

## V.7 La forza magnetica e le sue applicazioni

### INTRODUZIONE

Il titolo del capitolo va compreso nella sua interezza; descrivere le caratteristiche della forza magnetica è abbastanza semplice, ma sono le svariatissime applicazioni di questa forza a farla da padrone e, non a caso, tra un paragrafo l'altro ci sono ben 27 esercizi abbastanza tosti e svolti in maniera dettagliata.

La forza magnetica nella forma della interazione tra correnti è stata scoperta e studiata da Ampere a inizio 800 nello stesso contesto in cui è nata l'idea di corrente elettrica. Il primo paragrafo è dedicato alla illustrazione di quel contesto storico e agli sviluppi che ne ha fatto l'elettrotecnica con la invenzione degli strumenti di misura a bobina mobile e dei motori a corrente continua. Sul piano delle applicazioni, esemplare il wattmetro, il misuratore della potenza elettrica dove interagiscono magneticamente due bobine una legata alla corrente e l'altra alla d.d.p.

Dopo i doverosi richiami alla storia si passa a questioni in cui il moto delle cariche elettriche si lega strettamente alla fisica moderna e alle sue evoluzioni.

La forza magnetica è di tipo trasversale rispetto al moto delle cariche ed ecco comparire cariche che si muovono su traiettorie circolari. Siamo nei primi decenni del 900 e sulle lastre fotografiche appaiono due particelle che si muovono su due circonferenze tangenti formando un otto. Una è un elettrone e l'altra che, si muove allo stesso modo ma in verso opposto, deve avere carica positiva; siamo in presenza della prima scoperta dell'antimateria.

Le cariche in moto in presenza di campi magnetici possono avere energie anche molto grandi, maggiori di  $mc^2$  e in questo caso i calcoli richiedono l'uso della teoria della relatività perché, man mano che l'energia cresce, quella che aumenta non è più la velocità ma la massa della particella. Alcuni esercizi svolti vi insegnano il da farsi.

Il percorso storico legato al 900 prosegue con la presentazione dettagliata dei lavori di J.J. Thomson che portarono, partendo dai raggi catodici, alla scoperta del carattere granulare della elettricità e alla necessità di ripensare l'intera struttura della materia; tutte cose realizzate usando campi elettrici incrociati con campi magnetici, tubi di vetro, pompe a vuoto e grandi capacità sperimentali.

Il successivo balzo in avanti riguarda la scoperta del primo acceleratore di particelle, il ciclotrone, che sfrutta una strana proprietà delle cariche in moto in un campo magnetico: fanno traiettorie circolari con un raggio sempre più ampio man mano che si fa crescere la loro energia ma, meraviglia delle meraviglie, impiegano sempre lo stesso tempo a fare un giro e così gli impulsi di campo elettrico possono essere dati sempre con lo stesso ritmo almeno finché non si entra nel dominio della relatività.

Quando mi sono iscritto a fisica nel 1965, di fianco all'istituto, era stato appena terminata la costruzione di un grande ciclotrone che ha funzionato sino agli anni 80: ferro, rame, tanta energia e tante piccole reazioni nucleari che, con pazienza i laureandi leggevano guardando pellicole fotografiche nel *capannino*, una baracca di fianco al *capannone*, dove stava il ciclotrone.

I ciclotroni sono stati superati quando c'è stato bisogno di energie sempre più grandi, ma ci ha pensato la medicina nucleare a farli tornare di moda: oggi si usano come generatori di proiettili per tutte quelle applicazioni diagnostiche e terapeutiche in cui servono isotopi radioattivi a vita media così breve che occorre fabbricarseli in casa. Se vuoi usare la PET (tomografia ad emissione di positroni) ti serve un ciclotrone.

I ciclotroni nella ricerca sulle particelle e in quella sui costituenti ultimi dell'universo sono stati sostituiti da un'intera famiglia di acceleratori circolari, relativistici e sempre più grandi, i sincrotroni; acceleratori così grandi che i laboratori ormai dentro allo strumento e non viceversa.

Descrivo il più grande oggi esistente quello del CERN con il suo anello di 27 km a 100 m di profondità con i 4 laboratori messi in grandi caverne in 4 punti della circonferenza. I magneti, che devono produrre campi molto intensi, sono messi lungo l'intero anello stanno immersi in elio liquido a 2 kelvin ( $-271\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) per poter funzionare in condizioni di superconduttività. Pensate alle complicazioni pratiche ...

Al CERN, attualmente si fanno scontrare protoni e antiprotoni che hanno ormai raggiunto l'energia di una zanzara, ma la zanzara è grande un millimetro e invece i protoni sono mille miliardi di volte più piccoli. Ma la ricerca va avanti ed europei e cinesi pensano al prossimo step con un anello di 100 km che lavorerà ad energie più basse ma utilizzerà elettroni ed antielettroni che consentono di tagliare la materia molto meglio, perché, a differenza dei protoni che sono fatti di quark, gli elettroni sono genuinamente elementari.

Dopo avervi parlato degli acceleratori vi parlo di una macchina molto più semplice, lo spettrografo di massa, sempre basato su campi elettrici e magnetici incrociati che ci ha consentito di misurare le masse atomiche e di scoprire che, quasi tutti gli elementi, hanno uno o più fratelli con le stesse proprietà chimiche ma masse leggermente diverse: gli isotopi.

Infine una scoperta del tardo 800 ma che è diventata importantissima nel 900 per indagare la capacità dei solidi di condurre l'elettricità: l'effetto Hall.

Con questo effetto sempre basato sulle stranezze dei campi magnetici siamo stati in grado, elemento per elemento, di misurare quanti elettroni per ogni atomo vengono messi a disposizione per la conduzione e di scoprire che quella che è stata chiamata *conduzione per buchi* nei semiconduttori (si veda il capitolo 0505) esiste per davvero nella forma di buchi: a muoversi sono in realtà sempre e solo gli elettroni, ma l'effetto globale, che danno è quello di un moto di cariche positive in verso contrario ed è l'effetto Hall a dimostrarlo in maniera inequivocabile.

## 7.1 Interazioni tra correnti e tra correnti e magneti

### 7.1.1 LEGGE DI AMPÈRE PER LA INTERAZIONE TRA FILI RETTILINEI

La legge di interazione tra le correnti elettriche è dovuta ad Ampère e, come si è detto nel capitolo precedente, si colloca in un programma di ricerca entro il quale l'intero magnetismo è ricondotto all'azione di correnti elettriche.

Ampère ci ha lasciato una legge generale di interazione diretta tra elementi di corrente. Oggi si studia solo quella relativa a fili rettilinei paralleli e indefiniti perché si è rivelato vincente il modello che utilizza la mediazione del campo magnetico per spiegare le interazioni tra correnti.

Secondo la legge di Ampere due fili rettilinei indefiniti e paralleli percorsi da corrente si attirano o respingono a seconda che le correnti siano parallele o antiparallele con una forza che rispetta la III legge della dinamica ed è proporzionale al prodotto delle correnti e inversamente proporzionale alla distanza.

La forza agisce su ogni elemento  $\delta l$  e la legge afferma che:

$$\frac{\delta F}{\delta l} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d} \quad (V.7.1)$$



La legge di interazione sarà da noi dedotta studiando l'azione del campo magnetico generato da una delle due correnti sull'altra.

Se consideriamo un elemento del conduttore 2 di lunghezza  $\delta l$  esso risulta soggetto ad una forza perpendicolare alla corrente e alla linea di forza, cioè ad una forza  $\delta F_{21}$  diretta verso l'altro conduttore e, con riferimento al caso rappresentato, attrattiva.

Tale forza, in base alla legge da cui si è dedotta la definizione di  $B$ , ha intensità;

$$\delta F_{21} = B_1 \delta l i_2$$

Ma il valore di  $B$  è unicamente determinato dalla corrente  $i_1$  e dalla distanza e vale:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$$

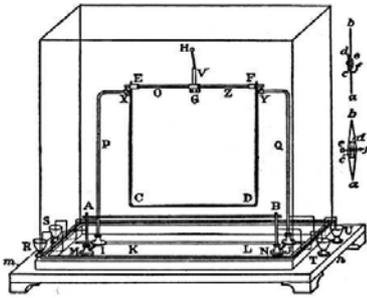
Possiamo pertanto affermare che sul conduttore si esercita una forza per unità di lunghezza pari a:

$$\frac{\delta F}{\delta l} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}$$

Si può ripetere esattamente lo stesso ragionamento per l'interazione tra il campo generato dal conduttore 2 e il conduttore 1 ottenendo esattamente lo stesso risultato nel rispetto della III legge della dinamica.

### 7.1.2 LA DEFINIZIONE OPERATIVA DELL'AMPERE

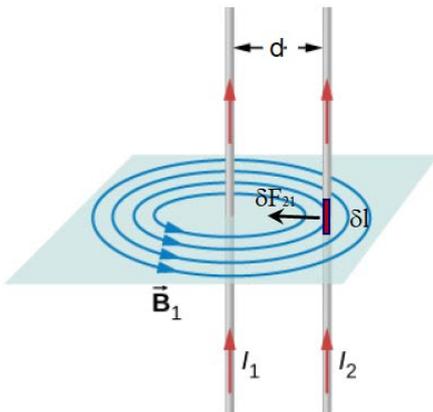
Se nella relazione (V.7. 1) si considerano due correnti uguali del valore di 1 A si ha modo di ottenere *finalmente* la definizione operativa della unità di corrente: *si dice che due fili rettilinei indefiniti posti alla distanza di 1 m sono percorsi dalla corrente di 1 A se essi si attirano, o respingono, con una forza pari a  $2 \times 10^{-7}$  N/m.*



la bilancia delle correnti progettata da Ampere per misurare la interazione tra elementi di corrente che consente la definizione operativa dell'Ampere

Legge di Ampere sulla interazione tra correnti

$$\frac{\delta F}{\delta l} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}$$

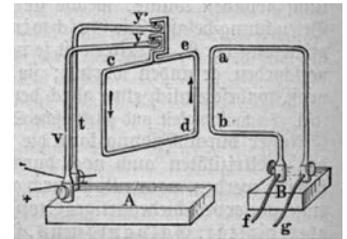


l'interazione tra i fili vista di fronte; l'elemento di corrente  $i_2 \delta l$  subisce la forza elementare  $\delta F_{21}$  dovuta al campo generato da  $i_1$

L'apparato sperimentale per la definizione dell'Ampere è basato sulla cosiddetta *bilancia delle correnti* un dispositivo messo a punto da Ampère che consente la misura della interazione senza dover ricorrere a fili indefiniti ma che utilizza invece spire rettangolari in cui gli effetti dei rami trasversali vengono opportunamente schermati.

Visti il valore molto basso della forza risulta evidente come l'azione elettrodinamica tra fili percorsi da corrente richieda correnti piuttosto elevate, così elevate da essere osservabile facilmente solo simulando dei corti circuiti.

la soluzione adottata da Ampere per evidenziare la interazione tra fili ricorrendo ai lati di spire rettangolari con annullamento degli effetti indesiderati



### 7.1.3 L'INTERAZIONE TRA UNA SPIRA RETTANGOLARE E UN CAMPO UNIFORME

Consideriamo una spira rettangolare percorsa da corrente immersa in un campo magnetico uniforme ed indichiamo con  $\alpha$  l'angolo formato tra la normale alla spira e il vettore  $\vec{B}$ .

Usando la regola della mano sinistra si può facilmente osservare che le forze che si esercitano sui lati della spira perpendicolarmente al vettore  $\vec{B}$  determinano una coppia che, nel caso indicato, determina rotazioni antiorarie.

Per calcolarne il momento ci riferiamo alla figura in cui è rappresentata la spira vista dall'alto. Sui due lati della spira perpendicolari all'asse di rotazione agiscono forze contrarie dirette come l'asse di rotazione che possono solo determinare delle deformazioni della spira stessa e pertanto non vengono ulteriormente analizzate.

Il momento della coppia di forze è pari al prodotto della forza magnetica per il braccio  $d$

$$M = F d = F a \sin \alpha$$

dove  $a$  è la larghezza della spira e  $\alpha$  è l'angolo formato tra la normale al piano della spira e la direzione del vettore  $\vec{B}$ . Sostituendo l'espressione della forza magnetica si ha:

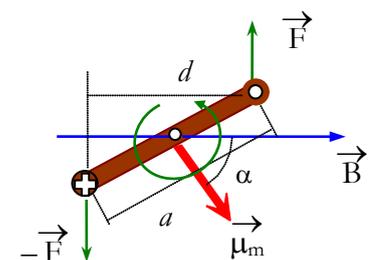
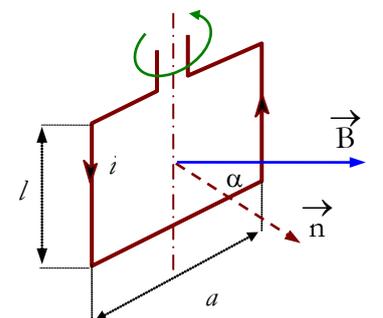
$$M = i l B a \sin \alpha = i S B \sin \alpha$$

dove  $S = a l$  è l'area racchiusa dalla spira. Ma il prodotto della corrente che circola in una spira per l'area della spira rappresenta il momento magnetico  $\mu_m$  della spira, pertanto:

$$M = \mu_m B \sin \alpha \tag{V.7.2}$$

Per effetto del momento delle forze, la spira ruota e tende a disporsi nella posizione con  $\alpha = 0$  che corrisponde alla condizione di equilibrio stabile (la posizione con  $\alpha = \pi$  corrisponde all'equilibrio instabile).

Dunque una spira percorsa da corrente tende a disporsi perpendicolarmente alle linee di forza e con il vettore momento magnetico allineato con la linea di forza esattamente come fa l'ago magnetico. Questa proprietà viene utilizzata sia per la costruzione degli strumenti di misura, sia per il funzionamento dei motori elettrici ma è anche rilevante per quanto riguarda la interazione tra un campo magnetico e un orbitale elettronico.



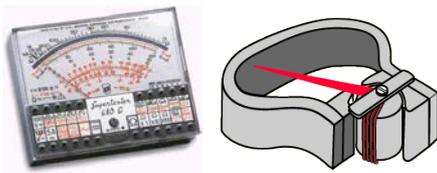
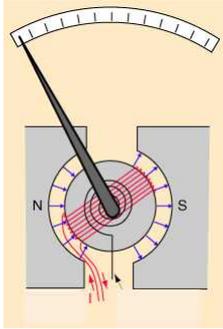
un campo uniforme agendo su una spira determina una coppia di forze con momento dipendente dall'angolo tra campo e normale alla spira

Interazione tra spira e campo uniforme  
 $M = \mu_m B \sin \alpha$  - di nuovo il momento magnetico

### 7.1.4 GLI STRUMENTI A BOBINA MOBILE

Il milliamperometro a bobina mobile si basa sulla proprietà delle spire percorse da corrente di orientarsi all'interno di un campo magnetico.

Esso è composto dai seguenti elementi principali:



uno strumento a bobina mobile: schema meccanico ed elettrico; si osservino la bobina mobile, la molla antagonista ed il campo magnetico radiale

- un magnete permanente con le espansioni polari lavorate circolarmente con al suo interno un cilindro di materiale magnetico in modo di creare nel traferro un campo di radiale. Ciò consente di essere sempre nella condizione con  $\sin \alpha = 1$  cioè con il piano della spira allineato con la linea di forza e di avere dunque un momento torcente indipendente dal particolare angolo a cui si opera.
- un telaio di alluminio di forma rettangolare che può ruotare su due perni affilati che appoggiano su una base fissa solidale al magnete e costruita con materiale molto duro. Il telaio può ruotare tra le espansioni polari del magnete e il fatto che sia costruito in alluminio gli consente di svolgere una funzione di smorzatore delle oscillazioni a causa di un effetto di induzione elettromagnetica che sarà esaminato nell'apposito capitolo.
- un numero elevato di spire di rame avvolte intorno al telaio di alluminio. Più spire ci sono e maggiore è la sensibilità dello strumento perché  $N$  spire producono un effetto torcente pari a  $N$  volte quello di una sola.
- due molle a spirale in bronzo fosforoso simili ai bilancieri degli orologi meccanici. Le molle hanno un estremo unito alla parte fissa e l'altro alla parte mobile e fungono da elementi di collegamento delle spire dell'avvolgimento con i morsetti dello strumento. La funzione meccanica delle molle è quella, avvolgendosi, di creare un momento, detto *momento antagonista*, che si oppone al *momento torcente* dovuto alla forza magnetica. Il momento della coppia antagonista è proporzionale all'angolo  $\varphi$  rispetto alla posizione di riposo.
- una lancetta a coltello fissata all'equipaggio mobile e che ruota sopra una scala fissa con funzione di indicatore della misura

Quando una corrente elettrica arriva dai morsetti e passa attraverso le molle a spirale alle spire dell'equipaggio mobile nasce un momento torcente che, in base alla (V.7.2) vale:

$$M_t = N B i S$$

L'equipaggio mobile, per effetto del momento torcente, ruota di un angolo  $\varphi$  e le molle determinano un momento antagonista:

$$M_a = k \varphi$$

Il sistema oscilla intorno ad una posizione di equilibrio determinata dalla eguaglianza dei due momenti (di qui l'importanza dello smorzatore) e pertanto:

$$\varphi_{eq} = \frac{N B S}{k} i \tag{V.7.3}$$

l'angolo di equilibrio è proporzionale alla corrente che attraversa la bobina e la quantità  $\frac{N B A}{k}$  determina la sensibilità dello strumento. Si può dunque aumentare la sensibilità di uno strumento aumentando il numero

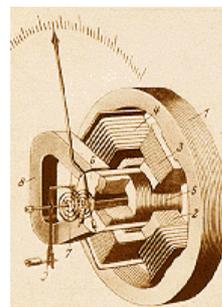
l'angolo di rotazione risulta proporzionale alla corrente in ogni punto per effetto del **campo radiale** e ciò consente di misurare le correnti con una scala lineare

di spire, oppure usando magneti più potenti, oppure ancora usando molle più morbide.

Esistono particolari strumenti di misura, detti *galvanometri*, nei quali l'equipaggio mobile è sospeso, invece che imperniato, a due fili di quarzo. Si tratta, come si può ben capire di strumenti molto sensibili in grado di apprezzare correnti sino a  $10^{-12}$  A.

### 7.1.5 IL WATTMETRO

Come si nota dalla (V.7.3) l'angolo di equilibrio di uno strumento a bobina mobile è proporzionale al prodotto  $B i$ . Se invece di utilizzare un campo magnetico prodotto da un magnete permanente si utilizza il campo magnetico prodotto da una bobina fissa si otterrà che l'angolo è proporzionale al prodotto delle correnti circolanti nelle due bobine. Dando valori opportuni alla resistenza della bobina fissa, si può fare in modo che tale corrente sia proporzionale alla d.d.p. del circuito (come si fa con il voltmetro) e a questo punto si ottiene uno strumento a tre morsetti <sup>1</sup>in grado di misurare una grandezza proporzionale al prodotto della d.d.p. per la corrente, cioè la potenza elettrica. Abbiamo realizzato un *wattmetro*.



Nel *wattmetro* si fa in modo che il campo  $B$  sia proporzionale a  $\Delta V$  così facendo si riesce a misurare  $i \Delta V$  cioè la potenza elettrica

### 7.1.6 IL MOTORE ELETTRICO A CORRENTE CONTINUA

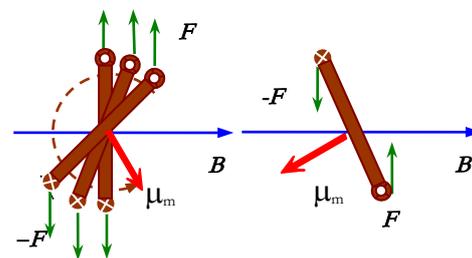
L'idea basilare su cui funziona il motore elettrico è illustrata nella figura qui a lato e si basa su una variante del principio di funzionamento del milliamperometro: *nel motore si fa in modo che la bobina mobile non possa mai raggiungere una posizione di equilibrio*.

Quando la bobina rotante arriva nella posizione verticale che corrisponderebbe ad una condizione di equilibrio stabile si inverte la corrente nell'avvolgimento. Per effetto di ciò le forze che producono il momento torcente si invertono e la condizione di equilibrio stabile si trasforma repentinamente in quella di equilibrio instabile; pertanto la bobina che è ancora dotata di energia cinetica prosegue nella sua rotazione.

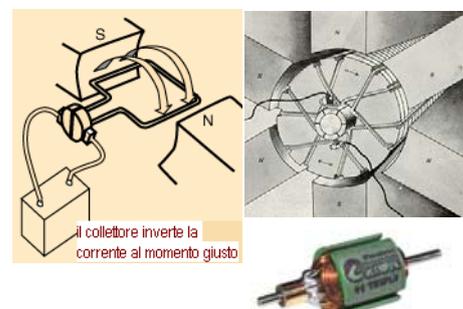
La inversione della corrente viene ottenuta utilizzando dei contatti striscianti solitamente di grafite (*spazzole*) che a seconda della posizione angolare della bobina mettono in connessione l'uno o l'altro dei due poli del generatore con gli estremi della bobina (*collettore*).

Naturalmente, nei motori reali, la cosa viene realizzata utilizzando avvolgimenti diversamente orientati nello spazio in modo che un gruppo di spire si trovi sempre nella condizione di momento torcente massimo (normale della spira perpendicolare al campo). Attraverso dei collettori dotati di un numero elevato di contatti si fa poi in modo che vengano sempre alimentate le spire che si trovano nella condizione di momento torcente massimo. In questo modo il momento torcente risulta costante nelle diverse posizioni spaziali e ciò migliora il comportamento sotto carico del motore.

I vecchi motori con spazzole e collettore sono ormai in fase di rapida sostituzione da parte dei motori *brush-less*, cioè motori senza spazzole. In questi motori il rotore è a magneti permanenti mentre è sullo statore che



il motore elettrico funziona attraverso una inversione delle correnti che trasforma la posizione di equilibrio stabile in instabile; ciò si ottiene attraverso un sistema di contatti striscianti che invertono il collegamento al momento opportuno

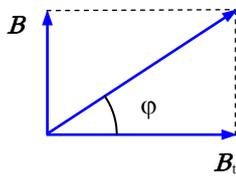


<sup>1</sup> Bastano tre morsetti ①②③. Tra ① e ② (bobina fissa) si applica la d.d.p. e tra ① e ③ si fa entrare ed uscire la corrente.

avvengono le variazioni di campo magnetico (comandate da circuiti elettronici in grado di produrre un campo rotante.

### 7.1.7 LA BUSSOLA DELLE TANGENTI

La bussola delle tangenti è stato il primo misuratore di correnti elettriche e si basava sulla interazione tra il campo magnetico di una bobina percorsa da corrente e un ago magnetico. Si utilizza come momento antagonista direttamente quello determinato dal campo terrestre.



Dopo aver disposto la bobina in modo che il suo asse sia ortogonale a quello del meridiano magnetico terrestre (cioè alla linea di forza passante per il punto in cui si effettua la misura) l'ago risulta allineato con il campo terrestre e la scala è posizionata in modo di indicare lo 0.

Se a questo punto si fa passare corrente nella bobina si crea un campo magnetico  $\vec{B}$  che si somma a quello terrestre e l'ago si dispone lungo la direzione della risultante tra  $\vec{B}_t$  e  $\vec{B}$  formando un angolo  $\varphi$  con lo 0 dello strumento.

Ma  $\tan \varphi = \frac{B}{B_t}$  e poiché  $B \propto i$  ne segue che:

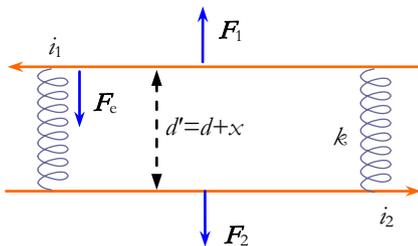
$$i \propto \tan \varphi$$



Bussola delle tangenti del 1840 con a lato la bussola necessaria alla individuazione del meridiano magnetico; si tratta di uno dei primi strumenti di misura di grandezze elettriche costruito

### 7.1.8 ESERCIZI SULLA INTERAZIONE TRA CORRENTI E SULLA INTERAZIONI TRA CAMPI MAGNETICI E CORRENTI

#### 7.1.8.1 Interazione tra fili rettilinei in equilibrio con molle di tenuta



Due fili rettilinei, paralleli e rigidi di lunghezza  $l = 1.50$  m sono posti alla distanza  $d = 5.00$  cm e sono tenuti in tale posizione da due molle a riposo di costante  $k = 2.20 \cdot 10^{-5}$  N/cm poste ai due estremi trasversalmente ai fili (trascurare gli effetti gravitazionali)

Scrivere la condizione di equilibrio e quindi determinare lo scostamento  $x$  dalla posizione di riposo delle molle quando vengono attraversati da due correnti  $i_1 = 2.50$  A e  $i_2 = 3.75$  A in verso contrario.

☹

Osserviamo intanto che, essendoci due molle in parallelo, la costante elastica  $k' = 2k$  mentre, per effetto delle forze elettrodinamiche di tipo repulsivo, i due fili si allontanano finché si annulla la risultante tra la forza elastica e la forza elettrodinamica.

Se indichiamo con  $x$  lo spostamento dalla condizione di equilibrio dovrà essere:

$$\frac{\mu}{2\pi} \frac{i_1 i_2 l}{(d+x)} = k' x$$

Se si sostituiscono i dati e si lavora in unità del SI si ha:

$$k' = 2 \cdot 2.20 \cdot 10^{-5} \text{ N/cm} = 4.40 \cdot 10^{-3} \text{ N/m} \text{ e pertanto}$$

$$2.00 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{2.50 \cdot 3.75}{5.00 \cdot 10^{-2} + x} 1.50 = 4.40 \cdot 10^{-3} x$$

Da qui conviene isolare la variabile ottenendo:

$$2.00 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{2.50 \cdot 3.75}{4.40 \cdot 10^{-3}} 1.50 = (5.00 \cdot 10^{-2} + x) x \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 5.00 \cdot 10^{-2} x - 6.39 \cdot 10^{-4} = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(5.00 \cdot 10^{-2})^2 + 4 \cdot 6.39 \cdot 10^{-4}} = 0.0711 \text{ m}$$

e da qui:

$$x = \frac{-5.00 \cdot 10^{-2} \pm 7.11 \cdot 10^{-2}}{2} = 1.06 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Dunque i due fili si allontanano di poco più di 1 cm.

**Osservazioni:** non è lecito limitarsi ad eguagliare la forza elastica alla forza che si esercita istantaneamente quando i due fili sono in equilibrio e inizia il passaggio di corrente perché man mano che i fili si allontanano cresce la forza elastica e decresce quella magnetica.



### 7.1.8.2 Lavoro compiuto dalle forze di rotazione in un apparato a bobina mobile

Un circuito a forma di spira rettangolare si presenta nel piano xy e xz come nelle due figure. Sapendo che la spira può ruotare intorno all'asse z determinare il lavoro che la forza magnetica compie quando la spira passa dalla posizione di equilibrio instabile a quella di equilibrio stabile.

Poiché la forza è parallela all'asse y ma presenta angoli variabili rispetto agli spostamenti si consiglia di scrivere il lavoro elementare e proiettare gli spostamenti elementari sulla forza. A quel punto il calcolo del lavoro risulta immediato. In alternativa scrivere il lavoro elementare e tener presente che il lavoro corrisponde ad un integrale definito  $\mathcal{L} = \sum \delta \mathcal{L} = \int_0^\pi \delta \mathcal{L}$  dove  $\delta \mathcal{L}$  va calcolato introducendo l'angolo  $\alpha$

che esprime la rotazione rispetto alla situazione di partenza .



Le forze che lavorano sono quelle che agiscono sui due tratti di lunghezza  $l$ ; esse hanno entrambe modulo  $F = B l i$  e sono sempre parallele all'asse y.

Gli spostamenti elementari sono di tipo tangenziale e nel movimento previsto dal testo i due conduttori percorrono una semicirconferenza; pertanto la somma delle proiezioni degli spostamenti elementari lungo la forza vale  $2 r$ .

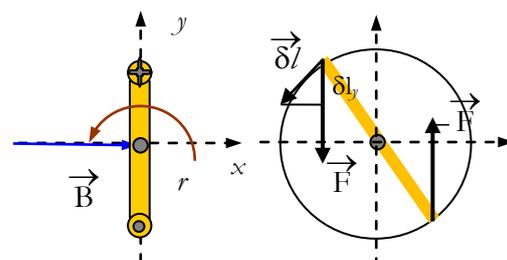
Il lavoro richiesto è dunque  $\mathcal{L} = 2 F 2r = 4 B l i r$ .

Alternativamente si indichi con  $\alpha$  l'angolo di rotazione. Si ha:

$$\mathcal{L} = 2 \int_0^\pi \delta \mathcal{L} = 2 \int_0^\pi F \sin \alpha \delta l$$

Ma  $\delta l = r \delta \alpha$  e pertanto

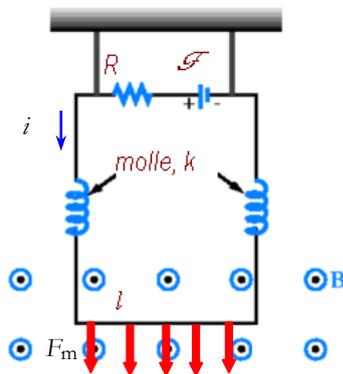
$$\mathcal{L} = 2 B l i r \int_0^\pi \sin \alpha \delta \alpha = 2 B l i r [-\cos \pi - (-\cos 0)] = 4 B l i r$$



La  $\sum \delta l_y$  somma delle proiezioni degli spostamenti elementari lungo la forza vale  $2r$



### 7.1.8.3 Misura di un campo magnetico attraverso una bilancia elettrodinamica



Una bilancia elettrodinamica operante nel piano verticale è costituita da una spira rettangolare. Su un lato orizzontale sospeso ad un supporto fisso si trova un generatore di f.e.m.  $\mathcal{E}$  e resistenza interna  $r$ . Sui due lati verticali si trovano due molle di costante elastica complessiva  $k$  e infine il quarto lato ha lunghezza  $l$  e massa  $m$ .

Per tarare lo strumento si osserva che ad interruttore aperto le molle si deformano di una quantità  $\Delta l$  sotto l'effetto del peso del lato inferiore. Ciò consente di determinare il valore della costante elastica.

Quindi la bilancia viene alimentata e, in presenza di un campo magnetico si osserva una deformazione  $\Delta l'$ . Calcolare su questa base il valore del campo  $B$ .

Quanto vale  $B$  nella ipotesi che sia:  $\mathcal{E} = 8.00 \text{ V}$ ,  $r = 2.50 \text{ }\Omega$ ,  $l = 4.50 \text{ cm}$ ,  $m = 4.5 \text{ g}$ ,  $\Delta l = 0.25 \text{ cm}$  e  $\Delta l' = 0.68 \text{ cm}$ .

☹

La fase iniziale di taratura dello strumento consente di determinare il valore di  $k$  nella condizione di esercizio; si ha infatti:

$$m g = k \Delta l$$

Quando si chiude il circuito sul lato inferiore del conduttore che si trova in condizione di ortogonalità con il campo si esercita una forza orientata verso il basso:

$$F_m = B l i \text{ e sarà pertanto: } m g + B l i = k \Delta l'$$

$$\text{Dunque } \frac{m g + B l i}{\Delta l'} = \frac{m g}{\Delta l}$$

questa relazione consente di determinare direttamente il valore di  $B$ ; infatti:

$$B l i = \frac{m g \Delta l'}{\Delta l} - m g \Rightarrow B = \frac{m g}{l i} \left( \frac{\Delta l'}{\Delta l} - 1 \right) = \frac{m g r}{l \mathcal{E}} \left( \frac{\Delta l'}{\Delta l} - 1 \right)$$

Con i dati che sono stati forniti si ottiene:

$$B = \frac{m g r}{l \mathcal{E}} \left( \frac{\Delta l'}{\Delta l} - 1 \right) = \frac{4.5 \cdot 10^{-3} \cdot 9.806 \cdot 2.50}{4.50 \cdot 10^{-2} \cdot 8.00} \left( \frac{0.68}{0.25} - 1 \right) = 0.53 \text{ T}$$

☺

### 7.1.8.4 Il compito di Enrico Fermi per l'ingresso alla Scuola Normale di Pisa (1918)

Una corrente elettrica costante circola in una bussola delle tangenti il cui avvolgimento è orientato nel piano del meridiano magnetico; si produce perciò una deviazione del breve ago posto al centro. Diametro del cerchio su cui sono avvolte le spire  $d = 50.2 \text{ cm}$ ; numero delle spire  $N = 5$ ; deviazione dell'ago  $35^\circ$ ; componente orizzontale del campo magnetico  $0.2356$  (in unità cgs). Calcolare il valore della intensità di corrente. <sup>2</sup>

☹

Come spiegato nel paragrafo precedente le spire della bussola delle tangenti determinano un campo al centro della spira ortogonale al piano della spira che è parallelo al meridiano magnetico.

<sup>2</sup> Il compito richiedeva di calcolare la corrente in unità cgs mentre noi useremo il S.I. L'unità del campo nel sistema cgs è il Gauss  $1\text{Gs} = 10^{-4}\text{T}$ .

L'ago magnetico ruota sotto l'azione congiunta di due coppie di forze: quella dovuta alla interazione tra ago e campo della spira e quella dovuta alla interazione tra ago a campo terrestre.

Nella configurazione di equilibrio l'ago si orienta lungo la risultante dei due campi perché in questa condizione si annulla il momento risultante.

In questa situazione si ha:

$\frac{B}{B_t} = \tan \varphi$  e tenendo conto della relazione che dà il campo di una spira e del fatto che le spire dell'avvolgimento sono poche e molto ravvicinate:

$$B = \frac{\mu N i}{d}.$$

Possiamo così determinare il valore della corrente:

$$i = B_t \tan \varphi \frac{d}{N \mu} = 0.2356 \cdot 10^{-4} \tan 35^\circ \frac{0.502}{5 \cdot 12.56 \cdot 10^{-7}} = 1.32 \text{ A}$$

Fermi è rimasto famoso nella storia della fisica, tra l'altro, per le notevoli abilità nel calcolo rapido (semplificazione fisica del problema e semplificazione delle metodiche di calcolo).

Si era nel 1918 e lo strumento disponibile per i calcoli era solo il regolo calcolatore con cui si riesce a mantenere una buona approssimazione solo entro la II cifra significativa. Ma dal tipo di elaborato di Fermi si ha l'impressione che i candidati non disponessero nemmeno delle tavole goniometriche o di un regolo che contenesse anche i valori delle funzioni goniometriche.

Ecco come Fermi risolve il problema di calcolare con buona precisione la  $\tan 35^\circ$ .

$$\tan 35^\circ = \tan(36 - 1) = \frac{\tan 36 - \tan 1}{1 + \tan 36 \tan 1}$$

Ma  $\tan 36$  è nota attraverso i calcoli legati alla sezione aurea di un segmento e si ha:

$$\tan 36 = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}} \approx 0.727$$

Inoltre poiché l'angolo di  $1^\circ$  è piccolo si può approssimare la tangente con la misura in radianti dell'arco e pertanto:

$$\tan 1^\circ \approx \frac{\pi}{180} = 0.0174$$

Si ha così  $\tan 35 \approx 0.700$

Il valore determinato con la calcolatrice è 0.70021



### 7.1.8.5 Misura del campo terrestre con una bussola delle tangenti

(maturità sperimentale 1995) In un laboratorio un ago magnetico è libero di ruotare ed è collocato al centro di una spira circolare di rame posta in posizione verticale e avente raggio 5 cm. In condizione di equilibrio, se nella spira non passa alcuna corrente, la direzione dell'ago coincide con la proiezione verticale della spira. Il candidato calcoli in Tesla la componente orizzontale dell'induzione magnetica terrestre all'interno del laboratorio avendo osservato che, quando la spira è attraversata dalla corrente



d'intensità 1 A, l'ago effettua una rotazione formando un angolo di 25 gradi con il piano della spira.



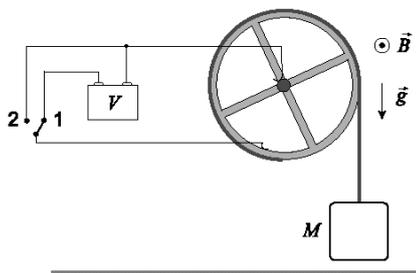
Il problema è molto simile al precedente e se ne lascia lo svolgimento al lettore; è stato riportato nel testo perché si tratta di un esempio di quesito per l'esame conclusivo.

Si osservi, in negativo, la scelta ministeriale di fornire i dati senza una chiara indicazione relativa alle cifre significative come se si trattasse di un esercizio di matematica e non di un problema di fisica.



### 7.1.8.6 un motore basato sui raggi di una ruota

(Olimpiadi 2005 – selezione nazionale) Un prototipo molto elementare di motore elettrico può essere costituito da una ruota conduttrice posta in un campo magnetico. La ruota mostrata in figura è formata da un cerchione con 4 raggi uguali di lunghezza  $L$  ciascuno di resistenza  $R$ , mentre la resistenza del resto del circuito è trascurabile. Due contatti striscianti collegano l'asse e il cerchione ai poli di una batteria di f.e.m.



$V$ . Il campo magnetico  $\vec{B}$  è uniforme e perpendicolare al piano verticale della ruota, uscente in figura.

Per i calcoli si usino i seguenti valori numerici:

$$L = 20.0 \text{ cm}; R = 20 \text{ m}\Omega; V = 0.25 \text{ V}; B = 0.250 \text{ T}; M = 85 \text{ g}; g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$$

Si determini la polarità della batteria e il valore  $V_0$  della f.e.m. della batteria affinché il motore tenga sollevato l'oggetto di massa  $M$  come indicato in figura.



I 4 raggi del cerchione sono attraversati da corrente  $i_0 = V_0/R$  e ciascuno di essi per effetto del passaggio di corrente subisce l'azione di una forza  $F$  ortogonale al braccio di intensità  $= BLi_0$  e con un verso che dipende dalla polarità della batteria.

Le 4 forze sono distribuite dall'asse alla periferia e dunque il loro momento è pari a:

$$\mathcal{M} = 4 \int_0^L F \delta r = 4 F \int_0^L \delta r = 2 L F \quad \text{ovvero dal punto di vista del momento è come se la forza fosse applicata a metà strada.}$$

Sostituendo le diverse grandezze sarà:

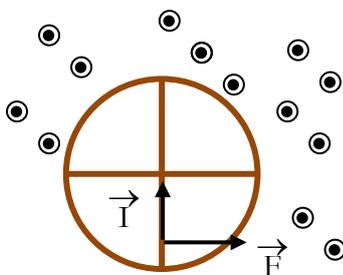
$$\mathcal{M} = 2 L F = 2 L BLi_0 = 2 BL^2V_0/R$$

Il momento determinato dal peso è pari a  $MgL$  e dunque per avere equilibrio dovrà essere:

$$2 BL^2V_0/R = MgL \text{ da cui}$$

$$V_0 = \frac{MgR}{2BL} = \frac{0.085 \cdot 9.81 \cdot 0.020}{2 \cdot 0.250 \cdot 0.200} = 0.167 \text{ V}$$

Per quanto riguarda la polarità della batteria, tenuto conto del fatto che la corrente il campo e la forza devono formare una terna antioraria (regola della mano sinistra) la corrente dovrà andare dal cerchione al perno e dunque la batteria avrà la polarità positiva dal lato del contatto 1.



Il verso della forza quando la corrente va dalla periferia al centro

- 2) Si dimostri che quando la ruota si muove a velocità angolare  $\omega$ , ai capi di ciascun raggio si determina una f.e.m. indotta  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} L^2 B \omega$ , indicandone il verso, a seconda che la rotazione faccia salire o scendere l'oggetto appeso al filo.

⊗ [2]

Per non appesantire la trattazione supponiamo che (come da convenzione) le correnti corrispondano ad un moto di cariche positive.

Quando la ruota gira con velocità angolare  $\omega$  le cariche  $q$  in moto nel verso della corrente subiscono l'azione della forza di Lorentz  $q v B$  che agisce alla stregua di un campo estraneo determinando la comparsa di una fem pari al lavoro per unità di carica necessario a spostare la carica dal centro alla periferia o viceversa.

La velocità degli elettroni cambia dal centro alla periferia secondo la legge  $v = \omega r$  e dunque il lavoro elementare è pari a  $\delta \mathcal{L} = F \delta r = q \omega r B \delta r$

$$\text{mentre } \mathcal{E} = \int_0^L \frac{\delta \mathcal{L}}{q} = \omega B \int_0^L r \delta r = \frac{1}{2} \omega B L^2$$

Per determinare il verso della fem supponiamo che il motore giri in senso antiorario (sollevamento del peso). In quel caso la forza che esse subiscono va dall'asse alla periferia e tale è anche il verso della fem indotta.

⊙

- 3) Messo in moto il motore, con  $V > V_0$ , dopo una brevissima fase transitoria l'oggetto viene sollevato a velocità costante; si calcoli tale velocità.

⊗ [3]

Quando  $V > V_0$  la ruota gira in senso antiorario muovendosi di moto accelerato perché il momento motore risulta maggiore del momento resistente. Ma man mano che il motore aumenta la sua velocità angolare cresce la fem indotta che si oppone a  $V$  e fa diminuire la corrente secondo la legge:

$$I = \frac{V - \mathcal{E}}{R} = \frac{V - \frac{1}{2} \omega B L^2}{R} = \frac{V - \frac{1}{2} v B L}{R}$$

Dove  $v$  rappresenta la velocità periferica della ruota pari alla velocità di risalita del peso. Ne consegue una diminuzione del momento motore  $\mathcal{M} = 2L^2 B I$  e si crea una situazione di equilibrio dinamico quando i due momenti (motore e resistente) si eguagliano:

$$2L^2 B \frac{V - \frac{1}{2} v B L}{R} = MgL$$

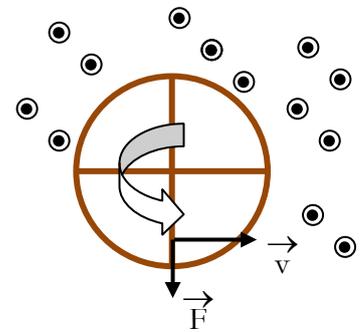
Da questa equazione possiamo ricavare il valore di  $v$  richiesto:

$$2LB(V - \frac{1}{2} v BL) = MgR \Leftrightarrow 2BLV - MgR = L^2 B^2 v \Leftrightarrow$$

$$v = \frac{2BLV - MgR}{L^2 B^2} = \frac{2}{BL} (V - \frac{MgR}{2BL}) = \frac{2}{BL} (V - V_0)$$

$$v = \frac{2}{0.250 \cdot 0.200} (0.250 - 0.167) = 3.32 \text{ m/s}$$

mentre la corrente risulta pari a:



$$I = \frac{V - \frac{1}{2} v B L}{R} = \frac{V - (V - V_0)}{R} = \frac{V_0}{R} = I_0$$

Cioè in regime stazionario si ha la stessa corrente che si ha all'equilibrio.

☺

4) Calcolare il rendimento del motore a regime.

⊗ 4

Il rendimento, rapporto tra potenza utile e potenza spesa sarà:

$$\eta = \frac{Mg v}{4VI_0} = \frac{Mg \frac{2}{BL}(V - V_0)}{4VI_0} = \frac{Mg}{2BLI_0} \left(1 - \frac{V_0}{V}\right) = 1 - \frac{V_0}{V} = 0.33$$

☺

5) Se ad un certo istante il generatore viene escluso spostando il commutatore dalla posizione 1 alla 2, anche il moto di caduta dell'oggetto avviene a velocità costante. Si calcoli la velocità nel moto di caduta frenato.

⊗ 5

Quando si esclude il generatore cessa istantaneamente l'azione del motore e il peso rallenta sino a fermarsi e poi inizia a cadere ma durante il processo di caduta, per effetto del momento della ruota in un campo magnetico si forma di nuovo una fem che si oppone alla caduta e si viene a creare una azione resistente sino allo stabilirsi di una nuova condizione di stazionarietà.

Valgono le stesse considerazioni svolte al punto 3 con  $V = 0$  e dunque:

$$v' = \frac{2}{BL} (-V_0) = \frac{2}{0.250 \cdot 0.200} (-0.167) = -6.68 \text{ m/s}$$

☺

6) Durante il funzionamento la ruota del motore si scalda; supponendo di poter trascurare gli scambi di calore con l'esterno, valutare se l'incremento di temperatura della ruota ad ogni giro è maggiore quando l'oggetto viene sollevato o quando cade frenato.

⊗ 6

Il riscaldamento della ruota avviene per effetto Joule e dunque la potenza elettrica dissipata che si trasforma in calore è pari a  $RI_0^2$  ed è identica in salita e in discesa, ma l'energia dissipata ad ogni giro è proporzionale alla potenza e al periodo di rotazione che è maggiore in salita (quando la velocità è minore) e dunque il riscaldamento è maggiore in salita.

☺

### 7.1.8.7 Spira quadrata incernierata su un lato

Una spira quadrata di lato  $L$  costruita con filo di rame di sezione  $S = 2.5 \text{ mm}^2$  è incernierata sul lato superiore  $OO'$  e può ruotare intorno a tale asse. La spira è sottoposta ad un campo magnetico uniforme e verticale diretto verso l'alto e, per effetto di tale campo, deflette dalla verticale. Determinare il valore di  $B$  sapendo che quando la corrente  $I = 16 \text{ A}$  l'angolo di deflessione  $\theta$  è di  $20^\circ$ .

Spiegare come mai il risultato non dipende dalle dimensioni della spira. <sup>3</sup>

<sup>3</sup> Irodov – op.cit.

⊗

La condizione di equilibrio si realizza quando il momento motore dato dalla forza di Lorentz è equilibrato dal momento resistente dato dalla forza peso.

Momento motore

La forza di Lorentz indicata in nero agisce su OA e su O'C come forza di deformazione della spira e non ha influenza in termini di momento motore.

Rimane quella che agisce su AC (ortogonale al campo e al lato della spira)  $F = BLI$  con braccio rispetto all'asse di rotazione  $L \cos\theta$

Momento resistente

E' dovuto all'azione delle tre forze peso di OA, AC, CO' indicate in rosso in figura.

$F_p = \delta SLg$  dove abbiamo indicato con  $\delta$  la densità del rame. Le tre forze sono applicate al centro dei rispettivi lati e presentano nel caso AC un valore  $L \sin\theta$  mentre negli altri due casi  $\frac{1}{2} L \sin\theta$

Dalla eguaglianza  $\mathcal{M}_m = \mathcal{M}_r$  otteniamo:

$$BLI L \cos\theta = \delta SLg(L \sin\theta + \frac{1}{2} L \sin\theta + \frac{1}{2} L \sin\theta) \Leftrightarrow$$

$$BI \cos\theta = \delta Sg 2 \sin\theta \text{ e dunque}$$

$$B = \frac{2\delta Sg \tan \theta}{I} = \frac{2 \cdot 8.9 \cdot 10^3 \cdot 9.81 \cdot \tan 20^\circ}{16} = 9.93 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Le dimensioni lineari della spira sono ininfluenti perché nella equazione risolvete L compare come fattore moltiplicativo in entrambi i membri.

Se invece di una spira quadrata avessimo avuto a che fare con una spira rettangolare con rapporto  $\alpha$  tra i lati, tale rapporto sarebbe comparso nel risultato.

⊙

### 7.1.8.8 Interazione tra una spira quadrata e un filo rettilineo

Una spira quadrata percorsa da una corrente  $I = 0.90 \text{ A}$  si trova nello stesso piano di un conduttore rettilineo indefinito percorso da una corrente  $I_0 = 5 \text{ A}$ . Il lato della spira ha lunghezza  $a = 8.0 \text{ cm}$ . L'asse della spira passante per i punti medi dei lati orizzontali è parallelo al filo rettilineo e dista da esso di  $\eta a$  con  $\eta = 1.5$ .

- 1) Determinare la forza magnetica agente sulla spira
- 2) Si può dimostrare che quando un circuito chiuso ad anello è caratterizzato da una corrente  $I$  è immerso in un campo magnetico e viene spostato o deformato producendo una variazione di flusso  $\delta\Phi$ , il lavoro compiuto dalle forze magnetiche per effettuare tale variazione vale  $\delta\mathcal{L} = I \delta\phi$ .

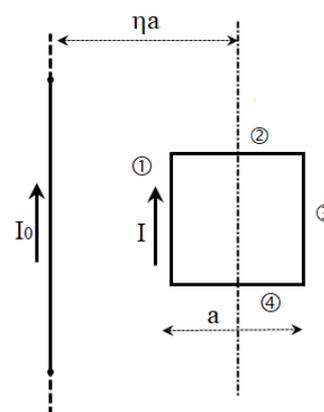
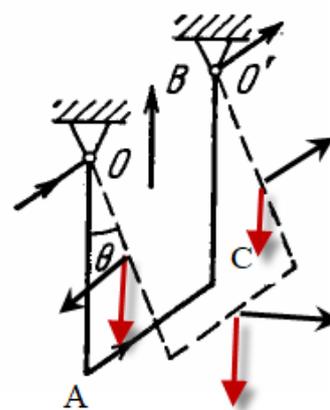
Tenuto conto di ciò si calcoli il lavoro che occorre compiere per ruotare la spira intorno al suo asse di  $180^\circ$  nella ipotesi che le correnti non cambino.

⊗

1

I lati ② e ④ della spira sono sottoposti a forze elettrodinamiche di uguale intensità e verso opposto e dunque la loro risultante è nulla.

La forza che agisce su ① è attrattiva (correnti equiverse) e ha intensità data dalla legge di Ampere:



$$\frac{F_1}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0 I}{a(\eta - 1/2)} \quad \text{da cui } F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0 I}{\eta - 1/2} \quad \text{e analogamente:}$$

$$F_3 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0 I}{\eta + 1/2}$$

E dunque se indichiamo con R la risultante

$$R = F_1 - F_3 = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{\eta - 1/2} - \frac{1}{\eta + 1/2} \right) = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi} \frac{1}{\eta^2 - 1/4} = \frac{2\mu_0 I_0 I}{\pi} \frac{1}{4\eta^2 - 1}$$

E con i dati del problema

$$R = 8.00 \cdot 10^{-7} \cdot 4.50 \frac{1}{8} = 4.50 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

2

In base a quanto dichiarato nel testo  $\mathcal{L} = \int I \delta\phi = I(\Phi_f - \Phi_i)$

Ma poiché in una rotazione di  $180^\circ$  il flusso rimane identico, salvo un cambiamento di segno,  $\mathcal{L} = 2I\Phi_i$  e il problema si riduce al calcolo del flusso iniziale che rimanda ad un integrale perché il campo generato dal filo rettilineo varia con la distanza (legge di Oersted).

Dunque il flusso corrisponderà alla somma di un prodotto tra un elemento rettangolare di spessore  $\delta r$  posto a distanza  $r$  dal filo e il corrispondente valore di B dipendente da  $r$ .

$$\Phi_i = \int_{a(\eta-1/2)}^{a(\eta+1/2)} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} a \, dr = \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \int_{a(\eta-1/2)}^{a(\eta+1/2)} \frac{1}{r} a \, dr = \frac{\mu_0}{2\pi} a I_0 \ln \frac{a(\eta+1/2)}{a(\eta-1/2)} = \frac{\mu_0}{2\pi} a I_0 \ln \frac{\eta+1/2}{\eta-1/2}$$

Dunque

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} 2a I_0 I \ln \frac{\eta+1/2}{\eta-1/2} = 2.00 \cdot 10^{-7} \cdot 0.16 \cdot 4.50 \cdot \ln 2 = 0.10 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

☺

## 7.2 Moto di cariche elettriche in un campo magnetico

### 7.2.1 LE CARATTERISTICHE DELLA FORZA MAGNETICA

Nel capitolo precedente si è visto che una carica dotata di velocità  $\vec{v}$  che si muova in una regione in cui è presente un campo magnetico  $\vec{B}$  è soggetta ad una forza ortogonale al piano formato dai vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  e di modulo pari a  $F = q v_n B$  dove  $v_n$  rappresenta la componente di  $\vec{v}$  in direzione ortogonale a  $\vec{B}$ .

Questo aspetto è stato usato per definire il vettore  $\vec{B}$ . Tale forza è chiamata *Forza di Lorentz*<sup>(4)</sup> e la sua caratteristica più importante sta nella ortogonalità rispetto al piano  $\vec{v}$   $\vec{B}$  che fa della forza magnetica lo strumento basilare per cambiare la traiettoria delle particelle elettricamente cariche. Per determinarne il verso sono disponibili numerose regole mnemoniche tutte basate sulla visualizzazione di una terna  $xyz$  orientata come gli assi  $\vec{v}$   $\vec{B}$   $\vec{F}$ .

### 7.2.2 L'ESPRESSIONE VETTORIALE DELLA FORZA MAGNETICA

La forza di Lorentz può essere scritta in forma vettoriale utilizzando una operazione di calcolo vettoriale usatissima in fisica ogni volta che si incontrano fenomeni *trasversali*: il **prodotto vettoriale**.

Il prodotto vettoriale può essere definito attraverso due modalità equivalenti a seconda che si operi con la rappresentazione vettoriale mediante segmenti orientati o mediante terne di numeri reali (componenti del vettore); le due definizioni sono equivalenti come si dimostra nei corsi di algebra lineare.

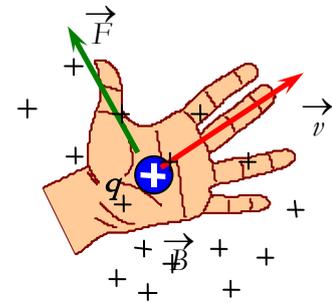
Si definisce prodotto vettoriale  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  un vettore con le seguenti caratteristiche:

- il modulo vale  $c = a b |\sin \alpha|$  (dove  $\alpha$  è l'angolo tra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ )

<sup>4</sup> Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) premio Nobel 1902 per la interpretazione del fenomeno (scoperto a fine 800) per cui le righe spettrali vengono sparpagliate dalla azione dei campi magnetici (effetto Zeeman) fu uno dei grandi fisici teorici a cavallo tra 800 e 900.

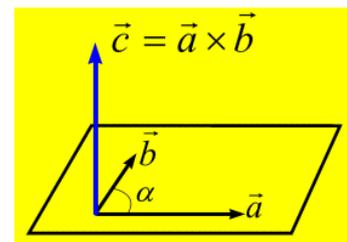
Dopo che sulla scena di fine 800 comparvero gli *elettroni* egli riformulò la teoria elettromagnetica di Maxwell in modo di renderla compatibile con la struttura granulare, e non a fluido, della elettricità.

In questa riformulazione vennero reinterpretate numerose proprietà delle onde elettromagnetiche e della luce. Le trasformazioni della teoria della relatività ristretta portano il suo nome perché fu lui ad avanzarle nell'ambito di una teoria (nota come *teoria dell'elettrone*) che prevedeva quasi tutto della futura teoria della relatività, ma non aveva l'impianto di critica radicale alle nozioni cinematiche fondamentali che si ha invece nella teoria della relatività ristretta di Einstein. Se si guardano le foto dei congressi Solvay di inizio 900 al centro del gruppo c'è sempre Lorentz come presidente dei congressi.



una delle molte varianti delle regole per la determinazione del verso della forza usa la **mano sinistra**, la linea di forza deve entrare dal palmo, il pollice dà la forza e le altre dita vanno disposte come la velocità

$$F = q v B \sin \alpha$$



- la direzione è perpendicolare al piano definito dai due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$
- il verso è quello dell'asse  $z$  di una terna cartesiana orientata in senso antiorario  $xyz \leftrightarrow \vec{a} \vec{b} \vec{c}$ . Si ricordi che la terna cartesiana è ben rappresentata dalla mano sinistra quando si dispongono le dita a  $90^\circ$  con il pollice che indica l'asse  $z$ , l'indice che indica l'asse  $y$  e il medio che indica l'asse  $x$ .

Il prodotto vettoriale può essere espresso in una forma elegante attraverso una estensione formale del determinante del III ordine con l'uso

dei tre versori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  di coordinate rispettive  $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \tag{V.7.4}$$

$$\vec{c} = \vec{i} (a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j} (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k} (a_x b_y - a_y b_x)$$

Per ricordare la relazione, anche se non si conoscono i determinanti, basta osservare che si ha una successione di differenze di prodotti in cui si ripetono ciclicamente le terne  $xyzzyz$  (il versore  $\vec{i}$  che rappresenta l'asse  $x$  è associato a  $yz$  e così via).

Si dimostra che il prodotto vettoriale è *anticommutativo* e per il resto rispetta le ordinarie proprietà algebriche.

In tutto il mondo si indica il prodotto scalare con  $\cdot$  (dot product) e quello vettoriale con  $\times$  (cross product). In Italia la tradizione accademica utilizza per il prodotto vettoriale il simbolo  $\wedge$  e per quello scalare  $\times$ . Noi ci atterremo alla convenzione internazionale e scriveremo pertanto, per la forza di Lorentz:



$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \tag{V.7.5}$$

forza di Lorentz in forma vettoriale

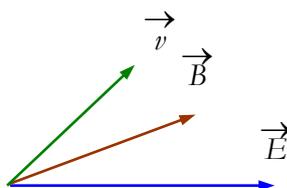
$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Una carica elettrica è influenzata non solo dal campo magnetico, ma anche dai campi elettrici, e la generica forza che agisce su di una carica sarà rappresentata come somma vettoriale di una componente di origine elettrica e di una componente magnetica:

$$\vec{F} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{V.7.6}$$

questa espressione definisce la cosiddetta *forza di Lorentz generalizzata*.

### 7.2.2.1 Calcolo della forza di Lorentz generalizzata



Un elettrone viene iniettato in una regione in cui sono presenti un campo elettrico  $E = 2.5 \cdot 10^5$  V/m e un campo magnetico  $B = 0.12$  T che formano tra loro un angolo  $\alpha = 38.0^\circ$ . L'elettrone possiede una velocità  $v = 1.30 \cdot 10^4$  m/s nel piano formato dai due campi con un angolo  $\beta = 54^\circ$  rispetto a  $\vec{E}$ . Determinare le caratteristiche della forza di Lorentz generalizzata.



Il problema richiede l'utilizzo del calcolo vettoriale e pertanto conviene prioritariamente fissare un sistema di riferimento. Visto che molti dati

sono riferiti al campo  $\vec{E}$  lo faremo coincidere con l'asse  $x$ , sarà pertanto

$$\vec{E} = 2.5 \cdot 10^5 \vec{i}$$

Visto che il vettore velocità, il campo magnetico e il campo elettrico sono complanari faremo coincidere il piano  $xy$  con tale piano.

Sarà allora:

$$\vec{B} = 0.12 \cdot \cos 38 \vec{i} + 0.12 \cdot \sin 38 \vec{j} = 0.0946 \vec{i} + 0.0739 \vec{j}$$

$$\vec{v} = 1.30 \cdot 10^4 \cdot \cos 54 \vec{i} + 1.30 \cdot 10^4 \cdot \sin 54 \vec{j} =$$

$$= 0.764 \cdot 10^4 \vec{i} + 1.052 \cdot 10^4 \vec{j}$$

Possiamo ora calcolare il valore della forza di Lorentz generalizzata:

$$\vec{F} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 1.602 \cdot 10^{-19} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Dalla espressione precedente emerge la necessità di calcolare analiticamente  $\vec{v} \times \vec{B}$  e poiché sia la velocità, sia il campo magnetico hanno componenti nulle lungo l'asse  $z$  sarà:

$\vec{v} \times \vec{B}$  e poiché sia la velocità, sia il campo magnetico hanno componenti nulle lungo l'asse  $z$  sarà:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \vec{k} (v_x B_y - v_y B_x) = \vec{k} (0.764 \cdot 10^4 \cdot 0.0739 - 1.052 \cdot 10^4 \cdot 0.0946)$$

$$= \vec{k} (0.0564 \cdot 10^4 - 0.0995 \cdot 10^4)$$

☺

### 7.2.3 POICHÉ FORZA E VELOCITÀ SONO PERPENDICOLARI IL MODULO DELLA VELOCITÀ NON CAMBIA

Le due componenti della forza di Lorentz generalizzata differiscono su di una questione importante.

Come si sa il lavoro compiuto nello spostare una carica all'interno di un campo elettrico è dato dal prodotto della carica per l'opposto della variazione di potenziale  $\mathcal{L} = q (V_1 - V_2)$  e pertanto una carica muovendosi in un campo elettrico acquista o perde energia cinetica a seconda che il lavoro  $\mathcal{L}$  sia un numero positivo o negativo.

Invece *la forza magnetica non lavora* perché essa è sempre perpendicolare alla velocità e dunque il suo lavoro elementare è sempre nullo.

Se la forza magnetica non compie lavoro, in base al teorema della energia cinetica (che vale anche in relatività), potremo affermare che essa non cambia l'energia cinetica di una particella.

Ma l'energia cinetica dipende esclusivamente dalla variazione di massa ( $\mathcal{E}_k = (m - m_0)c^2$  e questa dipende esclusivamente dal modulo della velocità ( $m = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$ ). Possiamo pertanto concludere che la forza magnetica non è in grado di mutare il modulo della velocità di una particella.

La forza magnetica viene invece ampiamente utilizzata per piegare la traiettoria delle particelle (classiche e relativistiche). Vale pertanto la pena di richiamare qualche elemento di dinamica relativistica.

Poiché  $F \perp v$  la forza magnetica non compie lavoro agendo su una carica in moto



Un magnete piega ortogonalmente la velocità di un fascio di elettroni in un tubo a bassa pressione

7.2.4 IN UN CAMPO UNIFORME LA TRAIETTORIA È CIRCOLARE SIA NEL DOMINIO CLASSICO SIA IN QUELLO RELATIVISTICO

Supponiamo che una particella di carica positiva  $q$ , massa di riposo  $m_0$  e velocità  $\vec{v}$  venga iniettata in un campo magnetico uniforme in direzione perpendicolare alle linee di forza.

Il moto di una particella soggetta ad una forza  $\vec{F}$  è regolata dalla II legge della dinamica scritta in forma relativistica e cioè:

$$\vec{F} = \frac{\delta(m \vec{v})}{\delta t}$$

Questa equazione può essere analizzata nelle sue due componenti tangenziale e normale:

$$F_t = \frac{\delta(mv)}{\delta t} \quad F_n = \frac{mv^2}{r}$$

Ma se la nostra particella è soggetta alla forza di Lorentz perpendicolare al vettore velocità  $F_t = 0$  e si ha:

$$\frac{\delta(mv)}{\delta t} = 0 \quad \frac{mv^2}{r} = q v B$$

La prima equazione ci dice che il modulo della quantità di moto della particella non cambia ( $m v = \text{costante}$ ). Ma poiché

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$p = \text{costante} \Leftrightarrow v = \text{costante}$  e possiamo concludere che il *modulo della velocità non cambia in presenza di un campo uniforme*.<sup>5</sup>

Poiché  $F_n = \frac{mv^2}{r} = q v B \neq 0$  la direzione della velocità cambierà continuamente e si avrà una traiettoria curvilinea. Per vedere che si tratta di una traiettoria circolare basta determinare il raggio di curvatura:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} \tag{V.7.7}$$

poiché sono costanti sia  $q$ , sia  $B$ , sia  $p$  ne consegue che anche  $r$  è costante e dunque la traiettoria è circolare.

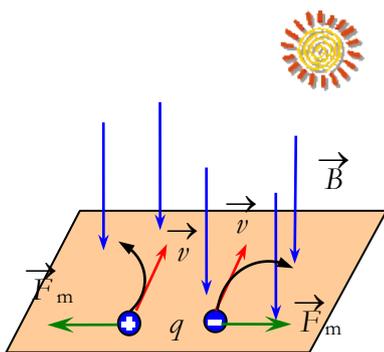
Una particella elettricamente carica iniettata in un campo magnetico uniforme nel piano perpendicolare alle linee di forza si muove di moto circolare uniforme in quel piano. Naturalmente, poiché al cambiare del segno della carica cambia il verso della forza, cariche di segno contrario ruotano con versi di rotazione opposti. Si osservi che (in entrambi i casi) il momento magnetico prodotto dalla traiettoria circolare risulta antiparallelo rispetto al campo che determina la forza di Lorentz.

<sup>5</sup> In teoria della relatività, a causa della variazione relativistica della massa, in generale la forza non è diretta come la accelerazione.

Si ha  $\vec{F} = \frac{\delta(m \vec{v})}{\delta t} = m \vec{a} + \vec{v} \frac{\delta m}{\delta t} = \dots = m \vec{a} + \vec{v} \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c^2}$  ma se  $\vec{F}$  e  $\vec{v}$  sono tra loro perpendicolari  $\vec{F} = m \vec{a}$  e questo è proprio il caso della forza magnetica

Anche in ambito relativistico la traiettoria di una particella iniettata perpendicolarmente ad un campo uniforme è circolare e il raggio di curvatura vale:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}$$



Per effetto della Forza di Lorentz cariche di segno opposto ruotano in senso inverso quando sono iniettate in un campo magnetico

Se il vettore velocità dovesse presentare una componente anche nella direzione del vettore  $\mathbf{B}$ , poiché lungo tale direzione non si esercitano forze, tale componente non cambierebbe nel tempo e si avrebbe pertanto un movimento circolare uniforme composto con un moto rettilineo uniforme. La traiettoria risultante sarebbe una *elica cilindrica*.

Calcoliamo ora il periodo di tale moto di rivoluzione:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{q B} = \frac{2\pi m_0}{q B \sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (V.7.8)$$

Dunque, a velocità non relativistiche ( $v \ll c$ ) il periodo di rivoluzione della particella non dipende dalla sua velocità e nemmeno dal raggio della traiettoria. Ma quando ci si avvicina alle velocità relativistiche e, a maggior ragione, a quelle ultra relativistiche il periodo aumenta con la massa (che cresce al crescere della energia).

### 7.2.5 LA BOTTIGLIA MAGNETICA

I campi non uniformi (sia elettrici sia magnetici) sono in grado di attirare o respingere un dipolo elettrico o un ago magnetico e quindi possono attirare o respingere anche particelle cariche in moto circolare.

La possibilità di realizzare gli spettri magnetici usando polvere di ferro si basa su questa proprietà. I minuscoli granelli di ferro diventano, per induzione, degli aghi magnetici, seppur temporanei e tendono oltre che ad orientarsi nella direzione della linea di forza ad essere attirati verso le zone dove il campo cresce; così facendo si producono spettri più addensati nelle zone di campo più intenso.

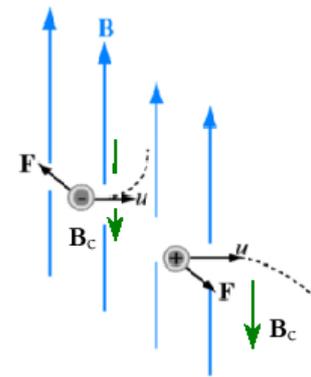
Poiché una carica in moto circolare si comporta come una spira e questa a sua volta ha gli stessi comportamenti dell'ago magnetico essa subirà azioni di attrazione e repulsione quando si muove in presenza di un gradiente del campo. Ma poiché il momento magnetico della particella è antiparallelo, la particella che si muove verso le zone di campo più intenso (con traiettorie di tipo elicoidale) viene respinta dal gradiente del campo e finisce per arrestare il suo moto nella direzione del campo e inizia a tornare indietro. Se all'estremo opposto si ha un altro gradiente si ha un nuovo rallentamento e la particella percorre traiettorie a spirale avanti e indietro con una successione di riflessioni speculari negli estremi.

Si parla in questo caso di *bottiglia magnetica* e questo effetto viene utilizzato negli esperimenti per la realizzazione della  *fusione termonucleare controllata*, per ottenere il confinamento del gas totalmente ionizzato (*plasma*) che, per effetto delle temperature elevatissime, non può essere collocato in alcun contenitore materiale.

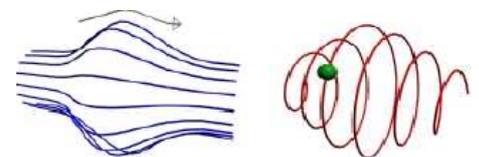
Il rimbalzo delle particelle in una bottiglia magnetica si realizza anche quando i fasci di particelle provenienti dal Sole arrivano negli strati alti della atmosfera in corrispondenza dei poli. Si creano allora traiettorie elicoidali di particelle che ionizzano l'aria dando luogo alla emissione di luce con fenomeni suggestivi ben noti negli studi di geografia e di scienze (fasce di van Allen, aurore boreali).

### 7.2.6 LA SCOPERTA DEL POSITRONE

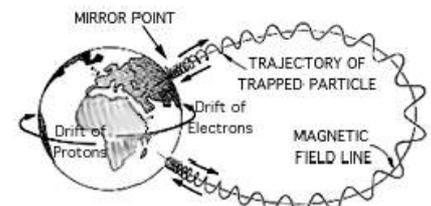
Una particella carica negativamente e dotata della stessa massa, velocità e carica di una particella carica positivamente si muove allo stesso modo con un'unica differenza: ruota in verso contrario. Pertanto si può deter-

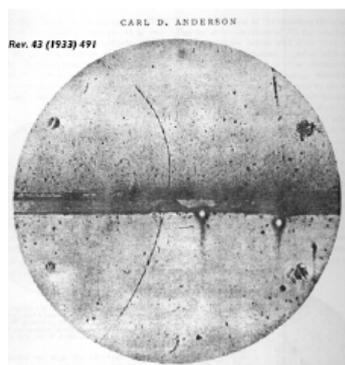


una particella carica immersa in un campo magnetico ruota generando sempre un momento magnetico antiparallelo al campo che determina la rotazione

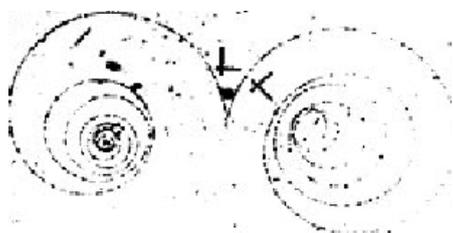


se il campo viene sagomato la particella presenta dunque una componente della forza orientata verso le zone a campo meno intenso e continua ad essere spostata avanti e indietro per effetto del gradiente





L'articolo del 1933 sulla Physical Review in cui Anderson dà notizia della scoperta del positrone e pubblica la sua immagine in camera di Wilson. Nella immagine sotto viene creata una coppia elettrone positrone da un raggio  $\gamma$  non visualizzabile: è la conferma della equivalenza massa energia prevista da Einstein



Beppo Occhialini stranamente dimenticato nella assegnazione dei premi Nobel; a lui si devono i contributi principali nella scoperta del positrone, del muone e del pione; ho lavorato con il suo gruppo nel 69/70 all'università di Milano.



minare il segno della carica di una particella osservandone il verso di rotazione in un campo magnetico.

Il *positrone* (o antielettrone) è stato scoperto così. Si tratta di una particella con le stesse caratteristiche dell'elettrone, ma con carica positiva. Esso venne scoperto nel 1932 da C. D. Anderson che nella stessa occasione propose di ribattezzare l'elettrone chiamandolo *negatrone*.

Anderson lavorava nel gruppo di ricerca di Millikan che stava analizzando i *raggi cosmici* nel tentativo di scoprirne la natura. Il gruppo di Millikan riteneva che essi fossero radiazioni elettromagnetiche di altissima energia liberate nei processi di fusione nucleare che, nella fase finale di vita delle stelle, portano alla formazione dei nuclei pesanti.

Nell'ambito di queste ricerche si cominciò ad inviare dei rivelatori di particelle negli strati alti della atmosfera per fotografare le reazioni prodotte dai raggi cosmici nell'impatto con i nuclei della atmosfera. I rivelatori erano delle camere a nebbia di Wilson<sup>6</sup> immerse in un campo magnetico. Dalle tracce lasciate nella camera a nebbia è possibile risalire alla massa della particella (che determina la intensità della ionizzazione), alla sua carica in base al raggio di curvatura e al suo segno in base al verso di rotazione.

Ci si aspettava di trovare sciame di elettroni generati dalla interazione e quindi di osservare particelle che ruotassero tutte in uno stesso verso e invece l'apparecchiatura di Anderson e soprattutto quelle di Blackett e Occhialini che scattava la fotografia nel momento della interazione (grazie ad un *circuito a coincidenza* inventato da Bruno Rossi) evidenziavano sciame di particelle con la stessa massa che ruotavano in versi opposti.

La prima ipotesi esplicativa delle curvature simmetriche fu che fossero presenti elettroni in moto in entrambi i versi (dall'alto verso il basso e viceversa) e, proprio per saggiare questa ipotesi Anderson inserì nella sua camera a nebbia una sottile lastra di piombo che avrebbe rallentato la particella facendole cambiare raggio di curvatura. Ciò avrebbe consentito di conoscere anche il verso di moto della particella. Il verso del moto era quello in cui si aveva la diminuzione del raggio di curvatura.

Fu così possibile stabilire che la particella fotografata nella immagine in alto aveva la stessa massa e la stessa carica dell'elettrone e, poiché il campo magnetico era entrante nel piano della pagina, la sua carica era positiva.

Bisognava ammettere l'esistenza dei positroni e di lì a qualche mese Blackett e Occhialini resero disponibili foto di sciame particelle ed antiparticelle in cui i positroni comparivano grosso modo con la stessa densità degli elettroni.

<sup>6</sup> La camera di Wilson è stata uno dei primi rivelatori di particelle utilizzati. Si tratta di una regione di spazio nella quale si crea un vapore soprassaturo per raffreddamento. Un vapore in queste condizioni dovrebbe passare allo stato liquido, ma perché ciò avvenga occorrono dei centri di condensazione. È proprio ciò che avviene quando una particella attraversa la regione considerata. Nel suo movimento essa perde energia e ionizza per urto le particelle di vapore. Gli ioni che si creano agiscono da centri di condensazione e pertanto lungo la traiettoria si vengono a formare tante particelle di liquido che risultano visibili come una traccia per effetto della luce diffusa dalle goccioline.

Le caratteristiche delle particelle elementari dagli anni 30 fino agli anni 70 venivano determinate in questo modo osservando le fotografie delle tracce da esse lasciate in camere a nebbia e in camere a bolle.

Tutto il settore è stato ormai rivoluzionato e i rivelatori di particelle sono ormai governati dalla informatica. Calcolatori operanti in tempo reale, capaci di prendere decisioni in un microsecondo, decidono cosa osservare, traducono i parametri dei rivelatori in immagini e costruiscono elettronicamente l'immagine dell'evento.



### 7.2.7 ESERCIZI SULLA INTERAZIONE TRA CARICHE IN MOTO E CAMPI MAGNETICI

#### 7.2.7.1 Il moto di una particella $\alpha$

(maturità sperimentale 1996)

Una particella  $\alpha$  ( $q = 3.2 \cdot 10^{-19}$  C;  $m = 6.7 \cdot 10^{-27}$  kg), emessa da una sostanza radioattiva, descrive nel vuoto una traiettoria semicircolare di raggio  $r = 10$  cm a causa di un campo magnetico d'induzione  $B = 0.8$  T. Il candidato calcoli in eV l'energia cinetica con cui è stata emessa la particella e disegni, nei punti  $P_1$  e  $P_2$ , i vettori  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{F}$  nella figura che descrive la sua traiettoria.

☹

Poiché la particella va da sinistra a destra e la carica è positiva il campo deve essere uscente dal piano della pagina. I vettori velocità sono ortogonali alla traiettoria ed hanno lo stesso modulo. I vettori forza sono perpendicolari alla velocità, centripeti e con lo stesso modulo.

In base alla relazione (V.7.7) si ha:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}$$

pertanto possiamo calcolare la quantità di moto della particella:

$$p = q B r = 3.2 \cdot 10^{-19} \cdot 0.8 \cdot 0.10 = 2.56 \cdot 10^{-20} \text{ kg m/s}$$

e da essa la energia cinetica:

$$\mathcal{E}_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{(2.56 \cdot 10^{-20})^2}{2 \cdot 6.7 \cdot 10^{-27}} = 4.89 \cdot 10^{-14} \text{ J} = \frac{4.89 \cdot 10^{-14}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 3.06 \cdot 10^5 \text{ eV}$$

☺

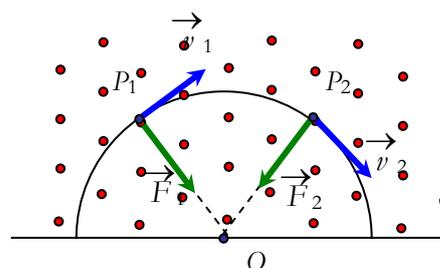
#### 7.2.7.2 Calcolo di $q/m$ per l'elettrone

(maturità Brocca indirizzo scientifico tecnologico 1999)

Si vuole determinare il rapporto  $q/m$ , tra carica e massa di un elettrone, utilizzando un tubo contenente neon a bassa pressione al cui interno gli elettroni sono emessi per effetto termoelettronico (conosciuto anche come effetto termoionico). Essi hanno una velocità iniziale trascurabile e sono accelerati tra due elettrodi da una differenza di potenziale  $\Delta V = 0.78$  kV fino a raggiungere la velocità  $v$ . Gli atomi di neon ne rendono visibile la traiettoria interagendo al loro passaggio. Una volta raggiunta la velocità  $v$ , gli elettroni entrano in una zona che è sede di un campo magnetico con  $B =$

$4.3 \cdot 10^{-4}$  T e con un angolo  $\alpha$  tra i vettori  $\vec{B}$  e  $\vec{v}$ . Il candidato:

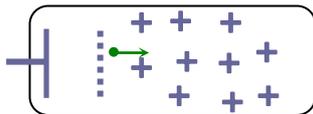
1. descriva e spieghi l'effetto termoelettronico;
2. spieghi perché gli atomi di neon nel tubo rendono visibile la traiettoria degli elettroni;



3. disegni e commenti la possibile traiettoria di un elettrone tra i due elettrodi (prima che risenta del campo magnetico) e poi all'interno del campo magnetico per  $\alpha = 90^\circ$  e per  $\alpha < 90^\circ$ ;
4. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare la velocità dell'elettrone in funzione della d.d.p. tra gli elettrodi in un tubo sotto vuoto; calcoli tale velocità ricordando che la carica e la massa dell'elettrone sono  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  e  $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ;
5. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare il raggio della traiettoria in funzione della velocità dell'elettrone e dell'induzione magnetica; calcoli il raggio di tale traiettoria sapendo che l'angolo tra i vettori  $\vec{B}$  e  $\vec{v}$  è  $\alpha = 60^\circ$ .



1. L'effetto termoelettrico consiste nella emissione di elettroni da parte di un metallo riscaldato. Ciò avviene quando l'energia dovuta ai moti di agitazione termica che ha come ordine di grandezza  $k_B T$  dove  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  supera il potenziale di estrazione alla superficie del metallo che vale qualche elettronvolt. Naturalmente per descrivere correttamente il fenomeno occorre tener conto di problematiche di natura statistica.
2. Gli elettroni colpendo gli atomi di neon a bassa pressione li ionizzano e nel successivo processo di ricombinazione si ha emissione di luce con visualizzazione della traiettoria. Poiché le energie di ionizzazione sono molto minori delle energie cinetiche degli elettroni si può ipotizzare che gli elettroni proiettili non vengano sensibilmente influenzati dall'urto.
3. Disegniamo il catodo e l'anodo forato passando attraverso il quale gli elettroni possiedono una energia di 0.78 keV. Si tratta di una energia non relativistica visto che la energia di riposo dell'elettrone è di 511 keV e ipotizziamo che il campo  $\vec{B}$  sia ortogonale ed entrante nel piano della pagina.



Nel tratto caratterizzato dalla presenza del campo elettrico l'elettrone si muove con traiettoria praticamente rettilinea e di m.u.a.. La traiettoria è rettilinea e non curva perché si possono trascurare sia la accelerazione gravitazionale sia le componenti verticali della velocità iniziale rispetto agli effetti dovuti alla accelerazione prodotta dal campo elettrico.

Se il vettore velocità è contenuto nel piano della pagina il moto avviene nel piano stesso ed è un moto circolare uniforme con raggio di curvatura  $r = \frac{mv}{qB}$ . Si veda la dimostrazione più oltre.

Se invece il vettore velocità forma un angolo  $\alpha < 90^\circ$  bisognerà proiettarlo nel piano ottenendo le due componenti ortogonale e tangenziale alla linea di forza. La prima sarà soggetta a quanto descritto al punto precedente la seconda non risentirà della forza di Lorentz e si determinerà un moto di tipo elicoidale piuttosto scomodo da disegnare perché l'elica si sviluppa fuori dal piano del disegno.

4. In base al teorema di conservazione della energia se indichiamo con 1 e 2 rispettivamente catodo e anodo avremo che:

$\mathcal{E}_{k1} + U_1 = \mathcal{E}_{k2} + U_2$  con  $U = -eV$ . Pertanto se ipotizziamo che sia trascurabile la velocità iniziale degli elettroni avremo che:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = -e(V_1 - V_2) = e \Delta V$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2e \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 780}{9.1 \cdot 10^{-31}}} = 1.66 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

5. Indichiamo con  $v_{\perp}$  la componente del vettore velocità ortogonale alla linea di forza:

$$v_{\perp} = v_2 \sin \alpha = 1.66 \cdot 10^7 \cdot \sin 60^{\circ} = 1.43 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Nel piano del foglio agisce la forza di Lorentz che è perpendicolare a  $\vec{v}_{\perp}$  e che pertanto non è in grado di determinare modifiche al modulo di  $v_{\perp}$ . Dunque nel piano non si ha una accelerazione tangenziale e si potrà scrivere che  $e v_{\perp} B = m \frac{v_{\perp}^2}{r}$  da cui:  $r = \frac{m v_{\perp}}{e B}$

Poiché  $v_{\perp}$  è costante lo è anche  $r$ .

Con i dati del problema si ottiene:

$$r = \frac{m v_{\perp}}{e B} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 1.43 \cdot 10^7}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 4.3 \cdot 10^{-4}} = 0.189 \text{ m}$$

Al moto circolare si sovrappone un moto traslatorio ortogonale al piano della pagina e da qui si genera la traiettoria elicoidale.



### 7.2.7.3 Moto di particelle in campi magnetici

Olimpiadi selezione nazionale 2000

Un fascio di protoni entra dapprima in una regione di larghezza  $d = 4.0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  dove esiste un campo uniforme di induzione magnetica di modulo  $B_1 = 0.20 \text{ T}$  e di seguito in una regione di larghezza uguale alla precedente, dove esiste un campo uniforme di induzione magnetica di modulo  $B_2 = 2 B_1$  come in figura. I due vettori  $B$  sono paralleli fra loro ed equiversi. La velocità iniziale dei protoni è perpendicolare sia alle linee di  $B$  sia alla superficie che limita la regione dove esistono i campi ed è stata ottenuta da una d.d.p. acceleratrice  $V_0$ .

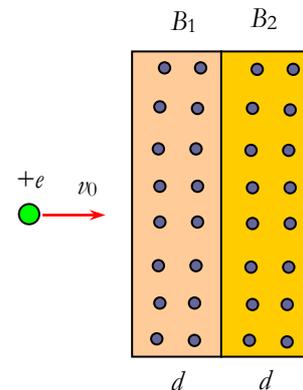
Quanto deve valere  $V_0$  affinché il fascio superi la prima regione? Quanto deve valere  $V_0$  affinché il fascio superi anche la seconda regione? Quanto deve valere  $V_0$  nel caso che il fascio, superate le due regioni risulti deviato di  $60^{\circ}$  rispetto alla direzione iniziale?



Il fascio di protoni entra nella prima regione ed inizia una traiettoria circolare sotto l'azione della forza di Lorentz che gli consente di superarla se il raggio di curvatura è maggiore dello spessore della regione. Poiché il campo è uscente la forza è orientata verso il basso.

In questo caso il fascio penetra nella seconda regione con un angolo  $\alpha$  rispetto alla superficie di separazione ed esso riuscirà a superare anche la seconda regione se l'altezza del segmento circolare è maggiore dello spessore.

Se anche questa seconda condizione è verificata potremo calcolare le caratteristiche della velocità di uscita. Percorrendo a ritroso il ragionamen-



to saremo in grado di determinare la d.d.p. acceleratrice che è legata in maniera semplice alla velocità iniziale.<sup>7</sup>

La velocità iniziale vale  $v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$

Il raggio di curvatura è dato dalla relazione:  $r = \frac{mv_0}{eB}$

Affinché il protone superi la prima regione dovrà essere:

$$\frac{mv_0}{eB} > d \text{ e cioè } v_0 > \frac{eBd}{m};$$

per quanto riguarda  $V_0$  si ha:

$$V_0 = \frac{m v_0^2}{2e} > \frac{m}{2e} \left( \frac{eBd}{m} \right)^2 = \frac{eB^2d^2}{2m}$$

$$V_0 > \frac{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 0.20^2 \cdot (4.0 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}} = 3'070 \text{ V}$$

quando  $V_0$  ha il valore superiore a 3070 V il protone segue una traiettoria circolare di raggio

$$r_1 = \frac{mv_0}{eB} = \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} = \sqrt{\frac{2V_0 m}{eB^2}}$$

ed esce dalla prima regione dotato di una velocità  $\vec{v}_1$  con lo stesso modulo di quella di ingresso e formando un angolo  $\alpha$  tale che:

$$\cos \alpha = \sin(90 - \alpha) = \frac{d}{r_1}$$

Il protone entra nella seconda regione e compie un arco di circonferenza di raggio

$$r_2 = \sqrt{\frac{2V_0 m}{eB_2^2}} = \sqrt{\frac{2V_0 m}{e4B_1^2}} = \frac{1}{2} r_1$$

Dopo aver costruito con cura e accuratezza la figura si osserva che la condizione per cui il protone possa emergere anche dalla seconda regione richiede che sia:  $C_2K < r_2$  e ciò corrisponde a:

$$r_2 > C_2H + d = r_2 \sin(90 - \alpha) + d = r_2 \cos \alpha + d$$

e cioè

$$r_2 > \frac{d}{1 - \cos \alpha} = \frac{d}{1 - \frac{d}{r_1}} = \frac{d r_1}{r_1 - d}$$

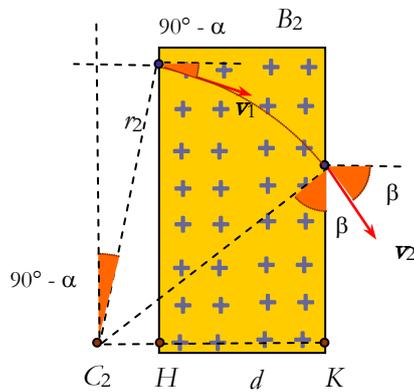
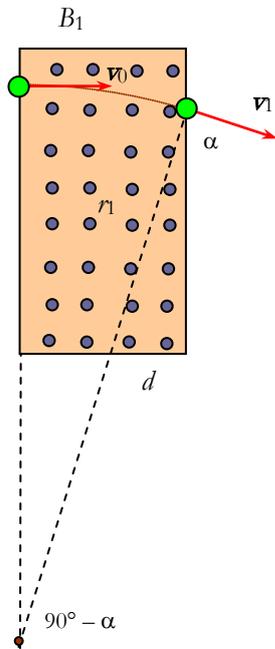
ma tenendo conto che  $r_2 = \frac{1}{2} r_1$  si ha:

$$\frac{1}{2} > \frac{d}{r_1 - d} \Leftrightarrow r_1 - d > 2d \Leftrightarrow r_1 > 3d$$

e per quanto riguarda il potenziale acceleratore ciò richiede che sia:

$$\sqrt{\frac{2V_0 m}{eB_1^2}} > 3d \Leftrightarrow$$

$$V_0 > \frac{9d^2 e B_1^2}{2m} = \frac{9 \cdot (4.0 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 0.20^2}{2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}} = 27.6 \cdot 10^3 \text{ V}$$



<sup>7</sup> Il calcolo è già stato svolto in questo gruppo di esercizi e pertanto non sarà ripetuto.

Il terzo quesito richiede di valutare l'angolo  $\beta$  che con riferimento alla figura risulta dato dalla relazione:

$$\sin \beta = \frac{C_2 K}{r_2} = \frac{r_2 \cos \alpha + d}{r_2} = \cos \alpha + \frac{d}{r_2} = \frac{d}{r_1} + \frac{d}{r_2} = \frac{3d}{r_1}$$

Poiché con la condizione data  $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  deve essere  $r_1 = 2\sqrt{3} d$

$$\sqrt{\frac{2V_0 m}{e B_1^2}} = 2\sqrt{3} d \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{6 d^2 e B_1^2}{m} = \frac{6 \cdot (4.0 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 0.20^2}{1.67 \cdot 10^{-27}} = 36.8 \cdot 10^3 \text{ V}$$

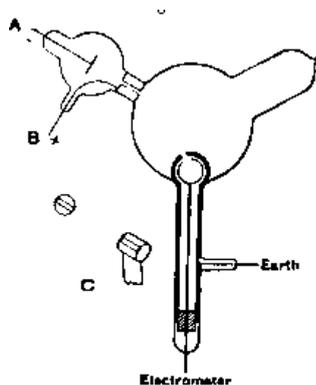


## 7.3 I raggi catodici e la scoperta dell'elettrone

### 7.3.1 LE PREMESSE AI LAVORI DI J. J. THOMSON



J. J. Thomson nel 1897 ai tempi delle ricerche sui raggi catodici



Il tubo utilizzato da J.J. Thomson per dimostrare che i raggi catodici trasportano cariche negative. I raggi vengono deviati mediante un campo magnetico e, solo quando le traiettorie finiscono nel pozzo di Faraday che circonda l'elettrometro, questo indica una carica negativa. Lo stesso tipo di tubo fu usato per la determinazione calorimetrica

Il rapporto *carica massa* di una particella è sempre determinabile attraverso l'azione combinata di un campo elettrico e di un campo magnetico opportuni: in tutte le relazioni, infatti, compare sempre il rapporto  $q/m$ .

La storia della scoperta dell'elettrone, cioè la prova della sua esistenza, del suo essere un componente essenziale della materia, del suo essere indipendente dalla materia da cui viene emesso, nonché la determinazione dei suoi parametri tipici (carica e massa) è legata alla effettuazione, a fine 800, di alcune esperienze basate sull'utilizzo della azione combinata di campi elettrici e magnetici applicati ad un nuovo livello di realtà appena scoperto: i *raggi catodici*.

Si trattava di un nuovo fenomeno con le seguenti caratteristiche:

- i raggi venivano emessi nei tubi a bassissima pressione con elettrodi collegati ad una bobina ad induzione (la sorgente di ddp elevata ed unidirezionale nota anche come rocchetto di Rumkhorff)<sup>8</sup>
- erano emessi dal catodo e si propagavano in linea retta anche quando l'anodo non si trovava affacciato al catodo
- erano caratterizzati da un bagliore verdastro sul tubo di fronte al catodo
- venivano deviati dai campi magnetici ed erano schermati da corpi metallici
- erano deviati dai campi elettrici molto intensi delle bobine ad induzione ma non risultavano deflessi dai campi ottenibili con le comuni batterie

Il primo passo verso la comprensione del fenomeno consistette nel dimostrare che i *raggi catodici* fossero particelle dotate di carica negativa. La cosa fu largamente discussa perché i raggi catodici venivano sì deviati dai campi magnetici, ma si aveva difficoltà a realizzare la deviazione anche con campi elettrici dovuti a d.d.p. non troppo elevate.

Il problema fu affrontato e risolto da Joseph John Thomson direttore del Cavendish Laboratory di Cambridge che effettuò una serie di esperienze pubblicate nell'agosto 1897. Tali esperimenti consentirono di stabilire definitivamente:

- la natura granulare dei raggi catodici, in contrapposizione alla scuola tedesca che sosteneva che si trattasse di una qualche forma di vibrazione dell'etere
- il loro essere portatori di carica negativa,
- il fatto di possedere un rapporto  $\frac{q}{m}$  definito ed invariabile al variare del metallo che li originava e del gas originariamente presente nel tubo a scarica a bassa pressione in cui si generavano i raggi catodici,

<sup>8</sup> si veda il capitolo sulla induzione elettromagnetica per i dettagli costruttivi

- il fatto di possedere un rapporto  $\frac{q}{m}$  circa 2000 volte più grande di quello dello ione idrogeno (che era stato stimato da Faraday 50 anni prima con le esperienze di determinazione delle leggi della elettrolisi).

### 7.3.2 GLI OBIETTIVI DEGLI ESPERIMENTI

Thomson utilizzava dei tubi a vuoto del tipo indicato in figura finalizzati alla soluzione progressiva dei diversi quesiti che si poneva e che sono stati citati nel paragrafo precedente.

Il fatto che i raggi catodici fossero portatori di una carica negativa era già stato stabilito da Jean Perrin qualche anno prima, ma la scuola tedesca di fisica erede delle ricerche di Hertz sulle onde elettromagnetiche replicava che Perrin aveva dimostrato solo il nesso tra evidenza sperimentale dei raggi catodici e trasporto di cariche negative.

Per questa ragione Thomson con il primo apparato, mostrato nella pagina precedente, fece vedere che l'elettrometro si caricava negativamente e in modo sensibile solo quando un campo magnetico deviava i raggi sino a farli penetrare nella fessura dello strumento. Allora il nesso tra raggio catodico e carica negativa diventò diretto e non si poté più parlare di semplice concomitanza dei due fenomeni.

Nello stesso contesto Thomson fece vedere che l'indicazione dell'elettrometro non cresceva oltre un certo limite; secondo lui ciò sarebbe stato dovuto ad un processo di ionizzazione del gas e questo avrebbe spiegato anche il motivo per cui i raggi catodici non venivano deflessi da d.d.p. basse.

Se il tubo della immagine a lato contiene ancora una quantità sensibile di gas, la ionizzazione da parte dei raggi catodici produce cariche in grado di annullare il campo elettrico che dovrebbe determinare lo spostamento atteso tra le piastre D ed E; è quello che succede in un conduttore carico durante la fase che lo porta all'equilibrio al termine della quale il conduttore diventa equipotenziale.

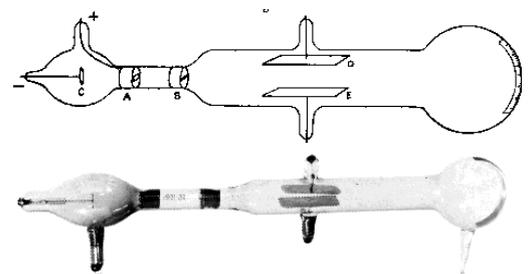
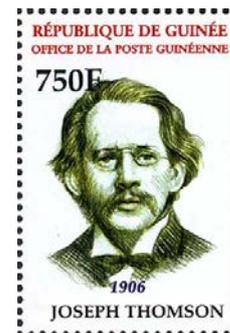
Migliorando il grado di vuoto all'interno del tubo Thomson riuscì ad osservare nel tubo lineare la deflessione anche per d.d.p. di 2 V.

Stabilito che si trattava di particelle cariche negativamente Thomson si pose il problema di misurare  $\frac{q}{m}$  e lo fece attraverso due metodiche diverse: nella prima eseguì una misura distinta della carica complessiva e della energia trasportata dai raggi, nella seconda fece un uso combinato della azione di un campo elettrico e di un campo magnetico.

### 7.3.3 IL METODO CALORIMETRICO

Thomson fece urtare il fascio di  $N$  raggi catodici di carica  $e$  e massa  $m$  su di un elettrometro (in grado di misurare la carica depositata  $Q = N e$ ) associato ad una termocoppia con cui misurava le piccole variazioni di temperatura impartite al bersaglio. Utilizzò inoltre un campo magnetico uniforme per risalire alla velocità delle particelle in base alla deflessione da esse subite.

Lasciamo parlare direttamente Thomson:



Il tubo utilizzato per osservare e misurare le deflessioni dovute a campi elettrici e magnetici: disegno e fotografia



Si può misurare  $Q$  se si instradano i raggi catodici in un contenitore collegato ad un elettrometro. Quando i raggi urtano un corpo solido la sua temperatura aumenta perché l'energia cinetica si trasforma in calore; se supponiamo che tutta l'energia cinetica si converta in calore, allora dalla misura dell'incremento di temperatura di un corpo di capacità termica nota determinata dall'urto dei raggi possiamo determinare l'energia cinetica  $\mathcal{E}_k$  delle particelle, e se indichiamo con  $v$  la loro velocità si avrà:

$$\frac{1}{2} N m v^2 = \mathcal{E}_k$$



Se si indica con  $r$  il raggio di curvatura dello stesso fascio sottoposto ad un campo  $B$  si ha:

$$I = B r = \frac{m v}{e}$$

dove si è posto, per brevità,  $B r = I$ . Da queste equazioni si ottiene:

$$\frac{\mathcal{E}_k}{Q} = \frac{1}{2} \frac{m}{e} v^2$$

Pertanto:

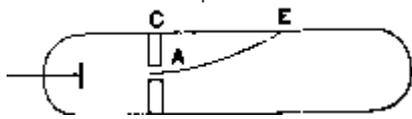
$$\frac{m}{e} = \frac{I}{v} = \frac{I I e}{v m v} = \frac{I^2 e Q}{2 \mathcal{E}_k I} = \frac{I^2 Q}{2 \mathcal{E}_k} \tag{V.7.9}$$

Pertanto dalla conoscenza di  $Q$ ,  $\mathcal{E}_k$ , e  $I$  si possono ottenere i valori di  $v$  e di  $\frac{m}{e}$ .

...

Il valore di  $I$  viene determinato come segue:

Il tubo veniva collocato tra due grandi bobine circolari parallele tra loro e separate da una distanza uguale al loro raggio; avvolgimenti del genere producono un campo uniforme facilmente misurabile dalla misura della corrente che attraversa gli avvolgimenti. I raggi catodici si trovano pertanto ad attraversare un campo uniforme e subiscono pertanto una deflessione circolare. Supponendo che il fascio deflesso dal campo magnetico colpisca il tubo in  $E$  si avrà:



determinazione del raggio di curvatura tramite deflessione da parte di un campo magnetico

$$2 r = \frac{CE^2}{AC} + AC \text{ } ^9$$

e pertanto dalla misura di  $CE$  ed  $AC$  si può risalire al raggio di curvatura

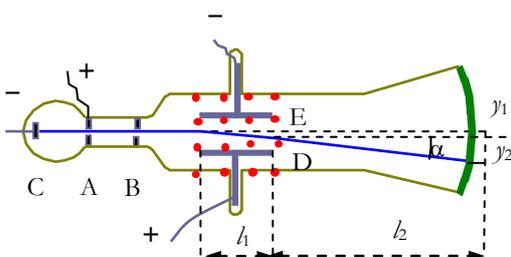


### 7.3.4 IL METODO BASATO SULLA DEFLESSIONE IN CAMPO ELETTRICO E MAGNETICO

Anche in questo caso seguiamo le argomentazioni di Thomson anche se le adattiamo terminologicamente alle esigenze del lettore di oggi.

Thomson utilizza dapprima un campo elettrico applicato tra le piastre (D) ed (E) che, nel caso in figura, fa muovere gli elettroni di moto parabolico verso il basso nel tratto in cui è presente il campo elettrico e li fa quindi uscire con una traiettoria rettilinea deviata di  $\alpha$  rispetto all'asse del tubo.

L'elettrone nel suo percorso lungo il tubo subisce uno spostamento verticale dato dalla somma dello spostamento nel tratto di azione del campo elettrico (dovuto ad un moto uniformemente accelerato) con lo sposta-



<sup>9</sup> La relazione è una immediata conseguenza del II teorema di Euclide e lasciamo la dimostrazione al lettore

mento nel tratto in cui non subisce forze (dovuto al moto uniforme in presenza di una velocità  $v_{\perp}$ ).

La velocità trasversale vale  $v_{\perp} = a t$  dove  $a$  è la accelerazione dovuta alla azione del campo elettrico e  $t$  è il tempo impiegato a percorrere la zona in cui è presente tale campo.

La accelerazione subita dagli elettroni nel tratto tra le piastre dipende dalla d.d.p. applicata tra D e E, e vale:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{q E}{m}$$

Il tempo  $t$  è lo stesso che l'elettrone impiega a percorrere il tratto orizzontale e tale tempo è inversamente proporzionale alla velocità  $v_{\parallel}$  di cui sono dotati gli elettroni e che è fissata dalla d.d.p. scelta tra anodo e catodo:  $t = \frac{l_1}{v_{\parallel}}$ .

$$\text{todo: } t = \frac{l_1}{v_{\parallel}}$$

Dunque:  $v_{\perp} = \frac{q E}{m} \frac{l_1}{v_{\parallel}}$

Alla uscita dalla zona in cui agisce il campo l'elettrone procede di moto uniforme con una traiettoria rettilinea inclinata di  $\alpha$  con:

$$\tan \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \frac{q E l_1}{m v_{\parallel}^2} \tag{V.7.10}$$

Per determinare sperimentalmente il valore di  $\frac{q}{m}$  bisogna conoscere con precisione affidabile oltre che  $\tan \alpha$  (che si ottiene tramite osservazione diretta) anche  $v_{\parallel}$  e tale velocità è ignota.

Thomson ricorre pertanto ad una misura diretta basata sulla azione congiunta di un campo magnetico e di un campo elettrico incrociati. Se invece del campo elettrico si applica nella zona delle piastre un campo magnetico ortogonale come in figura, la particella viene curvata dalla forza di Lorentz.

Thomson sfrutta questo elemento e fa agire i due campi incrociati contemporaneamente e con un verso che determini forze contrarie. In questo modo riesce a riportare il punto luminoso al centro dello schermo e può affermare che, in queste condizioni, le due forze sono uguali, cioè:

$$q E = q v_{\parallel} B \Leftrightarrow v_{\parallel} = \frac{E}{B}$$

da qui, noto il valore di  $v_{\parallel}$  si utilizza la (V.7.10) e si ricava  $\frac{q}{m}$ .

### 7.3.5 I RISULTATI DELL'ESPERIMENTO E LE CONCLUSIONI

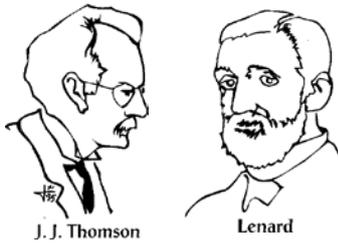
I due metodi utilizzati, anche se formalmente corretti portano a risultati in disaccordo tra loro: il secondo, quello preferito da Thomson, fornì un risultato pari alla metà del valore reale, mentre il metodo calorimetrico fornì un valore compatibile con quello oggi accettato.

Era evidentemente presente qualche errore sistematico oggi difficile da ricostruire. Thomson diede più fiducia al secondo metodo e si ebbe pertanto, per qualche anno una stima soggetta ad un errore del 100%.

Il metodo basato sulla deflessione da parte di E e di B. Il campo elettrico determina una deflessione che dipende dalla velocità longitudinale e questa può essere determinata attraverso l'azione di un campo magnetico incrociato in grado di annullare l'azione del campo elettrico.



Dalle nostre determinazioni si vede che il valore di  $m/e$  non dipende dalla natura del gas e che il valore  $10^{-7}$  è molto piccolo se confrontato con  $10^{-4}$ , che è il più piccolo valore finora noto (quello dello ione idrogeno nell'elettrolisi).



La piccolezza di  $m/e$  può essere dovuta o alla piccolezza di  $m$  o alla larghezza di  $e$  o alla combinazione delle due. Ma la piccolezza della massa dei portatori di elettricità dei raggi catodici rispetto alle molecole ordinarie è stata mostrata dagli esperimenti di Lenard ...<sup>10</sup>

La spiegazione che mi appare più in accordo con i fatti è quella accolta da molti chimici sulla struttura degli elementi: secondo questa visione gli atomi dei diversi elementi chimici sarebbero aggregazioni diverse di atomi di uno stesso tipo.

Questa ipotesi fu enunciata inizialmente da Prout con riferimento all'atomo di idrogeno e oggi non è più sostenibile; ma se sostituiamo l'atomo di idrogeno con qualche sostanza primordiale  $X$  non esiste nulla in contrasto con una ipotesi del genere ...



Se, per effetto del campo elettrico molto intenso che si ha in corrispondenza del catodo, le molecole del gas vengono dissociate non negli atomi ordinari, ma negli atomi primordiali, che chiamerò corpuscoli; e se questi corpuscoli sono elettricamente carichi e vengono allontanati dal catodo sotto l'effetto del campo elettrico, essi si comporteranno esattamente come i raggi catodici. Essi avranno ovviamente un rapporto  $e/m$  indipendente dal gas e dalla sua pressione perché le particelle saranno sempre le stesse ...

Thomson ottenne il premio Nobel nel 1906 e si può ritenere che i suoi lavori aprirono la strada (in un contesto reso favorevole dalla simultanea scoperta dei raggi X e della radioattività) alle nostre conoscenze sulla struttura della materia.

1896 Thomson inizia la riflessione sul ruolo degli elettroni nella struttura della materia - 1906 premio Nobel a J.J. Thomson per la fisica e a Giosué Carducci per la letteratura



La misura di  $q/m$  può essere fatta con metodiche più raffinate e il miglior valore sperimentale viene oggi assunto in:

$$\frac{e}{m_e} = (1.7588028 \pm 0.0000054) \times 10^{11} \text{ C/kg.} \tag{V.7.11}$$

Da esso, nota la carica attraverso le misurazioni con il metodo di Millikan, la massa dell'elettrone risulta essere:

$$m_e = (9.109558 \pm 0.000054) \times 10^{-31} \text{ kg} \tag{V.7.12}$$

<sup>10</sup> Esperimenti sul libero cammino medio dei raggi catodici basati sulla misura della attenuazione di un fascio di raggi catodici in un mezzo. I valori espressi da Thomson sono dati nelle unità cgs allora in uso

## 7.4 Il ciclotrone

### 7.4.1 L'IDEA DELL'ACCELERATORE CICLICO

La maggior parte delle indagini di fisica del nucleo richiedono l'utilizzo di fasci di particelle di alta energia (elettroni, protoni o ioni positivi) da usare come proiettili contro opportuni bersagli. Le particelle vengono portate ai livelli di energia richiesti tramite apparecchiature dette *acceleratori*.

Il principale componente di un acceleratore è un campo elettrico in grado di fornire una differenza di potenziale significativa. Le particelle vengono accelerate dal campo che impartisce loro una energia cinetica  $\mathcal{E}_k = q \Delta V$  dove  $\Delta V$  è la d.d.p. e  $q$  è la carica della particella.

Ma, a causa della scarica nei gas, è impossibile disporre di campi elettrici corrispondenti alle enormi d.d.p. necessarie per le ricerche di *fisica delle alte energie* che richiedono particelle con valori da 10 a 100 GeV; e oggi si viaggia ormai sui TeV (1 TeV =  $10^{12}$  eV) e si sta lavorando per le decine di TeV.

Per raggiungere energie così grandi si può utilizzare un campo elettrico che viaggi insieme alle particelle e che gli trasferisca continuamente energia (è quello che si fa negli acceleratori lineari) oppure si può far passare più volte le particelle attraverso il campo acceleratore invece che una volta sola (come si fa negli acceleratori circolari)

Per esempio, un protone che passa 30'000 volte attraverso una d.d.p. di 22'000 V acquisterà un'energia di 660 MeV. Per poter fare una cosa del genere bisogna però che la particella compia una traiettoria chiusa o a spirale e dunque occorre un campo magnetico per confinarla. Gli acceleratori che si basano su questo principio sono detti *ciclici* o *circolari*.

### 7.4.2 COME FUNZIONA IL CICLOTRONE

Il primo acceleratore di questo tipo, detto *ciclotrone*, fu messo a punto nel 1932 da E. O. Lawrence (1901-1958) e riusciva ad accelerare protoni sino a 1.2 MeV cioè ad una energia leggermente superiore a quella che si riusciva a fornire alle particelle nei primi acceleratori lineari costruiti al Cavendish Laboratory di Cambridge dal gruppo di E. Rutherford.

Il principio di funzionamento del ciclotrone è illustrato in figura: esso è costituito da due mezzi cilindri chiamati le *D* (dalla forma che ricorda la lettera D maiuscola) collocati nel vuoto.

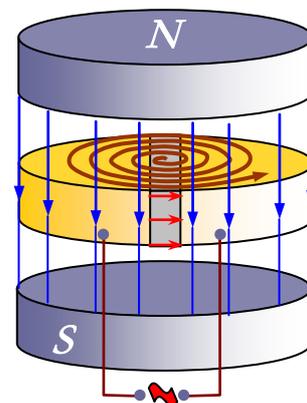
Al centro vi è una sorgente di ioni positivi che vengono iniettati tra le due *D*. Delle potenti pompe a vuoto mantengono la pressione a livelli molto bassi in modo di evitare eventuali urti tra gli ioni accelerati e le molecole d'aria. La pressione è dell'ordine di un milionesimo della pressione atmosferica (tra  $10^{-6}$  e  $10^{-5}$  mm di Hg). La differenza di potenziale alternata ad alta frequenza applicata tra le due *D* che genera il campo elettrico pulsante indicato dalle frecce rosse varia tra 1 e 10 MHz ed ha valori tra qualche centinaio e decine di migliaia di volt.

La camera a vuoto è collocata tra i poli di un potente elettromagnete in grado di fornire campi magnetici tra 1.3 e 1.6 T. Il nucleo di ferro dell'elettromagnete può pesare sino a diverse migliaia di tonnellate e la sua alimentazione richiede, nel caso di grandi impianti, potenze elettriche di diversi megawatt.



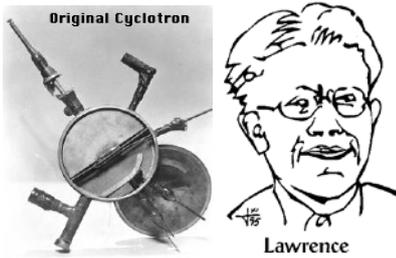
il generatore di Van der Graaf è la macchina elettrostatica in grado di produrre la massima d.d.p.: lo si usa come primo stadio negli acceleratori a più stadi

gli acceleratori circolari sfruttano la ciclicità per realizzare gli elevati valori energetici oggi raggiunti



schema di funzionamento del ciclotrone: due camere a forma di D sono immerse in un campo magnetico per effetto del quale degli ioni si muovono su traiettorie a spirale partendo dal centro.





Lawrence e il primo ciclotrone delle dimensioni di 13 centimetri realizzato nel 1931

Il fascio di ioni iniettato dal centro si muove con delle traiettorie e forma di semicirconfenza il cui raggio è proporzionale alla quantità di moto. Quando il fascio passa nella zona tra le due D viene accelerato da un campo elettrico impulsivo che modifica la quantità di moto e con essa energia e raggio di curvatura; pertanto il fascio ad ogni mezzo giro incrementa il raggio di curvatura e si determina così un movimento a spirale.

Ma affinché uno ione possa continuamente accrescere la sua energia è necessario che passi nello spazio tra le due ciambelle esattamente nel momento in cui il campo cambia verso perché in caso contrario verrebbe alcune volte accelerato e altre volte rallentato come avviene quando si spinge una altalena senza rispettarne la frequenza propria di oscillazione.

Nel § 2 si sono già determinate le due relazioni che governano il moto circolare di particelle sottoposte all'azione di un campo magnetico uniforme.

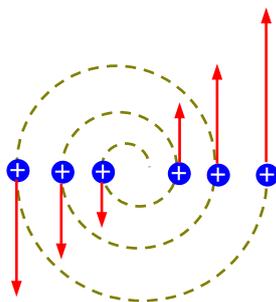
$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} \quad T = \frac{2\pi m}{qB}$$

da cui si vede che la traiettoria è a spirale perché in corrispondenza di ogni incremento di energia garantito da un campo in radiofrequenza cresce  $p$  e aumenta proporzionalmente il raggio di curvatura mentre il periodo di rotazione delle particelle dipende solo dal valore di  $B$ .

Tenuto conto che l'impulso di tensione avviene ogni mezzo giro il periodo con cui il campo elettrico accelerante cambia polarità deve essere la metà del periodo di rivoluzione dello ione. Questa condizione è detta *condizione di sincronizzazione* e il corrispondente periodo vale:

$$T_{\text{campo}} = \frac{1}{2} T_{\text{ione}} = \frac{\pi m}{qB} \tag{V.7.13}$$

$$v_{\text{campo}} = \frac{qB}{\pi m}$$



Il periodo dipende dalla massa ma non dipende dal raggio di curvatura cioè dalla energia

Poiché il periodo di rivoluzione non dipende dal raggio di curvatura il ciclotrone può operare a getto continuo

Il periodo è costante ed indipendente dal raggio di curvatura solo se  $m$  è costante, cioè se ci si trova fuori dall'ambito relativistico.

### 7.4.3 A COSA È SERVITO E A COSA SERVE ORA

Una caratteristica vantaggiosa del ciclotrone è che *opera in continuità e dunque può accelerare simultaneamente molte particelle*. In effetti, poiché il periodo non dipende dal raggio di curvatura, ogni qualvolta si effettua una inversione di campo dal centro vengono messi in moto un nuovo gruppo di ioni e la macchina può operare in condizioni di continuità cosa che non accade invece nei moderni sincrotroni.

Quando, dopo la II guerra mondiale, si rese necessario produrre particelle con energie superiori alla decina di MeV (così elevate da rendere significativo l'incremento relativistico della massa) si costruirono i sincrociclotroni, delle macchine in cui veniva progressivamente abbassata la frequenza impulsiva al crescere della energia delle particelle. Ciò consentì di far crescere le energie utili sino alle centinaia di MeV rinunciando però al funzionamento a ciclo continuo della macchina.



Il grosso nucleo per il magnete di un ciclotrone della fine degli anni 40

I ciclotroni che sono stati storicamente le prime macchine disponibili per la fisica delle alte energie<sup>11</sup> sono ormai quasi spariti dal campo della ricerca fisica e sono stati sostituiti sia da acceleratori lineari sia da sincrotroni in grado di fornire energie più elevate.

Rimangono invece disponibili come macchine di costo ed ingombro relativamente basso per applicazioni in campo biomedico. Infatti alcuni isotopi radioattivi di interesse medico hanno dei tempi di dimezzamento così brevi da rendere impossibile il loro reperimento periodico e stoccaggio. Bisogna produrli artificialmente man mano che servono.

Allo scopo si può utilizzare un ciclotrone, collocato direttamente presso il centro ospedaliero. Le particelle di alta energia prodotte dal ciclotrone vengono sparate contro le sostanze da rendere radioattive. Le trasmutazioni nucleari indotte dal processo d'urto creano l'isotopo radioattivo richiesto che viene poi usato per sintetizzare farmaci e/o diagnostici utilizzati in medicina nucleare.

Per produrre i radionuclidi utilizzati nella PET sono sufficienti ciclotroni che utilizzano come particelle accelerate i protoni con energie normalmente inferiori ai 20 MeV e dunque in ambito non relativistico (energia di riposo del protone 900 MeV).<sup>12</sup>

In tabella sono riportati i principali radioisotopi utilizzati

Radioisotopo	Tempo di Emivita (ore)	Reazione nucleare	Energia di Bombardamento (MeV)
Gallio-67	78,3	Zn-68→67Ga	25
Bromio-77	57	Kr-78→Br-77	30
Rubidio-81	4,6	Kr-82→Rb-81	30
Indio-111	67,2	Cd-112→In111	22
Iodio-123	13,2	Xe-124→123I	30
Tallio-201	73,1	Tl-203→Tl-201	20
Fuoro-18	1,8	O-18→F-18	18
Azoto-13	0,2	O-16→13N	18

Si distingue tra radionuclidi che decadono con emissione di fotoni e radionuclidi utilizzati per la PET (che decadono emettendo i positroni cioè le antiparticelle dell'elettrone).

Appartengono alla prima categoria il Gallio-67 ( $T_{1/2} = 78$ ore), il Krypton-81 ( $T_{1/2} = 13$ secondi), l'Indio111 ( $T_{1/2} = 67$ ore), lo Iodio-123 ( $T_{1/2} = 13$ ore), lo Xenon-127 ( $T_{1/2} = 36$ giorni), il Tallio-201 ( $T_{1/2} = 73$ ore). Si tratta di radionuclidi utilizzati nella rivelazione di neoplasie.

<sup>11</sup> Oltre alle leggi razziali sembra che sia stata la non disponibilità dell'ambiente accademico e del regime ad investire in un ciclotrone a determinare la scelta di Fermi di emigrare negli Stati Uniti nel momento in cui la scuola di fisica italiana che aveva svolto un ruolo di primo piano agli inizi degli anni 30 rischiava di rimanere tagliata fuori per mancanza di apparecchiature di ricerca adeguate (in questo caso sorgenti di particelle sufficientemente intense). Si veda la biografia di Enrico Fermi a cura di M. De Maria *Collana i Grandi della Scienza - Le Scienze*, aprile 99

<sup>12</sup> Per i dettagli sui decadimenti radioattivi e sulle grandezze utilizzate per descriverli si veda parte VII

**i 36 ciclotroni operanti in Italia nell'area medica**



Un esempio di ciclotrone ospedaliero per la generazione di isotopi radioattivi per la produzione di radiofarmaci

Appartengono alla seconda categoria: Ossigeno-15 ( $T_{1/2}= 2$ minuti), Azoto-13 ( $T_{1/2}= 10$ minuti), Carbonio-11 ( $T_{1/2}= 20$ minuti), Fluoro-18 ( $T_{1/2}= 110$ minuti) e con la eccezione del F che si riesce a trasportare, gli altri, a causa del  $T_{1/2}$  estremamente breve devono essere prodotti direttamente sul posto. Sono isotopi radioattivi di elementi fondamentali costituenti la materia biologica (ossigeno, carbonio, azoto), mentre il fluoro riesce a sostituire in molte molecole l'idrogeno e i gruppi ossidrilici. Sono usati per la marcatura di radiofarmaci.

#### 7.4.4 CICLOTRONI ASINCRONI

Quando la velocità della particella si avvicina alla velocità della luce nel vuoto, la massa della particella aumenta e, di conseguenza, aumenta anche il periodo di rivoluzione; in queste condizioni il ciclotrone non è più in grado di funzionare. Il periodo di rivoluzione, a parità di altre condizioni è proporzionale alla massa della particella:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{m}{m_0}$$

Ma d'altra parte il rapporto delle masse è legato in maniera semplice alle energie:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{m^2}{m_0 c^2} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \frac{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_0}$$

dove  $\mathcal{E}$  è l'energia totale della particella,  $\mathcal{E}_0$  è la sua energia di riposo,  $\mathcal{E}_k$  è la sua energia cinetica. Pertanto:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{m}{m_0} = \frac{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_0} = 1 + \frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_0}$$

e da qui:

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_0} \right) \tag{V.7.14}$$

*il periodo di rivoluzione della particella inizia a cambiare man mano che la sua energia cinetica diventa comparabile con la energia di riposo.*

Dunque il funzionamento del ciclotrone trova una limitazione nella condizione  $\mathcal{E}_k \ll \mathcal{E}_0$ . Quando cade questa condizione si debba pensare ad un acceleratore di tipo diverso non più caratterizzato da frequenza costante nelle variazioni di campo elettrico.

Per queste ragioni:

- nel ciclotrone si privilegiano particelle pesanti che hanno una massa di riposo elevata
- Il tentativo di accelerare i protoni in un ciclotrone ad energie cinetiche dell'ordine del GeV è destinato al fallimento. Infatti l'energia di riposo del protone è:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= 1.67 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16} \text{J} = \frac{1.67 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{eV} = \\ &= 0.938 \times 10^9 \text{eV} = 938 \text{MeV} \text{ }^{(13)} \end{aligned}$$

<sup>13</sup> La energia di riposo del protone (938 MeV) e quella dell'elettrone (0.5 MeV) vanno conosciute a memoria.

### 7.4.4.1 Calcolo dei diversi parametri di un ciclotrone

Un ciclotrone ospedaliero da 10 MeV lavora con un valore di induzione magnetica massima  $B = 1.66 \text{ T}$ , un raggio utile sino a 35 cm, una corrente protonica sino a  $35 \mu\text{A}$  e una frequenza di ciclotrone massima di 110 MHz e una ddp sulle D sino a 25 kV. Tutti questi parametri non sono tra loro indipendenti.

Si chiede di determinare le principali relazioni che le correlano.

⊗

La corrente protonica è un elemento legato al dimensionamento della macchina e corrisponde al dimensionamento dell'effetto utile.

$r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} = \frac{\sqrt{2m\mathcal{E}_k}}{qB}$  dunque poiché  $r$  è un parametro tipico della macchina e la macchina lavora solitamente con un solo tipo di particella proiettile (tipicamente protoni), fissata la energia delle particelle in uscita bisogna regolare il corrispondente valore di  $B$ .

Supponiamo per esempio di voler accelerare dei protoni a 9.5 MeV fandoli uscire quando  $r = 30 \text{ cm}$ ; quanto deve valere il corrispondente valore di  $B$ ?

$$B = \frac{\sqrt{2m\mathcal{E}_k}}{qr} = \frac{\sqrt{2 \cdot 1.672 \cdot 10^{-27} \cdot 9.5 \cdot 10^6 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}}}{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 0.30} = 1.48 \text{ T}$$

Con le grandezze trovate si supponga di utilizzare un potenziale accelerante di 20 kV. Quanti giri completi devono fare i protoni prima di uscire?

Ricordando che ad ogni  $\frac{1}{2}$  giro i protoni ricevono una energia 20 keV

$$N = \frac{9.5 \cdot 10^6}{40 \cdot 10^3} = 237.5 \text{ (solitamente i ciclotroni hanno due o più punti di emissione per aumentarne la flessibilità di utilizzo).}$$

Il tempo impiegato dai protoni a compiere un  $\frac{1}{2}$  giro è:

$$T_{\text{campo}} = \frac{\pi m}{q B} = \frac{\pi \cdot 1.672 \cdot 10^{-27}}{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 1.48} = 0.022 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

E dunque la frequenza del campo

$$\nu_{\text{campo}} = \frac{1}{T_{\text{campo}}} = 45.1 \text{ MHz}$$

con i dati assegnati anche la frequenza è una variabile dipendente e dunque l'oscillatore è a frequenza variabile.

Volendo esprimerla rispetto ai dati si ha:

$$\nu_{\text{campo}} = \frac{q B}{\pi m} = \frac{q}{\pi m} \frac{\sqrt{2m\mathcal{E}_k}}{qr} = \frac{\sqrt{2m\mathcal{E}_k}}{\pi r m}$$

Infine è interessante calcolare lo spazio percorso dal singolo protone che, ad ogni mezzo giro cambia raggio di curvatura passando da  $r$  a

$$r + \Delta r \text{ dove } \Delta r = \frac{\sqrt{2m q \Delta V}}{qB} = \frac{\sqrt{2 \cdot 1.672 \cdot 10^{-27} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 25 \cdot 10^3}}{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 1.48} =$$

$$0.0154 \text{ m}$$

Dunque lo spazio percorso  $s$  è dato da:

$$s = \sum_{i=1}^{2N} \Delta r = \Delta r \sum_{i=1}^{2N} i = N (2N+1) \Delta r$$

e con i dati precedenti otteniamo:

$$s = 0.0154 \cdot 475 \cdot 237.5 = 1741 \text{ m}$$



## 7.5 I sincrotroni

### 7.5.1 A COSA SERVONO I PROIETTILI DI ALTA ENERGIA?

Le nostre conoscenze sulla struttura fondamentale di ciò che chiamiamo materia si basano sullo stesso principio utilizzato all'inizio del 900 da Rutherford per indagare la struttura degli atomi.

Rutherford ed i suoi collaboratori riuscirono a dimostrare che gli atomi avevano struttura nucleare (possedevano cioè un nucleo di dimensioni 100 mila volte minori di quelle dell'atomo e in cui era concentrata quasi tutta la massa) osservando le deflessioni di particelle alfa inviate contro una sottile lamina d'oro.

Erano note le caratteristiche energetiche dei proiettili usati e nell'esperimento si osservò che, in media, una particella  $\alpha$  su 8'000 veniva deviata a grandi angoli mentre le altre venivano deviate a piccoli angoli. Ciò deponeva a favore di una struttura a massa concentrata anziché a massa diffusa: c'era qualcosa di molto piccolo e dotato di grande massa in mezzo agli atomi e contro questo qualcosa ogni tanto andava a sbattere una particella  $\alpha$ .

Gli atomi venivano indagati usando proiettili *naturali* con energia di qualche MeV. Ma la indagine della struttura fondamentale della materia (il nucleo atomico, la struttura delle particelle elementari, la presunta unitarietà delle diverse interazioni fisiche e delle particelle che ad esse sono associate) richiede invece *proiettili artificiali* di energie sempre più alte ed ha comportato una strana e interessante modifica della ricerca sperimentale a livello fondamentale: lo strumento di misura non è più parte di un laboratorio, ma è il laboratorio ad essere costruito intorno allo strumento di misura.

### 7.5.2 LA CORSA AL SINCROTRONE PIÙ GROSSO

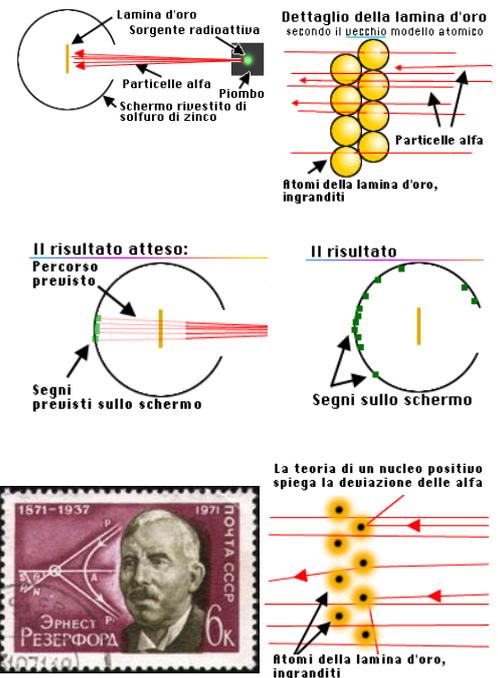
Le particelle ultrarelativistiche con energie cinetiche superiori alle decine di GeV vengono prodotte in impianti detti *sincrotroni*. La storia dei sincrotroni inizia nei primi anni 50 ed è ancora in corso. La parte del leone è stata fatta inizialmente da Usa e URSS finché l'Europa grazie al consorzio del CERN non si è inserita attivamente nella corsa.

Allo stato attuale esistono due comprimari (l'Europa e gli Usa) e alcuni altri paesi (Italia, Germania, Cina, Giappone e Russia) con impianti di minore importanza.

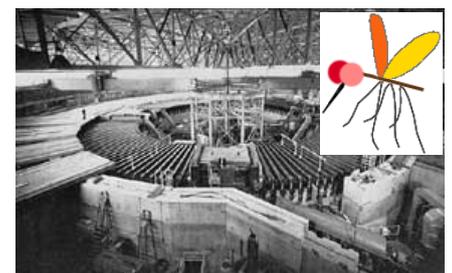
Il primo sincrotrone fu il *Bevatrone* realizzato al Brookhaven National Laboratory (a Long Island presso New York) nel 1952 con una energia sino a 1.2 GeV, negli anni 60 si raggiungono le decine di GeV, negli anni 70 si arriva alle centinaia sino a sfiorare il teraelettronvolt alla fine degli anni 90.

I progetti in corso utilizzano ormai come unità di misura il *teraelettronvolt* (1 TeV =  $10^{12}$  eV). Se trasformiamo il TeV in Joule troveremo un valore di energia piuttosto piccolo  $1.6 \times 10^{-7}$  J.

Si tratta grosso modo della *energia cinetica di una zanzara*, dunque di un valore ancora abbastanza piccolo, ma la valutazione va fatta tenendo presente che si tratta di un valore associato ad oggetti molto più piccoli di una zanzara. Per esempio la enorme energia che si sviluppa nei processi



L'esperimento di Rutherford del 1911 segna l'inizio della indagine della materia basata su bombardamento con particelle usate come proiettili; nasce da qui l'esigenza di costruire gli acceleratori per disporre di proiettili di energia sempre più elevata



Il Bevatrone e il Teraelettronvolt pari alla energia cinetica di una zanzara

di fissione e fusione nucleare, nello stesso contesto dimensionale, è un milione di volte più piccola del TeV.

Al CERN di Ginevra sono attualmente in funzione PS (sincrotrone a protoni da 28 GeV), SPS (superprotosincrotrone da 450 GeV con 6.9 km di circonferenza), LEP (*large electron positron collider* da 87 + 87 GeV con 27 km di circonferenza). Il LEP è stato dismesso nel corso del 2000 per far posto al *large hadron collider* (LHC) che con le stesse caratteristiche geometriche del LEP è in grado di accelerare protoni a 14 TeV.

La Cina prevede per i prossimi anni e decenni la realizzazione di un acceleratore con un anello di 100 km il *Circular Electron Positron Collider* (Cepec) con energia di collisione nel centro di massa di 240 GeV. Sembra poco rispetto ai 14 TeV di LHC ma in questo caso si tratta di un acceleratore elettrone-positrone cioè di un acceleratore molto più performante in termini di pulizia della reazione rispetto a quelli ad adroni. Per confronto si tenga presente che il vecchio LEP del CERN attivava a 90 GeV.



Il CERN con i monti del Giura, Ginevra e il lago: sono sovrapposti i percorsi dei grandi acceleratori circolari

### 7.5.3 IL SINCROTRONE È STRUTTURALMENTE DIVERSO DAL CICLOTRONE

Calcolare i parametri di funzionamento del SPS (superprotosincrotrone) di Ginevra che accelera protoni a 450 GeV ed ha un raggio di curvatura  $R = 1.098$  km.

☹

Dalla relazione che fornisce l'invariante relativistico di una particella

$$\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = \mathcal{E}_0^2$$

possiamo dedurre il legame tra quantità di moto ed energia di una particella:

$$p = mv = \frac{1}{c} \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2} \tag{V.7.15}$$

La energia di riposo del protone è  $\mathcal{E}_0 = 0.938$  GeV e la sua energia cinetica raggiunge i 450 GeV. Possiamo pertanto trascurare l'energia di riposo e assumere che sia  $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}_k$  e che  $p \approx \mathcal{E}_k / c$ .

Pertanto il raggio dell'orbita diventa:

$$R = \frac{p}{qB} \approx \frac{\mathcal{E}_k}{q B c}$$

Poiché conosciamo la circonferenza di SPS potremo stabilire il valore massimo di  $B$  a cui si opera:

$$B_{\max} = \frac{\mathcal{E}_k}{q R c} = \frac{4.5 \times 10^{11} \times 1.6 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19} \times 1.098 \times 10^3 \times 3 \times 10^8} \approx 1.36 \text{ T}$$

☺

Ovviamente, è praticamente impossibile costruire un magnete cilindrico del tipo di quelli utilizzati nei ciclotroni e del diametro di due chilometri. Per questa ragione il campo magnetico del sincrotrone è confinato in una stretta camera ad anello e i protoni vengono accelerati *in una traiettoria circolare a raggio costante*.

Le camera a vuoto in cui girano i protoni del sincrotrone aveva nei primi sincrotroni diametri dell'ordine del mezzo metro.

Grazie a nuove metodiche di focalizzazione del fascio oggi le dimensioni della camera sono ridotte a qualche centimetro e il fascio di particelle ha una dimensione trasversale ancora molto più piccola.

Da quanto detto derivano le seguenti conseguenze circa il funzionamento dei sincrotroni.

❶ In primo luogo, il sincrotrone, a differenza del ciclotrone, non può iniziare il processo di accelerazione *partendo da zero*. I protoni che vengono introdotti nella camera di accelerazione devono già essere protoni relativistici.

❷ Secondariamente, per mantenere costante il raggio di curvatura al crescere dell'energia delle particelle bisogna aumentare il valore della induzione magnetica in maniera che man mano che aumenta la quantità di moto il rapporto tra essa e l'induzione magnetica rimanga costante secondo quanto richiesto dalla equazione (V.7.7). Questa è la principale differenza tra il sincrotrone e il ciclotrone; in quest'ultimo la induzione magnetica non cambia durante il processo di accelerazione.

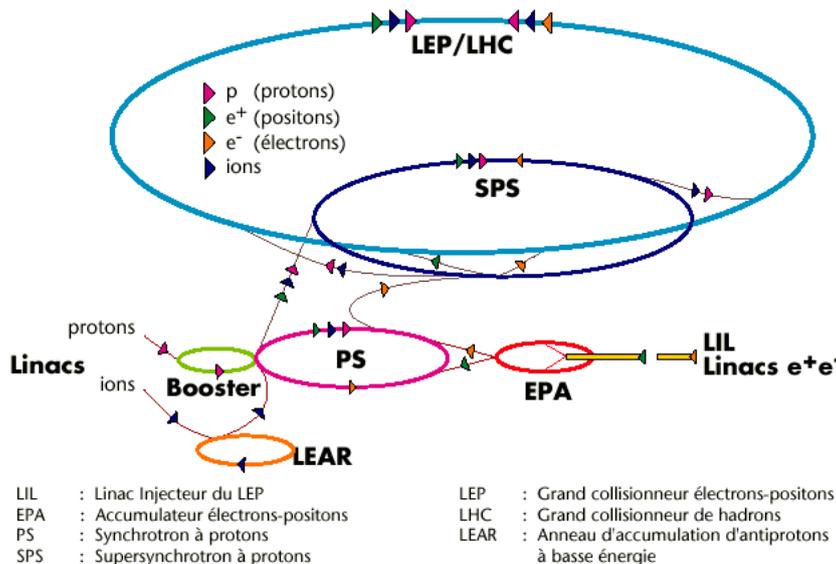
❸ Infine bisogna anche modificare il periodo di inversione del campo elettrico accelerante. Come sappiamo il periodo di rivoluzione della particella è  $T = \frac{2\pi R}{v}$  e

poiché il raggio orbitale è costante il periodo della particella cresce al crescere di  $v$ . Di conseguenza si tratta di diminuire proporzionalmente il periodo di inversione. Questo effetto diventa sempre più piccolo man mano che, al crescere della energia, la velocità delle particelle si avvicina asintoticamente alla velocità della luce.

### 7.5.4 COME FUNZIONA UN SINCROTRONE DI ULTIMA GENERAZIONE?

Il funzionamento di un moderno sincrotrone è piuttosto complesso perché nelle diverse fasi del processo di accelerazione sono diversi i parametri da prendere in considerazione. <sup>(14)</sup>

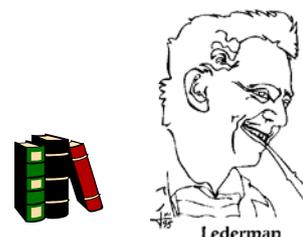
Per esempio l'acceleratore del FermiLab è costituito da 5 acceleratori messi in serie:

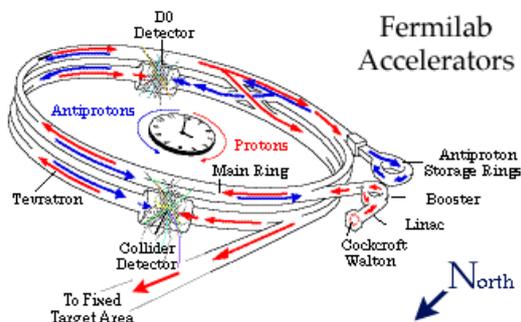


**schema degli acceleratori del CERN**  
 si osservino le connessioni tra le diverse macchine e la presenza degli anelli di accumulazione necessari per parcheggiare le antiparticelle che vengono via via prodotte in attesa di raggiungere una concentrazione sufficiente al loro utilizzo negli esperimenti a fasci contrapposti

<sup>14</sup> Per chi volesse saperne di più consigliamo la lettura di un volume di uno dei grandi padri della *big science* americana, premio Nobel 1988 e direttore del FermiLab dal 1979 al 1989: *Leon Lederman, la particella di Dio, Mondadori 1996*. Il libro è insieme una storia della fisica delle particelle (dal 1950 alle soglie del XXI secolo) scritta da uno dei suoi protagonisti (che ancora oggi sono in corsa nel tentativo democriteo di arrivare all'*a-tomo* cioè all'indivisibile) ed una riflessione epistemologica dal di dentro su cosa significhi oggi fare ricerca fondamentale. Lo stile è un po' guascone come in certa *letteratura divulgativa* americana, ma è scritto bene, tradotto bene (il che vista la piega presa da una certa editoria sembra un miracolo), comprensibile al profano, aggiornatissimo.

Più impegnativo, ma più sistematico e dedicato alla intera problematica della *teoria standard* oggi accettata è *Il giardino delle particelle* di *Gordon Kane* edizioni Longanesi





Analisi di un acceleratore a più stadi, il FermiLab di Batavia dove è stato rivelato l'ultimo dei quark il top

1. Nel primo acceleratore, che è un normale acceleratore lineare di tipo elettrostatico, modello anni 30, vengono creati i protoni ionizzando idrogeno e il fascio finale presenta una energia di 750 keV.
2. Il fascio da 750 keV finisce in un altro acceleratore lineare (*Linac*) a radiofrequenza in cui il campo accelerante si sposta insieme al fascio e dopo aver percorso una cavità di 150 metri il fascio presenta una energia di 200 MeV. Al termine di questa fase abbiamo protoni di alta energia non relativistici.
3. Il terzo stadio è un normale sincrotrone che porta il fascio a 8 GeV e ha una funzione di *booster* cioè di preamplificatore di energia. Nel booster vengono prodotti protoni relativistici.
4. A questo punto il fascio di protoni viene immesso nell'anello principale di 6 km di circonferenza nel quale i protoni vengono accelerati a 150 GeV. Già l'anello principale sarebbe in grado di arrivare a 400 GeV ma si può prendersela comoda perché c'è un quinto stadio cui il fascio da 150 GeV viene inviato.
5. Il quinto stadio si trova esattamente sotto il quarto e differisce da esso solo per la presenza di magneti superconduttori nei quali si può arrivare sino a 4 T. In questo anello superconduttore il fascio fa circa 50'000 giri guadagnando 700 keV al giro e dopo 25 secondi esce con una energia da 900 GeV. <sup>(15)</sup>

Negli ultimi anni si preferisce però utilizzare sempre di più il criterio della *collisione frontale* tra particella ed antiparticella messo a punto da Carlo Rubbia al CERN, in modo di rendere disponibile tutta l'energia cinetica come energia trasferita nell'urto. Infatti come si è già osservato nel capitolo dedicato alla teoria dell'urto, in virtù del teorema di conservazione della quantità di moto, nel caso di collisione con un bersaglio fermo viene trasferita al processo d'urto solo una piccola quota di  $\mathcal{E}_k$ .

Se si effettua una collisione frontale tra particelle e antiparticelle la quantità di moto del sistema è nulla prima e dopo l'urto e pertanto non si avrà la indesiderata perdita di energia come energia cinetica dei frammenti, necessaria a garantire la conservazione della quantità di moto.

Si procede in questo modo: attraverso fasci di protoni da 120 GeV si fabbricano antiprotoni per urto (1 antiprotone ogni  $10^5$  protoni). Gli antiprotoni vengono inviati man mano ad un anello di accumulazione dove vengono tenuti in caldo a 8 GeV cioè alla energia del III stadio. Quando il numero di antiprotoni è giudicato sufficiente (da 8 a 10 ore) li si invia all'anello principale per portarli a 150 MeV. A questo punto gli antiprotoni vengono immessi nell'anello superconduttore dove gli antiprotoni girano in senso contrario ai fasci di protoni ed entrambi vengono portati a 900 GeV. Questi due fasci con 6 gruppi di  $10^{12}$  particelle che hanno dimensioni di qualche millimetro vengono compressi, quando tutto è pronto, a dimensioni del micron per aumentare la probabilità che quan-

<sup>15</sup> Il supercollisore superconduttore progettato da Lederman entrato nella prima fase di realizzazione è stato poi abbandonato. Doveva avere una circonferenza di 86 km, con energie sino a 40 TeV e con valori di induzione magnetica di 6.5 T. Ma il progetto è stato bloccato nel 1993 dal Congresso per una questione di finanziamenti e ciò ha messo l'Europa nettamente al primo posto nella ricerca delle alte energie con il completamento di LHC. Entrambi gli acceleratori sono stati pensati per urti tra protoni e antiprotoni.



Rubbia



La collisione frontale con il metodo dei fasci contrapposti ottimizza i trasferimenti di energia ma poiché richiede l'uso simultaneo di particelle e antiparticelle trascina con sé enormi problemi tecnologici

do si incrociano si abbia qualche collisione e in effetti si verifica circa 1 collisione ad ogni incrocio.

All'inizio di questo paragrafo si è accennato al progetto LHC da 14 TeV del CERN di Ginevra che utilizzerà l'anello da 27 km ( 4.3 km di raggio) già esistente per costruire un acceleratore di protoni.

Se ripetiamo il conto già eseguito per SPS avremo:

$$B_{\max} = \frac{E_k}{q R c} = \frac{14 \times 10^{12} \times 1.6 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19} \times 4.30 \times 10^3 \times 3 \times 10^8} \approx 11 \text{ T}$$

Il prodigio è tutto qui; si sta operando per fare in modi di utilizzare magneti superconduttori per l'intero anello da 27 km. Con i magneti superconduttori è possibile operare, a costi energetici ragionevoli, con intensità di corrente elevatissime in grado di decuplicare il valore di campo magnetico a cui si opera.

A differenza del ciclotrone che opera con continuità, il sincrotrone ha un funzionamento intermittente. Nel sincrotrone, possono essere inserite particelle di un ben definito valore energetico e solo nel momento in cui il campo magnetico e la frequenza del campo elettrico hanno il loro valore minimo. Se una particella viene iniettata in un momento diverso si violeranno le condizioni di sincronizzazione e, pertanto, non si realizzerà la accelerazione.

Dunque, nel sincrotrone, viene accelerato solo un fascio ben definito di particelle e non si può inserire un nuovo gruppo di particelle finché non sia terminata la fase di accelerazione delle precedenti.

### 7.5.5 PROBLEMI FISICI E PROBLEMI TECNOLOGICI

Concludiamo la parte dedicata ai sincrotroni evidenziando alcune svolte tecnologiche che ne hanno perfezionato il funzionamento consentendo di arrivare alla soglia del TeV.

- Un problema cruciale nei sincrotroni è la produzione di un fascio sufficientemente stabile di particelle che non si sparpagli nel corso del processo di accelerazione. La possibilità di ottenere tali fasci stabili è basata sulla teoria della *stabilità di fase* negli acceleratori di alta energia. L'essenza di tale teoria è la seguente.

Se si potessero accelerare solo le particelle la cui frequenza coincide esattamente con quella del generatore di campo elettrico, non avrebbe senso costruire gli acceleratori a causa del numero estremamente esiguo di particelle coinvolte. Veksler mostrò però che si possono accelerare fasci di particelle che soddisfano la condizione di sincronizzazione anche solo approssimativamente.

Queste particelle vengono accelerate di più di quelle che realizzano l'equilibrio, le sorpassano, ma a questo punto il campo stesso le decelera, e quando la loro velocità si fa troppo bassa il campo di nuovo le accelera, e così via. Come risultato le particelle all'interno del fascio vengono accelerate, ma la loro velocità non cresce monotonicamente, esse fluttuano intorno alla condizione di equilibrio. Il numero di particelle che si trovano in tale condizione è di diversi ordini di grandezza superiore a quelle di equilibrio e ciò consente di ottenere fasci accelerati sufficientemente densi utilizzando un principio largamente utilizzato nelle diverse tecnologie del controllo e noto come *feedback* o *contro reazione negativa*.



"Particles, particles, particles."

Veksler e la stabilità di fase



Acceleratore a più stadi

I magneti superconduttori e la radiazione di sincrotrone

I leptoni non hanno struttura e vanno meglio degli adroni (fatti di quark) ma il loro utilizzo è limitato dalla radiazione di sincrotrone che fissa intorno ai 100 GeV i limiti di utilizzo dell'elettrone in un acceleratore circolare



le cavità risonanti superconduttrici usate per aumentare l'energia del fascio; le cavità sono distribuite lungo l'intero percorso e devono applicare sincronicamente l'impulso di campo elettrico al momento giusto

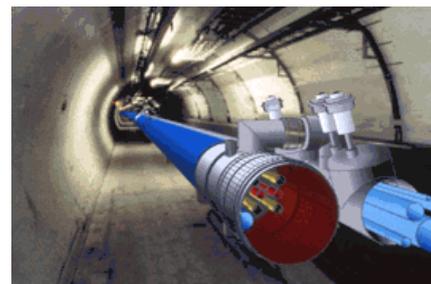
La focalizzazione forte consente di mantenere i fasci entro sezioni trasversali molto piccole

- Il secondo salto avvenne nel 1952 con la scoperta della *focalizzazione forte* cioè di una tecnica di realizzazione dei campi magnetici che consentisse di mantenere il fascio su una orbita sottile. Grazie a questa tecnica i fasci passarono da dimensioni di 50 cm a quelle di qualche centimetro. Un fascio piccolo significa un magnete piccolo e un magnete piccolo significa meno costi di funzionamento. Grazie a questa scoperta si poterono costruire sincrotroni più grandi e si passò da raggi di una decina di metri a raggio di 50÷60 m sino alle macchine attuali che arrivano a raggi di km.
- Il terzo salto consiste nell'uso dell'acceleratore a più stadi, di cui si è già discusso. Si tenga presente che, man mano che aumenta l'energia il fascio si fa sempre più stretto e ciò consente di utilizzare magneti più piccoli compensando l'aumento del loro numero dovuto al crescere del raggio con l'energia. Nei moderni sincrotroni il visitatore vede un tunnel di cui fatica a riconoscere ormai la curvatura a causa del valore elevato di  $R$ . In questo tunnel si riconosce una specie di rotaia (la camera in cui girano le particelle). Lungo la camera si intervallano i magneti deputati alla creazione del campo che devia le particelle e quelli deputati alla focalizzazione del fascio (che senza di essi si sparpaglierebbe per effetto elettrostatico).
- Il quarto salto è quello della superconduttività. Nel 1975 la bolletta energetica del FermiLab era di 15 milioni di dollari e di essa, il 90% riguardava l'alimentazione dei magneti dell'anello principale. Il passaggio all'uso dei magneti superconduttori ha consentito di ridurre i costi facendo salire il valore di  $B$  utilizzabile. Un problema di costo ulteriore è dovuto alla cosiddetta radiazione di sincrotrone. I fasci di particelle muovendosi su orbite circolari emettono una radiazione elettromagnetica coerente e molto intensa oltre che molto penetrante. Ciò comporta una perdita di energia che viene compensata *affittando* la radiazione all'industria dei materiali che la utilizza per indagini di varia natura in campo cristallografico e biomedico.
- Scorrendo i dati relativi al CERN si sarà osservato che il LEP lavorava con fasci di elettroni e positroni di energia *relativamente bassa* (87 GeV). Come mai non si operava ad energia più alta? Come mai i protosincrotroni di raggio più piccolo operano invece ad energie più alte? Quando si usano gli elettroni e quando i protoni?
 

A parità di energia cinetica la energia emessa sotto forma di radiazione di sincrotrone è inversamente proporzionale alla quarta potenza della massa di riposo delle particelle e al raggio di curvatura; quelle più leggere ne emettono di più e per questa ragione la loro energia cinetica viene tenuta più bassa.

Ma allora perché si usano gli elettroni e non si opera sempre con i protoni. Per rispondere a questa domanda bisogna tenere presente che, mentre *gli elettroni sono fatti di elettroni* (non hanno cioè una struttura interna), lo stesso non vale per i protoni (che sono composti da 3 quark). Ciò fa sì che il *coltello elettrone* sia molto più affilato, a parità di energia, del *coltello protone*. Detto diversamente quando si urtano un protone e un antiprotone si producono molte più *schifezze* (particelle di disturbo) di quanto non accada quando si urtano un elettrone ed un antielettrone.

L'impianto del LEP corrisponde al massimo raggiungibile utilizzando elettroni e positroni (particelle leggere) tenuto conto delle perdite di energia per radiazione di sincrotrone. I prossimi impianti dovranno essere necessariamente basati sull'utilizzo di protoni e si potranno utilizzare gli elettroni solo in acceleratori lineari nei quali si curvi la traiettoria solo alla fine quando si deve realizzare la condizione di impatto oppure a costo di aumentare nettamente il raggio di curvatura il che comporta dover costruire anelli sempre più grandi.



il tunnel del LEP e il suo riutilizzo per LHC

### 7.5.6 COME È FATTO LHC: MAGNETI SUPERCONDUTTORI E TECNOLOGIA DEL FREDDO E DEL VUOTO

La configurazione geometrica di LHC è del tutto simile al LEP ed è costituita da 8 archi di 2640 m di lunghezza separati da altrettanti tratti rettilinei. I siti per gli esperimenti sono situati in 4 tratti rettilinei mentre gli altri 4 vengono riservati ad attività di servizio (accelerazione, pulizia dei fasci, estrazione di fasci, ...).

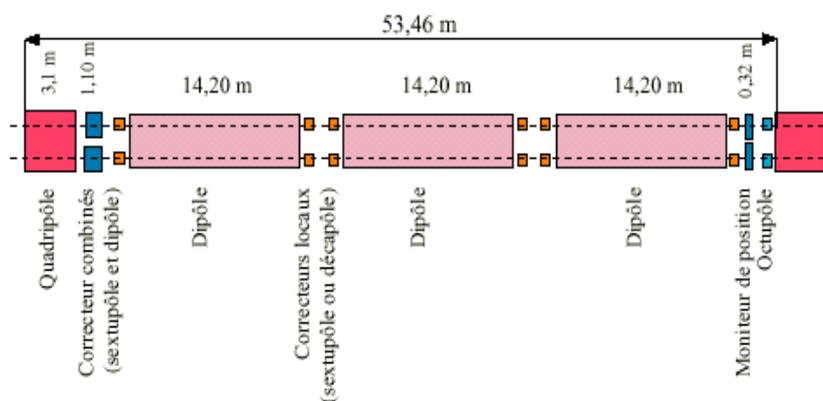
Gli 8 archi sono identici e sono costituiti da 23 parti elementari dette cellule. Una mezza cellula è costituita a sua volta da 3 dipoli da 14.2 m di lunghezza ciascuno con il suo sistema di raffreddamento e da un quadrupolo. I dipoli sono i magneti di deflessione e in LHC saranno tutti a materiale superconduttore. In totale ce ne saranno 1232 e ciascun dipolo agirà su entrambe le camere a vuoto in cui ruoteranno in senso opposto i fasci di adroni e antiadroni. I quadrupoli hanno una funzione di focalizzazione e di misura della posizione del fascio e sono anche essi superconduttori.

Le bobine superconduttrici sono formate da due strati di cui quello più interno ha un diametro di 56 mm. I due strati sono formati rispettivamente da 30 e 52 spire di cavo superconduttore di 15 mm di spessore e largo tra 1.5 e 2 mm. Il cavo è a sua volta formato da 28 (32) sottocavi di 1 mm di diametro e ciascuno di essi è composto da 8900 (6500) cavi dello spessore di 7 o 6 μm. Ognuno di questi microcavi è in lega di Titanio e Niobio annegati in una base di rame che serve a consentire la conduzione elettrica e termica in caso di malfunzionamenti.

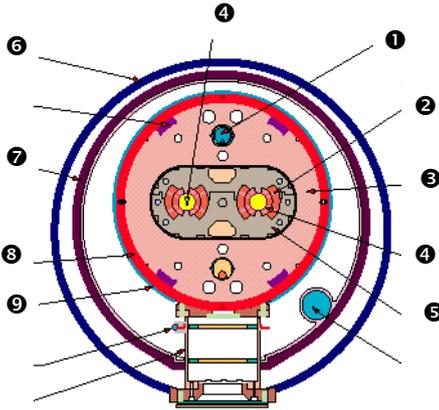
La prossima figura rappresenta in sezione un dipolo e si sono numerati i costituenti principali:

- ❶ scambiatore di calore a -271°C;
- ❷ bobine superconduttrici;
- ❸ massa fredda in ferro a -271°C;
- ❹ camere a vuoto;
- ❺ blocchi di serraggio in alluminio necessari a contenere le forze magnetiche che in regime di funzionamento sfiorano le 300 tonnellate al metro di lunghezza;
- ❻ ambiente a vuoto;
- ❼ schermo di isolamento termico;
- ❽ elio liquido;
- ❾ schermo isolante.

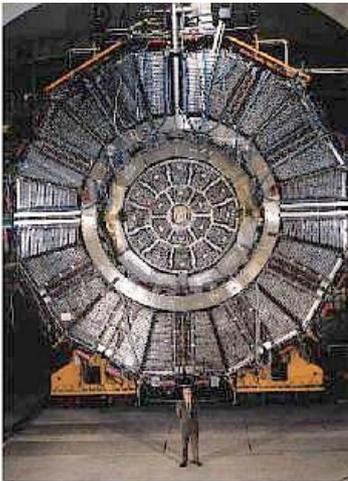
La gran parte dei magneti (dei vari tipi) funziona a 1.9 K cioè ad una temperatura a cui l'elio liquido subisce una trasformazione di fase e diventa superfluido, altamente conduttivo per il calore e con elevato calore specifico.



I principali dati di progetto di LHC	
Circonferenza dell'acceleratore (m)	26'658.9
Diametro del tunnel (m)	3.8
Separazione tra i due anelli (mm)	194
Campo magnetico (Tesla)	8.4
Dimensione del fascio (mm <sup>2</sup> )	36x44
Energia di iniezione (GeV)	450
Energia di Collisione (TeV)	7 + 7
Frequenza di accelerazione (MHz)	400,8
Tempo di rivoluzione (μs)	88.9
Giri al secondo	11'250
Separazione tra i pacchetti di particelle (ns)	25
Numero di pacchetti per fascio	2835
Numero di particelle per pacchetto	10 <sup>11</sup>
Corrente circolante per fascio (mA)	540
Energia massima coinvolta per urto e per fascio (MJ)	334
Diametro del fascio nel punto di collisione (μm)	16
Luminosità (particelle cm <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> )	10 <sup>34</sup>
Tempo di dimezzamento della luminosità del fascio (h)	10
Tempo di riempimento dell'anello (min)	3



sezione trasversale dei dipoli magnetici di LHC con le due camere a vuoto per i due fasci di particelle e antiparticelle



Un dei quattro rivelatori del LEP

La parte centrale di uno dei 4 rivelatori che erano attivi al Lep per la registrazione degli eventi; si osservi la scala per confronto con la dimensione umana e si tenga conto che nel punto di collisione centrale il fascio ha dimensioni sottomultiple del mm<sup>2</sup>

L'elio a 1.9 K è in connessione con grandi sistemi di circolazione e raffreddamento parte posti nel tunnel e parte in quota.

Il vuoto è dell'ordine di un decimiliardesimo della pressione atmosferica e serve a garantire che il fascio non perda luminosità per urto con molecole residue di gas. Per ottenere questi gradi di vuoto si sfrutta a partire da un vuoto primario abbastanza spinto la capacità delle pareti fredde di assorbire le molecole residue che potrebbero però essere staccate dalla radiazione di sincrotrone per cui si pone il problema di intercettarla.

7.5.7 APPLICAZIONI LEGATE AGLI ACCELERATORI E ALLE RELAZIONI RELATIVISTICHE CONNESSE

7.5.7.1 Legame tra energia cinetica e quantità di moto per le particelle relativistiche

Esprimere in funzione della energia cinetica  $\mathcal{E}_K$  il modulo della quantità di moto  $p$  per una particella di energia di riposo  $\mathcal{E}_0$ . Si trovi poi in kg m/s la quantità di moto di un elettrone con  $\mathcal{E}_K = 0.200$  MeV e dopo aver trovato anche il valore previsto dalla relazione classica  $\mathcal{E}_K = \frac{p^2}{2m}$  si esprima l'errore relativo che si commette se si usa la relazione classica.

☹

Si parte dall'invariante relativistico  $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_0^2 + (pc)^2$  e dalla definizione di energia cinetica  $\mathcal{E}_K = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0$ .

Pertanto:

$$p = \frac{\sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2}}{c} = \frac{\sqrt{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)(\mathcal{E} + \mathcal{E}_0)}}{c} = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_K(\mathcal{E}_K + 2\mathcal{E}_0)}}{c}$$

$$p = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_K(\mathcal{E}_K + 2\mathcal{E}_0)}}{c} \tag{V.7.16}$$

I calcoli vengono eseguiti con almeno 5 cifre significative dovendosi determinare un effetto relativistico ad un energia che è circa la metà della energia di riposo.

Per determinare la quantità di moto bisogna ricordarsi di convertire la energia cinetica in J (si moltiplica per  $1.6022 \cdot 10^{-13}$  J/MeV) e lo stesso si deve fare per la energia di riposo.

$$\mathcal{E}_K = 0.200 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-13} = 0.32044 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$\mathcal{E}_0 = m_{0e} c^2 = 9.109534 \cdot 10^{-31} \cdot 299'792'458^2 = 0.81872 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$p = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_K(\mathcal{E}_K + 2\mathcal{E}_0)}}{c} = \frac{\sqrt{0.32044 \cdot 10^{-13}(0.32044 \cdot 10^{-13} + 2 \cdot 0.81872 \cdot 10^{-13})}}{299'792'458}$$

$$= 2.642 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s}$$

Se si usa la relazione classica

$$p' = \sqrt{2m\mathcal{E}_K} = \sqrt{2 \cdot 9.109534 \cdot 10^{-31} \cdot 0.32044 \cdot 10^{-13}} = 2.416 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s}$$

L'errore relativo che si commette a trascurare gli effetti relativistici è dato da:

$$\varepsilon_r \% = 100 \frac{p - p'}{p} = 100 \frac{2.642 \cdot 10^{-22} - 2.416 \cdot 10^{-22}}{2.642 \cdot 10^{-22}} = 8.55\%$$

☺

### 7.5.7.2 Le caratteristiche di un ciclotrone

In un ciclotrone vengono accelerati ioni di Neon ( $A_{\text{Ne}} = 20.18$  a.m.u.) ad una energia di 0.100 GeV. Stabilire preliminarmente come mai ci si trova in ambito classico e quindi rispondere alle seguenti domande tenendo conto che le D del ciclotrone hanno un diametro  $d = 3.10$  m, che il valore di B con cui si opera è  $B = 1.04$  T e che il potenziale di accelerazione che agisce sul fascio ad ogni mezzo giro è  $\Delta V = 300$  kV: quanto valgono:

- la carica dello ione che si sta usando? Da essa inferire lo stato di ionizzazione del Neon
- il numero di rivoluzioni necessarie a garantire il processo di accelerazione previsto
- il periodo di rivoluzione del fascio

☺

Ci si trova in ambito classico perché la energia di riposo del Neon è 20 volte la energia di riposo della unità di massa atomica che è circa 900 MeV. In queste stime si possono tranquillamente svolgere calcoli approssimati e  $18\text{GeV} \gg 0.100$  GeV. Siamo dunque pienamente in ambito classico e il ciclotrone funziona.

Per determinare la carica dello ione basta utilizzare la ben nota relazione valida per il moto di particelle in moto ortogonalmente ad un campo

uniforme:  $r = \frac{p}{qB}$ .

Da qui si ha:

$$q = \frac{p}{rB} = \frac{\sqrt{2m \mathcal{E}_K}}{r B}$$

$$q = \frac{\sqrt{2 \cdot 20.18 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \cdot 0.100 \cdot 10^9 \cdot 1.60^{-19}}}{1.55 \cdot 1.04} = 6.42 \cdot 10^{-19} \text{C}$$

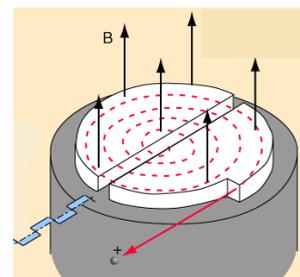
Per conoscere il grado di ionizzazione basta dividere per la carica elementare:  $N = \frac{q}{e} = 4.01$  cariche elementari. Lo ione risulta ionizzato 4 volte.

Poiché lo ione acquista una energia di  $2 \cdot 300 \cdot 4$  keV al giro per la accelerazione sono necessarie  $1.00 \cdot 10^8 / (2.40 \cdot 10^6) \approx 42$  rivoluzioni

Il periodo di rivoluzione, come è noto è lo stesso in tutto il processo:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{m}{qB} = 2\pi \frac{20.18 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}}{6.42 \cdot 10^{-19} \cdot 1.55} = 2.12 \cdot 10^{-7} \text{s}$$

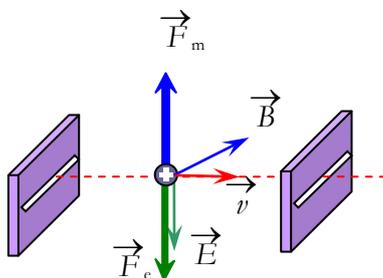
☺



## 7.6 Lo spettrografo di massa

### 7.6.1 IL COLLIMATORE DI VELOCITÀ

Per determinare il rapporto carica-massa per gli ioni si sono incontrate maggiori difficoltà di natura sperimentale di quanto non sia accaduto con gli elettroni perché un fascio ionico contiene particelle con velocità molto diverse ed è dunque difficile da focalizzare.



Il collimatore di velocità utilizza due campi incrociati per selezionare le particelle di una determinata velocità

Prima di produrre il fascio bisogna selezionare gli ioni con la stessa velocità e per farlo si utilizza un *filtro selettore o collimatore di velocità*. In questo apparato, illustrato in figura si utilizzano, come nella esperienza di Thomson, un campo elettrico e un campo magnetico disposti perpendicolarmente.

Uno ione positivo che attraversa i due campi incrociati risulta soggetto a

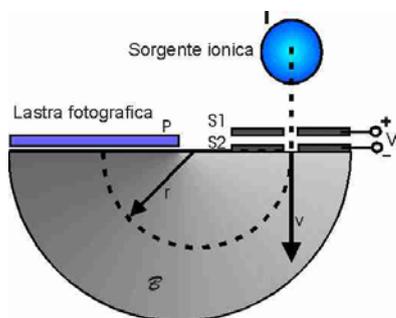
due forze: la forza elettrica  $\vec{F}_e = q \vec{E}$  orientata verso il basso e la forza

di Lorentz  $\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$  orientata verso l'alto. Lo ione riuscirà ad attraversare anche la seconda fenditura solo se la direzione della sua velocità non è cambiata e ciò è possibile solo se le due forze si fanno equilibrio  $F_e = F_m$  o anche  $q E = q v B$ .

Pertanto gli ioni che attraversano la seconda fenditura sono solo quelli che soddisfano alla condizione:  $v = \frac{E}{B}$  mentre gli altri vengono filtrati.

### 7.6.2 COME FUNZIONA LO SPETTROGRAFO

Dopo che sono stati selezionati ioni aventi la stessa velocità, essi vengono focalizzati per mezzo di campi elettrici e magnetici. In alcuni tipi di spettrografi di massa la focalizzazione viene realizzata mediante un campo magnetico trasversale.



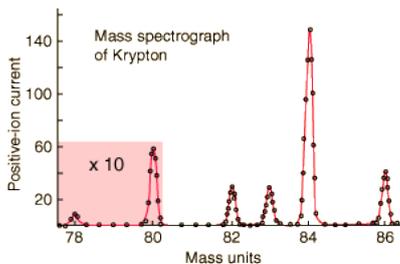
Lo spettrografo di massa separa particelle della stessa carica che differiscono anche di poco nella massa e ciò consente la determinazione delle differenze di massa che caratterizzano gli isotopi

Gli ioni, dopo aver attraversato il selettore di velocità si muovono in un campo magnetico uniforme trasversale. Le loro traiettorie sono delle semicirconferenze di raggio  $r = m v / q B_{\perp}$  dove  $q / m$  rappresenta il rapporto carica su massa per lo ione, e  $B_{\perp}$  è l'induzione magnetica trasversale dello spettrografo di massa.

Poiché tanto la velocità quanto l'induzione sono grandezze controllabili, il raggio del semicerchio è completamente determinato dal rapporto carica-massa dello ione e pertanto ioni con differenti valori di tale rapporto vengono focalizzati in punti diversi.

Ponendo delle lastre fotografiche nei punti di focalizzazione si ottengono i cosiddetti *spettri di massa* di cui si ha una immagine nel diagramma qui a lato relativo agli isotopi del Krypton.

Per determinare il rapporto carica su massa è necessario calibrare preventivamente lo spettrografo e ciò si fa utilizzando dei campioni noti. A questo scopo si utilizzano solitamente il carbonio e l'ossigeno.



un moderno spettrogramma e le immagini originali di Aston su lastra fotografica

### 7.6.3 LA STORIA DELLA SCOPERTA DEGLI ISOTOPI

Le prime misure del rapporto  $q/m$  per gli ioni furono eseguite da J. J. Thomson il quale si basò sulla scoperta dei *raggi canale* (§ 4.6.7). Si era osservato che, in un tubo a raggi catodici con il catodo grigliato si propagavano particelle con un rapporto  $q/m$  molto più basso di quello dei raggi catodici.

Le ricerche di Thomson (1907) puntavano alla ricerca delle particelle positive dopo la identificazione dell'elettrone ed operando sui raggi canale Thomson scoprì che le diverse sostanze presentavano ioni di massa diversa ma che, almeno in un caso (quello del Neon) comparivano ioni con due masse distinte.



A partire dal 1909 il suo assistente F. W. Aston si mise all'opera per separare in maniera quantitativamente significativa i due tipi di ioni del Neon; le ricerche si interruppero per la I guerra mondiale e ripresero nel 1919 quando Aston con la apparecchiatura qui a lato riuscì ad ottenere i primi spettrogrammi grazie all'uso del collimatore di velocità che consentiva di rendere molto nette le immagini dei diversi isotopi.

Isotopo significa etimologicamente *uguale posto* e ci si riferisce a sostanze che occupano una stessa posizione nella tabella periodica degli elementi. Effettivamente due isotopi hanno le stesse proprietà chimiche e sono pertanto inseparabili attraverso reazioni chimiche. Presentano però proprietà fisiche diverse e prima di tutte la massa.

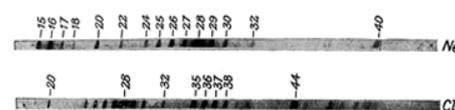
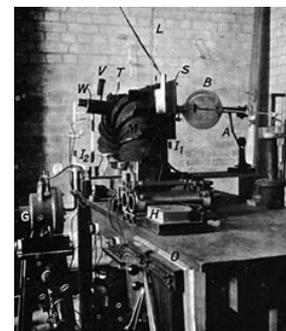
Aston, nel 1919 annunciò che, se si esprimevano le masse atomiche in sedicesimi del peso dell'ossigeno 16, gli isotopi dei diversi elementi presentavano masse espresse da numeri molto vicini all'intero.<sup>16</sup> Nei tre anni successivi egli riuscì ad identificare isotopi di diversi elementi e che alcuni di loro presentavano più di un isotopo.

La discrepanza tra il fatto che l'ossigeno avesse massa 16 e numero atomico 8 fu interpretata all'inizio ipotizzando che nel nucleo dell'ossigeno fossero presenti 16 protoni e 8 elettroni e così via. C'era però una eccezione alla regola del numero intero; l'idrogeno presentava una massa pari a 1.008

Per venire a capo della questione Aston realizzò un secondo spettrografo con un maggiore potere risolvante: si scoprirono nuovi isotopi ma si confermò la stranezza del valore relativo allo ione idrogeno per il quale risultava una massa maggiore di 1. Si ipotizzò allora che il fatto che l'idrogeno avesse una massa maggiore di 1 fosse da collegare al cosiddetto *difetto di massa* previsto dalla relazione di Einstein sul legame tra massa ed energia. Infatti se si assumeva come unità di riferimento 1/16 della massa dell'ossigeno si usava una unità più piccola del dovuto a causa del difetto di massa legato alla costituzione del nucleo di ossigeno.

Non era stato ancora scoperto il neutrone (1932) ma si incominciava a capire che le energie di legame nucleare fossero molto più elevate di quelle atomiche e che quando i protoni si univano a formare i nuclei la energia di legame venisse a corrispondere ad una diminuzione di massa. Era come dire che le masse dei diversi ioni misurate con riferimento all'idrogeno risultavano vicine ma un po' inferiori a numeri interi.

I lavori di Aston si conclusero nel 1937 con la realizzazione di uno spettrografo in grado di perfezionare le misure di due ordini di grandezza rispetto a quelle iniziali e di far tornare i conti rispetto alle energie di legame nucleare così come le utilizziamo ancora oggi.



Lo spettrografo di massa del 1919 dotato di collimatore di velocità e gli spettrogrammi del Neon e del Cloro ottenuti grazie ad esso



Lo spettrografo di massa del 1937 con cui si eseguirono le misure di precisione sulla massa dei nuclei che consentirono di evidenziare il *difetto di massa*

<sup>16</sup> Il fatto che non siano esattamente degli interi deriva dalla diversità di massa di protone e neutrone oltre che dalla incidenza della massa elettronica e dal difetto di massa.

### 7.6.4 ISOTOPI E DIFETTO DI MASSA

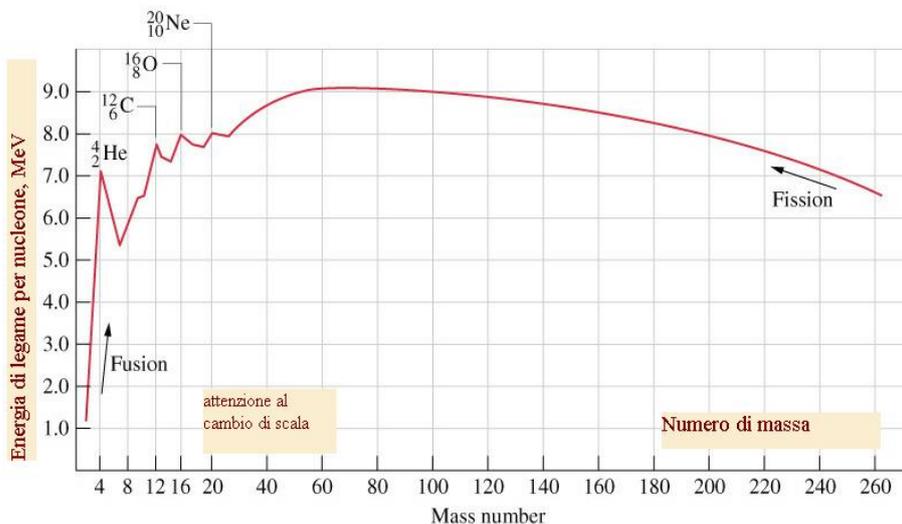
Lo spettrografo di massa, non solo ci informa sui valori relativi delle masse atomiche ma, attraverso il confronto dei gradi di annerimento lasciati sui rivelatori, ci informa anche delle abbondanze relative dei diversi isotopi di un elemento.

La ragione principale per cui le masse atomiche indicate in qualsiasi tabella degli elementi presentano valori decimali è dovuta alla esistenza degli isotopi. Persino il carbonio che fa da unità campione ha una massa decimale.

Si definisce infatti *unità di massa atomica* la massa pari a  $\frac{1}{12}$  della massa di un atomo di carbonio 12 cioè dell'isotopo del carbonio formato da 6 protoni e 6 neutroni. Ma il carbonio presenta anche altri 2 isotopi il  $C_{13}$  e il  $C_{14}$  (radioattivo). Pertanto nelle tabelle troviamo un valore di massa relativa di 12.011 che corrisponde ad una media tra 12, 13, 14 ponderata in base alle abbondanze relative e il valore indicato ci dice che il  $C_{12}$  è nettamente quello più diffuso.

Ma per via del *difetto di massa* la massa di uno ione di un particolare isotopo non risulta essere pari alla somma delle masse dei suoi componenti (protoni, elettroni e neutroni) ma risulta essere inferiore ad essa.

Si tratta della verifica sperimentale della relazione einsteiniana tra massa ed energia. Quando le particelle elementari si uniscono per formare un nucleo, nel processo di formazione viene liberata della energia, pari alla energia di legame. Questa energia perduta è riscontrabile come difetto di massa secondo la relazione  $\Delta\mathcal{E} = \Delta m c^2$ .



Da queste misure si ricava il diagramma qui a lato che sarà ampiamente utilizzato e commentato nei capitoli di fisica del nucleo (parte VII).

Siamo ora in grado di spiegare come mai, nonostante il neutrone abbia una massa maggiore di quella del protone e la unità di massa atomica sia a sua volta inferiore alla massa del protone, le masse dei nuclei espresse in unità di massa atomica possano essere inferiori al numero intero corrispondente alla somma del numero di neutroni e protoni. L'argomento sarà ripreso trattando della fisica del nucleo.

### 7.6.5 QUALCHE CONTO SU SPETTROGRAFI E DIFETTI DI MASSA

#### 7.6.5.1 Dimensioniamo uno spettrografo di massa e il relativo collimatore

Un collimatore di velocità a campi incrociati funziona con  $E = 3.06 \cdot 10^5$  V/m e  $B = 0.125$  T e focalizza degli ioni di  $C_{12}$  doppiamente ionizzati che vengono inviati ad uno spettrografo di massa con  $B' = 0.725$  T (1 amu =  $1.66057 \cdot 10^{-27}$  kg,  $m_{12} = 12.00000$  amu).

Determinare il raggio di curvatura per il carbonio 12  $r_{12}$  in funzione dei dati ricavando la relazione.

Supponendo che gli errori relativi sulle intensità dei campi siano rispettivamente:  $\epsilon_E = 0.4\%$ ,  $\epsilon_B = 0.3\%$ ,  $\epsilon_{B'} = 0.3\%$  stabilire se lo strumento è in grado di discriminare ioni di  $C_{14}$  ( $m_{14} = 14.00307$  amu) attraverso il calcolo di  $r_{14}$  e dell'errore assoluto  $\epsilon_r$ .



Il raggio di curvatura di una particella iniettata ortogonalmente ad un campo uniforme è notoriamente  $r = \frac{p}{qB'}$ , mentre il collimatore di velocità seleziona particelle per le quali  $qE = qvB$  e pertanto  $v = \frac{E}{B}$ .

Calcoliamo  $v$  per controllare in che ambito siamo:

$$v = \frac{E}{B} = \frac{3.06 \cdot 10^5}{0.125} = 2.45 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Siamo in ambito classico e pertanto possiamo utilizzare per i calcoli i valori delle masse di riposo.

$$\text{Dunque: } r = \frac{mv}{qB'} = \frac{mE}{qBB'}$$

Nel caso del carbonio 12 si ha:

$$r_{12} = \frac{m_{12} E}{2eBB'} = \frac{12.0000 \cdot 1.66057 \cdot 10^{-27} \cdot 3.06 \cdot 10^5}{2 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19} \cdot 0.125 \cdot 0.725} = 0.20997 \text{ m}$$

Ho ecceduto sulle cifre significative perché non ho ancora determinato l'errore e in questo esercizio l'errore va calcolato esplicitamente.

Poiché il raggio di curvatura è proporzionale alla massa:

$$r_{14} = r_{12} \frac{m_{14}}{m_{12}} = 0.20997 \frac{14.00307}{12.00000} = 0.2450 \text{ m}$$

Per quanto riguarda l'errore si ricordi che nei prodotti e nei rapporti si sommano gli errori relativi pertanto

$$\epsilon_r = \epsilon_E + \epsilon_B + \epsilon_{B'} = 0.4 + 0.3 + 0.3 = 1.0\%$$

$$\text{L'errore assoluto } \epsilon_{ar} = \epsilon_r \cdot r = 0.01 \cdot 0.20997 = 0.002 \text{ m}$$

Dunque le particelle di carbonio 12 hanno un raggio di curvatura di  $0.210 \pm 0.002$  m e sono perfettamente discriminate da quelle di  $C_{14}$  con raggio 0.245 m



### 7.6.5.2 Calcolo di un difetto di massa

Sapendo che  $m_p = 1.67262 \cdot 10^{-27}$  kg,  $m_n = 1.67493 \cdot 10^{-27}$  kg,  $m_e = 0.00091 \cdot 10^{-27}$  kg determinare il difetto di massa per l'isotopo 137 del cesio ( $Z = 55$ ) sapendo che la massa atomica di questo isotopo misurata con lo spettrografo di massa risulta  $A = 136.90678$  amu. Si ricordi che  $1 \text{ amu} = 1.66054 \cdot 10^{-27}$  kg.



In un atomo del nuclide considerato ci sono 55 protoni, 55 elettroni e  $137 - 55 = 82$  neutroni.

Pertanto la massa dei reagenti è:

$$m = 55(1.67262 + 0.00091) \cdot 10^{-27} + 82 \cdot 1.67493 \cdot 10^{-27} = 229.3884 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

La massa dell'atomo vale



Quark, neutrini, mesoni. Tutte queste dannate particelle non si possono vedere e questo è ciò che mi ha indotto a bere ... ma adesso le posso vedere.

$$A = 136.90678 \text{ amu} = 136.90678 \cdot 1.66054 \cdot 10^{-27} = 227.3392 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Pertanto il difetto di massa  $\Delta m = -2.0492 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  pari a circa 1.23 amu.



## 7.7 L'effetto Hall

### 7.7.1 DESCRIZIONE E GENESI DEL FENOMENO

L'esperienza cruciale che ha consentito di fondare la teoria sulla conduzione elettronica nei metalli è basato su un fenomeno legato al magnetismo e alla capacità dei campi magnetici di interagire con le cariche in moto.

Se in un metallo immerso in un campo magnetico esistono cariche che si muovono di moto ordinato, su di esse dovrà agire una *forza ordinata* di origine magnetica. Tale forza dovrà determinare uno scostamento trasversale delle cariche in moto e tale scostamento trasversale, determinando una distribuzione asimmetrica, dovrà essere percepibile come d.d.p. trasversale.

Poiché questo fenomeno di tipo macroscopico è legato ad un meccanismo di generazione microscopica la misurazione dell'effetto ci fornirà informazioni interessanti sulle cariche che partecipano alla conduzione.

Nel capitolo dedicato allo studio delle correnti elettriche si è visto che la densità di corrente è proporzionale alla concentrazione di cariche libere ed alla loro velocità media:

$$j = \frac{i}{\sigma} = e n_e \langle v \rangle$$

Il valore della concentrazione di elettroni liberi  $n_e$  può essere determinato attraverso un esperimento basato su un fenomeno scoperto da Edwin. H. Hall (1855-1938) della università di Harvard su suggerimento di un altro fisico americano H. A. Rowland.

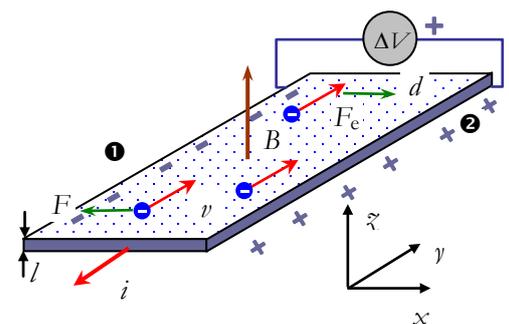
Il fenomeno, scoperto nel 1879, al momento fu significativo solo per scoprire il segno dei portatori di carica elettrica. Ma, lo stesso esperimento, ripetuto più volte nel XX secolo, dopo la scoperta dell'elettrone, ha permesso di trarre molte più informazioni, sulle caratteristiche della conduzione nei metalli.

Si prende una piastra di materiale omogeneo (per esempio un metallo) a forma di parallelepipedo e, per mezzo di un generatore di corrente, si applica ad esso un campo elettrico uniforme (per esempio lungo  $-y$ ) generando così una corrente elettrica nel verso del campo. Qualunque piano perpendicolare all'asse  $y$  risulta essere una superficie equipotenziale e pertanto la d.d.p. tra le facce ① e ② è uguale a zero.

Se ora applichiamo un campo magnetico in modo che il vettore  $\vec{B}$  sia diretto come l'asse  $z$  tra le facce ① e ② si riscontra la comparsa di una d.d.p. Tale d.d.p. è chiamata *differenza di potenziale Hall* e risulta dipendere dalle dimensioni del conduttore, dal campo e dalla intensità di corrente secondo la relazione:

$$\Delta V_H = R_H \frac{i B}{l} \tag{V.7.17}$$

dove  $l$  è lo spessore della piastra nella direzione del campo magnetico;  $i$  è la intensità di corrente;  $B$  è la intensità del vettore induzione magnetica;  $R_H$  è una costante dipendente dal materiale detta *coefficiente Hall* e pari a  $\frac{1}{en_e}$  dove  $n_e$  rappresenta la concentrazione elettronica.



**schema dell'effetto Hall**  
 La applicazione di un campo magnetico fa spostare trasversalmente gli elettroni soggetti alla forza di Lorentz e ciò determina la comparsa di una d.d.p. trasversale che, a parità di corrente presenta due segni opposti a seconda del segno della carica in moto; in figura è rappresentato il caso degli elettroni

$$R_H = \frac{1}{en_e} \tag{V.7.18}$$

La relazione (V.7.17) si può scrivere in forma equivalente utilizzando il campo elettrico e la densità di corrente:

$$E_H d = R_H \frac{J l B}{l}$$

$$E_H = R_H J B \tag{V.7.17 bis}$$

### 7.7.2 TEORIA DELL'EFFETTO HALL

La relazione relativa all'effetto Hall si spiega agevolmente come applicazione della forza di Lorentz.

Il moto ordinato degli elettroni nella piastra avviene in direzione perpendicolare al campo magnetico e, se si indica con  $\langle v \rangle$  la loro velocità media, essi saranno soggetti ad una *forza trasversale di Lorentz*:

$$F_m = e B \langle v \rangle.$$

Tale forza li deflette verso la faccia ❶ e determina uno squilibrio nella distribuzione di carica tra le due facce: un *surplus* di cariche negative nella faccia ❶ ed uno di cariche positive nella ❷. Ciò determina la comparsa

di un campo elettrico  $\vec{E}$  diretto come l'asse - x che si oppone al moto ulteriore degli elettroni e si determina una condizione di equilibrio quando la forza elettrica corrispondente è pari alla forza di Lorentz, cioè  $F_m = F_e$  il che significa

$$e B \langle v \rangle = e E$$

La differenza di potenziale di Hall vale pertanto:

$$\Delta V_H = E d = \langle v \rangle B d$$

Ma la velocità media del moto ordinato è legata alla corrente attraverso la concentrazione dei portatori di carica

$$\langle v \rangle = \frac{i}{e n_e \sigma} = \frac{i}{e n_e d l}$$

e sostituendo si ha:

$$\Delta V_H = \frac{1}{e n_e} \frac{i B}{l}$$

La costante di proporzionalità è detta coefficiente di Hall e dipende dalla concentrazione e dalla carica elementare che lo determina:

$$R_H = \frac{1}{en_e}$$

pertanto, se si determina sperimentalmente il coefficiente di Hall, è possibile determinare la concentrazione di elettroni liberi in un materiale.

### 7.7.3 IL SIGNIFICATO E L'UTILIZZO DELL'EFFETTO HALL

Gli esperimenti eseguiti con riferimento all'effetto Hall consentono di determinare numerosi parametri (riportati in tabella) e di concludere quanto segue:

- la d.d.p. Hall è effettivamente proporzionale a  $B$  e  $i$  ed è possibile determinare sperimentalmente il coefficiente di Hall. Su questo punto si basa poi la costruzione di sonde per la misura di campi magnetici at-



Misuratore di campo magnetico basato sull'effetto Hall; la sonda è percorsa da una corrente nota e viene preventivamente tarata attraverso un campo noto; a questo punto dalla misura di  $\Delta V$  si risale alla misura del campo magnetico in cui viene immersa la sonda

traverso la determinazione della d.d.p. Hall in dispositivi percorsi da correnti note.

- disponiamo di un metodo per calcolare la concentrazione di elettroni liberi in un dato materiale tramite la (V.7.18)
- possiamo confrontare la concentrazione atomica  $n$  (che si calcola dalla conoscenza della densità del materiale, del suo peso atomico e del numero di Avogadro) con la concentrazione di elettroni liberi. Il rapporto  $n_e / n$  ci informa del numero medio di elettroni liberi per ogni atomo

Tabella V.7.1	Coefficiente Hall dato misurato	Concentrazione elettroni liberi	Concentrazione atomi	Elettroni liberi per atomo	Conducibilità dato misurato	Mobilità elettronica
<i>materiale</i>	$R_H$ $m^3/C$	$n_e = \frac{1}{eR_H}$ $m^{-3}$	$n_A = \frac{10^3 \delta c V_A}{\mu}$ $m^{-3}$	$v = \frac{n}{n_A}$	$\frac{1}{\rho}$ $(ohm \cdot m)^{-1}$	$\mu = \frac{R_H}{\rho}$ $m^2 V^{-1} s^{-1}$
Alluminio	$0.30 \times 10^{-10}$	$20.8 \times 10^{28}$	$6.03 \times 10^{28}$	3.46	$4.08 \times 10^7$	$1.2 \times 10^{-3}$
Rame	$0.55 \times 10^{-10}$	$11.4 \times 10^{28}$	$8.49 \times 10^{28}$	1.34	$6.41 \times 10^7$	$3.5 \times 10^{-3}$
Litio	$1.70 \times 10^{-10}$	$3.67 \times 10^{28}$	$4.60 \times 10^{28}$	0.80	$1.17 \times 10^7$	$2.0 \times 10^{-3}$
Sodio	$2.50 \times 10^{-10}$	$2.50 \times 10^{28}$	$2.54 \times 10^{28}$	0.99	$2.48 \times 10^7$	$6.2 \times 10^{-3}$
Ossido Zinco	$1.60 \times 10^{-5}$	$3.90 \times 10^{23}$	$\approx 4 \times 10^{28}$	$\approx 10^{-5}$	$3.00 \times 10^2$	$4.8 \times 10^{-3}$
Germanio	0.25	$2.50 \times 10^{19}$	$\approx 4.4 \times 10^{28}$	$\approx 0.6 \times 10^{-9}$	2.22	0.55
Silicio	$4.16 \times 10^2$	$1.50 \times 10^{16}$	$\approx 5.0 \times 10^{28}$	$\approx 0.3 \times 10^{-12}$	$4.35 \times 10^{-4}$	0.18

I metalli monovalenti (litio e sodio) hanno mediamente un elettrone libero per atomo. L'alluminio (trivalente) ha circa tre elettroni liberi per atomo mentre il rame che può essere sia monovalente, sia bivalente, ha un numero di elettroni liberi leggermente inferiori a uno e mezzo.

Dalla tabella possiamo scoprire come mai l'alluminio, nonostante renda disponibili più di 3 elettroni per atomo, abbia una resistività più alta del rame che ne rende disponibili in media 1.34.

Per comprendere questo dato bisogna tenere presente che la capacità di condurre (l'inverso della resistività) dipende da due elementi: la quantità di cariche libere disponibili e la capacità di tali cariche, in un dato campo elettrico (d.d.p), di mettersi in moto più o meno velocemente.

Questo ultimo parametro è descritto piuttosto bene dalla *mobilità*  $\mu$  che viene definita come rapporto tra la velocità media dei portatori di carica ed il valore di campo elettrico che li mette in moto. La mobilità è un concetto particolarmente utile quando si ragiona sulla conduzione nei gas e nei liquidi.

$$\mu = \frac{\langle v \rangle}{E} = \frac{j}{e n_e E} = \frac{1}{\rho e n_e} \tag{V.7.19}$$

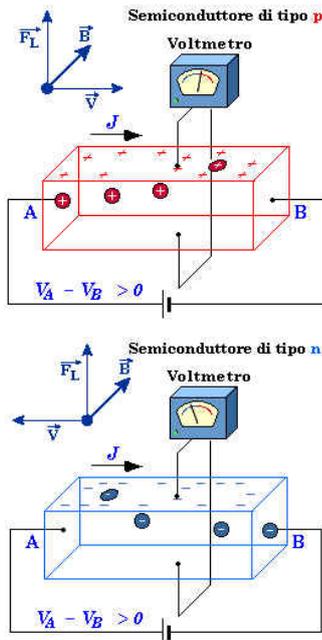
La conducibilità (inverso della resistività) è proporzionale al prodotto della concentrazione di elettroni liberi per la mobilità.

L'alluminio presenta una resistività più elevata del rame perché la mobilità dei suoi elettroni è molto più bassa. Si tratta evidentemente di qualcosa connesso alle caratteristiche del reticolo cristallino.

Il coefficiente di Hall è stato misurato in un ampio intervallo di temperature e i risultati sperimentali hanno dimostrato che, nei metalli, esso non dipende dalla temperatura e, di conseguenza, *anche la concentrazione di elettroni liberi non dipende dalla temperatura*. Ciò significa che il movimento termico non gioca alcun ruolo significativo nella formazione di elettroni liberi nei metalli.

### 7.7.4 IL COMPORTAMENTO DEI SEMICONDUTTORI

Se si eseguono esperimenti relativi ai *materiali semiconduttori* la situazione sperimentale risultante è molto più complessa.

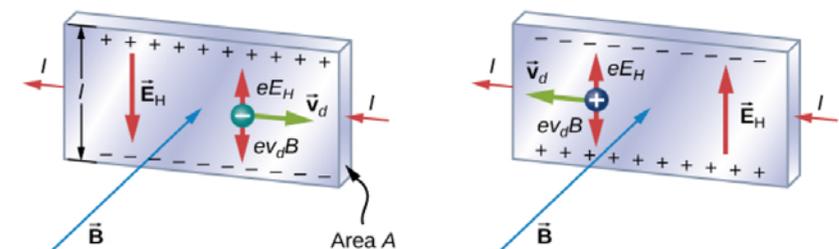


- Si osserva innanzitutto che la conducibilità nel Silicio è più bassa di 11 ordini di grandezza e che anche la concentrazione di elettroni liberi è inferiore nello stesso rapporto. Di conseguenza solo un piccolo numero di atomi risultano ionizzati, ma questo non è ancora l'aspetto principale. La questione importante è che nei semiconduttori il coefficiente di Hall diminuisce molto rapidamente al crescere della temperatura. Dunque, *nei semiconduttori, la concentrazione di elettroni liberi cresce al crescere della temperatura*.
- La seconda caratteristica tipica dei semiconduttori è che in alcuni di essi la d.d.p. Hall ha segno contrario. Con lo stesso verso di corrente e di campo magnetico dei metalli la faccia ❶ si carica positivamente e la sola assunzione ragionevole per spiegare questo fatto è che, in queste sostanze, il processo di conduzione sia caratterizzato da movimento di cariche positive, anziché di cariche negative. E' la conferma del meccanismo di conduzione per buchi. Il fenomeno è particolarmente evidente quando si utilizzano i semiconduttori drogati come si evidenzia nella figura qui a lato.

Il motivo per cui in presenza della conduzione per buchi la d.d.p. Hall si inverte è legata al fatto che in quel caso la forza di Lorentz agisce nello stesso verso perché si invertono sia il segno della carica sia il verso del vettore velocità.

Il risultato finale illustrato nella immagine con cui si conclude il paragrafo, nei due casi è la produzione di d.d.p. trasversali di segno opposto.

Attraverso misure di effetto Hall si è scoperto che anche alcuni metalli quali lo Zinco e il Berillio possiedono una forma di conduzione per buchi.



asimmetria nell'effetto Hall a parità di campo magnetico e di corrente a seconda che la corrente sia dovuta a moto di cariche positive o negative: cambia il verso della d.d.p.

7.7.5 PROBLEMI SULL'EFFETTO HALL

7.7.5.1 Effetto Hall autoprodotta in un conduttore cilindrico percorso da corrente

Un conduttore rettilineo di rame con sezione circolare di raggio  $R = 5.00 \text{ mm}$  è percorso da una corrente  $I = 50.0 \text{ A}$ . Determinare la d.d.p. tra l'asse del conduttore e la sua superficie esterna sapendo che la concentrazione di elettroni di conduzione  $n_e = 1.14 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$ .

⊗

Il passaggio di corrente all'interno del conduttore genera un campo magnetico caratterizzate da linee di campo circolari e la cui intensità  $B_r$  dipende dalla corrente che circola nella sezione di raggio  $r$ :

$$I_r = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = I \frac{r^2}{R^2}$$

Applicando il teorema della circuitazione di Ampere avremo che:

$$2\pi r B_r = \mu_0 I_r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \text{ E dunque:}$$

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$

Per effetto della forza di Lorentz che agisce sugli elettroni di conduzione si viene a creare un campo elettrico radiale

$$E_r = \frac{F}{e} = \frac{B_r e \langle v \rangle}{e} = B_r \langle v \rangle$$

D'altra parte  $\langle v \rangle$  è determinabile dalla conoscenza della corrente e dalla concentrazione di cariche libere:

$$I = J S = n_e \langle v \rangle e \pi R^2 \text{ e dunque } \langle v \rangle = \frac{I}{n_e e \pi R^2}$$

La d.d.p. trattandosi di un campo variabile richiede l'utilizzo di un integrale:

$$\Delta V = \int_0^R E_r dr = \int_0^R B_r \langle v \rangle dr = \int_0^R \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2} \frac{I}{n_e e \pi R^2} dr =$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R^2} \frac{I}{n_e e \pi R^2} \int_0^R r dr = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2} \frac{1}{n_e e R^4} \frac{R^2}{2} = \frac{\mu_0}{(2\pi)^2} I^2 \frac{1}{n_e R^2}$$

E quindi sostituendo i dati:

$$\Delta V = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{2\pi} 50.0^2 \frac{1}{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 1.14 \cdot 10^{29} \cdot 25.00 \cdot 10^{-6}} = 0.174 \cdot 10^{-9} \text{ V}$$

⊙

7.7.5.2 Concentrazione di elettroni liberi in un metallo

Da misure di effetto Hall sul sodio metallico sottoposto a un campo magnetico di  $1.00 \text{ T}$  si è trovato un campo elettrico trasversale  $E = 5.0 \text{ } \mu\text{V/cm}$  per una densità di corrente  $J = 2.00 \text{ A/mm}^2$ . Determinare la concentrazione di elettroni liberi e il numero medio di elettroni liberi per atomo sapendo che il peso atomico del sodio è  $22.998$  e la sua densità è  $0.97 \text{ g/cm}^3$

⊙

Dal problema precedente possiamo affermare che:

$$\langle v \rangle = \frac{E}{B} \text{ mentre } J = n_e e \langle v \rangle$$

$$\text{Pertanto } n_e = \frac{J B}{e E} = \frac{2.00 \cdot 10^6 \cdot 1.00}{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 5.0 \cdot 10^{-4}} = 2.50 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

La concentrazione atomica si trova moltiplicando il numero di atomi in una mole (dato dal numero di Avogadro) e trasformando il dato attraverso la densità (prestando attenzione al fatto che la massa molare è espressa in g e dunque converrà esprimere la densità in g/cm<sup>3</sup>)

$$n_a = \frac{N_{\text{mol}}}{V_{\text{mol}}} = \frac{e N_A \delta}{m_{\text{mol}}} = \frac{6.02 \cdot 10^{23} \cdot 0.97}{22.998} = 2.54 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} = 2.54 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$\frac{n_e}{n_a} = \frac{2.50}{2.54} = 0.984 \text{ poco meno di un elettrone per atomo.}$$

☺

### 7.7.5.3 Concentrazione di buchi e mobilità in un semiconduttore di tipo p

Nel corso di misure sull'effetto Hall di una piastra di materiale semiconduttore drogato di tipo p una piastra con  $h = 10.0 \text{ mm}$  e  $L = 50.0 \text{ mm}$  viene immersa in un campo magnetico di  $0.500 \text{ T}$ . Si applica agli estremi una d.d.p.  $\Delta V = 10.0 \text{ V}$  e si riscontra la comparsa di un effetto Hall di  $\Delta V_H = 50.0 \text{ mV}$  con una resistività  $\rho = 2.50 \Omega \text{ cm}$ . Determinare la concentrazione  $n$  dei buchi e la loro mobilità  $\mu$ .

☹

I portatori di carica per effetto della applicazione di  $\Delta V$  si mettono in moto lungo l'asse  $x$  con una velocità di traslazione  $\langle v_x \rangle$  e questo movimento di cariche in presenza del campo  $B$  comporta la comparsa di un campo elettrico lungo  $y$

$$E_y = \frac{\Delta V_H}{h}$$

In base alla relazione che caratterizza l'effetto Hall si ha  $\langle v_x \rangle B = E_y$

Inoltre in base alla legge di Ohm:

$$J_x = \sigma E_x = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta V}{L}$$

Ma dal punto di vista microscopico:

$$J_x = n e \langle v_x \rangle$$

Mettendo insieme le tre relazioni scritte avremo:

$$n e \langle v_x \rangle = n e \frac{E_y}{B} = n e \frac{\Delta V_H}{h B} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta V}{L}$$

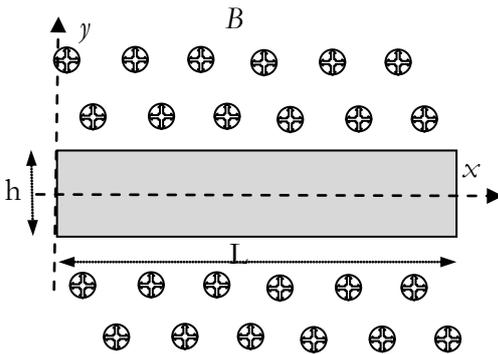
pertanto

$$n = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta V}{L} \frac{h B}{e \Delta V_H}$$

sostituendo i dati (espressi in unità del SI otteniamo) otteniamo:

$$n = \frac{1}{2.5 \cdot 10^{-2}} \frac{10.0}{0.05} \frac{0.0100 \cdot 0.500}{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 0.0500} = 4.99 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$$

$$\text{Per definizione la mobilità } \mu = \frac{\langle v_x \rangle}{E_x}$$



### 7.7.5.4 Effetto Hall dovuto ai due tipi di portatori di carica in un semiconduttore puro

Si consideri un semiconduttore immerso in un campo magnetico  $B$  nel quale gli elettroni  $e$  e i buchi  $h$  risentono per effetto del passaggio di corrente di una forza di Lorentz trasversale che produce effetti tra loro contrastanti. Consideriamo il caso più generale in cui il numero di portatori di carica possa essere diverso per le ragioni più diverse (proprietà del cristallo e effetti di drogaggio).

Indicati con  $E_{ye}$  ed  $E_{yh}$  i campi elettrici Hall e con  $v_{xe}$  e  $v_{xh}$  le velocità di traslazione dovute al passaggio di una corrente  $I$  e con  $\mu_e$  e  $\mu_h$  le mobilità dei portatori di carica determinare: 1) i valori del campo elettrico dovuto all'effetto Hall 2) il rapporto delle concentrazioni dei portatori di carica che consente l'annullamento dell'effetto Hall nel caso in cui il rapporto delle mobilità valga  $\eta$

⊗

Nella figura qui a lato sono stati riportati i principali elementi (portatori di carica e campi Hall) con la corrente  $I$  che va da destra a sinistra.

Se indichiamo con  $E_y$  il campo Hall risultante il processo di andata all'equilibrio è caratterizzato da una densità corrente trasversale (che si annulla ad equilibrio raggiunto).

I buchi e gli elettroni sono soggetti, per effetto della forza di Lorentz alla azione di due campi:

$$E_y + v_{xh}B \quad E_y - v_{xe}B$$

Tali campi determinano dei movimenti di carica con velocità legate alla mobilità dei portatori:

$$v_{yh} = \mu_h (E_y + v_{xh}B) = \mu_h (E_y + \mu_h E_x B)$$

$$v_{ye} = \mu_e (E_y - v_{xe}B) = \mu_e (E_y - \mu_e E_x B)$$

ne deriva una densità di corrente complessiva

$$J_y = N_h e v_{yh} + N_e e v_{ye} = N_h e \mu_h (E_y + \mu_h E_x B) + N_e e \mu_e (E_y - \mu_e E_x B)$$

Quando si raggiunge l'equilibrio la corrente  $J_y$  si annulla e ciò ci consente di determinare il valore di  $E_y$  (campo trasversale dovuto all'effetto Hall).

$$E_y (N_h e \mu_h + N_e e \mu_e) + (N_h e \mu_h^2 E_x B - N_e e \mu_e^2 E_x B) = 0$$

$$E_y = \frac{(-N_h \mu_h^2 + N_e \mu_e^2) e E_x B}{(N_h \mu_h + N_e \mu_e) e} = \frac{(-N_h \mu_h^2 + N_e \mu_e^2) E_x B}{N_h \mu_h + N_e \mu_e}$$

Per rispondere alla II domanda dobbiamo determinare la densità di corrente  $J_x$  in modo di applicare la relazione dell'effetto Hall.

$$\text{In base alla (V.7.17 bis)} \quad E_y = R_H J_x B$$

$$\text{Ma } J_x = N_h e v_{xh} + N_e e v_{xe} = N_h e \mu_h E_x + N_e e \mu_e E_x = (N_h \mu_h + N_e \mu_e) e E_x$$

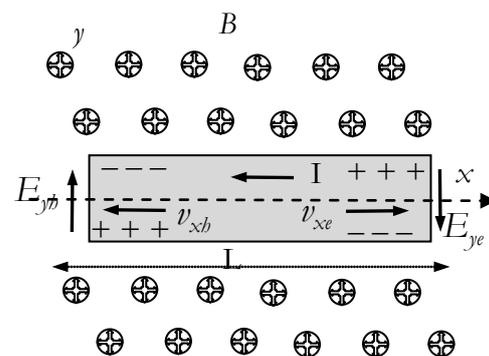
E dunque il coefficiente Hall  $R_H$  vale:

$$R_H = \frac{E_y}{J_x B} = \frac{(-N_h \mu_h^2 + N_e \mu_e^2) E_x B}{(N_h \mu_h + N_e \mu_e) e E_x B} \frac{1}{(N_h \mu_h + N_e \mu_e) e E_x B}$$

$$R_H = \frac{(-N_h \mu_h^2 + N_e \mu_e^2)}{(N_h \mu_h + N_e \mu_e)^2 e}$$

Il coefficiente Hall si annulla quando:

$$-N_h \mu_h^2 + N_e \mu_e^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{N_e}{N_h} = \frac{\mu_h^2}{\mu_e^2} = \eta^2$$



Se avessimo considerato il caso in cui  $\frac{N_e}{N_h} = 1$  (semiconduttori intrinseci) il conteggio sarebbe stato più rapido perché si sarebbe potuto ragionare in termini di proporzionalità.



## 7.8 Esercizi di riepilogo sul moto delle particelle nel campo elettromagnetico

### 7.8.1 PROBLEMATICHE GENERALI DI DINAMICA RELATIVISTICA

#### 7.8.1.1 La accelerazione nel caso di forza costante e diretta come la velocità

Determinare la accelerazione di una particella di massa di riposo  $m_0$  e carica  $q$  soggetta ad un campo elettrico  $\vec{E}$  costante e dotata di velocità  $\vec{v}$  orientata nel verso del campo.

☹

Dalla relazione vettoriale  $\vec{F} = \frac{\delta(m \vec{v})}{\delta t}$  se la forza è diretta come la velocità possiamo studiare il moto (che è rettilineo) lungo tale asse in forma scalare.

$$qE = \frac{\delta(mv)}{\delta t} \text{ con } m = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Deriviamo usando il teorema sulla derivata del prodotto e quello della funzione di funzione:

$$F = \frac{\delta(mv)}{\delta t} = v \frac{\delta m}{\delta t} + m a = v m_0 (-1/2) (1 - \beta^2)^{-3/2} (-2\beta \beta') + m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} a$$

ma  $\beta' = \frac{\delta(v/c)}{\delta t} = \frac{1}{c} a$  e si ha così:

$$F = a m_0 \left( \frac{\beta^2}{(1 - \beta^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \right) = a m_0 \frac{\beta^2 + 1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = a m_0 \frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}}$$

Dunque la accelerazione vale:

$$a = \frac{qE}{m_0} (1 - \beta^2)^{3/2}$$

$$m_1 = \frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \tag{V.7.20}$$

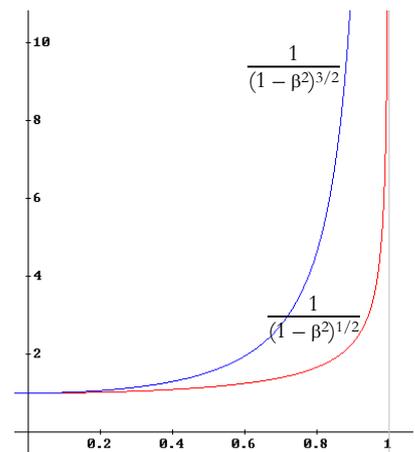
La quantità  $\frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}$  viene chiamata *massa longitudinale* e, tramite essa si può scrivere una sorta di versione relativistica della II legge della dinamica:

$$F = m_1 a$$

Qui a lato si è rappresentato il diagramma della funzione  $\frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}}$  (in blu) a fianco di  $\frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}}$  (in rosso) che rappresenta il tipico termine relativistico.

Come si nota la massa longitudinale (quella che si lega alla visione classica della II legge della dinamica) cresce più rapidamente della massa relativistica; ovvero la accelerazione nel caso di forza costante tende a zero ancora più rapidamente di quanto ci potessimo aspettare.

☺



### 7.8.1.2 Il legame tra accelerazione ed energia cinetica

Un elettrone raggiunge la energia cinetica di 340 keV sotto l'azione di un campo elettrico uniforme  $E = 6.00$  kV/m. Determinare la accelerazione dell'elettrone nel momento in cui viene raggiunta la energia cinetica indicata.



Poiché l'elettrone ha una energia di riposo di 0.511 MeV ci troviamo in ambito relativistico e dobbiamo pertanto trovare il legame tra accelerazione ed energia cinetica.

Allo scopo utilizzeremo la relazione già determinata nell'esercizio precedente:

$$a = \frac{qE}{m_0} (1 - \beta^2)^{3/2}$$

Si tratta di esprimere la quantità  $(1 - \beta^2)^{3/2}$  in funzione della energia cinetica;

$$(1 - \beta^2)^{3/2} = \left(\frac{m_0}{m}\right)^3 = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}}\right)^3 = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_k}\right)^3 = \left(\frac{1}{1 + \frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_0}}\right)^3$$

Pertanto:

$$a = \frac{qE}{m_0 \left(1 + \frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_0}\right)^3} = \frac{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 6.00 \cdot 10^3}{9.11 \cdot 10^{-31} \left(1 + \frac{340}{511}\right)^3} = 2.28 \cdot 10^{13} \text{ m/s}^2$$



### 7.8.1.3 Valutazione di un intervallo di tempo in base a valutazioni energetiche

Si consideri un elettrone che accelera partendo dalla quiete sotto l'azione di un campo elettrico uniforme di intensità  $E$ . Determinare dopo quanto tempo l'elettrone raggiunge una energia cinetica prefissata.

Si determini l'intervallo di tempo nel caso particolare di un campo pari a  $5.80 \cdot 10^3$  V/m nella ipotesi che la energia cinetica debba essere pari al doppio della energia di riposo.

Cosa cambia se invece di un elettrone si considera un protone?



La forza che agisce sull'elettrone è costante e vale  $eE$ .

In base alla II legge della dinamica  $\frac{\delta p}{\delta t} = eE$  e dunque visto che la quantità di moto iniziale è nulla  $p = eEt$ .

D'altra parte la quantità di moto e l'energia cinetica sono correlate tramite la relazione:

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_0^2 + (pc)^2 \text{ con } \mathcal{E}_k = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0$$

$$p = \frac{\sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2}}{c} = \frac{\sqrt{(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_0)^2 - \mathcal{E}_0^2}}{c}$$

E dunque:

$$t = \frac{\sqrt{(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_0)^2 - \mathcal{E}_0^2}}{eE}$$

Con i valori che abbiamo fornito deve essere:

$$t = \frac{\sqrt{(2\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_0)^2 - \mathcal{E}_0^2}}{e E c} = \frac{\sqrt{8}\mathcal{E}_0}{e E c} = \frac{\sqrt{8} \cdot 0.511 \cdot 10^6}{5.80 \cdot 10^3 \cdot 2.998 \cdot 10^8} = 8.31 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{17}$$

Nel caso si operi con un protone il tempo cresce proporzionalmente alla energia di riposo e dunque è 1832 volte più grande.

☺

## 7.8.2 DINAMICA NON RELATIVISTICA

### 7.8.2.1 Traiettorie in campi elettrici e magnetici uniformi

Un protone viene accelerato da una d.d.p.  $\Delta V = 1.50 \cdot 10^3 \text{ V}$  ed entra con velocità  $\vec{v}_0$  verticale nell'estremo inferiore sinistro di una regione spaziale rettangolare di altezza

$l = 0.75 \text{ m}$  caratterizzata da un campo elettrico uniforme ed orizzontale  $\vec{E}$  che varia nel tempo con legge  $E = b t$  con  $b = 6.2 \cdot 10^9 \text{ V/(m s)}$ . Determinare il valore dell'angolo  $\alpha$  di deflessione del vettore velocità  $v$  quando il protone esce dalla regione in corrispondenza dell'estremo superiore destro.

In quel punto il protone si trova immerso in un campo magnetico uscente dal piano del foglio che, per effetto della forza di Lorentz, lo riporta all'estremo inferiore destro. Determinare il valore di  $B$  ed il tempo complessivamente impiegato al protone nell'intero percorso.

☹

La velocità  $v_0$  è determinabile attraverso la conservazione dell'energia e si ottiene:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2e \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 1.50 \cdot 10^3}{1.67 \cdot 10^{-27}}} = 5.36 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Nel tratto caratterizzato dalla presenza del campo elettrico avremo una traiettoria curvilinea data dalla composizione di un moto rettilineo uniforme lungo la verticale con un moto accelerato con accelerazione crescente nel tempo con legge lineare lungo l'orizzontale.

Se indichiamo con  $t_v$  il tempo di volo sarà:

$$t_v = \frac{l}{v_0} = l \sqrt{\frac{m}{2e \Delta V}} = 1.40 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

La velocità lungo l'asse  $x$  si trova integrando la legge che fornisce l'accelerazione:

$$a_x = \frac{e E}{m} = \frac{e b t}{m} \Rightarrow v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x \delta t = 0 + \frac{e b t^2}{2m}$$

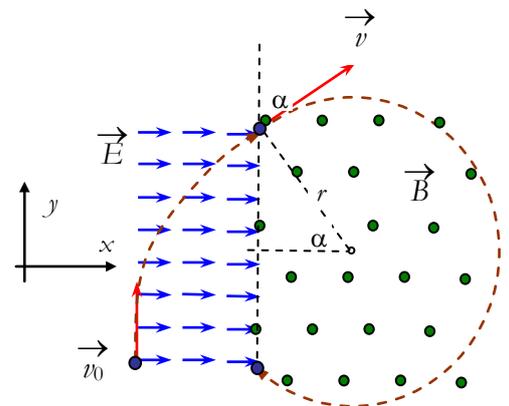
e pertanto nell'estremo superiore destro ( $t = t_v$ )

$$v_x = \frac{e b t_v^2}{2m} = \frac{e b}{2m} l^2 \frac{m}{2e \Delta V} = \frac{b l^2}{4 \Delta V} = 5.81 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Poiché  $v_y = v_0$  l'angolo  $\alpha = \arctan \frac{v_x}{v_y} = 47.3^\circ$

e dunque:

$$v = \frac{v_x}{\sin \alpha} = 7.90 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$



<sup>17</sup> L'energia in J divisa per la carica dell'elettrone fornisce direttamente il valore in eV.

Per rispondere alla II parte del quesito basta osservare che per ragioni geometriche:

$$\frac{l}{2} = r \sin \alpha$$

e d'altra parte per la relazione più volte citata che fornisce il legame tra il raggio di curvatura e il campo magnetico:

$$r = \frac{m v}{e B}$$

da qui si ricava il valore di  $B$ ;

$$B = \frac{m v}{e r} = \frac{2m v \sin \alpha}{e l} = 0.0161 \text{ T}$$

Il periodo della traiettoria circolare vale:

$$T = 2\pi \frac{m}{e B} = 4.07 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Il tempo di volo nella traiettoria circolare richiede di valutare l'angolo al centro che risulta pari a:  $\beta = 360^\circ - 2\alpha^\circ = 2(\pi - \alpha) = 4.63$

Dunque il tempo di volo  $t'_v$  risulta:

$$t'_v = \frac{\beta}{2\pi} T = 3.00 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

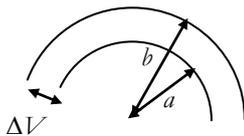
Il tempo di volo complessivo (somma dei due) è pari a  $4.40 \cdot 10^{-6} \text{ s}$



### 7.8.2.2 Una guida circolare a campo elettrico

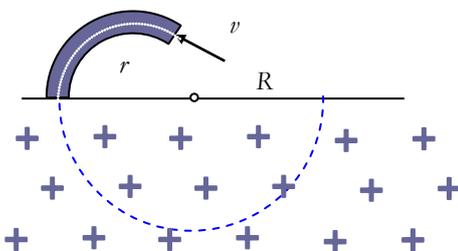


Un fascio di particelle di carica  $q$  e massa  $m$  viene iniettato tra le armature di un condensatore cilindrico di raggi  $a$  e  $b$  tra cui è applicata una d.d.p.  $\Delta V$ . Determinare il campo elettrico tra le armature al variare del raggio di curvatura  $r$  con  $a < r < b$ . Utilizzare il risultato trovato per determinare la velocità che devono possedere le particelle per potersi muovere lungo gli archi del condensatore cilindrico.



Si consideri ora una porzione di condensatore e la si utilizzi per iniettare le particelle in una regione di spazio in cui agisce un campo magnetico  $B$  ortogonale alla velocità delle particelle ed uniforme. Per effetto del campo le particelle si muovono lungo delle semicirconferenze e cadono su una lastra fotografica in grado di evidenziare il raggio di curvatura  $R$  delle traiettorie.

Determinare la velocità delle particelle e il loro rapporto carica / massa.



Quando le particelle passano tra le armature del condensatore cilindrico esse si muovono sotto l'azione di un campo radiale che può essere determinato attraverso l'uso del teorema di Gauss applicato ad una generica superficie cilindrica di raggio  $r$ . Si ha (indicando con  $Q$  la carica sulle armature):

$$E 2\pi r l = \frac{Q}{\epsilon} \text{ da cui } E = \frac{Q}{2\pi r l \epsilon}$$

A tale campo corrisponde una d.d.p. tra le armature  $\Delta V$  calcolabile attraverso un integrale definito:

$$\Delta V = \int_a^b E \delta r = \frac{Q}{2\pi l \epsilon} \int_a^b \frac{1}{r} \delta r = \frac{Q}{2\pi l \epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

Ciò ci consente di eliminare il valore della carica  $Q$  e di determinare il campo in funzione della d.d.p. e delle caratteristiche geometriche del sistema:

$$Q = \Delta V \frac{2\pi l \epsilon}{\ln \frac{b}{a}} \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2\pi r l \epsilon} \Delta V \frac{2\pi l \epsilon}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{\Delta V}{r \ln \frac{b}{a}}$$

Se ora applichiamo la II legge della dinamica avremo che:

$$m \frac{v^2}{r} = q \frac{\Delta V}{r \ln \frac{b}{a}} \text{ e ciò consente di determinare il valore della velocità ne-}$$

cessaria per garantire un moto circolare uniforme sotto l'azione del campo elettrico del condensatore cilindrico.

$$v = \sqrt{\frac{q \Delta V}{m \ln \frac{b}{a}}}$$

Fissata la differenza di potenziale solo le particelle dotate di questo valore di velocità riescono a muoversi correttamente lungo traiettorie di raggio compreso tra  $a$  e  $b$ .

Queste particelle uscendo dal condensatore entrano nella zona in cui è presente il campo magnetico e subiranno l'effetto della forza di Lorentz che le fa muovere su traiettorie circolari di raggio

$$r = \frac{m v}{q B}$$

Le due relazioni ci consentono di trovare sia il rapporto carica/massa sia la velocità delle particelle in funzione solo dei dati forniti infatti:

$$v^2 = \frac{q \Delta V}{m \ln \frac{b}{a}} = \frac{v \Delta V}{r B \ln \frac{b}{a}} \text{ e semplificando si trova } v$$

$$v = \frac{\Delta V}{r B \ln \frac{b}{a}}$$

Ciò permette di determinare il rapporto  $q/m$ :

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{r B} = \frac{\Delta V}{r^2 B^2 \ln \frac{b}{a}}$$

☹

### 7.8.2.3 Campi magnetici longitudinali come strumenti per la focalizzazione

In un tubo catodico viene prodotto un fascio collimato di elettroni applicando una d.d.p.  $\Delta V$  tra un catodo riscaldato che emette termoelettroni e un anodo forato; una serie di diaframmi consentono di collimare con elevata precisione il fascio.

Giunto in corrispondenza di un punto P il fascio viene fatto disperdere facendolo passare tra le armature di un condensatore collegato ad un oscillatore ad alta frequenza e che applica in maniera casuale un campo elettrico trasversale al fascio. Dal punto P in poi il fascio si muove lungo un campo magnetico uniforme e longitudinale che può essere variato agendo sulla intensità di corrente che circola nelle spire di un solenoide. Il tubo termina con una superficie fluorescente vetrosa su cui si osservano un punto luminoso finché non agisce il campo elettrico e una macchia quando il campo elettrico inizia ad agire.

A questo punto si applica il campo magnetico e si osserva che la macchia riduce le sue dimensioni sino a ridursi ad un punto in corrispondenza del valore  $B_1$ . Se il campo viene fatto aumentare ricompare la macchia che poi inizia nuovamente a ridursi e sparisce in corrispondenza di  $B_2$ .

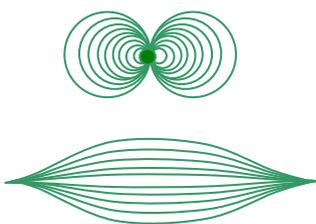
Spiegare come mai accade quanto descritto e darne una descrizione quantitativa che consenta di calcolare il rapporto  $\frac{q}{m}$  per gli elettroni.



Il fascio, quando passa attraverso il condensatore è dotato di una velocità longitudinale calcolabile attraverso il teorema di conservazione dell'energia:

$$v_l = \sqrt{\frac{2q \Delta V}{m}}$$

Il campo elettrico aggiunge una piccola velocità trasversale  $v_0 = \sqrt{\frac{2e \Delta V}{m}}$  e ciò determina la sfocatura del punto luminoso sullo schermo.



Quando si applica il campo magnetico longitudinale i diversi elettroni del fascio iniziano a muoversi su traiettorie elicoidali di raggio di curvatura diverso a causa della diversità dei valori di  $v_l$  posseduti (nella figura a lato vengono evidenziate le diverse traiettorie in un piano diretto come il piano e nel piano ortogonale).

Anche se i raggi di curvatura sono diversi i periodi di rotazione, come si è osservato più volte, sono identici e valgono:

$$T = 2\pi \frac{m}{q B}$$

Poiché le velocità longitudinali non cambiano per effetto del campo magnetico i diversi elettroni si ricongiungono in uno stesso punto posto sull'asse dopo aver percorso uno spazio:

$$l = v_l T = 2\pi \frac{v_l m}{q B}$$

Quando si applica il campo  $B_1$  e si osserva che sullo schermo si forma un punto ciò significa che gli elettroni hanno compiuto un numero  $n$  ignoto di giri completi.

Se ora si aumenta il campo con continuità si osserva la macchia sparpagliarsi ( $T$  diminuisce e dunque sullo schermo gli elettroni arrivano senza aver compiuto un giro completo) e poi ricompattarsi in un punto quando, in corrispondenza di  $B_2$  sono stati compiuti  $n+1$  giri completi.

Avremo dunque:

$$l = v_l n T_1 = 2\pi \frac{n v_l m}{q B_1}$$

$$l = v_l (n+1) T_2 = 2\pi \frac{(n+1) v_l m}{q B_2}$$

$$2\pi \frac{(n+1) v_l m}{q l} = \frac{1}{B_1} \quad 2\pi \frac{n v_l m}{q l} = \frac{1}{B_2}$$

Da qui operando per differenza si ha la possibilità di eliminare il valore di  $n$  che è ignoto:

$$2\pi \frac{v_l m}{q l} = \left( \frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2} \right)$$

Pertanto il rapporto carica/massa dell'elettrone vale:

$$\frac{q}{m} = 2\pi \frac{v_l}{l} / \left( \frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2} \right) = 2\pi \sqrt{\frac{q}{m}} \sqrt{\frac{2\Delta V}{l}} / \left( \frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2} \right)$$

da qui semplificando ed elevando al quadrato si ottiene il valore richiesto:

$$\frac{q}{m} = 8\pi^2 \frac{\Delta V}{l} / \left( \frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2} \right)^2$$

☺