

## V.6. Il campo magnetico nel vuoto

### INTRODUZIONE

Lo scopo di questo capitolo è quello di introdurre la grandezza fondamentale che riguarda i fenomeni magnetici e cioè il vettore induzione magnetica  $\vec{B}$ .

Il capitolo si apre con una introduzione di carattere storico-fenomenologica come è nella impostazione di questo corso.

La parte di tipo fenomenologica riassume i semplici esperimenti (pratici e/o mentali) che, partendo dalla esistenza dei magneti naturali consentono di arrivare a parlare di poli magnetici e di stabilirne nomenclatura e caratteristiche.

E' bene sapere che il magnetismo, in origine, è stato studiato come un fenomeno a sé stante e dunque a fine 700 è stata enunciata una legge basata sull'inverso quadrato della distanza in cui comparivano le masse magnetiche e una costante universale (la permeabilità magnetica) che giocava il ruolo della costante dielettrica  $\epsilon$ . Quando iniziai a studiare la fisica (negli anni 60 del XX secolo) molti testi continuavano ad introdurre il magnetismo attraverso la *legge di Coulomb magnetica*.

E' solo a inizio 800 che, osservando le interazioni tra correnti elettriche, che se ne studiano le reciprocità e si arriva a studiare il magnetismo come effetto di correnti elettriche o di cariche in moto. Nel primo paragrafo trovate la genesi e cenni all'epilogo.

Nel secondo paragrafo e terzo vengono descritti i fatti sperimentali che consentono di arrivare alla definizione del vettore  $B$  e contestualmente dare la legge che descrive la forza magnetica.

La definizione non è semplice da digerire perché il campo magnetico presenta problematiche complicate di orientamento e sul piano delle complicazioni matematiche richiede la introduzione del prodotto vettoriale.

Si definisce la unità di misura, una unità dimensionata malamente perché raramente si hanno campi magnetici dell'ordine del Tesla, ma trattandosi di una grandezza derivata è tutta colpa della definizione dell'unità di corrente. Per altro, con lo sviluppo dei superconduttori, e dell'uso che se ne fa nelle apparecchiature di risonanza magnetica, disponiamo finalmente di campi magnetici in aria dell'ordine del Tesla.

Il quarto paragrafo introduce le due leggi fondamentali dell'elettromagnetismo che consentono, dato un sistema di correnti elettriche, di determinare punto per punto nello spazio il valore del vettore induzione magnetica.

Si tratta di sue leggi strutturalmente diverse: la prima ha natura integrale e descrive una proprietà complessiva (nello spazio) del campo magnetico; la seconda ha invece natura differenziale e ci dice, in ogni punto dello spazio quale sia il contributo dato al campo magnetico da ogni piccolo elemento di corrente elettrica.

Come si dimostrano? Non si dimostrano; sono vere e basta e, come molte leggi generali della fisica altro non sono che nostre astrazioni che consentono di descrivere i fenomeni fisici in forma del tutto generale.

Attraverso queste leggi vengono stabilite quelle che esprimono il campo magnetico generato da configurazioni semplici di correnti elettriche quali le spire circolari o i solenoidi (termine introdotto da Ampere) che esprime un insieme di spire ravvicinate (gli avvolgimenti che fanno da base al funzionamento di quasi tutte le macchine elettriche).

Nel quinto paragrafo compare una nuova grandezza fisica che sembra messa lì tanto per dire: il momento magnetico una grandezza che viene definita per l'ago magnetico e per la spira circolare percorsa da corrente.

Ma perché complicarsi la vita?

La risposta sta nel fatto che, in fisica atomica e nucleare compaiono proprietà degli atomi e delle particelle elementari che richiedono, per essere descritte, proprio il momento magnetico. Ma c'è di più, per le particelle elementari il momento magnetico è una proprietà intrinseca e non ha bisogno di correnti elettriche. E' così perché la natura è fatta così. Dunque impariamo a conoscerlo perché ci servirà...

Rispetto alla versione ho completamente eliminato un paragrafo che avevo scritto riscritto più volte e ogni volta che lo rileggevo mi lasciava insoddisfatto: si trattava di descrivere il magnetismo come elemento non sostanziale, ma figlio del campo elettrico in ambito relativistico. Su questo terreno è inutile cercare di divulgare senza introdurre la sostanza (le trasformazioni di Lorentz per il campo elettromagnetico). Non è roba da corsi di fisica generale ed è meglio lasciar perdere.

Il capitolo si chiude con una serie di esercizi di calcolo del campo magnetico utilizzando le due leggi fondamentali. Sono tutti problemi che richiedono l'utilizzo dell'analisi matematica, seppur a livello elementare (in particolare dei rudimenti del calcolo integrale).

Si tratta di problemi molto formativi che ho selezionato con cura dalla miniera di proposte di un testo classico russo (Irodov) che è ancora il testo di riferimento in ambito internazionale. Naturalmente le soluzioni dettagliate sono fatte da me. Consiglio questi problemi (sei in tutto) perché aiutano a strutturare le proprie capacità di *problem solving* e perché in qualche caso smentiscono le leggi sui solenoidi spesso presentate come vere quando tali non sono.

## 6.1 Storia e Fenomenologia del magnetismo

### 6.1.1 MAGNETI NATURALI E ARTIFICIALI

Esistono in natura alcuni tipi di minerali di ferro che hanno la proprietà di attirare altri pezzi di ferro e che se vengono sospesi ad un filo si orientano lungo la direzione sud nord geografica. Tali materiali verranno chiamati *magneti naturali*.

Un pezzo di ferro posto in contatto con un magnete naturale acquista a sua volta la capacità di attrarre altri pezzi di ferro (*magnetizzazione temporanea*) e conserva, in parte, questa capacità, anche dopo che è stato separato dal magnete (*magnetizzazione residua*).

Diremo che è diventato un *magnete artificiale*. Sotto questo aspetto il ferro e l'acciaio si comportano diversamente: il ferro e gli acciai dolci <sup>1</sup> hanno una magnetizzazione temporanea elevata e una bassa magnetizzazione residua mentre l'acciaio si comporta in maniera opposta (si magnetizza poco ma conserva poi nel tempo tale magnetizzazione).

### 6.1.2 IL CONCETTO DI POLO MAGNETICO E LA DISTINZIONE TRA POLO NORD E POLO SUD

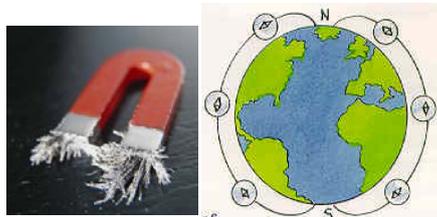
Si osserva sperimentalmente che i magneti presentano zone in cui la capacità di attrarre materiali ferrosi è più elevata; tali zone sono dette *poli magnetici*. Un pezzo di materiale magnetico può presentare, a seconda della forma, più di due poli, ma il loro numero è sempre pari, ovvero non esistono monopoli magnetici. Anzi, quando si prende un magnete di tipo longitudinale (bipolare) e lo si divide a metà si ottengono di nuovo due magneti bipolari. Questo *strano* comportamento può essere considerato un buon *rompicapo* che vale la pena di indagare.

Se il magnete assume una forma longitudinale allungata si osserva che i due poli si presentano in corrispondenza delle due estremità. Un magnete di questo genere è detto ago magnetico e può diventare un buon strumento di indagine per scoprire ulteriori proprietà del magnetismo.

Il processo che consente di distinguere le polarità di un magnete e di scoprire il tipo di interazione tra essi consta dei seguenti passi.

- ◆ Un ago magnetico sospeso ad un filo si orienta sempre lungo la direzione sud-nord geografica.
- ◆ Tutti i magneti presentano, in corrispondenza dei poli, azioni di attrazione e di repulsione reciproca: se due poli si attirano, invertendo uno dei due magneti si genera una repulsione e invertendo l'altro si torna alla attrazione. Ciò ci induce ad ammettere l'esistenza di due tipi di polarità.
- ◆ Si chiama convenzionalmente, *polo nord* di un ago magnetico il polo che si orienta verso il nord terrestre e polo sud quello contrapposto. Si osserva sperimentalmente che poli dello stesso nome si respingono e poli di nome contrario si attirano.

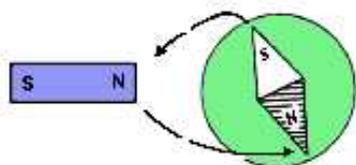
<sup>1</sup> L'acciaio è una lega ferro-carbonio e si parla di acciaio dolce quando il tenore di carbonio è inferiore allo 0.4% - per via del processo di produzione il ferro contiene sempre percentuali più o meno grandi di carbonio - la ghisa il prodotto che esce dall'alto forno ha percentuali tra il 2 e il 7%



I materiali magnetici a simmetria longitudinale tendono ad orientarsi lungo la direzione nord sud.

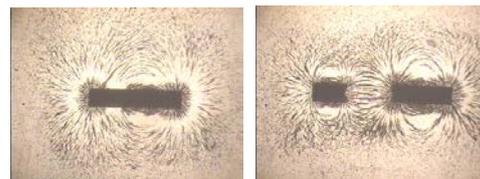
La regione dell'ago magnetico che si orienta verso il nord è detta **polo nord magnetico**

I **poli magnetici** sono quelle regioni del magnete in cui le forze di interazione risultano più intense



Si osserva che in un ago poli omologhi si respingono; poli eterologhi si attirano; sfruttando questa proprietà si dà il nome ai poli dei magneti non ad ago per i quali non si può sfruttare l'orientamento verso nord

- ◆ Sfruttando la proprietà precedente è possibile assegnare il nome a poli di magneti non ad ago; basta usare gli aghi come poli di prova: un polo di un magnete è nord se attira il polo sud di un ago e così via.
- ◆ Spezzando un magnete si creano sempre nuovi poli e quando un pezzo di ferro viene attratto dal polo di un magnete all'estremo opposto del pezzo di ferro compare un polo dello stesso nome.



dividendo un magnete a due poli si creano due magneti a due poli e così via all'infinito

### 6.1.3 AZIONI MAGNETICHE DELLE CORRENTI ELETTRICHE

Lo studio delle correnti elettriche inizia dopo la *scoperta-invenzione* della pila di Volta a cavallo tra 700 e 800; si hanno inizialmente una serie di scoperte in ambito prevalentemente elettrochimico dovute alla applicazione su larga scala dell'elettrolisi ed è solo 20 anni dopo (nel 1820) che si ha il primo significativo risultato in ambito elettromagnetico.

La ragione di questo relativo ritardo nei processi di scoperta è legata al fatto che la scuola razionalista francese utilizza un modello conoscitivo mutuato dalle ricerche di Coulomb.

Entro tale modello il magnetismo e l'elettricità corrispondono a due proprietà indipendenti della realtà fisica: il fluido magnetico e quello elettrico sono estranei l'uno all'altro. Le forze hanno caratteristiche mutuata dal modello newtoniano (direzione lungo la congiungente, dipendenza dall'inverso del quadrato della distanza) e non esiste una esigenza di unificazione tra cose che nascono distinte.

Ma all'inizio dell'ottocento si fa strada l'idea di una parentela tra fenomeni elettrici e magnetici a partire dalla evidenza sperimentale secondo cui alcuni oggetti metallici si magnetizzano quando sono colpiti dal fulmine; B. Franklin riesce inoltre a magnetizzare aghi di ferro scaricando bottiglie di Leida.

Nel 1807 Hans Christian Oersted (1777-1851) professore a Copenaghen annuncia un programma di ricerca nel quale si cercano connessioni tra elettricità e magnetismo. I risultati arrivano solo nel 1820 quando, utilizzando la pila di Volta, si rendono finalmente disponibili sorgenti di corrente elettrica sufficientemente intense per effettuare esperimenti significativi.

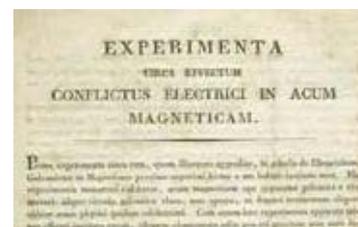
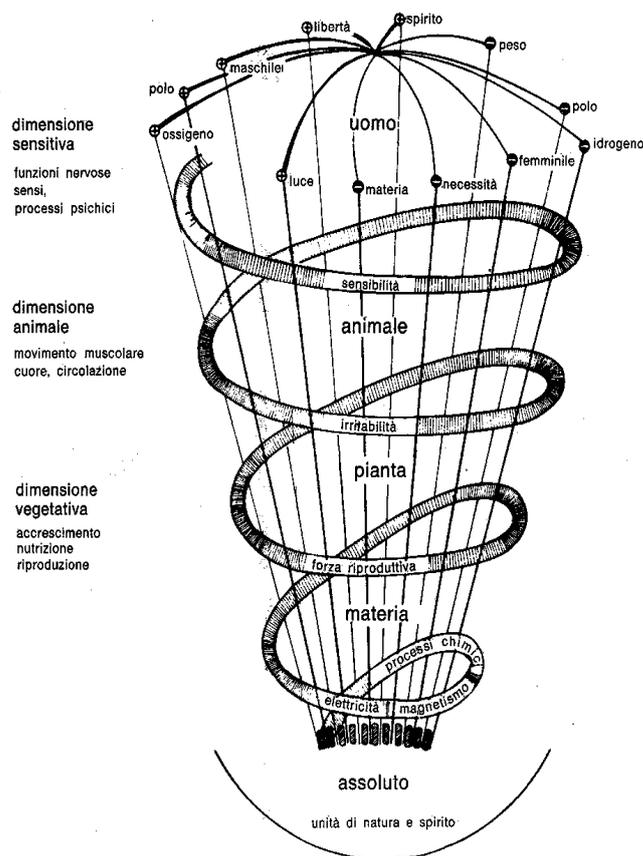
Le correnti elettriche sono in grado di far deviare aghi magnetici posti nelle vicinanze e creano dei *conflitti* (campi) che si avvolgono intorno al conduttore come delle circonferenze concentriche lungo l'asse del filo. Oersted porta a termine la sua scoperta tra il dicembre 1819 e la primavera del 1820 e il suo articolo è uno degli ultimi articoli scientifici pubblicati in latino: *experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticam*.

Le ricerche di Oersted <sup>2</sup>, allievo di Schelling, si situano nel programma di ricerca della *filosofia della natura tedesca*. "I filosofi tedeschi della natura rivol-

<sup>2</sup> La traduzione dell'articolo è disponibile in M. La Forgia *Elettricità, materia e campo nella fisica dell'ottocento* ed. Loescher. Ne consigliamo la lettura perché si tratta di un testo accessibile ad uno studente liceale e perché si ha in esso un buon resoconto delle pro-

Il modello razionalista francese blocca lo sviluppo degli studi sugli effetti magnetici delle correnti elettriche anche se l'esperienza manda i primi messaggi di unificazione tra elettricità e magnetismo.

Nella immagine sotto un esempio di **suggestioni e confusioni** tipiche della **filosofia della natura** di Schelling. Dall'unità originaria di natura e spirito nell'assoluto la natura si dispiega nella sua molteplicità. Da L. Geymonat *Storia del Pensiero filosofico e scientifico*



sero il loro interesse ad un altro e differente aspetto dell'elettricità e del magnetismo, ossia il fenomeno della polarità che sembrava esemplificare perfettamente la tensione dielettrica che essi postulavano tra i poli e le forze opposte che avevano prodotto l'ordine partendo dal caos. Poiché secondo la loro filosofia dietro lo sviluppo della natura si celava soltanto un'unica potenza, ossia quella dello Spirito del Mondo, essi ritenevano che la luce, l'elettricità, il magnetismo e le forze chimiche fossero tutte interconnesse, fossero cioè tutte aspetti diversi della stessa cosa." <sup>(3)</sup>



1820 nasce l'elettromagnetismo: H. C. Oersted: il conflitto elettrico prodotto dalle correnti galvaniche si propaga nello spazio e influenza l'ago magnetico

Oersted utilizzò come conduttori metalli tra loro diversi (oro, argento, platino, ferro, stagno, piombo) e scoprì che la natura del metallo non influenzava il fenomeno salvo forse in intensità a causa della diversa resistenza dei conduttori usati.

Scoprì anche che quello che lui chiamava *conflitto elettrico* e che oggi noi chiamiamo campo magnetico era in grado di penetrare le diverse sostanze, tranne quelle magnetiche con cui interagiva, e che si propagava secondo spire.

A conferma del carattere non casuale della scoperta basta leggere la descrizione di Oersted della sorgente di elettricità usata: venti vasi di rame di 25 cm x 25 cm x 7 cm con elettrodi di rame e zinco e una soluzione di acido nitrico e solforico; si tratta di una pila piuttosto potente e Oersted aggiunge *si può utilizzare anche un apparecchio più piccolo, purché possa rendere incandescente un filo metallico*. Oersted aveva capito che servono correnti elettriche elevate, anche se, il concetto di corrente nel senso in cui lo utilizziamo oggi, non esisteva ancora.

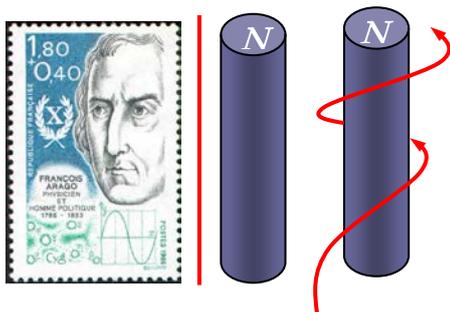
#### 6.1.4 IDENTITÀ TRA AZIONI MAGNETICHE DEI MAGNETI PERMANENTI E DELLE CORRENTI ELETTRICHE

Dopo l'esperimento di Oersted che evidenziava la capacità delle correnti elettriche di influenzare gli aghi magnetici, la strada all'indagine era aperta e una serie di successive ricerche consentirono di giungere ai seguenti punti fermi.

- ◆ Un magnete permanente è in grado di far orientare un circuito percorso da corrente che tende a disporsi con il suo piano perpendicolare all'asse di simmetria del magnete.
- ◆ Un filo percorso da corrente, disposto parallelamente ad un magnete rettilineo, tende ad avvolgerglisi intorno. Un gruppo di spire collocate tra i poli di un magnete ruotano sino a disporre l'asse di simmetria lungo la linea che unisce i due poli.
- ◆ Nel 1820 il fisico francese Francois Dominique Arago (1786-1853) dimostra che un filo di rame percorso da una corrente elevata, se viene immerso nella limatura di ferro, ne esce con pezzettini di ferro attaccati come farebbe un magnete e lo stesso avviene se il filo viene avvicinato alla limatura.
- ◆ Arago ed Ampère riescono a produrre in laboratorio i primi magneti artificiali infilando pezzi di acciaio in una bobina percorsa da corrente.

#### prime osservazioni

un magnete fa ruotare un circuito, le correnti si avvolgono sui magneti, il rame percorso da corrente attira il ferro (Arago), produzione dei primi magneti artificiali grazie alle correnti (Arago e Ampere) , un conduttore percorso da corrente si orienta nel campo terrestre (Ampere)



blematiche vere di uno sperimentatore di inizio 800: com'erano i generatori, come si poteva evidenziare il fenomeno in assenza di una descrizione in termini di campi, come si arriva alla comprensione dell'importanza di quella che, successivamente (con Ampere) si chiamerà corrente elettrica.

<sup>3</sup> Mason, *storia delle scienze della natura*, Feltrinelli pag. 500

- ◆ Nel 1820 Ampère riesce a far orientare una bobina percorsa da corrente nel campo magnetico terrestre. Sempre Ampère riesce ad evidenziare la attrazione e repulsione di due fili rettilinei percorsi da corrente.

### 6.1.5 I PRIMI TENTATIVI DI SPIEGARE L'ORIGINE DEL MAGNETISMO DEI MAGNETI PERMANENTI

All'inizio degli studi sul magnetismo, prima William Gilbert (1544-1603) e poi Coulomb, sulla base delle analogie tra il concetto di polo e quello di carica elettrica puntiforme, elaborarono una teoria delle *masse magnetiche* ed una legge di interazione analoghe a quella per le cariche elettriche. L'unico elemento di diversità stava nella impossibilità di produrre i *monopoli magnetici* e per questa ragione Coulomb ipotizzò che i poli magnetici in coppie fossero un costituente elementare della materia.

Entro questa teoria il processo di magnetizzazione consisterebbe in un processo di ordinamento dei piccoli magneti presenti a livello elementare, come avviene con la polarizzazione dei dielettrici.

### 6.1.6 L'IPOTESI DI AMPÈRE DELLE CORRENTI ELEMENTARI E GLI ULTERIORI SVILUPPI

#### 6.1.6.1 Le correnti elementari

Prendendo spunto dalle precedenti esperienze in cui aveva dimostrato la equivalenza completa tra un ago magnetico e una corrente circolante lungo un anello, Ampère sostenne l'inutilità della ipotesi dei poli magnetici elementari e sostenne che il magnetismo era completamente spiegabile dalla esistenza di correnti elementari circolanti a livello microscopico.

Ciò spiegava anche la impossibilità di produrre dei monopoli. Si tenga presente che nei primi decenni dell'ottocento non era stata ancora elaborata alcuna forma di teoria atomica basata sulla elettricità quale la conosciamo oggi; pertanto l'ipotesi di Ampère non va intesa come assimilazione delle correnti elementari agli effetti dovuti alla presenza di orbite elettroniche, ma come una sorta di teoria autonoma sulla costituzione della materia, *la materia secondo Ampère è fatta di correnti elementari*.

Con questa teoria Ampère riuscì inoltre a mettere d'accordo i risultati dei nuovi esperimenti con l'impostazione della scuola francese costruendo una teoria entro cui si salvava il modello classico di forza, ma compariva un nuovo protagonista (la corrente elettrica). Insomma non c'era interazione tra due entità distinte (l'elettricità e il magnetismo), il che avrebbe messo in crisi la teoria secondo cui solo cose consimili possono interagire, ma più semplicemente bisognava ammettere la non esistenza del magnetismo come fenomeno fondamentale.

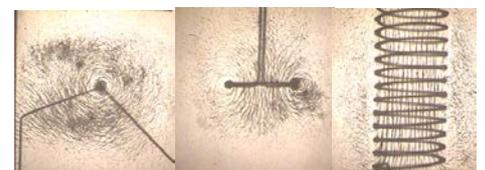
Il magnetismo era un aspetto accessorio del vero fenomeno fondamentale: le correnti elettriche (che Coulomb non poteva aver osservato perché non esisteva lo strumento per generarle, cioè la pila); secondo Ampère la legge fondamentale è quella della interazione tra correnti.



Prima William Gilbert: 1544-1603 e poi Coulomb collocano il magnetismo tra le proprietà fondamentali del mondo reale

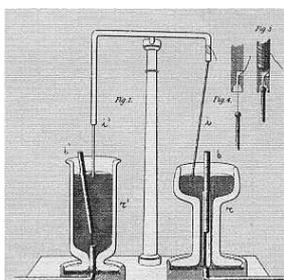


A. Ampère: ipotesi delle correnti elementari: il mondo è fatto di correnti



usando polvere di ferro e correnti elettriche elevate si possono visualizzare gli effetti magnetici di un filo rettilineo, di una spira e di un solenoide

### 6.1.6.2 Faraday: le interazioni reciproche tra correnti e tra magneti e correnti

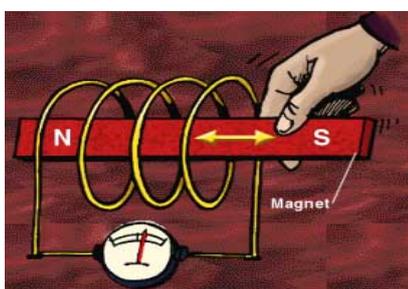


Faraday costruisce il primo modello di motore elettrico sfruttando la proprietà reciproca di magneti e correnti di avvolgersi l'uno intorno all'altra e scoprirà (non per caso) l'induzione elettromagnetica

Mentre Ampère elabora le sue teorie sulle correnti elementari Faraday è convinto che lo studio del magnetismo debba presentare una sua specificità e che l'esperimento di Oersted con l'idea della circolarità delle interazioni e del loro propagarsi nello spazio debba essere assunto come punto di partenza per ulteriori riflessioni.

Per evidenziare la reciprocità di elettricità e magnetismo egli realizza nel 1821 il primo modello di motore elettrico facendo vedere che i magneti tendono ad avvolgersi intorno alle correnti elettriche e che le correnti si avvolgono intorno ai magneti.

Il suo motore, rappresentato qui, a lato è caratterizzato da un bagno di mercurio entro cui, di volta in volta, un magnete o un conduttore fanno da asse e, un conduttore o un magnete, possono ruotare chiudendo il circuito elettrico.



### 6.1.6.3 Faraday: l'induzione elettromagnetica e il concetto di campo

La marcia verso la completa identità tra fenomeni magnetici e correnti elettriche si arresta quando ci si pone la domanda: *se le correnti elettriche sono in grado di produrre campi magnetici, come si può produrre una corrente elettrica a partire da un campo magnetico?*

Della questione si occupa a partire dal 1822 Michael Faraday (1791-1867) il più grande dei fisici sperimentali dell'800. La soluzione arriva nel 1831 con la scoperta che il meccanismo di produzione delle correnti ha bisogno di campi magnetici variabili. Della induzione elettromagnetica si tratterà diffusamente in uno dei prossimi capitoli.

Giova qui ricordare che per affrontare il tema della induzione elettromagnetica Faraday elabora (pian piano) la nozione di campo che farà da base alla sintesi dell'intero elettromagnetismo effettuata successivamente da Maxwell.

Nel corso delle sue ricerche sulle analogie Faraday scoprirà anche la prima interazione tra campo magnetico e luce: i campi magnetici sono in grado di far ruotare il piano di oscillazione delle onde luminose.



Michael Faraday inventa il concetto di campo

### 6.1.6.4 Maxwell, il campo elettromagnetico – Einstein e il punto di vista relativistico

Con Maxwell i due campi, elettrico e magnetico si uniscono in maniera inscindibile (l'uno genera l'altro e viceversa e nelle onde elettromagnetiche viaggiano insieme) ma le leggi dell'elettromagnetismo classico, proprio in riferimento ai campi e alle forze magnetiche presentano problemi al cambiare dell'osservatore inerziale (data la dipendenza della forza magnetica dalla velocità).

Servirà la relatività ristretta applicata al campo elettromagnetico per trovare la soluzione: nelle equazioni i due campi si trasformano reciprocamente e, quello magnetico appare un aspetto relativistico di quello elettrico.

## 6.2 Le linee di campo magnetico

### 6.2.1 IL CONCETTO DI LINEA DI CAMPO E LA SUA DEFINIZIONE OPERATIVA

La definizione operativa del vettore che descrive il campo magnetico indicato con  $\mathbf{B}$  e detto *induzione magnetica* richiede alcune definizioni propedeutiche a causa della complessità della legge della *forza magnetica*.

Supponiamo dunque di avere una regione di spazio nella quale si esercitano azioni magnetiche del tipo di quelle descritte nel paragrafo precedente. Utilizzeremo gli aghi magnetici per individuare nello spazio delle linee che chiameremo *linee di campo magnetico* attraverso la seguente definizione operativa.<sup>4</sup>

Consideriamo un ago magnetico di dimensioni ridotte e collochiamolo in un punto. Esso si orienterà, per effetto del campo magnetico individuando così una direzione (quella dell'ago) e un verso (quello da sud a nord lungo l'ago). Se si effettua questa operazione per tutti i punti dello spazio si individuano delle linee, che chiameremo *linee di campo*, dotate delle seguenti caratteristiche:

- per ogni punto dello spazio passa una sola linea
- la tangente alla linea è la direzione in cui si orienta un ago collocato in quel punto
- il verso della linea è quello di orientamento di un ago da sud a nord
- le linee di campo sono sempre linee chiuse e, in presenza di poli magnetici, si dirigono dall'uno all'altro (proseguendo poi all'interno del materiale), ma si dà anche il caso di linee di campo che si chiudono su se stesse senza partire da un polo.

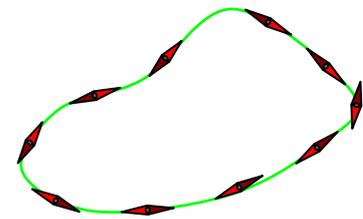
### 6.2.2 ALCUNI ESEMPI DI LINEE DI CAMPO MAGNETICHE

Le linee di campo del campo magnetico sono visualizzabili molto semplicemente utilizzando della limatura di ferro molto sottile. Per effetto del campo magnetico le particelle costituenti la limatura si magnetizzano e tendono ad orientarsi come tanti aghi magnetici di piccole dimensioni. Basta allora collocare della limatura su un cartoncino e battere leggermente per avere uno *spettro piano delle linee di campo nella regione considerata*.

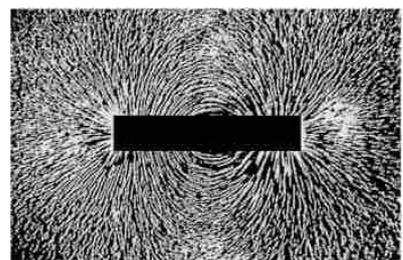
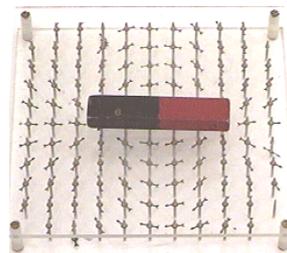
In questo modo si può osservare lo spettro magnetico di alcune configurazioni significative.

#### 6.2.2.1 Il campo uniforme

tra due poli con superficie piana e affacciati a distanza ravvicinata si crea un campo magnetico uniforme che presenta delle leggere sbavature alle estremità: le linee di campo sono dei segmenti di rette parallele ed egualmente addensate. Le linee di campo sono orientate dal polo nord verso il polo sud. Questo tipo di configurazione viene adottata quando si vogliono realizzare intensi campi uniformi in una regione di spazio abbastanza ristretta.



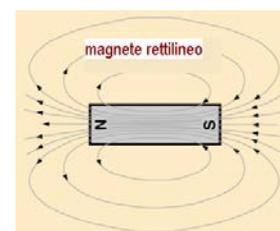
la linea di campo del campo magnetico è tangente in ogni punto alla posizione di equilibrio di un ago magnetico e ha il verso sud nord dell'ago; usando molti aghi è possibile visualizzare le linee di campo



esempio di spettro magnetico ottenuto per orientazione di polvere di ferro da un magnete rettilineo



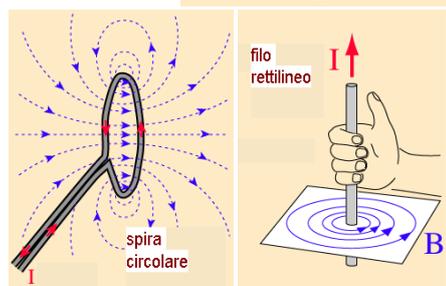
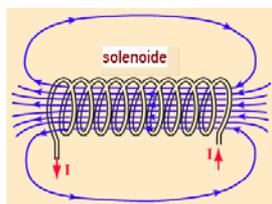
Magnete permanente a ferro di cavallo: se si avvicinano i poli si può realizzare un campo uniforme



<sup>4</sup> Parliamo di *linee di campo* e non di *linee di forza* (come si è fatto per il campo elettrico) perché come si vedrà la forza magnetica è ortogonale a tali linee.

### 6.2.2.2 Il dipolo magnetico e la spira circolare

Una magnete a simmetria longitudinale crea uno spettro magnetico simile a quello del dipolo e lo stesso fa una bobina a struttura longitudinale formata da numerose spire ravvicinate (solenoido). Il campo all'esterno è costituito da linee curve che vanno dal polo nord al polo sud diradandosi man mano che ci si allontana.



Filo rettilineo: linee circolari; lo si piega e si ottiene la spira; si accostano le spire e si ottiene il solenoide.

### 6.2.2.3 Il solenoide

Il campo del solenoide è praticamente uniforme all'interno. Il campo della singola spira, simile a quello di un ago magnetico, ha la parte centrale uniforme molto più ristretta.

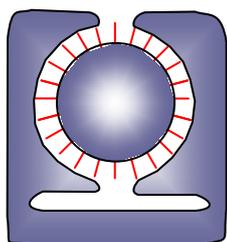
Il solenoide è una configurazione circuitale introdotta da Ampere e viene ancora oggi ampiamente utilizzato sia per produrre zone di campo uniforme sia nelle applicazioni alle macchine elettriche. A differenza di quanto avveniva in passato quando i fili di rame erano ricoperti da una calza isolante di seta si usano oggi conduttori verniciati con vernici isolanti che consentono di avvicinare le spire e rendere l'avvolgimento compatto.

### 6.2.2.4 Il filo rettilineo

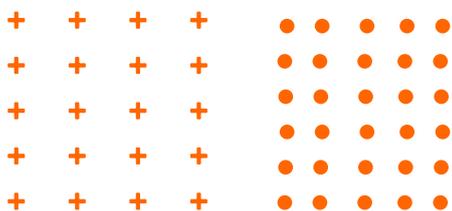
Un filo rettilineo percorso da corrente crea delle linee di campo circolari concentriche al filo e disposte in piani perpendicolari al filo medesimo. Tali linee di campo si diradano man mano che ci si allontana dal filo e hanno un verso di rotazione orario guardando nel verso della corrente (verso di avvitamento di una vite destrorsa).

Il filo rettilineo percorso da corrente ha un interesse legato solo alla individuazione delle caratteristiche dei campi mentre, data la debolezza del campo prodotto, trova scarso impiego sul piano applicativo

- ◆ due poli magnetici affacciati e lavorati a cilindro tra i quali si dispone un pezzo di ferro creano nella zona d'aria tra i poli e il ferro (traferro) un campo di tipo radiale di intensità praticamente costante. Questo tipo di configurazione è impiegata in tutti gli strumenti di misura delle correnti elettriche perché consente di produrre forze magnetiche parallele con un momento torcente costante indipendente dalla posizione del circuito elettrico collocato all'interno.



Sagomando i poli e usando un nucleo cilindrico si può produrre un campo di tipo radiale (utile negli strumenti di misura)



I campi ortogonali ad un piano vengono rappresentati simulando la vista (fronte e retro) di una freccia (la punta esce mentre la coda entra)

### 6.2.2.5 Convenzione per la rappresentazione delle linee di campo

Stabiliamo infine una convenzione grafica per la rappresentazione delle linee che intersecano perpendicolarmente un piano: esse saranno rappresentate da un punto (•) quando la linea è uscente o da una croce (+) quando la linea è entrante. Pertanto un piano come quello del foglio ricoperto da crocette equidistanti indicherà un campo magnetico uniforme entrante nel piano del foglio, diretto cioè da sopra a sotto.

## 6.3 La definizione operativa del vettore induzione magnetica

### 6.3.1 I FATTI SPERIMENTALI CHE FANNO DA PREMESSA ALLA DEFINIZIONE

Consideriamo in una regione di spazio in cui agiscono campi magnetici, un punto per il quale passerà una linea di campo e sarà dunque definita una direzione orientata di riferimento che indicheremo con  $\vec{t}$ .

Collochiamo nel punto considerato una carica  $q$  dotata di velocità  $\vec{v}$ . Il vettore velocità  $\vec{v}$  e la direzione  $\vec{t}$  definiscono un piano contenente il punto considerato e un angolo  $\alpha = \widehat{vt}$ .

Si osservano i seguenti fatti sperimentali:

#### 6.3.1.1 La direzione e il verso della forza magnetica

Sulla carica  $q$  agisce una forza perpendicolare al piano  $\alpha$  e il cui verso si inverte quando cambiano il segno della carica, o il verso della velocità o il verso della linea di campo. Nel caso di carica positiva la forza ha il verso dell'asse  $z$  di una terna di assi cartesiani in cui l'asse  $x$  coincide con la direzione della velocità e l'asse  $y$  con la direzione della linea di campo

#### 6.3.1.2 La intensità della forza magnetica

La intensità della forza è proporzionale al valore della carica  $q$ , alla componente della velocità in direzione perpendicolare alla linea di campo  $v_n = v \sin\alpha$ . Ciò significa, incidentalmente, che tale forza si annulla quando la velocità e la linea di campo hanno la stessa direzione, mentre è massima quando esse sono ortogonali.

La forza, a parità di altre condizioni, assume valori diversi nei diversi punti dello spazio

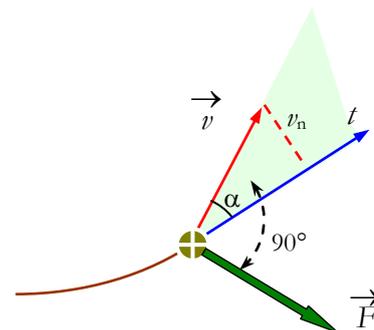
### 6.3.2 LA DEFINIZIONE DEL VETTORE B

Da questo insieme di dati sperimentali possiamo concludere che:

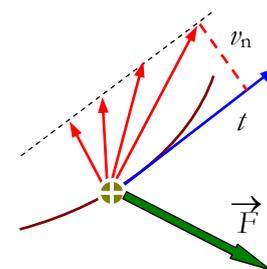
- ◆ nello spazio esistono delle direzioni privilegiate tali da influenzare le caratteristiche della forza magnetica;
- ◆ in un punto la quantità  $\frac{F}{q v \sin \alpha}$  è costante al variare di  $q$ ,  $v$  e dell'angolo  $\alpha$  ed esprime pertanto un elemento tipico del campo nel punto considerato.

I due elementi precedenti consentono di definire univocamente una nuova grandezza fisica di tipo vettoriale in grado di descrivere i campi magnetici: tale grandezza sarà chiamata *vettore induzione magnetica* e sarà indicata con il simbolo  $\vec{B}$ .

- direzione e verso del vettore  $\vec{B}$  coincidono con quelli della linea di campo
- la intensità del vettore  $\vec{B}$  viene posta pari al rapporto costante:



su una carica in moto agisce una forza trasversale cioè perpendicolare al piano formato dalla linea di campo e dal vettore velocità



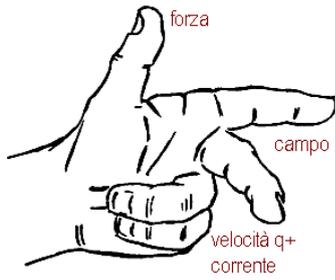
La forza dipende dalla componente del vettore  $v$  ortogonale alla linea di campo; è massima a parità di speed quando la velocità è perpendicolare alla linea di campo e si annulla quando è tangente

in sintesi

la definizione del vettore  $B$

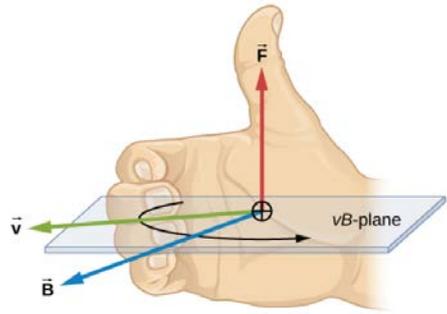
$$B = \frac{F}{q v \sin \alpha} \tag{V.6.1}$$

Come si vede la definizione risulta piuttosto complessa, ma la complessità è insita nella natura del fenomeno (esistenza di direzioni privilegiate, trasversalità della direzione della forza). Per questa ragione l'insieme dei risultati sperimentali che abbiamo evidenziato e che fanno da premessa alla definizione deve essere ben noto per evitare di trasformare tale definizione in un insieme di ragionamenti circolari e inutilmente complicati.



### 6.3.3 LA LEGGE DELLA FORZA MAGNETICA E L'UNITÀ DI MISURA DEL VETTORE $\vec{B}$

Posta la definizione del vettore  $\vec{B}$  resta automaticamente determinata la legge della forza, che si ricava invertendo la definizione.



Dato un punto nello spazio in cui sia definito il vettore  $\vec{B}$  ed una carica puntiforme  $q$  dotata di velocità  $\vec{v}$ , sulla carica agisce una forza, detta forza magnetica o forza di Lorentz, con intensità  $F = q v B \sin \alpha$ , direzione perpendicolare al piano formato dai vettori  $\vec{B}$  e  $\vec{v}$  e verso definito da una terna cartesiana  $\vec{v} \vec{B} \vec{F}$ .<sup>(5)</sup>

La regola della mano sinistra e quella della mano destra – la prima ha il vantaggio di individuare immediatamente le direzioni tra loro ortogonali – seconda ha il vantaggio di far comparire i vettori nella stessa sequenza con cui compaiono nella legge della forza

Una buona rappresentazione della terna cartesiana è data dalla mano sinistra con il medio che indica la velocità, l'indice che indica il vettore induzione e il pollice che indica la forza.

Se si utilizza il prodotto vettoriale la forza di Lorentz può essere scritta in forma simbolica in maniera semplice; precisamente:

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \tag{V.6.2}$$



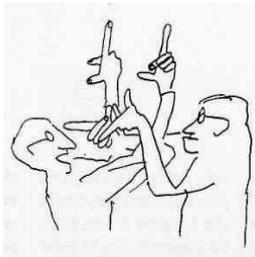
La unità di misura della induzione magnetica nel S.I. è il *tesla* (T) <sup>6</sup>ed è pari alla intensità di un campo che agendo in direzione perpendicolare alla velocità di una carica di 1 C dotata di velocità di 1 m/s determini una forza di 1 N:

$$1 \text{ T} = \frac{\text{N s}}{\text{C m}} = \frac{\text{N}}{\text{A m}} = \frac{\text{J s}}{\text{C m}^2} = \frac{\text{V s}}{\text{C m}^2} \tag{V.6.3}$$

Oltre al *tesla* è ancora di uso comune un sottomultiplo del *tesla* particolarmente utilizzato per la misura dei campi in aria detto *gauss* (Gs):

$$1 \text{ Gs} = 10^{-4} \text{ T} \tag{V.6.4}$$

Per esempio il campo magnetico terrestre risulta avere una intensità dell'ordine di qualche decimo di Gs.



questa vignetta ironica di Bruno Touschek uno dei padri della fisica delle particelle italiana ci invita a non incrociare le dita: ci si ricordi di trovare prioritariamente la direzione per la quale non occorre alcuna regola basata sulle dita

<sup>5</sup> Non è detto che  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  formino un angolo di 90° come gli assi  $xy$ . Formano però sempre un angolo convesso ed è tale angolo da assumere come riferimento per la determinazione del verso della forza. Si guardi dall'alto il piano formato da  $\vec{v} \vec{B}$ . Se si determina tra  $\vec{v} \vec{B}$  una rotazione antioraria la forza è uscente dal piano, se invece si determina una rotazione oraria la forza è entrante nel piano. Se la carica è negativa i versi si invertono (si veda l'immagine della regola della mano destra)

<sup>6</sup> Niklaus Tesla (1856–1943) si occupò a fondo di problematiche delle correnti alternate in bassa e alta frequenza.

La misurazione del vettore  $\vec{B}$  che risulta concettualmente complessa viene invece eseguita utilizzando strumenti semplici da usare e basati sulla quantificazione di fenomeni il cui andamento è legato alla definizione posta.

Il metodo più usato si basa sull'effetto Hall e consiste nel misurare una d.d.p. trasversale dovuta all'azione della forza magnetica sugli elettroni di conduzione di un conduttore. L'effetto Hall sarà analizzato nel prossimo capitolo

### 6.3.3.1 Forza magnetica ed equilibrio

Spiegare perché un campo elettrico ed un campo magnetico uniformi e paralleli non possono mai determinare l'equilibrio di una carica elettrica



Condizione necessaria affinché due forze si facciano equilibrio è che siano parallele, ma se i campi sono paralleli le forze sono ortogonali perché la forza elettrica è diretta come il campo mentre quella magnetica è ad esso perpendicolare.



### 6.3.3.2 La carica in moto consente di trovare la linea di campo

Usando la sola carica esploratrice è possibile individuare la direzione della linea di campo. Come si fa?



Basta muovere la carica e ricercare la direzione di moto a cui corrisponde una forza magnetica nulla.

Ciò significa che, volendo, si potrebbe dare la definizione del vettore  $\vec{B}$  senza introdurre preventivamente la nozione di linea di campo.



### 6.3.3.3 Risultante tra forza elettrica e magnetica

Un campo elettrico e un campo magnetico uniformi e tra loro ortogonali si seguono in verso antiorario e hanno le seguenti intensità:  $E = 2.35 \times 10^4$  V/m  $B = 0.85$  T. Una particella di carica positiva  $q = 0.28 \mu\text{C}$  è dotata di velocità  $v = 3.27 \times 10^4$  m/s nel verso del campo elettrico. Determinare la risultante delle forze che agiscono sulla carica.

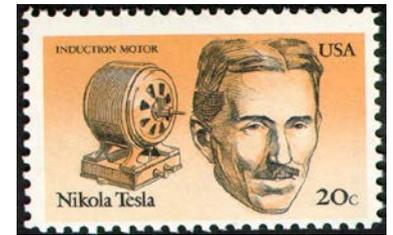


La forza elettrica  $F_e = q E$  è diretta come il campo mentre la forza magnetica  $F_m = q v B$  è perpendicolare sia a  $\vec{B}$  sia a  $\vec{E}$  ed ha il verso dell'asse  $z$  se si collocano i due campi come gli assi  $x$  e  $y$ . La risultante si troverà componendo le due forze che risultano tra loro perpendicolari e si troverà nel piano  $yz$ .

$$F_e = q E = 0.28 \times 10^{-6} \times 2.35 \times 10^4 = 0.66 \times 10^{-2} \text{ N}$$

$$F_m = q v B = 0.28 \times 10^{-6} \times 3.27 \times 10^4 \times 0.85 = 0.78 \times 10^{-2} \text{ N}$$

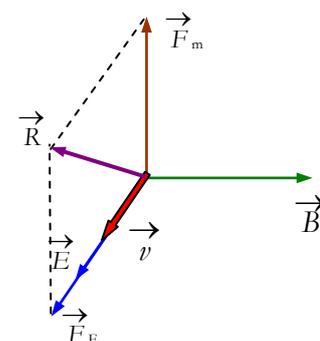
$$R = \sqrt{F_e^2 + F_m^2} = 1.02 \times 10^{-2} \text{ N}$$



Il Tesla e il Gauss

$$1 \text{ T} = 1 \text{ N}/(\text{Am})$$

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ Gs}$$



### 6.3.4 IL TEOREMA DI EQUIVALENZA TRA CARICHE IN MOTO ED ELEMENTI DI CORRENTE

Nel paragrafo precedente abbiamo dato la definizione operativa della forza magnetica utilizzando alcuni esperimenti ideali basati sulla misurazione di forze agenti su cariche in moto.

Nel corso dell'800, invece, la definizione è stata data utilizzando circuiti elementari percorsi da corrente. Ciò perché lo studio delle particelle cariche in moto è iniziato solo con la loro scoperta, a fine 800; inoltre l'impostazione data da Ampere allo studio del magnetismo faceva delle correnti le protagoniste (in termini genetici) del fenomeno.

In base agli indirizzi moderni le due definizioni sono del tutto equivalenti perché oggi trattiamo una corrente come un flusso di cariche in moto.

Nella figura qui a lato si confrontano una carica  $\delta q$  in moto con velocità  $\vec{v}$  ed un elemento di corrente  $i$  di lunghezza  $\delta \vec{l}$ : se i due fenomeni devono essere equivalenti, poiché la carica in un intervallo di tempo  $\delta t$  percorre lo spazio elementare  $\delta \vec{l} = \vec{v} \delta t$  si ha:

$$\delta q \vec{v} = \delta q \frac{\delta \vec{l}}{\delta t} = \delta \vec{l} \frac{\delta q}{\delta t} = \delta \vec{l} i$$

Il risultato trovato si esprime così: *le relazioni del magnetismo contenenti una carica in moto con velocità  $\vec{v}$  possono essere trasformate in relazioni relative a correnti elementari, cioè a circuiti percorsi da corrente  $i$  e di lunghezza  $\delta l$  tali che:*

$$\delta q \vec{v} = i \delta \vec{l} \tag{V.6.5}$$

La relazione appena illustrata è solitamente citata come *principio di equivalenza tra cariche in moto ed elementi di corrente*.

Per esempio la legge sulla forza relativa ad un elemento di corrente  $i$  di lunghezza  $\delta \vec{l}$  che forma un angolo  $\alpha$  con la linea di campo diventa:

$$\delta F = i \delta l B \sin \alpha \tag{V.6.6}$$

O in forma vettoriale:

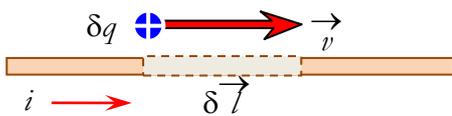
$$\delta \vec{F} = i \delta \vec{l} \wedge \vec{B} \tag{V.6-6 bis}$$

e se si considera un generico circuito percorso da corrente e si vuole determinare la forza sull'intero circuito bisognerà sommare vettorialmente tutti i termini  $\delta \vec{F}$  che agiscono sulle diverse porzioni di circuito.

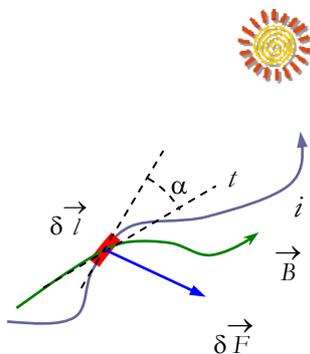
$$\vec{F} = \sum \delta \vec{F}$$

#### 6.3.4.1 La forza su una porzione di filo rettilineo percorso da corrente

Un filo rettilineo di rame di lunghezza  $l = 2.27$  m e sezione  $\sigma = 2.00$  mm<sup>2</sup> è immerso in quiete perpendicolarmente ad un campo magnetico  $B = 0.112$  T uniforme ed ortogonale al piano della pagina. Ad un istante dato viene iniettata nel filo una corrente  $i = 5.60$  A. Determinare la velocità del filo dopo 1 secondo.



principio di equivalenza tra cariche in moto ed elementi di corrente  $i \delta l = \delta q v$



La forza elementare su un elemento di corrente si deduce applicando il principio di equivalenza

Le forze elementari  $\delta F = B \delta l i$  si sommano dando luogo ad una forza  $F = B l i$ . Per effetto di questa forza costante il filo si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione  $a = \frac{F}{m}$  e il calcolo di  $a$  richiede di determinare la massa  $m$  attraverso la densità  $\delta$  e il volume  $V = \sigma l$ .

$$F = B l i = 0.112 \cdot 2.27 \cdot 5.60 = 1.42 \text{ N}$$

Dalle tabelle  $\delta_{Cu} = 8.96 \text{ kg/dm}^3$  pertanto:

$$m = \delta_{Cu} \sigma l = 8.96 \cdot 10^3 \cdot 2.00 \cdot 10^{-6} \cdot 2.27 = 0.0407 \text{ kg}$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1.42}{0.0407} = 35.0 \text{ m/s}^2$$

Il filo si muove con legge  $v = a t$  e pertanto dopo 1 s la sua velocità è di 35.0 m/s.



### 6.3.5 IN SINTESI

I fenomeni magnetici sono descritti attraverso il vettore induzione magnetica. La sua definizione inizia osservando che, in presenza di fenomeni magnetici si individuano nello spazio delle direzioni privilegiate individuabili attraverso l'orientamento degli aghi magnetici.

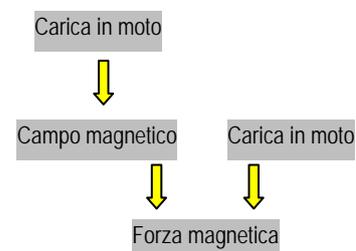
Si osserva poi che muovendo delle cariche (o muovendo elementi di corrente) su queste cariche si esercitano delle forze di natura trasversale (cioè ortogonali sia alla velocità, sia alla linea di campo).

Queste forze dipendono dalla velocità della particella e sono massime quando si ha ortogonalità rispetto alla linea di campo e si annullano nel caso di velocità parallele.

Da questo insieme di osservazioni si riesce a definire un ente (il vettore induzione magnetica) che risulta indipendente sia dalla carica usata sia dal suo stato di moto.

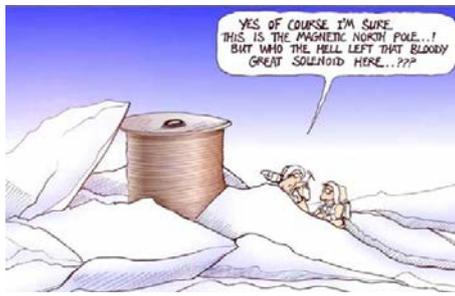
Una volta noto questo vettore si conosce automaticamente la forza magnetica su qualsiasi altra carica in moto o su qualsiasi circuito elettrico percorso da corrente.

Rimane da stabilire quale insieme di leggi consenta, dato un insieme di correnti elettriche o di cariche in movimento, di determinare le caratteristiche del vettore  $\vec{B}$ . A questo argomento è dedicato il prossimo paragrafo.



## 6.4 Il campo magnetico generato dalle correnti elettriche

### 6.4.1 LA DETERMINAZIONE DEL VETTORE INDUZIONE MAGNETICA



Ma certo che siamo al polo nord ... ma chi diavolo avrà lasciato qui quel maledetto grosso solenoide?

Sulla base della definizione data del vettore  $\vec{B}$  è possibile determinare il campo magnetico generato da un sistema qualsiasi di correnti o di cariche in moto attraverso alcune leggi ricavate nella prima metà dell'800 dalla scuola francese di fisica e successivamente sistematizzate nel lavoro di sintesi compiuto da James Clerk Maxwell.

In particolare esistono due relazioni note come *legge della circuitazione di Ampère* e *legge di Biot e Savart* che consentono di sintetizzare l'insieme delle conoscenze relative all'azione delle correnti nella determinazione dei campi magnetici.

Si tratta di due leggi che richiedono l'uso intensivo dell'analisi matematica e ci limiteremo pertanto a descriverne le caratteristiche e l'ambito di utilizzazione senza farne oggetto di uno studio dettagliato.

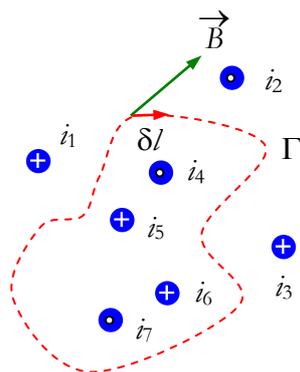
#### 6.4.1.1 Legge della circuitazione di Ampère

Questa legge mette in relazione una o più correnti con una grandezza (la *circuitazione*) definita sullo stile del *lavoro lungo una traiettoria chiusa* ma riferita al vettore *induzione magnetica*.

Essa permette il calcolo di  $\vec{B}$  quando si possono utilizzare ipotesi semplificative sulla simmetria delle linee di campo (per esempio nel caso di linee di campo circolari).

Come detto, la legge usa una grandezza scalare di tipo integrale derivata dal vettore  $\vec{B}$ .

Essa non esprime cioè una proprietà del campo magnetico punto per punto ma piuttosto le caratteristiche che esso deve presentare relativamente ad una porzione di spazio (la linea). Oltre alla circuitazione *sono grandezze di natura integrale il lavoro, l'energia potenziale e il flusso*.



Legge della circuitazione di Ampère

$$\mathcal{C}_\Gamma(\vec{B}) = \sum_\Gamma B_t dl = \mu_0 \hat{a} i_{\text{int}}$$

$$\mathcal{C}_\Gamma(\vec{B}) = \sum_\Gamma \vec{B} \cdot \delta \vec{l} = \sum_\Gamma B_t dl \tag{V.6.7}$$

L'enunciato è il seguente: la *circuitazione del vettore  $\vec{B}$  riferita ad una linea chiusa generica  $\Gamma$  è pari al prodotto della permeabilità magnetica <sup>(7)</sup> per la somma algebrica delle sole correnti elettriche interne alla linea chiusa*.

Per il calcolo della circuitazione la linea  $\Gamma$  viene divisa in tanti tratti elementari e se indichiamo con  $B_t$  la componente di  $\vec{B}$  lungo un tratto elementare di linea  $\delta l$  avremo che:

$$\mathcal{C}_\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \hat{a} i_{\text{interne}} \tag{V.6.8}$$

La circuitazione viene calcolata usando una rotazione oraria per chi guarda la linea e considerando positive le correnti entranti e negative

<sup>7</sup> La permeabilità magnetica  $\mu_0$  è una costante originariamente introdotta come costante nella *legge di Coulomb magnetica*, cioè nella legge in cui gli effetti magnetici venivano descritti con una formulazione analoga a quella usata per le cariche utilizzando il concetto di *massa magnetica* ed adottando una legge dipendente dall'inverso del quadrato della distanza.

quelle uscenti. Le correnti poste all'esterno della linea (nonostante producano un campo magnetico non contribuiscono alla circuitazione). Per esempio, con riferimento alla figura sarà:

$$\dot{a} \quad i_{\text{interne}} = i_5 + i_6 - i_4 - i_7$$

Se il campo presenta un andamento particolarmente simmetrico e magari costante, è facile calcolare la circuitazione e diventa possibile usare la (V.6.4) per determinare il valore di  $B$ .

In effetti le leggi sul valore di  $B$  per il filo rettilineo, la spira e il solenoide che discuteremo nei prossimi paragrafi si possono dedurre tutte dal teorema di Ampere.

### 6.4.1.2 Legge di Biot Savart e Laplace <sup>(8)</sup>

La legge esprime il contributo che un elemento di corrente produce in termini di vettore induzione in un punto a distanza  $r$  dall'elemento. Per ottenere  $\vec{B}$  bisogna sommare i contributi di tutti gli elementi di corrente presenti nello spazio.

L'enunciato è il seguente: *un elemento di corrente  $i \vec{dl}$  determina in ogni punto dello spazio un contributo  $d\vec{B}$  al campo magnetico e per determinare il valore di  $\vec{B}$  in quel punto si devono sommare vettorialmente tutti i contributi dovuti ai singoli elementi di corrente. Ciascun contributo dipende dall'inverso del quadrato della distanza, dal prodotto  $i \vec{dl}$  e dal seno dell'angolo  $\alpha$  formato dal raggio vettore con l'elemento di corrente. Inoltre  $d\vec{B}$  è perpendicolare al piano formato dal raggio vettore con l'elemento di corrente. Anche in questo caso compare come costante di proporzionalità la permeabilità magnetica.*

$$\delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \delta l \sin \alpha}{r^2} \quad (\text{V.6.9})$$

La legge si può esprimere in forma vettoriale tramite il prodotto vettore e utilizzando il versore del vettore  $\vec{r}$  pari a  $\vec{r}/r$ .

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (\text{V.6.9 bis})$$

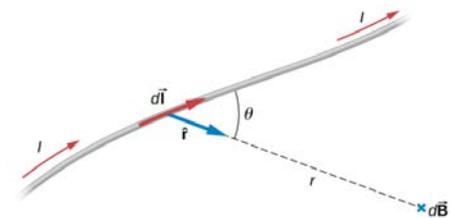
La costante  $\mu_0$  che compare nella legge è detta *permeabilità magnetica del vuoto*; la incontreremo frequentemente nello studio del magnetismo, ed essa era stata introdotta originariamente come costante della legge di Coulomb magnetica. Nel sistema internazionale essa vale

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T m / A} \quad (\text{V.6.10})$$

### 6.4.1.3 Le due leggi a confronto

Le due leggi che abbiamo enunciato adottano due punti di vista opposti. La legge di Ampere *integra* lungo una traiettoria il campo prodotto da

<sup>8</sup> Jean Baptiste Biot (1774-1862) e Felix Savart (1791-1841). La legge, basata sui lavori sperimentali di Biot e Savart fu enunciata da P. S. Laplace nel quadro del tentativo di ricondurre lo studio degli effetti magnetici ad un modello di tipo newtoniano in cui comparisse la legge dell'inverso del quadrato della distanza.



La legge di Biot e Savart

$$\delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \delta l \sin \alpha}{r^2}$$

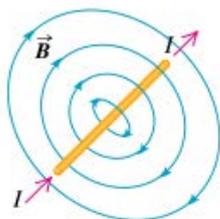
una o più correnti e dunque ci fornisce una informazione di tipo *globale* sul campo, ma non il valore del campo. Anche il lavoro dipende dalla forza in ogni punto ma ci dà solo una informazione globale sulla forza lungo un percorso.

La legge di Biot e Savart calcola il contributo elementare di un *elemento di corrente* in ogni punto dello spazio e se vogliamo trovare il campo in un singolo punto dovremo sommare i contributi di tutti gli elementi di corrente.

La legge di Biot e Savart, come quella di Ampere, risulta applicabile in modo relativamente semplice quando, per ragioni di simmetria, risulta semplice sommare gli infiniti contributi degli elementi di corrente come capita, ad esempio, se si vuole calcolare il campo magnetico lungo l'asse di una spira circolare.

Ci occuperemo ora, diffusamente, del campo magnetico generato da tre configurazioni particolarmente semplici di corrente: il filo rettilineo, la spira circolare, il solenoide.

#### 6.4.2 IL CAMPO DI UN FILO RETTILINEO INDEFINITO



Il filo rettilineo corrisponde alla configurazione più semplice tra quelle possibili e corrisponde alla trattazione quantitativa dell'esperimento di Oersted già descritto nel primo paragrafo.

Un filo rettilineo indefinito (cioè di dimensioni molto maggiori della distanza a cui si va a sondare il campo) percorso da corrente produce un campo magnetico caratterizzato da linee di campo che sono circonferenze concentriche giacenti in piani perpendicolari alla direzione del filo.

Il campo ha un valore che dipende esclusivamente dalla corrente  $i$  e dalla distanza  $r$  dal filo secondo la relazione:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \quad (V.6.11)$$



e la costante di proporzionalità vale  $2 \times 10^{-7} \text{ T m / A}$ .<sup>(9)</sup>

Le linee di campo sono dotate di un verso individuabile con la cosiddetta regola del cavatappi (o della vite destrorsa, o della rotazione oraria): *le linee di campo hanno il verso nel quale ruota una vite che venga avvitata nel verso della corrente.*

Alla luce di quanto detto a proposito della equivalenza tra cariche in moto e correnti elementari il campo magnetico può essere associato anche al movimento di una carica positiva che avanzi nel verso della corrente.

Se consideriamo un filo percorso dalla corrente di 1 A avremo che, alla distanza di 10 cm il valore di  $B$  è pari a

$$B = 2 \times 10^{-7} \frac{1}{0.1} = 2 \times 10^{-6} \text{ T} \text{ cioè circa un decimo del valore del campo magnetico terrestre.}$$

Le linee di forza generate da un **filo rettilineo indefinito** sono **circonferenze** che si diradano man mano che ci si allontana (poiché  $B \propto 1/r$ ); il verso è quello di avvitamento della vite che avanza nel verso della corrente

<sup>9</sup> La costante  $\mu_0$  compare sia nella legge di Ampère sia in quella di Biot-Savart. Dopo la sintesi dell'elettromagnetismo dovuta a Maxwell, essa entra insieme ad  $\epsilon_0$  nella determinazione della velocità delle onde elettromagnetiche. La parola *permeabilità* vuole esprimere la maggiore o minore propensione dei diversi materiali a risucchiare al loro interno le linee di campo (cioè a farsi *permeare* da esse). Dopo l'introduzione del SI delle unità di misura il suo valore nel vuoto vale per definizione  $4\pi \cdot 10^{-7}$

Se si tiene presente la difficoltà nel disporre di generatori continuativi di corrente elettrica si capisce come mai la scoperta di Oersted non sia stata banale. Il campo prodotto da fili percorsi da corrente è piuttosto blando anche con correnti dell'ordine dell'Ampere.

### 6.4.2.1 La legge di Oersted si può dedurre dalla legge della circuitazione

Consideriamo una linea  $\Gamma$  circolare e perpendicolare al filo centrata sul filo stesso. Per ragioni di simmetria le linee di campo devono essere delle circonferenze concentriche e il campo  $B$  deve avere in ogni punto della circonferenza la stessa intensità. Ci troviamo nelle condizioni ideali per la applicazione della legge della circuitazione (campo diretto come lo spostamento e di valore costante).

Poiché il vettore  $\vec{B}$  è sempre tangente alla circonferenza si ha:

$$\mathcal{C}_{\Gamma}(\vec{B}) = \sum B \delta l = B \sum \delta l = 2\pi r B$$

e applicando la legge di Ampère:

$$2\pi r B = \mu_0 i \Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

☺

### 6.4.2.2 Composizione di campi generati da fili rettilinei

Due fili rettilinei indefiniti (paralleli all'asse  $z$ ) e percorsi da correnti  $i$  equiverse con  $z$  attraversano il piano  $xy$  nei punti  $A \equiv (-l, 0)$  e  $B \equiv (l, 0)$ . Considerato sull'asse  $y$  il punto  $P$  che vede il segmento  $AB$  sotto l'angolo  $\varphi$  si determinino le caratteristiche del vettore  $\vec{B}$ . In particolare trovare il modulo  $B$  per  $i = 8.75$  A,  $l = 3.00$  cm e  $\varphi = 42.5^\circ$

☹

Le correnti sono equiverse a  $z$  cioè escono dal piano  $xy$  e determinano pertanto linee di campo con verso di rotazione antiorario. La situazione è del tipo rappresentato in figura con un vettore  $\vec{B}$  dato dalla composizione vettoriale dei due contributi  $\vec{B}_A$  e  $\vec{B}_B$  ciascuno con direzione tangente alla linea di campo, cioè ortogonale a  $\vec{r}$ .

Il vettore  $\vec{B}$  risulta pertanto parallelo all'asse  $x$  e con verso opposto. La sua intensità è data da  $B = 2 B_A \cos \varphi/2$  mentre  $B_A$  si trova con la relazione relativa all'esperimento di Oersted e cioè

$$B_A = \frac{\mu_0 i}{2\pi r_A} = \frac{\mu_0 i \sin(\varphi/2)}{2\pi l}$$

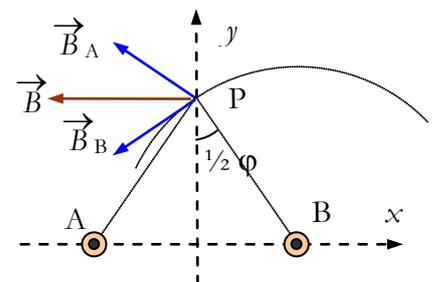
Si ha dunque:

$$B = 2 \frac{\mu_0 i \sin(\varphi/2)}{2\pi l} \cos \varphi/2 = 2 \frac{\mu_0 i \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2)}{2\pi l} = \frac{\mu_0 i \sin \varphi}{2\pi l}$$

Sostituendo i dati forniti si ottiene:

$$B = 2.00 \cdot 10^{-7} \frac{8.75 \cdot \sin(42.5)}{3.00 \cdot 10^{-2}} = 3.94 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

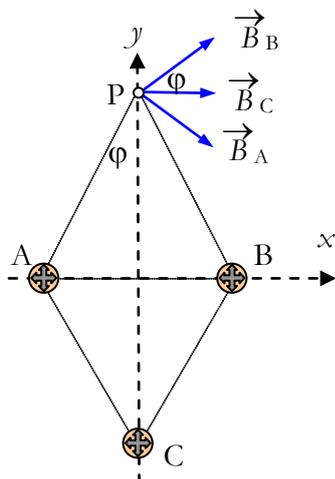
☺



### 6.4.2.3 Fili rettilinei con simmetria triangolare

Tre fili rettilinei indefiniti (paralleli all'asse z) e percorsi da correnti i uguali, equiverse ed entranti nel piano xy formano un triangolo equilatero ABC.

Si collochi il sistema di riferimento in modo che  $A \equiv (-l/2, 0)$ ,  $B \equiv (l/2, 0)$  e  $C \equiv (0, -\frac{\sqrt{3}}{2}l)$ .



- a) Spiegare perché in tutti i punti dell'asse y il vettore  $\vec{B}$  risulta parallelo all'asse x.
- b) Trovare B in un generico punto  $P \equiv (0, y)$  con  $y > 0$ .
- c) Calcolare B nella ipotesi che sia  $i = 2.45$  A,  $l = 2.50$  m e  $P \equiv (0, 0.45)$  m

☹

a) Se si considerano le zone con  $y > 0$  come in figura (si sono tracciati i tre vettori generati dalle correnti circolanti in A, B e C ortogonali ai rispettivi raggi vettori e con il verso previsto dalla regola della vite destrorsa) si ha che  $B_A = B_B$  perché  $r_A = r_B$

inoltre i due vettori  $\vec{B}_A$  e  $\vec{B}_B$  formano gli angoli  $\varphi$  e  $-\varphi$  con l'asse x e pertanto

$B_{Ay} = -B_{By}$  mentre  $B_{Ax} = B_{Bx}$ . Infine il vettore  $\vec{B}_C$  è sempre parallelo all'asse x perché il vettore  $r_C$  è sempre parallelo all'asse y.

Dunque  $\vec{B}$  risulta parallelo all'asse x e la stessa situazione si verifica anche nei punti con  $y < 0$  dove si ha semplicemente qualche inversione di verso ma non di direzione dei vettori considerati.

b) Alla luce di quanto detto al punto precedente  $B = 2B_{Ax} + B_C$  si devono pertanto calcolare le diverse componenti:

$$B_{Ax} = B_A \cos \varphi = k \frac{i}{AP} \cos \varphi = k \frac{i}{\sqrt{l^2/4 + y^2}} \frac{y}{\sqrt{l^2/4 + y^2}} = k \frac{i y}{l^2/4 + y^2}$$

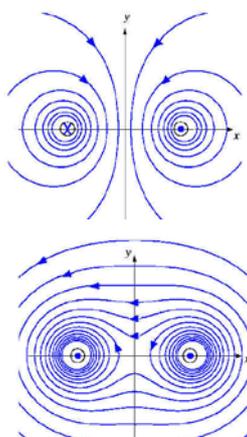
$$B_C = k \frac{i}{CP} = k \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}l + y}$$

Si ha pertanto:  $B = k i \left( \frac{2y}{\frac{l^2}{4} + y^2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}l + y} \right)$

c) Con riferimento ai dati si ha:  $B = k i \left( \frac{2y}{\frac{l^2}{4} + y^2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}l + y} \right) = 2.00 \cdot 10^{-7} \cdot 2.45$

$$\left( \frac{0.90}{1.25^2 + 0.45^2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2.50 + 0.45} \right) = 4.37 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

☺



linee di campo generate da due correnti parallele concordi e discordi; le correnti parallele si attirano mentre le correnti antiparallele si respingono

### 6.4.2.4 Le linee di campo generate da una coppia di fili paralleli

Dati due fili paralleli percorsi da correnti identiche entrambi perpendicolari al piano della pagina disegnare l'andamento delle linee di campo nei due casi in cui le correnti sono rispettivamente parallele ed antiparallele.

☹

Si tratta semplicemente di sommare gli effetti di linee di campo equiverse o di verso contrario e di tener conto che la intensità del vettore induzione decresce al crescere della distanza.

Così facendo ed operando in maniera qualitativa si ottengono gli andamenti che sono stati riprodotti nelle due immagini qui a lato.

Nel caso di correnti equiverse le linee di campo (che hanno verso contrario) si attirano e tendono a formare un corpo unico.

Nel caso di correnti di verso contrario invece le linee di campo (che hanno lo stesso verso) tendono a respingersi. La cosa può apparire paradossale, ma lo diventa meno se si tiene presente che le linee del campo magnetico non rappresentano dei poli ma le posizioni di equilibrio di aghi (aghi magnetici disposti su due linee parallele si respingono).



### 6.4.3 IL CAMPO GENERATO DA UNA SPIRA CIRCOLARE

Se si piega un filo rettilineo ad anello si può pensare che le linee di campo si concentrino nella parte centrale chiudendosi poi all'esterno e si determini un rafforzamento nella parte racchiusa dalla spira.

Il risultato è un campo del tipo indicato in figura (il verso delle linee di campo può ancora essere individuato con la regola del cavatappi).

Per quanto riguarda la intensità si ottengono valori diversi a seconda della posizione. Di solito si assume come valore di riferimento il valore al centro della spira che risulta essere pari a:

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{i}{R} \tag{V.6.12}$$

dove  $R$  è il raggio della spira.

Il valore del campo al centro della spira è dunque circa 3 volte quello generato da un filo rettilineo a parità di distanza dal filo.

L'esame del campo generato dalla spira circolare si presta bene per illustrare il funzionamento della legge di Biot e Savart.

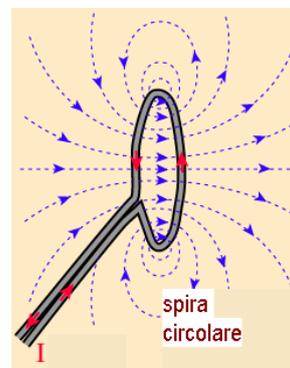
#### 6.4.3.1 Calcolo del campo lungo l'asse di simmetria della spira utilizzando la legge di Biot e Savart.

Collochiamo il centro del sistema al centro della spira (posta in  $xOz$ ) e orientiamo l'asse  $y$  lungo l'asse.

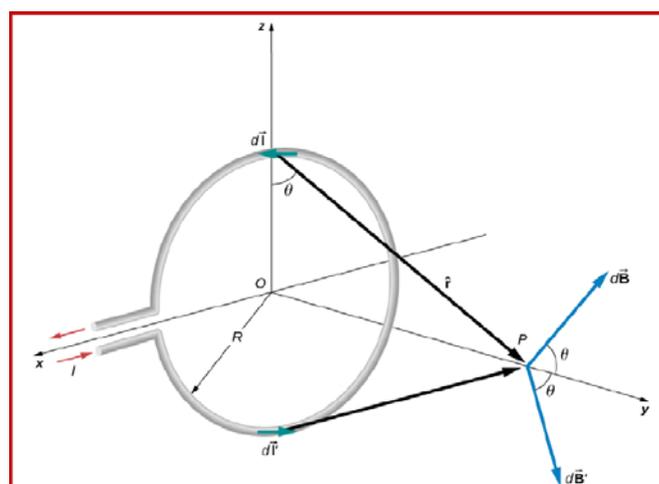
Ci proponiamo di calcolare il vettore  $\vec{B}$  in un generico punto  $P$  collocato lungo l'asse  $y$ . Allo scopo consideriamo i contributi dei due elementi di corrente  $i \delta l$  diametralmente opposti. Ciascuno di essi produce un campo  $\delta \vec{B}$  ortogonale al raggio vettore  $\vec{r}$  e all'elemento di corrente  $i \delta l$ . Se indichiamo con  $\theta$  l'angolo sotto cui dal punto  $P$  si vede la spira (per via delle rispettive ortogonalità)  $\delta \vec{B}$  forma con l'asse  $y$  ancora l'angolo  $\theta$ .

Questa proprietà persiste per tutte le coppie di elementi di corrente e così come tali elementi vengono visti sotto

un angolo  $\theta$  altrettanto fanno i vettori  $\delta \vec{B}$  che, sommandosi annullano sempre le loro componenti poste nel piano  $xz$  mentre quelle lungo l'asse  $y$  hanno sempre lo stesso valore e si sommano a coppie raddoppiandosi.



Linee di campo generate da una spira circolare; rispetto al filo rettilineo si ha una intensità più elevata



$$\delta B = \frac{\mu_0 i \delta l}{4\pi r^2} \text{ mentre } \delta B_y = \delta B \cos\theta$$

$$B = \sum \delta B_y = \sum \delta B \cos\theta = \sum \frac{\mu_0 i \delta l}{4\pi r^2} \cos\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \cos\theta \sum \delta l$$

Dove si sono portate fuori dal segno di sommatoria tutte le parti costanti. Inoltre  $\sum \delta l$  è la circonferenza della spira pari a  $2\pi R$  pertanto:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \cos\theta 2\pi R = \frac{\mu_0 i}{2r^2} R \cos\theta$$

Ma anche  $r$  dipende da  $\theta$ ; precisamente  $r = \frac{R}{\cos\theta}$  e dunque si ottiene:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} \cos^3\theta \tag{V.6.12}$$

L'andamento della funzione è rappresentato qui a lato e mentre il punto si sposta dal centro della spira all'infinito l'angolo  $\theta$  varia da  $0$  a  $\pi/2$ .

Se invece di utilizzare la variabile  $\theta$  si preferisce utilizzare la coordinata  $y$  del punto P si ha:

$y = R \tan \theta$  ma  $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}$  e dunque facendo tutte le sostituzioni:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} \frac{R^3}{(R^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + y^2)^{3/2}}$$

A distanze molto grandi dalla spira, si può trascurare  $R$  rispetto a  $y$  e allora

$$B \approx \frac{\mu_0 i R^2}{2 y^3} = \frac{\mu_0 i \pi R^2}{2\pi y^3} = \frac{\mu_0 i S}{2\pi y^3}$$

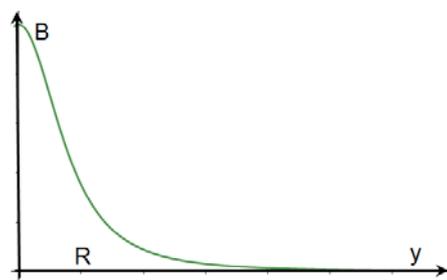
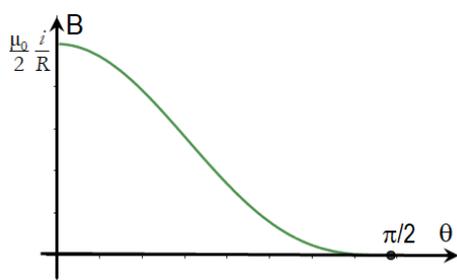
Il campo magnetico decresce come il cubo della distanza (proprio come accadeva al dipolo nel caso del campo elettrico) mentre risulta proporzionale alla quantità  $i S$  (dove  $S$  rappresenta la superficie della spira). Due spire diverse, ma con lo stesso valore  $i S$ , producono a grande distanza lo stesso campo.

### 6.4.3.2 Il momento magnetico di dipolo

Si vede da qui l'importanza che gioca la quantità  $i S$  nel descrivere gli effetti magnetici di una spira.

Si definisce pertanto una nuova grandezza  $\vec{\mu}$ , detta momento magnetico della spira (o anche momento magnetico di dipolo), orientato come il campo  $\vec{B}$ , cioè lungo l'asse della spira, e si scrive:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{y^3} \tag{V.6.13}$$



### 6.4.4 SOLENOIDE

Con il termine *solenoid* si intende un avvolgimento di molte spire ravvicinate caratterizzato dall'aver una dimensione longitudinale molto maggiore delle altre dimensioni lineari.

Il solenoide produce un campo quasi uniforme e piuttosto intenso al suo interno mentre all'esterno le linee di campo si curvano e ritornano poi a chiudersi su se stesse nell'altro estremo.

Se si indica con  $n$  il numero di spire per unità di lunghezza (cioè il rapporto tra il numero di spire dell'avvolgimento e la lunghezza dello stesso) il vettore induzione ha intensità pari a:

$$B_c = \mu_0 n i$$



$$(V.6.14)$$

Negli estremi a causa della asimmetria che si crea si assume solitamente come valore del campo  $B$  la metà di quello che si ha all'interno. La giustificazione di ciò sarà data in maniera dettagliata e quantitativamente ineccepibile in uno degli esercizi del paragrafo 6.

Sul piano qualitativo si può affermare che una porzione delle linee di forza dovute alle spire ravvicinate si va a chiudere direttamente all'esterno senza uscire dagli estremi.

Il verso delle linee di forze si può trovare sempre con la regola del cava-tappi o, più semplicemente, appoggiando la mano destra con le dita che seguono il verso della corrente e il pollice aperto che indicherà il verso delle linee di campo.

Come si vede dalla (V.6.14) con un solenoide si possono ottenere campi abbastanza intensi a condizione di operare con valori di spire per unità di lunghezza alti; il basso valore della costante  $\mu_0$  limita comunque il valore di  $B$  ottenibile.

Si consiglia di dimostrare la relazione V.6.14 dalla legge della circuitazione. Nel farlo basta utilizzare una linea  $\Gamma$  del tipo indicato nella figura qui a lato e tener conto di quanto detto sulle caratteristiche delle linee di campo del solenoide all'interno (campo uniforme) e all'esterno (campo trascurabile).

#### 6.4.4.1 Esempio numerico del campo prodotto da un solenoide

Supponiamo di far passare una corrente di 10A in un solenoide con 100 spire per centimetro ottenute sovrapponendo più strati.



In questo caso  $n = 10^4$  spire/m mentre

$$B = 12.56 \times 10^{-7} \times 10^4 \times 10 \approx 10^{-1} \text{ T}$$

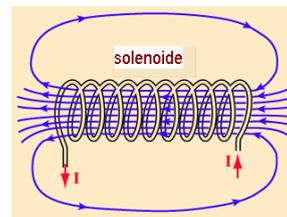


#### 6.4.4.2 Il campo all'interno di un tubo cilindrico percorso da corrente

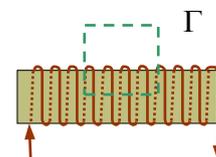
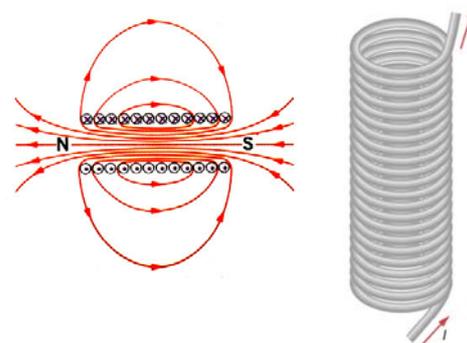
Un conduttore cilindrico indefinito cavo e a pareti sottili percorso da una corrente  $i$ , presenta al suo interno un campo magnetico nullo. Dimostrarlo usando il teorema della circuitazione di Ampere e contestualmente dimostrare che all'esterno vale la stessa legge valida per il filo di diametro trascurabile



Si consideri una generica circonferenza coassiale e interna al tubo.



il campo del solenoide ha un andamento simile a quello del magnete rettilineo;  $B = \mu_0 n i$ ; per il verso si veda la regola pratica nella figura sottostante



Poiché attraverso il suo contorno non passano correnti si conclude che la circuitazione del vettore  $\mathbf{B}$  è zero.

Il campo all'interno, se esiste, può essere solo o radiale o circuitale per ragioni di simmetria.

Ma il caso di campo radiale (che darebbe circuitazione zero) è da escludere perché ciò equivarrebbe alla esistenza di un monopolio magnetico. Resta il caso di campo circuitale che, per ragioni di simmetria dovrebbe avere come linee di campo delle circonferenze, ma in un contesto del genere se la circuitazione è nulla poiché essa varrebbe  $B 2\pi r$  ne consegue che  $B = 0$ .

All'esterno del conduttore basta applicare il teorema della circuitazione per ottenere  $B = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i}{r}$  visto che non esistono differenze rispetto al caso del filo di diametro trascurabile.



#### 6.4.5 VALORI TIPICI DEL VETTORE INDUZIONE MAGNETICA

A completamento della trattazione riportiamo una selezione di valori tipici di campo magnetico. Come si vede il campo di variabilità è molto elevato pari a 26 ordini di grandezza. I valori più elevati sono legati non a correnti elettriche ma piuttosto a proprietà intrinseche della materia (proprietà magnetiche associate alle particelle elementari).

Sorgente	Campo (T)
Superficie di un nucleo	$10^{12}$
Superficie di una stella di neutroni	$10^8$
Valori massimi impulsivi (1 ns)	$10^3$
Valori massimi impulsivi (pulsanti)	$10^2$
Valori massimi stazionari in laboratorio: superconduttività, 1993 MIT	37.2
Valori massimi stazionari in laboratorio: temperatura ambiente	23.5
Assenza di effetti acuti su batteri e funghi	14
Campo in aria in apparecchiature di RMN con avvolgimenti superconduttivi	$1 \div 10$
Elettromagnete da laboratorio	5
Limiti alla esposizione per l'uomo per tempi dell'ordine del minuto	0.2
Sbarretta magnetica, vicino ai poli	$10^{-2}$
Motori di elettrodomestici	$10^{-3}$
Tubo televisivo a colori (nelle vicinanze)	$10^{-4}$
Superficie terrestre	$0.5 \cdot 10^{-4}$
Linee di trasporto energia elettrica	$0.5 \cdot 10^{-4}$
Spazio interstellare	$10^{-10}$
Valori minimi misurati	$10^{-14}$
Tabella V.6.1: valori tipici di induzione magnetica	

## 6.5 Il momento magnetico

### 6.5.1 IL MOMENTO MAGNETICO DI UNA SPIRA: PERCHÉ UNA NUOVA GRANDEZZA ?

Le argomentazioni dei prossimi due paragrafi servono ad introdurre il concetto di momento magnetico in vista dell'uso che di questo concetto si fa per spiegare il magnetismo nella materia e per evidenziare il legame tra momento magnetico e momento angolare che diventa particolarmente significativo nello studio della struttura della materia a causa della importanza che i concetti di momento angolare e di momento magnetico giocano entro il quadro concettuale della meccanica quantistica.

Come abbiamo visto al termine del calcolo del campo generato da una spira, una spira di raggio  $R$  a distanze  $r$  molto grandi dal centro della spira stessa produce un campo magnetico che, lungo l'asse della spira, è diretto come l'asse stesso e vale:

$$B_{||} = \frac{\mu_0 i \times \pi R^2}{2\pi r^3}$$

La necessità di valutare gli effetti magnetici dovuti alle orbite elettroniche e di sommarne gli effetti quando tali orbite presentino caratteristiche direzionali diverse è una esigenza legata allo studio delle proprietà elementari della materia.

Per questa ragione, in maniera analoga a quanto si è fatto per i dipoli elettrici, si introduce un nuovo vettore, che sarà chiamato *momento magnetico della spira*, e che si rivelerà utile nella ricerca di proprietà microscopiche in grado di generare, per somma, proprietà macroscopiche significative.

Si chiama *momento magnetico di una spira di superficie  $A$  percorsa da una corrente  $i$*  un vettore diretto lungo l'asse della spira e con un verso che avanza quando la corrente ruota in senso orario (regola del cavatappi), la cui intensità sia pari a  $iS$ :

$$\vec{\mu}_m = i S \text{ vers}(\mathbf{n}) \tag{V.6.15}$$

Nel caso di un anello circolare si ha  $\mu_m = \pi a^2 i$  dove  $a$  rappresenta il raggio dell'anello circolare; l'unità di misura del momento magnetico nel S.I. è l' A m<sup>2</sup>.

### 6.5.2 IL CAMPO A DISTANZA PRODOTTO DA UNA SPIRA

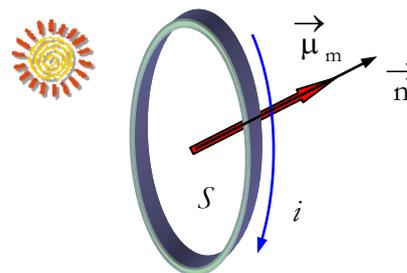
Se si utilizza la nozione di momento magnetico la equazione che dà il campo della spira si scrive in forma vettoriale così:

$$\mathbf{B}_{||} = \frac{\mu_0 \vec{\mu}_m}{2\pi r^3} \tag{V.6.16}$$

Nel caso del dipolo si aveva:  $E_{||} = \frac{2p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

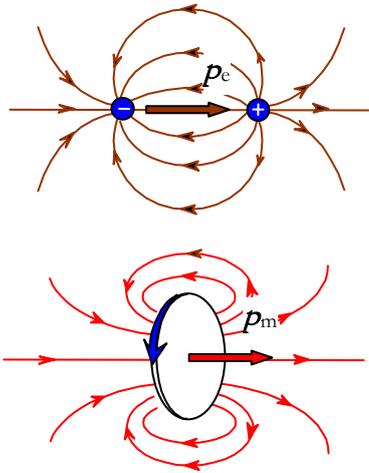
Dunque, a grande distanza da un anello percorso da corrente, il campo magnetico ha lo stesso andamento di un campo elettrico di dipolo. In particolare è direttamente proporzionale al momento magnetico e inversamente proporzionale al cubo della distanza tra la sorgente del campo e il punto considerato. Non importa la dimensione della spira (o dell'orbita elettronica), ciò che conta è solo il valore del momento magnetico.

Il momento magnetico della spira ne descrive le caratteristiche in modo indipendente dai dettagli come avviene per il momento elettrico di dipolo



### 6.5.3 UN CONFRONTO TRA IL CAMPO DEL DIPOLO E IL CAMPO DI UNA SPIRA

L'andamento del campo magnetico prodotto da una spira percorsa da corrente differisce su un punto essenziale da quello del dipolo. Mentre dipolo è formato da due cariche identiche e di segno contrario e le sue linee di campo partono dalla carica positiva e si dirigono verso la carica negativa dove terminano, le linee del vettore induzione sono linee chiuse e circondano l'anello percorso da corrente.



Ciò è ben evidenziato dalla Figura dove vengono messe a confronto le linee di un dipolo e quelle di una spira. Si osserva però che, a grande distanza le linee di campo tendono ad assumere la stessa forma.

A grande distanza dalla spira le caratteristiche del campo non dipendono dalle caratteristiche geometriche della spira stessa. Si osserva ancora che la forma della spira non ha nessuna importanza e se la si modifica rendendola quadrata o triangolare il campo a grande distanza non muta se non si modifica il momento magnetico.

Il dipolo elettrico e la spira percorsa da corrente presentano analogie nei campi a grande distanza: entrambi vanno come  $1/r^3$  e per entrambi è decisivo il vettore momento elettrico o magnetico

### 6.5.4 LA RELAZIONE TRA MOMENTO MAGNETICO E MOMENTO ANGOLARE

Estenderemo ora il concetto di momento magnetico al caso di una carica in moto circolare. L'utilità di questa estensione è evidente se si pensa all'elettrone in orbita intorno al nucleo.

Se una carica  $q$  si muove con velocità  $v$  lungo una traiettoria circolare essa determina un campo magnetico la cui direzione cambia continuamente. Tuttavia il valore medio del vettore induzione lungo l'asse risulterà lo stesso che viene prodotto da una corrente  $i = \frac{q}{T}$  che circoli lungo una

circonferenza con un periodo  $T = \frac{2\pi r}{v}$ .

Ne deriva la opportunità di introdurre il concetto di momento magnetico anche per una carica circolante attraverso la relazione:

$$\mu_m = i \pi r^2 = \frac{q \pi r^2}{T} = \frac{q v \pi r^2}{2\pi r} = \frac{q v r}{2}$$

Il momento magnetico di una carica in moto circolare vale:

$$\mu_m = \frac{q v r}{2}$$

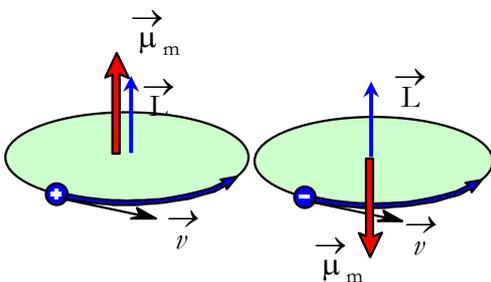
o equivalentemente, moltiplicando e dividendo per  $m$ :

$$\mu_m = \frac{q}{2m} m v r$$

ma, ricordando che  $m v r$  è il momento angolare  $L$  si può affermare che il momento magnetico di una carica circolante è proporzionale al momento angolare del corpo che trasporta la carica e si scrive:

$$\vec{\mu}_m = \pm \frac{q}{2m} \vec{L} \tag{V.6.17}$$

Sia il momento angolare, sia il momento magnetico sono vettori perpendicolari al piano orbitale della carica essi sono paralleli ed equiversi se la carica è positiva, sono invece antiparalleli se la carica è negativa.



Il legame tra momento magnetico e momento angolare per una carica in moto circolare

$$\vec{\mu}_m = \pm \frac{q}{2m} \vec{L}$$

La relazione ha importanti conseguenze in fisica atomica e nucleare

L'utilizzo della relazione che connette il momento magnetico orbitale al momento angolare si è rivelata particolarmente feconda nell'ambito della fisica moderna. In effetti tale relazione ha consentito dapprima di dare un *significato fisico* ad alcuni dei numeri quantici che lo studente ha già incontrato nei suoi studi di chimica e successivamente ha permesso il processo inverso e cioè la interpretazione di alcune proprietà magnetiche intrinseche delle particelle mediante modelli classici di rotazione delle stesse (è il caso, per esempio, dello spin).

Riassumiamo le cose da ricordare:

- a grande distanza da una carica in moto circolare il vettore  $\vec{B}$  è determinato dal vettore momento magnetico  $\vec{\mu}_m$
- il momento magnetico  $\vec{\mu}_m$  e il momento angolare  $\vec{L}$  sono sempre proporzionali e sono paralleli o antiparalleli a seconda che la carica sia positiva o negativa.

## 6.6 Calcolo del vettore induzione data la configurazione delle correnti <sup>10</sup>

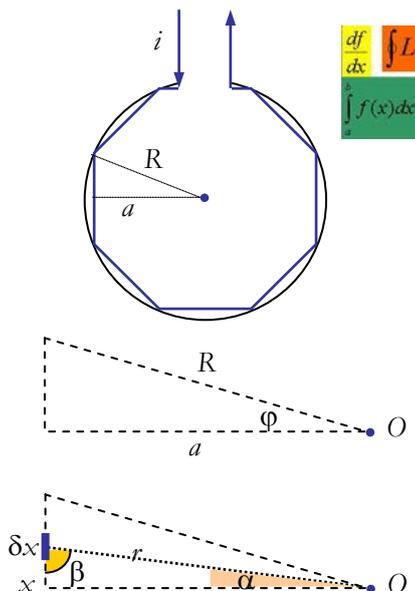
### 6.6.1.1 Il campo al centro di un poligono regolare percorso da corrente

Utilizzando la legge di Biot e Savart determinare le caratteristiche del vettore induzione  $\vec{B}$  al centro di un poligono regolare di  $n$  lati inscritto in una circonferenza di raggio  $R$  e percorso da una corrente  $i$ .

Confrontare il valore trovato nel caso del quadrato e dell'ottagono. Infine calcolare il valore che si ottiene quando  $n \rightarrow \infty$  cioè quando il poligono tende alla spira circolare.

☹

Consideriamo separatamente ogni lato del poligono ed osserviamo in via preliminare che i contributi di ogni singolo elemento di corrente individuato dalla posizione  $x$  e di lunghezza  $\delta x$  sono tutti ortogonali al piano della pagina essendo perpendicolari al piano formato dal raggio vettore e dall'elemento di corrente.



Inoltre se rappresentiamo la metà di un singolo lato osserviamo che:

- l'angolo  $\beta$  formato dall'elemento di corrente con il raggio vettore vale  $\frac{1}{2}\pi - \alpha$
- l'apotema  $a$  è legato al raggio della circonferenza tramite il semiangolo al centro  $\varphi = \frac{\pi}{n}$  dalla relazione  $a = R \cos \varphi$
- il valore di  $x$  che fornisce la posizione dell'elemento di corrente è legato in modo elementare ad angolo e apotema  $x = a \tan \alpha$  e pertanto (se si calcola il differenziale) si ha  $\delta x = a \frac{1}{\cos^2 \alpha} \delta \alpha$
- i contributi del singolo lato sono il doppio di quelli dovuti alla porzione rappresentata e il contributo dell'intero poligono è pari a  $n$  volte quello di un lato perché tutti i vettori sia elementari sia relativi all'intero lato hanno la stessa direzione e lo stesso verso.

Il contributo elementare  $\delta B$  vale:

$$\begin{aligned} \delta B &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{i \delta x \sin \beta}{r^2} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i \delta x \cos \alpha}{\left(\frac{a}{\cos \alpha}\right)^2} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i a \frac{1}{\cos^2 \alpha} \delta \alpha \cos \alpha}{\left(\frac{a}{\cos \alpha}\right)^2} = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{i \delta \alpha \cos \alpha}{a} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i \delta \alpha \cos \alpha}{R \cos \varphi} \end{aligned}$$

Il campo magnetico creato da un singolo lato è dunque:

$$B_s = 2 \int_0^\varphi \delta B = 2 \frac{\mu}{4\pi} \frac{i}{R \cos \varphi} \int_0^\varphi \delta \alpha \cos \alpha = {}^{11}$$

<sup>10</sup> Problemi proposti in "Irodov – problems in general physics" ed MIR

<sup>11</sup> L'integrale di coseno è seno e dunque l'area tra 0 e  $\varphi$  è  $\cos \varphi$

$$= 2 \frac{\mu}{4\pi} \frac{i \sin \varphi}{R \cos \varphi} = 2 \frac{\mu}{4\pi} \frac{i \tan \varphi}{R} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i \tan \frac{\pi}{n}}{R}$$

mentre quello dovuto al poligono si ottiene moltiplicando per  $n$  il valore relativo ad un lato:

$$B_n = n B_s = \frac{\mu}{2\pi} \frac{n i \tan \frac{\pi}{n}}{R}$$

Per confrontare il risultato prodotto da un ottagono con quello di un quadrato basta fare il rapporto e si ha:

$$\frac{B_8}{B_4} = \frac{8 \tan(\pi/8)}{4 \tan(\pi/4)} \approx 0.828$$

Ad un esame superficiale ci si sarebbe aspettato un numero  $> 1$  ma questa aspettativa sarebbe stata corretta se avessimo esaminato i poligoni circoscritti. In quelli inscritti, il poligono con meno lati è, mediamente più vicino al centro e dunque il suo contributo al campo magnetico è maggiore.

Quando  $n \rightarrow \infty$  si ha che  $\frac{\pi}{n} \rightarrow 0$  e  $\tan \frac{\pi}{n} \approx \frac{\pi}{n}$ . Pertanto:

$$B_n \rightarrow \frac{\mu}{2\pi} \frac{n i \frac{\pi}{n}}{R} = \frac{\mu}{2R} i \text{ che è il valore del campo prodotto dalla spira circolare.}$$



**Il campo generato da un circuito rettangolare nel suo centro**

Determinare il campo nel centro di un rettangolo le cui diagonali misurino  $2d$  e formino tra loro un angolo  $2\varphi$ . Tra gli infiniti rettangoli stabilire al variare di  $\varphi$  quale sia quello che corrisponde al valore minimo di  $B$ .



Il problema precedente nella sua parte iniziale consente di determinare il campo prodotto da una generica corda di una circonferenza e pertanto il caso del rettangolo può essere analizzato con gli strumenti già visti.

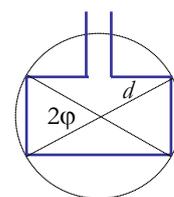
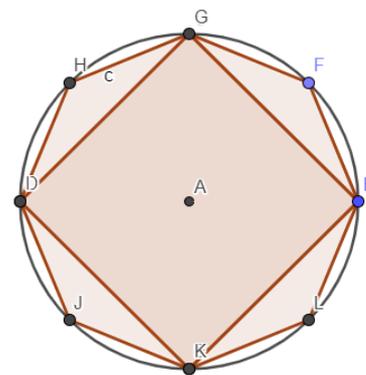
In effetti sulla base dei dati del problema, il raggio della circonferenza circoscritta vale  $d$  e i due angoli al centro valgono rispettivamente  $2\varphi$  e  $\pi - 2\varphi$ .

Pertanto in base al problema precedente se indichiamo con  $B_v$  e  $B_o$  i contributi del lato orizzontale e di quello verticale avremo (tenendo conto che gli angoli, riferiti alla soluzione precedente, risultano essere  $\varphi$  e  $\pi/2 - \varphi$  e che la tangente del complementare è l'inversa della tangente):

$$B_v = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i \tan \varphi}{d} \text{ e } B_o = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i}{d \tan \varphi}$$

Dunque il campo formato dai 4 lati del rettangolo è pari a :

$$B_r = 2 \frac{\mu}{2\pi} \frac{i}{d} \left( \tan \varphi + \frac{1}{\tan \varphi} \right) = \frac{\mu}{\pi} \frac{i}{d} \frac{\tan^2 \varphi + 1}{\tan \varphi} = \frac{\mu}{\pi} \frac{i}{d} \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \varphi \sin \varphi} =$$



$$= \frac{\mu i}{\pi d} \frac{1}{\cos\varphi \sin\varphi} = \frac{2\mu i}{\pi d} \frac{1}{\sin 2\varphi}$$

La semi-diagonale  $d$  rappresenta il raggio della circonferenza circoscritta. Dunque fissato tale raggio, al variare di  $\varphi$  il campo è minimo quando  $\sin 2\varphi = 1$  cioè quando il rettangolo corrisponde ad un quadrato.



### 6.6.1.2 Il campo del filo rettilineo di lunghezza finita



Si determini il campo magnetico creato da un tratto di conduttore rettilineo di lunghezza finita e assegnata in un generico punto dello spazio. Scegliere come variabili che descrivono il problema la distanza dal punto assegnato alla retta individuata dal filo e gli angoli formati dal filo con i 2 raggi vettori.

Determinare il valore di  $B$  nel caso in cui il punto disti dalla retta di  $a = 25.3$  cm e gli angoli valgano rispettivamente  $\varphi_1 = 54.0^\circ$  e  $\varphi_2 = 121.0^\circ$  con una corrente  $i = 12.5$  A.

Quanto sarebbe stato il valore di  $B$  nelle stesse condizioni per un filo rettilineo infinitamente esteso?



La scelta suggerita per la scelta delle variabili è quella che consente di scrivere la soluzione nel modo più semplice ed elegante.

Applichiamo la legge di Biot e Savart e osserviamo che i diversi elementi di corrente determinano nel punto P dei contributi vettoriali con la stessa direzione (ortogonale alla pagina) e verso (determinabile con la regola della vite e che nel caso in figura risulta entrante). Ciò ci permetterà di determinare la loro somma tramite un integrale definito.

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano avente come asse  $x$  la perpendicolare da P al filo che incontra il filo in O (scelto come origine) e come asse  $y$  la direzione del filo. Da considerazioni geometriche individuiamo i valori degli angoli necessari alla determinazione dei diversi elementi (vedi figura).

Considerato un generico elemento di corrente  $i \delta y$  caratterizzato da un raggio vettore  $r$  e da un angolo  $\varphi$  avremo, in base alla legge citata:

$$\delta B = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i \delta y \sin \varphi}{r^2}$$

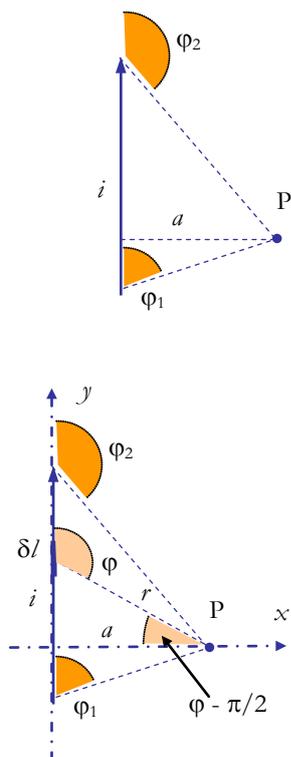
i valori di  $\delta y$  e  $r$  si ottengono da considerazioni geometriche:

$$y = a \tan(\varphi - \pi/2) = \frac{a}{\tan \varphi} \Rightarrow \delta y = \frac{a}{\tan^2 \varphi} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \delta \varphi = \frac{a}{\sin^2 \varphi} \delta \varphi$$

$$r = \frac{a}{\cos(\pi/2 - \varphi)} = \frac{a}{\sin \varphi}$$

sostituendo si ottiene:

$$\delta B = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i \frac{a}{\sin^2 \varphi} \sin \varphi}{\frac{a^2}{\sin^2 \varphi}} \delta \varphi = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i \sin \varphi}{a} \delta \varphi$$



$$B_P = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \delta B = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i}{a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi \delta\varphi = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i}{a} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$$

Quando il punto si trova sull'asse del tratto di circuito i due angoli  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  risultano essere supplementari e si ottiene:

$$B_P = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i}{a} \cos\varphi_1$$

Ciò ci consente di osservare (per confronto con il risultato del filo indefinito) che il mancato contributo della parte estesa verso l'infinito da entrambe le parti equivale alla moltiplicazione per  $\cos\varphi$ .

Nel caso numerico fornito si ha:

$$B_P = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i}{a} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) = \frac{10^{-7} \cdot 12.5}{25.3 \cdot 10^{-2}} (\cos 54^\circ - \cos 121^\circ) = 5.45 \cdot 10^{-6}$$

T

Un filo rettilineo indefinito avrebbe prodotto il valore:

$$B_P = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i}{a} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 12.5}{25.3 \cdot 10^{-2}} = 9.88 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

☹

### 6.6.1.3 Il campo al centro di un solenoide di dimensioni finite

La determinazione del campo del solenoide ideale si basa sulla supposizione di un campo uniforme all'interno e nullo all'esterno.

Il solenoide però produce un campo magnetico dovuto alla sovrapposizione dei campi di una serie di spire ravvicinate ma non coincidenti e pertanto il valore già determinato è valido nella ipotesi che sia  $l \gg R$  dove  $l$  e  $R$  indicano rispettivamente la lunghezza del solenoide e il raggio delle spire.

Determinare direttamente il campo al centro del solenoide senza introdurre approssimazioni e supponendo che il solenoide sia caratterizzato da  $n$  spire per unità di lunghezza.

Dopo aver ottenuto il risultato utilizzare le considerazioni svolte per determinare il valore del campo negli estremi.

Stabilire di quanto si sbaglia se si utilizza la formula semplificata nella ipotesi che sia  $R = 4.5 \text{ cm}$  e  $l = 20.0 \text{ cm}$ .

☹

Nel paragrafo 4 è stato svolto il calcolo del campo di una spira lungo il suo asse e si è dimostrato che:

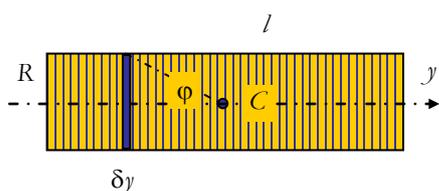
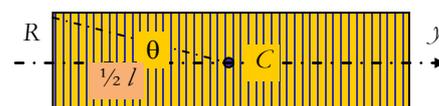
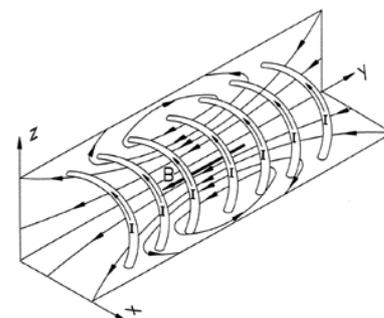
$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3\theta$$

dove  $R$  è il raggio della spira e  $2\theta$  è l'angolo sotto cui si vede la spira dal punto considerato lungo l'asse.

Per determinare il campo di un solenoide nel suo centro dovremo sommare tutti i contributi provenienti dalle spire che stanno a sinistra e a destra del punto centrale e tali contributi sono diversi perché l'angolo  $\theta$  risulta variabile.

$$\frac{df}{dx} \int_L$$

$$\int f(x) dx$$



Il calcolo potrà essere svolto andando da un estremo sino al centro perché il problema è del tutto simmetrico rispetto al centro e basterà pertanto raddoppiare il risultato per ottenere l'effetto globale.

L'angolo  $\varphi$  che gioca il ruolo della variabile su cui avverrà la integrazione varia da un valore minimo definito dalla condizione  $\tan \theta = \frac{R}{1/2 l}$  sino al valore massimo di  $1/2 \pi$  quando si considerano le spire passanti per il centro.

Nello spessore infinitesimo  $\delta y$  agiscono  $\delta N = n \delta y$  spire con un contributo

$$\delta B = \delta N \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \varphi = n \delta y \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \varphi$$

Dunque

$$B_c = 2 \int_{\theta}^{\pi/2} \delta B = 2 \int_{\theta}^{\pi/2} n \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \varphi \delta y$$

Come negli esercizi precedenti si tratta di esprimere  $\delta y$  in funzione di  $\delta \varphi$  in modo di calcolare l'integrale indefinito nella sola variabile  $\varphi$ .

$$\frac{R}{-y} = \tan \varphi \Rightarrow y = -R/\tan \varphi \Rightarrow \delta y = \frac{R}{\tan^2 \varphi} \frac{\delta \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{R}{\sin^2 \varphi} \delta \varphi$$

$$B_c = \mu_0 n i \int_{\theta}^{\pi/2} \sin \varphi \delta \varphi = \mu_0 n i [-\cos(\pi/2) + \cos \theta] = \mu_0 n i \cos \theta$$

Se si esprime  $\cos \theta$  in funzione di  $l$  e  $R$  si otterrà il campo al centro in funzione delle caratteristiche lineari del solenoide:

$$\cos \theta = \frac{l/2}{\sqrt{R^2 + l^2/4}} = \frac{1}{\sqrt{(2R/l)^2 + 1}} \text{ e dunque:}$$

$$B_c = \mu_0 n i \frac{1}{\sqrt{(2R/l)^2 + 1}} = \mu_0 n i \frac{l}{\sqrt{4R^2 + l^2}}$$

Se il rapporto tra diametro e lunghezza tende a zero si ottiene la ben nota relazione dimostrata usando la legge della circuitazione.

Per determinare il valore nell'estremo non si deve raddoppiare e il calcolo va eseguito avendo come estremo sinistro dell'integrale il valore di  $\theta$  tale che  $\tan \theta = R / l$ .

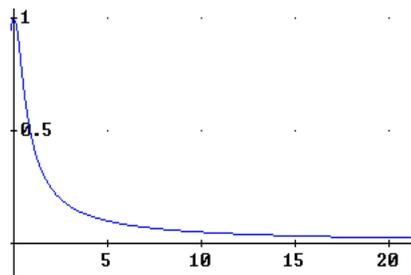
Si ottiene così:

$$B_c = 1/2 \mu_0 n i \frac{1}{\sqrt{(R/l)^2 + 1}} = 1/2 \mu_0 n i \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}$$

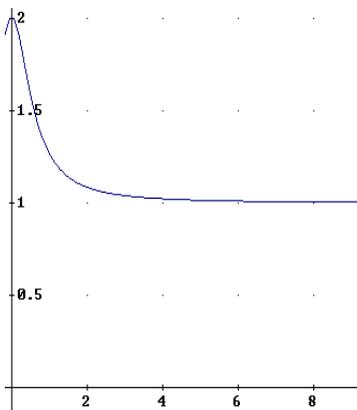
Attraverso il rapporto possiamo confrontare il valore nel centro con quello negli estremi:

$$\frac{B_c}{B_e} = 2 \sqrt{\frac{R^2 + l^2}{4R^2 + l^2}}$$

e ancora una volta si osserva che nel caso in cui  $R \ll l$  il rapporto vale 2.



L'andamento della funzione  $\frac{1}{\sqrt{(2R/l)^2 + 1}}$  al variare del rapporto  $R/l$  ci indica la validità della approssimazione  $B_c = \mu_0 n i$  per il calcolo del campo al centro di un solenoide



L'andamento della funzione  $\frac{\sqrt{(R/l)^2 + 1}}{\sqrt{4R^2 + l^2}}$  al variare del rapporto  $R/l$  ci indica la variazione del rapporto  $B_c/B_e$  al mutare delle caratteristiche geometriche del solenoide

Se ora utilizziamo i dati numerici forniti avremo che

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{(2R/l)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(9.0/20.0)^2 + 1}} = 0.912$$

e pertanto l'errore relativo sarà pari a:

$$\varepsilon\% = \frac{1 - 0.912}{0.912} 100 = 9.7 \%$$

Con i dati forniti il rapporto tra campo al centro e campo negli estremi vale:

$$\frac{B_c}{B_e} = 2\sqrt{\frac{R^2 + l^2}{4R^2 + l^2}} = 2\sqrt{\frac{4.5^2 + 20.0^2}{4 \cdot 4.5^2 + 20.0^2}} = 1.87 \text{ e non } 2 \text{ come previsto}$$

dalla formula semplificata.

☺

### 6.6.1.4 Una stima delle variazioni di campo all'interno e all'esterno di un solenoide molto lungo

Un solenoide rettilineo e molto lungo di raggio  $R$  è caratterizzato da  $n$  spire per unità di lunghezza. Determinare come varia il campo  $B$  lungo l'asse del solenoide all'interno e all'esterno dello stesso.

☹

Se consideriamo un punto  $P$  all'interno del solenoide il campo sarà determinato dalla somma del contributo delle spire che stanno tra  $P$  e  $O$  (destra) e di quelle a sinistra e che si estendono sino a  $-\infty$  (con angolo variabile tra  $0$  e  $\pi/2$ ).

Nel primo caso, adottando la simbologia già utilizzata negli esercizi precedenti avremo che:

$$B_d = \frac{1}{2} \mu_0 n i \int_{\varphi}^{\pi/2} \sin\theta \delta\theta = \frac{1}{2} \mu_0 n i \cos\varphi = \frac{1}{2} \mu_0 n i \frac{-x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Nel secondo caso:

$$B_s = \frac{1}{2} \mu_0 n i \int_0^{\pi/2} \sin\theta \delta\theta = \frac{1}{2} \mu_0 n i$$

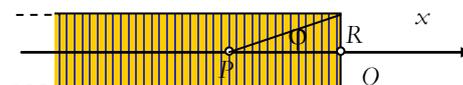
Dunque:

$$B_P = B_d + B_s = \frac{1}{2} \mu_0 n i \left( 1 + \frac{-x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$$

Se ora ci collochiamo con il punto  $P$  all'esterno del solenoide dovremo esaminare contributi con un angolo che varia da  $0$  (quando le spire sono a  $-\infty$ ) a  $\varphi$  quando le spire coincidono con l'estremo destro del solenoide).

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n i \int_0^{\varphi} \sin\theta \delta\theta = \frac{1}{2} \mu_0 n i (1 - \cos\varphi) = \frac{1}{2} \mu_0 n i \left( 1 + \frac{-x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$$

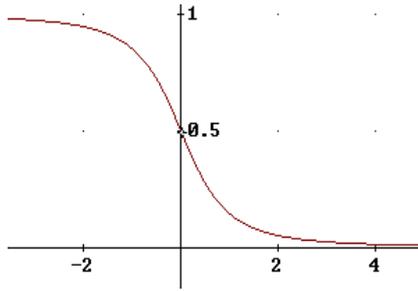
ovvero la relazione è sempre la stessa sia che  $x$  sia positivo sia che sia negativo.



Calcolo nel caso in cui il punto P sia all'interno con coordinata  $x < 0$



Calcolo nel caso in cui il punto P sia all'esterno con coordinata  $x > 0$



Andamento del campo all'interno ( $x < 0$ ) e all'esterno di un solenoide molto lungo, si osservi il rapido decremento al crescere della distanza

Il diagramma della funzione  $\frac{1}{2} [1 + \frac{-x/R}{\sqrt{1 + (x/R)^2}}]$  è rappresentato qui a lato e da esso possiamo osservare la perfetta simmetria del problema e il fatto che il solenoide infinito costituisce la ennesima approssimazione fisica della formula semplificata fornita nel testo.

Come elemento di novità possediamo ora la legge del decremento al di là del polo; il campo decresce molto rapidamente e può essere considerato praticamente nullo ad una distanza pari a 4 volte il raggio del solenoide.



### 6.6.1.5 Il momento magnetico di un disco rotante

Si consideri un disco di materiale isolante di raggio  $R$  uniformemente carico e si indichi con  $\sigma$  la densità superficiale di carica. Il disco viene fatto ruotare intorno al suo asse con velocità angolare  $\omega$ . Calcolare il campo magnetico nel centro del disco e il momento di dipolo del disco. Perché si è precisato che il disco debba essere di materiale isolante?

Si supponga che sia  $\sigma = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ C/m}^2$ ,  $T = 0.025 \text{ s}$  e  $R = 0.43.2 \text{ m}$ . Determinare con questi dati i valori di  $B$  e di  $\mu_p$  e confrontarli con quelli prodotti da una spira circolare che trasporti nello stesso tempo la stessa carica.



Il disco rotante può essere assimilato ad un insieme di spire circolari di raggio variabile da 0 a  $R$  ciascuna con una corrente  $i_r$  dipendente dalla distanza dal centro.

Un generico anello di raggio  $r$  e spessore  $\delta r$  trasporta una carica pari alla densità superficiale per la superficie dell'anello  $2\pi r \delta r$  e compie un giro completo in un tempo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  pertanto la sua rotazione corrisponde ad una corrente

$$\delta i = \frac{\delta q}{T} = \frac{2\pi r \delta r \sigma \omega}{2\pi} = r \sigma \omega \delta r$$

A questa corrente che circola su una spira di raggio  $r$  corrisponde un contributo elementare al campo magnetico:

$$\delta B = \frac{\mu}{2} \frac{\delta i}{r} = \frac{\mu}{2} \frac{r \sigma \omega \delta r}{r} = \frac{\mu \sigma \omega \delta r}{2}$$

Basta ora integrare i diversi contributi per  $r$  compreso tra 0 e  $R$  per determinare il valore del vettore induzione magnetica nel centro:

$$B = \int_0^R \delta B = \int_0^R \delta B = \frac{\mu \sigma \omega}{2} \int_0^R \delta r = \frac{\mu \sigma \omega R}{2}$$

Per quanto riguarda il momento magnetico dovremo, anche in questo caso integrare i momenti magnetici elementari ciascuno dato dal prodotto della corrente elementare per la superficie della spira corrispondente.

$$\mu_p = \int_0^R \delta \mu_p = \int_0^R r \sigma \omega \delta r \pi r^2 = \sigma \omega \pi \int_0^R r^3 \delta r = \frac{\sigma \omega \pi R^4}{4}$$

Mentre  $B$  cresce in maniera lineare con  $R$  il momento magnetico è proporzionale a  $R^4$ .



Il disco deve essere di materiale isolante perché nel caso di un conduttore, ammesso che fosse possibile collocare le cariche in maniera uniforme, le forze di interazione tra le correnti, di origine magnetica tenderebbero a modificare la distribuzione di carica.

Con i valori numerici forniti si ha:

$$B = \frac{\mu \sigma \omega R}{2} = \frac{12.56 \cdot 10^{-7} \cdot 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \cdot 0.432}{0.025} = 1.70 \cdot 10^{-8} \text{ T}$$

$$j = \frac{\sigma \omega \pi R^4}{4} = \frac{2.5 \cdot 10^{-4} \cdot \pi^2 \cdot 0.432^4}{2 \cdot 0.025} = 1.72 \cdot 10^{-3} \text{ A/m}^2$$

Invece di eseguire il confronto sostituendo i valori numerici cerchiamo la relazione in generale.

La corrente  $i = q/T = \frac{\pi R^2 \sigma \omega}{2\pi} = \frac{R^2 \sigma \omega}{2}$  e pertanto:

$$B_s = \frac{\mu}{2} \frac{i}{R} = \frac{\mu}{2} \frac{R \sigma \omega}{2} = \frac{\mu R \sigma \omega}{4}$$

cioè la metà del valore dovuto alla carica distribuita.

Si procede analogamente per il momento magnetico:

$$j_s = i \pi R^2 = \frac{R^2 \sigma \omega}{2} \pi R^2 = \frac{\pi R^4 \sigma \omega}{2}$$

e in questo caso il momento magnetico è doppio.

☺

### 6.6.1.6 Campo e momento magnetico di un avvolgimento a spirale

Un conduttore sottile e isolato forma una spirale piana di  $N = 100$  spire

Ed è percorso da una corrente  $I = 8$  mA. I raggi interno ed esterno sono rispettivamente  $a = 50$  mm e  $b = 100$  mm. Determinare a) il valore  $B$  della induzione magnetica al centro della spirale b) la espressione del valore del momento magnetico  $\mu_p$

☹

Possiamo calcolare il valore di  $B$  sommando i contributi  $\delta B$  delle diverse spire di raggio variabile nell'intervallo  $[a, b]$ .

Divideremo pertanto tale intervallo in porzioni di spessore  $\delta r$  ciascuna delle quali conterrà un numero di spire  $\delta N$ :

$$\delta N = N \frac{\delta r}{b-a}$$

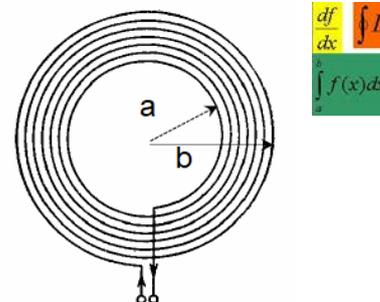
Per la legge di Biot e Savart il contributo di una singola spira vale:

$$B_r = \frac{\mu_0}{2r} I \text{ ma tra } r \text{ e } r+\delta r \text{ sono presenti } \delta N \text{ spire e dunque:}$$

$$B = \int_a^b \frac{\mu_0}{2r} I \delta N = \int_a^b \frac{\mu_0}{2r} I \frac{N}{b-a} \delta r = \frac{\mu_0 N}{2(b-a)} I = \int_a^b \frac{1}{r} \delta r =$$

$$= \frac{\mu_0 N}{2(b-a)} I (\ln b - \ln a) = \frac{\mu_0 N}{2(b-a)} I \ln \frac{b}{a}$$

Con i dati del problema:



$$B = \frac{2\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^2 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-3}} \ln 2 = 6.97 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Per quanto riguarda il momento magnetico  $\mu_p$  si procede allo stesso modo; il momento di una spira di raggio  $r$  vale  $\pi r^2 I$

$$\mu_p = \int_a^b \pi r^2 I N \frac{\delta r}{b-a} = \frac{\pi I N}{b-a} \int_a^b r^2 \delta r = \frac{\pi I N}{3(b-a)} (b^3 - a^3) = \frac{\pi I N}{3} (b^2 + ab + a^2)$$

☺