figura qui a lato e cioè in serie tra loro ed in parallelo al condensatore originario e pertanto si determinerà un aumento della capacità complessiva. La capacità del condensatore originario C vale:

$$C = \varepsilon\frac{S}{d} = 7.0\cdot8.85\cdot10^{-12}\frac{3.50}{2.00\cdot10^{-3}} = 1.08\cdot10^{-7}\text{ F}$$



I due condensatori in aria tenendo conto del ruolo della costante dielettrica relativa e della proporzionalità inversa con la distanza hanno invece una capacità

$$C' = C\frac{d}{\varepsilon_r\, d'} = 1.08\cdot10^{-7}\,\frac{2.0}{1.5\cdot7.0} = 0.21\cdot10^{-7}\text{F}$$

Il condensatore prodotto dalla scatola metallica ha dunque una capacità $C'' = \frac{1}{2}C' = 0.10\cdot10^{-7}$ F

mentre l'intero sistema ha una capacità equivalente

$C_{eq} = C + C'' = 1.18\cdot10^{-7}$ F

Quando il condensatore è carico la sua energia vale:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}C\,\Delta V^2$$

e dopo l'inserimento nella scatola cambia la carica sulle armature ma non muta la d.d.p. e pertanto:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{\Delta C}{C} = \frac{0.10\cdot10^{-7}}{1.08\cdot10^{-7}} = 0.092 = 9.2\ \%$$

Supponiamo ora di aumentare la d.d.p. ai capi e confrontiamo i campi elettrici nel vetro e nell'aria tenendo conto della proporzionalità inversa con lo spessore a parità di d.d.p. e dalla costante dielettrica relativa (proporzionalità inversa); si ha così:

$$\frac{E_v}{E_a} = \frac{1}{\varepsilon_r}\frac{d_a}{d_v} = \frac{3.00}{7.0\cdot2.0} = 0.2$$

Il campo nel vetro è il 20% di quello in aria e tenuto conto della rigidità dielettrica più alta la scarica avverrà in aria.

☺

3.4 L’esperimento di Millikan e la determinazione della carica dell'elettrone

3.4.1 IL CONTESTO

Già negli anni 30 dell’800 M. Faraday, in base all'analisi delle leggi dell'elettrolisi da lui scoperte (e che saranno esaminate nei capitoli dedicati alla conduzione), giunse alla conclusione che dovesse esistere ciò che lui chiamava *atomo di elettricità*, cioè un qualche genere di carica elettrica elementare.


J. J. Thomson


Lenard

con i loro lavori sperimentali sui raggi catodici aprono l'era dell'elettrone

Questa ipotesi venne formulata più esplicitamente nel 1874 da G. J. Stoney (1826-1911) e nel 1881 da H. von Helmholtz (1821-1894). Nel 1891 Stoney chiamò questa carica elementare *elettrone*.

Alla fine del secolo J. J. Thomson (1856-1940), P. Lenard (1862-1947), W. Kaufmann (1871-1947) e J. Perrin, mostrarono che i *raggi catodici*, particelle emesse dai metalli quando vengono riscaldati o sottoposti a campi intensi o irradiati, e le particelle beta emesse da certe sostanze radioattive avevano proprietà simili. Si trovò che erano tutte cariche negativamente e che il loro rapporto carica/massa era lo stesso e valeva all'incirca 10^{11} C/kg.

Divenne pian piano chiaro che tutti quei diversi tipi di radiazione erano in realtà particelle di uno stesso tipo, elettroni, ottenute in maniera diversa e ci si pose allora il problema di determinare la carica e la massa di quelle particelle con la massima accuratezza possibile.

La descrizione dettagliata e discussione dell’esperimento di J.J. Thomson viene data nel capitolo dedicato al moto delle particelle in campi magnetici.

3.4.2 DESCRIZIONE DELL’ESPERIMENTO


Millikan

Il metodo utilizzato da R. A. Millikan (1868-1953) si basò sulla osservazione del movimento di una particella microscopica elettricamente carica all'interno di un campo elettrico uniforme (si tratta dell'esperimento noto come *esperimento della goccia d'olio*). [4]

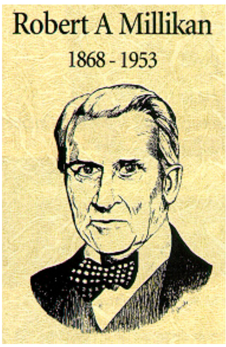
La particolarità della esperienza di Millikan sta nei seguenti elementi:

- l’esperimento deve corroborare la esistenza di granuli di elettricità e successivamente indicarne un valore con un buon livello di precisione
- i granuli di elettricità sono di dimensioni estremamente ridotte, invisibili all’occhio umano, e bisogna però fare in modo che gli effetti dinamici da essi indotti siano osservabili individualmente e non statisticamente
- la esperienza costituisce un buon esempio di quella opinione epistemologica secondo cui quando si effettua un esperimento ciò che viene sottoposto a controllo non è mai una singola affermazione ma piuttosto un insieme di affermazioni racchiuse in una teoria (mentre

[4] Una accurata ricostruzione dell'esperimento di Millikan e di tutte le problematiche di contorno connesse al dibattito con il programma di ricerca alternativo teso a stabilire il carattere non granulare ma continuista della elettricità si può trovare in G. Holton *L'immaginazione scientifica* ed. Einaudi al capitolo intitolato *subelettroni, presupposti e la disputa Millikan-Ehrenhaft.*

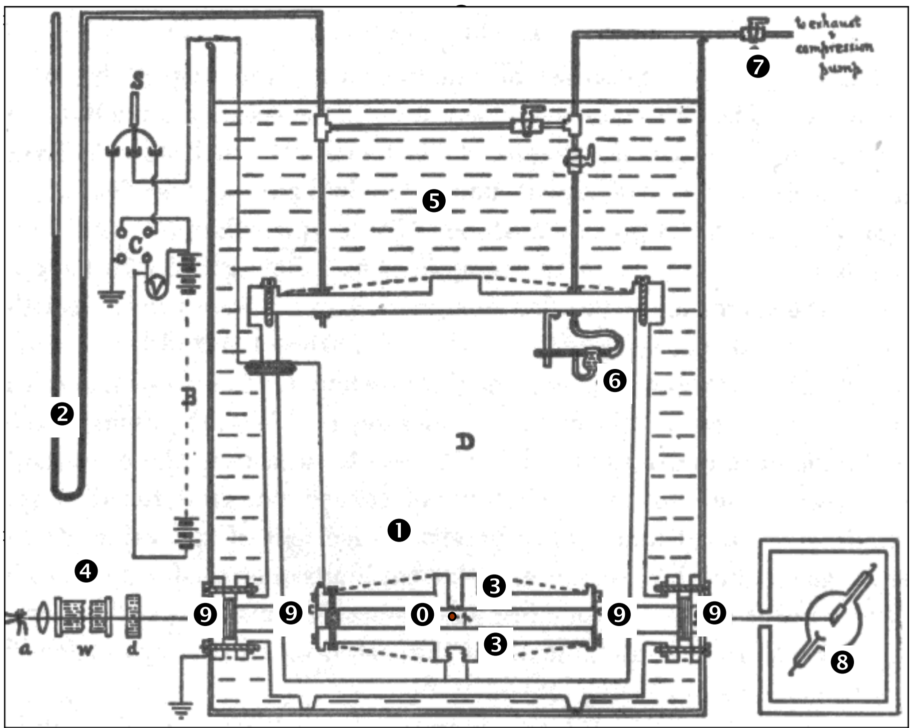
si analizza il dettaglio dell'esperimento si provi a riflettere sul numero elevato di ipotesi, a volte neanche esplicitate, che si introducono)

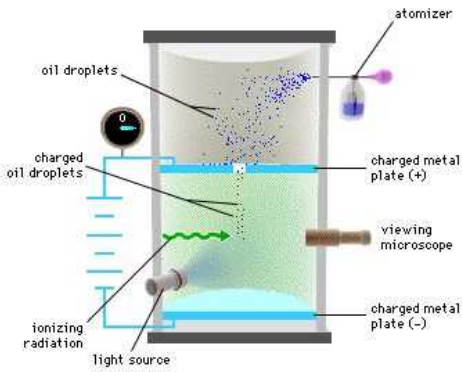
- il valore di *e* costituisce una delle costanti universali della fisica più utilizzate nei diversi campi di indagine.



Millikan iniziò le sue misure nel 1906 cercando di sviluppare precedenti lavori di Thomson, Townsend e Wilson. Ognuno di loro lavorando su metodiche diverse ottenne grosso modo lo stesso valore della carica elementare su ioni positivi e negativi. Tale valore era circa 10^{-19} C e gli esperimenti si protrassero sino al 1901 e 1902.

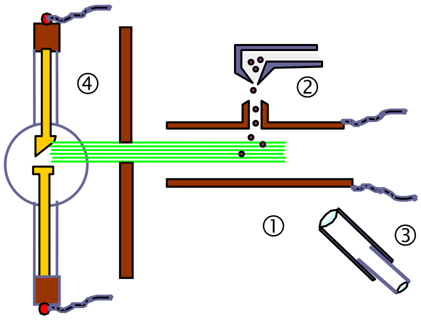
La svolta si ebbe nel 1909 quando Millikan decise di lavorare non più su una nebbia di gocce d'acqua (come nei lavori di Wilson) di cui si osservava la velocità di caduta in assenza e in presenza di un campo elettrico, ma su singole goccioline d'olio. Questi esperimenti definitivi durarono dal 1909 al 1912.





Descrizione di Millikan della sua apparecchiatura: il recipiente di ottone ❶ era costruito per lavorare sino alla pressione di 15 atmosfere anche se nell'esperimento si operava con valori dalla pressione atmosferica in giù misurabile attraverso il barometro a mercurio. L'aria compresa tra le piastre ❸ del condensatore era mantenuta in assoluta stazionarietà assorbendo la radiazione termica prodotta dalla lampada ad arco necessaria per la osservazione con un tubo di 80 cm pieno d'acqua ❹ seguito da una seconda cella contenente del cloruro rameico in soluzione; inoltre l'intero recipiente ❶ era immerso in un bagno ❺ di 40 litri di olio minerale in modo che le variazioni di temperatura fossero inferiori a 0.02 °C. La necessità di svolgere l'esperimento in condizioni di stabilità termica molto elevata venne scoperta nel tentativo di rendere stabile l'esito delle diverse misure. Lo spruzzatore ❻ utilizzava aria molto pulita gestita dall'impianto ❼. La goccia d'olio indicata dallo ⓿ veniva illuminata e irradiata tramite le finestre ❾. L'apparato ❽ consentiva di irradiare l'aria circostante la goccia con raggi X. Non sono visibili perché spostate rispetto al piano della pagine la terza serie di finestre necessarie per la osservazione al microscopio della goccia.

durante l'esperimento non cambi il diametro delle gocce utilizzate. Anche la dimensione delle goccioline è importante; è scelta in modo di rendere più bassa possibile la loro velocità limite di caduta in aria (in assenza di campo elettrico una goccia tipica cade in circa 30 s). Ciò permette di misurare con elevata precisione tale velocità e consente inoltre alle gocce di raggiungere la velocità limite quasi istantaneamente quando cambiano le forze su di esse per effetto dei cambiamenti di carica. Non si opera al di sotto del millesimo di millimetro per evitare che incomincino a farsi sentire fenomeni d'urto di tipo Browniano dovuti al moto delle molecole d'aria.



In alto la parte essenziale della apparecchiatura. ① condensatore in cui vengono immesse le ② goccioline d'olio nebulizzate ③ Il microscopio per la osservazione e le misure sulle goccioline ④ Il tubo a raggi X per indurre variazioni di ionizzazione

3.4.3 ANALISI DELL'ESPERIMENTO

◊ Le goccioline d'olio, in assenza di campo elettrico, a causa delle loro piccole dimensioni cadono in aria con velocità limite molto piccole sotto l'azione congiunta della forza peso, della spinta di galleggiamento di Archimede e della forza di attrito viscoso (relazione di Stokes). Molto rapidamente si raggiunge la condizione di equilibrio caratterizzata da una velocità limite pari a

$$v = \frac{2r^2g(\rho - \rho_0)}{9\eta} \quad [5] \qquad \text{(V.3.11)}$$

dove	
ρ	è la densità dell'olio
ρ_0	è la densità dell'aria
η	è la viscosità dell'aria
r	è il raggio della goccia

La velocità della goccia viene rilevata osservando il tempo che la goccia impiega ad attraversare due tacche poste nel campo del microscopio. L'orologio utilizzato aveva una sensibilità di 2 ms. Poiché le altre quantità erano note ciò consentiva di determinare indirettamente il diametro della goccia tramite l'equazione.

fotografia dell'apparato sperimentale originale di Millikan

◊ Se si applica un campo elettrico E tra le piastre, e la goccia possiede una carica q, essa risulterà soggetta, oltre che alla forza peso, alla forza di galleggiamento e alla resistenza dell'aria anche ad una forza elettrica $F_e = q\,E$. Pertanto l'equazione del moto della goccia sarà:

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho_0 g - 6\pi r\eta u + qE = 0 \qquad \text{(V.3.12)}$$

dove u rappresenta la velocità limite di caduta della goccia in presenza del campo.

Se si confronta la (V.3.12) con la corrispondente equazione senza la azione del campo elettrico:

$\frac{4}{3}\pi r^3\rho g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho_0 g - 6\pi r\eta v = 0$ e si fa la differenza si arriva rapidamente alla espressione per q; infatti

$q = \frac{6\pi\eta\,(u - v)}{E}\,r$ e se si sostituisce l'espressione del raggio prevista dalla (V.3.11) si ottiene:

$$q = \frac{6\pi\eta\,(u - v)}{E}\sqrt{\frac{9\eta v}{2g(\rho - \rho_0)}} \qquad \text{(V.3.13)}$$

◊ L'esperimento consisteva nel registrare i cambiamenti nella carica della goccia sottoposta ad irradiazione con la sorgente di raggi X. La

[5] La relazione (V.3.11) può essere determinata come utile esercizio dal lettore e gli estremi della sua determinazione si trovano comunque nel capitolo dedicato alle forze d'attrito.

goccia veniva dapprima osservata in caduta libera e se ne determinava la velocità v. In questa fase la goccia trasporta comunque una certa carica q_1 e quando si applica il campo elettrico la forza del campo la fa risalire con velocità u_1. Se a questo punto si accende la apparecchiatura a raggi X la carica della goccia cambia da q_1 a q_2 e cambia di conseguenza anche la velocità di risalita da u_1 a u_2. Queste tre velocità u_1, u_2 e v vengono determinate osservando le cadute lungo percorsi piuttosto lunghi (dell'ordine del centimetro con tempi di osservazione di decine di secondi) in modo di ridurre gli errori di misura.

Dalla equazione (38.13) si ricava che:

$$q_2 - q_1 = \frac{6\pi\eta\,(u_2 - u_1)}{E}\sqrt{\frac{9\eta v}{2g(\rho - \rho_0)}} \qquad \text{(V.3.14)}$$

Millikan a colloquio con Maria Curie e sullo sfondo un giovanissimo Werner Heisemberg

3.4.4 CONSIDERAZIONI SPERIMENTALI FINALI

- Dalla (V.3.14) si osserva che su una data goccia un incremento di carica Δq determina un incremento di velocità Δu ad esso proporzionale e Millikan riuscì effettivamente a misurare questi incrementi di carica compresi quelli successivi alla condizione di gocciolina neutra. La condizione di neutralità è assicurata quando la applicazione del campo elettrico (che, come si è detto, è molto intenso) non produce cambiamenti nella velocità della carica.
- Il lavoro di Millikan fu caratterizzato da numerose difficoltà in particolare per quanto riguarda la misurazione della viscosità dell'aria. Si scoprì che, nel caso di gocce di dimensioni microscopiche la viscosità dipende dalle dimensioni delle gocce e, per tenere conto di questa dipendenza, si introdusse un fattore di correzione. Fu quindi necessario operare in condizioni sperimentali diversificate in modo di ottenere risultati affidabili. Si utilizzarono differenze di potenziale variabili tra 1700 e 5000 V, mentre la pressione all'interno della zona tra le piastre fu fatta variare dalla pressione atmosferica fino a 45 mm di mercurio. Infine si utilizzarono gocce di raggio variabile da 0.446 a 5.856 micron.
- Tutti i risultati portarono alla seguente conclusione: *i cambiamenti nella carica della goccia erano multipli di un valore di carica elementare*. In altre parole $\Delta q = N\,e$ dove N è un intero ed $e = (1.592 \pm 0.0017) \times 10^{-19}$ C e questa fu indicata come carica dell'elettrone.

I risultati sperimentali più recenti danno per la carica dell'elettrone il valore:

$e = (1.602176462 \pm 0.000000063) \times 10^{-19}$ C

- 1.60203 ± 0.00050 [Birge, 1942]
- 1.60210 ± 0.00002 [Dummond and Cohen, 1963]
- 1.602192 ± 0.000007 [Taylor et al, 1969]
- 1.6021892 ± 0.0000046 [Cohen and Taylor, 1973]
- 1.6021773 ± 0.00000049 [Cohen and Taylor, 1987]

Ho scelto di fare un resoconto dettagliato di questo esperimento perché si tratta di uno dei risultati sperimentali più importanti della fisica del 900 e per evidenziare come, spesso, i testi di fisica generale, in sede di ricostruzione, banalizzino i problemi.