

## V.9 L'induzione elettromagnetica

- ⌘ Da Faraday a Maxwell: genesi della scoperta
- ⌘ La legge di Faraday Neumann per l'induzione elettromagnetica
- ⌘ La legge di Lenz
- ⌘ IL fenomeno della autoinduzione
- ⌘ Applicazioni pratiche dell'induzione elettromagnetica
- ⌘ Perché il movimento del magnete genera una f.e.m.?
- ⌘ Problemi sull'induzione elettromagnetica



**Michael Faraday** è meno legato a schemi filosofici di quanto non sia per gli scienziati di scuola francese e tedesca. In questo caso un po' di **sano empirismo anglosassone** agevola la scoperta di nuovi fenomeni e di nuove leggi



### 9.1 Da Faraday a Maxwell: genesi della scoperta

#### 9.1.1 DI COSA SI TRATTA?

Nel capitolo V.6 si è già accennato alla scoperta dell'induzione elettromagnetica da parte di Faraday. Il fenomeno consiste nella capacità che hanno i campi magnetici, in determinate condizioni, di produrre campi elettrici di tipo particolare in grado di generare f.e.m.

Le scoperte di Oersted (influenza di correnti galvaniche su aghi magnetici) e quelle di Ampere (interazione tra correnti elettriche e spiegazione del magnetismo come effetto macroscopico di correnti elettriche elementari nella materia) non portarono direttamente allo studio di ciò che abbiamo chiamato campo magnetico, anzi nelle intenzioni Ampere il campo magnetico era un *accidente* mentre protagoniste erano le correnti elettriche.

L'approccio di Faraday è metodologicamente diverso sin dall'inizio. Faraday è convinto che dietro i fenomeni magnetici ed elettrici ci siano dei cambiamenti nello spazio; nemmeno a lui è chiaro inizialmente il concetto di campo e nella prima memoria del 1831 in cui descrive la scoperta della induzione egli parla di *stato elettrotonico della materia*. Ma dalla convinzione della necessità di indagare con *spirito libero* (cioè senza la pretesa di ridurre l'una cosa all'altra) egli trae la necessità di studiare la possibilità che, così come le correnti elettriche sono in grado di generare campi magnetici, i campi magnetici possano generare correnti elettriche.

Partendo dal fatto che un conduttore percorso da corrente determina un campo magnetico nelle vicinanze del conduttore stesso, Michael Faraday, fin dal 1821, giunse alla conclusione che si potesse produrre una corrente per mezzo di un campo magnetico. Ne fa fede una annotazione sul diario in cui lui si dà il compito di realizzare entro l'anno la conversione di magnetismo in elettricità. Ma, per risolvere il problema, gli furono necessari dieci anni di ricerche (invero non interamente dedicate all'elettromagnetismo).

Lasciamo la parola allo stesso Faraday: <sup>(1)</sup>

La capacità della elettricità di tensione di causare uno stato elettrico opposto è stata indicata con il termine generale di *Induzione*; ma ciò che è entrato a far parte del linguaggio scientifico, può anche essere usato in un senso generale per indicare la capacità delle correnti elettriche di indurre nella materia nelle immediate vicinanze un qualche particolare stato che altrimenti non si avrebbe...

Sia che si adotti la bella teoria di Ampere, o un'altra o che ci si ponga in atteggiamento di riserva mentale, in ogni caso apparirebbe ben strano che così come le correnti elettriche sono accompagnate da una corrispondente intensità di azione magnetica ad angoli retti rispetto alle correnti, altrettanto dei buoni conduttori di elet-

<sup>1</sup> Michael Faraday, *Experimental researches in electricity, First Series, Great Books of the Western World*, pag. 265 e seguenti. Traduzione di Claudio Cereda

tricità, posti entro una tale sfera d'azione non subiscano l'induzione di una corrente attraverso di essi o qualche altro effetto sensibile equivalente in forza ad una tale corrente.

Queste considerazioni, con la loro conseguenza, e cioè la speranza di ottenere della elettricità dal magnetismo ordinario, mi hanno ripetutamente stimolato ad indagare gli effetti induttivi delle correnti elettriche. Alla fine sono arrivato ad un risultato positivo; e non solo sono state esaudite le mie speranze, ma mi pare di avere ottenuto anche la chiave per una corretta interpretazione dell'esperimento di Arago, e inoltre di avere scoperto un nuovo stato che, molto probabilmente, avrà una grande influenza nello studio degli effetti prodotti dalle correnti elettriche <sup>(2)</sup>.

L'esperimento di Arago, effettuato contestualmente alle ricerche di Ampere, dei primi anni 20, viene così descritto dallo stesso Faraday

*Un disco di rame libero di ruotare nelle vicinanze di un ago magnetico o di un magnete sospeso in modo di poter ruotare in un piano parallelo a quello del disco determina con la sua rotazione anche la rotazione del magnete e d'altra parte se si fa ruotare il magnete il disco tende a seguirlo; l'effetto è così sensibile che in questo modo si possono mettere in rotazione magneti o dischi di molte libbre di peso.*

La ragione di ciò, e Faraday se ne rende conto, è dovuta al fatto che il campo magnetico del magnete che taglia il disco induce in esso delle f.e.m. Tali f.e.m. fanno circolare delle correnti elettriche le quali a loro volta, per opporsi alla causa che le ha generate, producono un campo magnetico che determina una azione elettrodinamica tesa ad eliminare il moto relativo.

### 9.1.2 LA SCOPERTA DELLA INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

A questo punto Faraday inizia il resoconto dei suoi esperimenti e chiarisce che farà una esposizione non di tipo fedele per rendere la esposizione più efficace sul piano della visione di insieme.

Riportiamo estesamente la prima parte dell'articolo per dare una idea precisa dei protocolli descrittivi della fisica sperimentale di allora e perché Faraday è un grande divulgatore.

Si osservino in particolare le metodiche utilizzate per indagare la natura quando non è nemmeno chiara la domanda da porre. La numerazione che separa i diversi paragrafi è quella di Faraday che, nelle sue memorie va da 1 a 3361.

6) Ho arrotolato circa 26 piedi di filo di rame di circa un dodicesimo di pollice di diametro intorno ad un cilindro di legno in modo di formare un'elica; le spire non si toccavano grazie alla interposizione tra di esse di un corda. <sup>(3)</sup> Ogni strato era separato dal successivo da uno strato di tela di cotone. In questo modo furono sovrapposti 12 strati di eliche contenenti ciascuna circa 27 piedi di filo avvolto sempre nella stessa direzione. La prima, terza, quinta, settima, nona e undicesima elica era stata connessa alle rispettive estremità in modo di formare un'unica elica; lo stesso venne fatto per le altre e così si vennero a realizzare due eliche avvolte nello stesso verso, strettamente interposte e senza punti di contatto, ciascuna con circa 155 piedi di filo.

<sup>2</sup> Faraday ha già la coscienza di avere inventato un nuovo e potente generatore di elettricità.

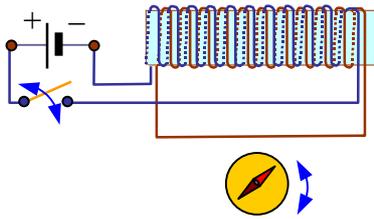
<sup>3</sup> Ovviamente non esistevano i fili di rame isolato che sono un componente di base di tutte le macchine elettriche.



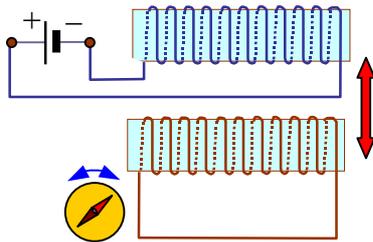
Il disco di Arago: un disco di rame, posto in rapida rotazione appare in grado di trascinare parzialmente un ago magnetico



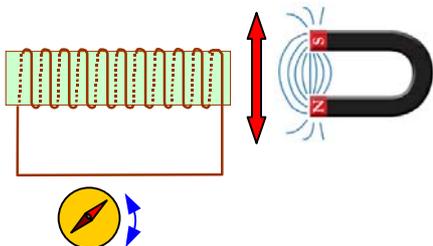
Per verificare l'ipotesi di simmetria tra capacità delle correnti di generare campi magnetici e viceversa si inventa un esperimento; ma i primi risultati sembrano deludenti



La scoperta: il fenomeno si verifica **solo quando si stabilisce e si interrompe** il contatto elettrico



Il galvanometro segna anche se esiste un **moto relativo** tra i due circuiti; il fenomeno si intensifica se si utilizzano **nuclei di ferro**



Il galvanometro segna anche se il circuito primario è sostituito da un **magnete permanente**

7) Una di queste eliche venne connessa ad un galvanometro e l'altra ad una batteria voltaica di dieci coppie di piastre ciascuna di 4 pollici quadrati... e tuttavia non si osservò alcuna deviazione nel galvanometro.

8) A questo punto ho realizzato una doppia elica costituita da 6 unità di filo di rame e da 6 unità di filo di ferro dolce. L'elica di ferro conteneva 240 piedi di filo mentre quella di rame ne conteneva 208; ma sia che facessi passare la corrente nell'elica di ferro, sia che la facessi passare in quella di rame non osservai alcuna deviazione del galvanometro.

9) In questo e in molti altri esperimenti non apparve alcuna differenza di comportamento tra il ferro ed altri metalli.

10) A questo punto ho arrotolato 203 piedi di filo di rame senza interruzione su un grosso blocco di legno. Tra le spire del primo avvolgimento ho collocato altri 203 piedi di un secondo avvolgimento separando le spire con della corda in modo di evitare contatti metallici. Una di queste eliche era connessa ad un galvanometro e un'altra ad una batteria di un centinaio di coppie di piastre da 4 pollici quadri ben carica. Quando si stabiliva il contatto si aveva una repentina e debole deflessione del galvanometro, e si aveva un effetto simile nel momento in cui si interrompeva il contatto con la batteria. Ma mentre la corrente elettrica continuava a passare attraverso uno dei due avvolgimenti non si aveva più alcun effetto visibile attraverso il galvanometro o attraverso altre forme di induzione nonostante l'azione della batteria fosse ben presente e visibile sia come riscaldamento dell'avvolgimento percorso dalla corrente sia come arco voltaico ai capi di una coppia di carboncini.

11) La ripetizione dell'esperimento con una batteria da 120 coppie non produsse altri effetti salvo che la debole deflessione dell'ago al momento in cui si effettuava la connessione risultava sempre nello stesso verso e in verso opposto nel momento in cui la si interrompeva. Lo stesso risultato venne ottenuto utilizzando la configurazione precedente.

12) Il risultato ottenuto con l'ago magnetico mi indusse a pensare che la corrente della batteria in un conduttore inducesse una corrente simile nell'altro filo, ma che essa durasse solo un istante e appartenesse dunque allo stesso genere di corrente che si genera durante la scarica di una bottiglia di Leyda piuttosto che a quella generata da una pila voltaica e che pertanto essa fosse in grado di magnetizzare un ago magnetico, pur influenzando debolmente il galvanometro.

13) Questa ipotesi fu confermata; sostituendo il galvanometro con una piccola elica cilindrica avvolta intorno ad un tubo di vetro e introducendo nel tubo un aghetto d'acciaio se si stabiliva il contatto come prima tra la batteria e il conduttore induttore e si aveva l'accortezza di togliere l'ago prima di interrompere il contatto esso risultava magnetizzato.

Faraday scoprì che se si avvolgono due circuiti intorno uno stesso nucleo e si cambia la corrente in uno di essi (per esempio aprendo o chiudendo il circuito), si genera una corrente nel secondo.

Successivamente scoprì che la corrente nel circuito secondario risulta molto intensificata se si utilizza un nucleo di ferro. Quindi scoprì che il primo circuito percorso da corrente poteva essere sostituito da un magnete e che la corrente nel secondo si produceva sia quando veniva mosso l'avvolgimento rispetto al nucleo sia quando si muoveva il nucleo rispetto all'avvolgimento.

La scoperta di Faraday determinò l'inizio di una nuova era sia per gli studi di elettromagnetismo, sia per le loro applicazioni pratiche. Si gettarono le basi per la unità dei fenomeni elettrici e magnetici che servirono da stimolo per lo sviluppo della teoria del campo elettromagnetico.

### 9.1.3 IL CONTRIBUTO DI MAXWELL

Questa teoria fu sviluppata da Maxwell negli anni sessanta del secolo diciannovesimo. La scoperta di Faraday fece anche da base per lo sviluppo della moderna elettrotecnica poiché tutte le macchine elettriche ancora oggi utilizzate si basano sulla induzione elettromagnetica.

Maxwell nel suo *Trattato di elettricità e magnetismo* ci fornisce un resoconto dettagliato della scoperta della induzione elettromagnetica e discute inizialmente quattro tipi di fenomeni caratterizzanti la induzione riferiti ad uno o due circuiti posti l'uno accanto all'altro:

- induzione per variazione della corrente primaria
- induzione prodotta dal movimento del circuito primario
- induzione prodotta dal movimento del circuito secondario
- induzione prodotta dal movimento relativo di un magnete e del circuito secondario

La determinazione delle leggi quantitative della induzione passa attraverso i lavori di R. Felici (1819-1902) che negli anni dal 49 al 59 riesce a stabilire che il fenomeno debba dipendere dalla variazione di una grandezza dipendente dal moto del circuito primario o dalle variazioni della corrente che circola in esso.

Questi lavori, ci informa Maxwell riprendevano una idea originaria di Faraday, quella delle linee di forza:

Nella prima serie delle sue ricerche egli mostra chiaramente come la direzione della corrente in un circuito conduttore, parte del quale sia mobile, dipenda dal modo in cui la parte mobile taglia le linee di forza magnetica.

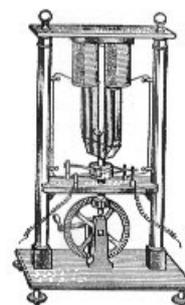
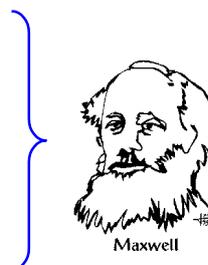
Nella seconda serie egli mostra come i fenomeni prodotti dalle variazioni della intensità di una corrente o di un magnete si possano spiegare supponendo che il sistema di linee di forza si espanda o si contraiga rispetto al filo o al magnete, all'aumentare o al diminuire della sua potenza...

È solamente da quando si sono rese più esatte sia le definizioni sia le misurazioni della forza elettromotrice che noi possiamo enunciare in modo completo la vera legge dell'induzione elettromagnetica nel modo seguente: la forza elettromotrice totale che agisce entro un circuito in ogni istante è misurata dalla velocità con cui diminuisce il numero delle linee di forza magnetica che lo attraversano...

Nel 1834 Lenz enunciò la seguente importante relazione tra i fenomeni della azione meccanica delle correnti elettriche, definiti dalla formula di Ampere e l'induzione delle correnti elettriche prodotta dal movimento relativo dei conduttori... Se nel circuito primario A fluisce una corrente costante, e se, muovendo A oppure il circuito secondario B, si induce in B una corrente, la direzione di questa corrente indotta sarà tale che, per mezzo della sua azione elettromagnetica su A, essa tende ad opporsi al movimento relativo dei due circuiti. <sup>(4)</sup>

Successivamente la trattazione fu perfezionata da Neumann che ne diede la formulazione matematica, da Helmholtz e W. Thomson (Lord Kelvin) che ne evidenziarono la connessione con il teorema di conservazione della energia.

Infine, Maxwell, nel trattato citato, ne diede la formulazione generale ancora presente nei manuali di tutto il mondo formulazione che consen-



un generatore sperimentale del 1833 in cui il magnete a U viene fatto ruotare in prossimità di due bobine di filo conduttore



<sup>4</sup> James Clerk Maxwell, *Trattato di elettricità e magnetismo*, vol. 2 pag. 269, ed Utet.

te, insieme alla formulazione di altre leggi dell'elettromagnetismo di fondare la teoria delle onde elettromagnetiche.

#### 9.1.4 L'IMPORTANZA DELLA SCOPERTA

Il fenomeno della induzione elettromagnetica può essere considerato uno dei *fatti rilevanti* che hanno determinato alcune caratteristiche della civiltà odierna; infatti si basano su di esso sia momenti importanti della II rivoluzione industriale, sia aspetti della IV (quella della informazione).

Senza la induzione elettromagnetica non si sarebbe sviluppata la civiltà della elettricità: oggi come ieri tutti i generatori di energia elettrica (alternatori) e tutte le macchine deputate alla ottimizzazione del suo trasporto (trasformatori) si basano sulla induzione elettromagnetica. Sulla induzione elettromagnetica si basa il funzionamento delle memorie di massa per i computer (testine di lettura e scrittura) così come il meccanismo di registrazione e riproduzione di suono e immagini sulle videocassette.

Anche se la teoria dell'elettromagnetismo classico consente di unificare i diversi aspetti della induzione elettromagnetica entro un'unica legge essa non ne permette la spiegazione non ci dice cioè la ragione per cui, sotto certe condizioni, alla variazione di alcune caratteristiche del campo magnetico debba corrispondere la nascita di un campo elettrico nelle vicinanze. Tale comprensione profonda avverrà solo con la teoria della relatività

## 9.2 La legge di Faraday Neumann per l'induzione elettromagnetica

### 9.2.1 MOLTI FENOMENI IN UN'UNICA LEGGE

I fatti sperimentali che caratterizzano la induzione elettromagnetica sono molto numerosi, ma è possibile ricondurli ad una unica legge, un po' astratta nella sua formulazione, ma molto generale. Ci dedicheremo ora alla illustrazione di tale legge che è da considerare una *inferenza* da un insieme di fatti e che non richiede pertanto alcuna dimostrazione. Più avanti applicheremo tale legge ad alcuni contesti specifici verificandone, in quei contesti, la deducibilità da leggi già note o da altri principi.

La legge fa riferimento a due nuove grandezze riferite al campo elettrico ed al campo magnetico: la *circuitazione del vettore campo elettrico* lungo una linea chiusa e il *flusso del vettore induzione magnetica* attraverso una superficie.

Mentre in tutti gli esperimenti di Faraday i moti relativi tra circuiti e campi magnetici o le variazioni di campo magnetico inducono delle f.e.m. entro circuiti elettrici ben individuati Maxwell raccogliendo le indicazioni metodologiche di Faraday sulla *realtà fisica dei campi* intuì ed ipotizzò che il legame tra campo magnetico che varia e campo elettrico che si induce debba esistere indipendentemente dalla presenza nello spazio di un circuito in grado di trasformare tale campo elettrico in una corrente.

La nascita di un campo elettrico indotto di natura circuitale fa da base, come vedremo più avanti, alla nascita delle onde elettromagnetiche in grado di propagarsi nel vuoto indipendentemente dalla presenza di circuiti e di un mezzo di propagazione.

### 9.2.2 LA CIRCUITAZIONE DEL VETTORE CAMPO ELETTRICO E LA FORZA ELETTRICITRICE: DEFINIZIONE

Consideriamo una regione di spazio caratterizzata dalla presenza di campo elettrico  $\mathbf{E}$  di qualsiasi natura ed indichiamo con  $\Gamma$  una generica linea spaziale chiusa.

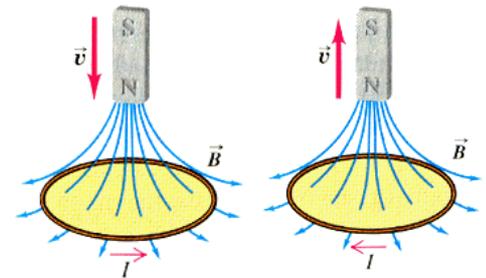
Se ipotizziamo di muovere lungo  $\Gamma$  una carica esploratrice elementare  $q$  il campo  $\mathbf{E}$  determinerà una forza a cui corrisponderà un lavoro nel corso del movimento lungo la linea.

Si chiama *circuitazione del vettore  $\mathbf{E}$*  lungo la linea  $\Gamma$  e si indica con il simbolo  $\mathcal{C}_\Gamma(\mathbf{E})$  la quantità che si ottiene dividendo il lavoro svolto dal campo che agisce sulla carica esploratrice  $q$  per la carica stessa.

$$\mathcal{C}_\Gamma(\mathbf{E}) = \frac{\mathcal{L}_\Gamma}{q} = \frac{\sum \delta \mathcal{L}}{q} = \frac{\sum F_l \delta l}{q} = \frac{\sum E_l \delta l q}{q} = \sum E_l \delta l \quad (\text{V.9.1})$$

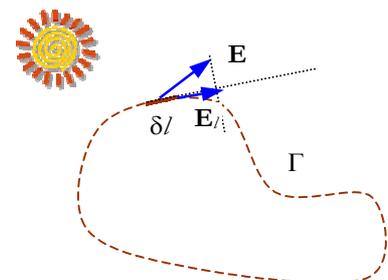
In altri termini la *circuitazione* è l'equivalente di un lavoro riferito ad una linea chiusa ma calcolato, invece che sulla forza, direttamente sul campo e, ovviamente si misura in volt essendo dimensionalmente un lavoro diviso per una carica.

Nel fenomeno della induzione elettromagnetica il campo elettrico che si genera è un *campo di tipo non conservativo* (cioè il lavoro che esso determina lungo una linea chiusa è diverso da zero). Se non fosse così, non sarebbe in grado di generare energia elettrica quando opera.



circuitazione del campo elettrico

$$\mathcal{C}_\Gamma(\mathbf{E}) = \sum E_l \delta l$$



La circuitazione del vettore  $\mathbf{E}$  lungo una linea chiusa consente di estendere il concetto di f.e.m.

Se usiamo la terminologia già introdotta nel capitolo dedicato ai circuiti diremo che si tratta di un *campo estraneo* e chiameremo pertanto *forza elettromotrice* la grandezza che abbiamo appena introdotto.

### 9.2.3 LA CIRCUITAZIONE DEL VETTORE CAMPO ELETTRICO E LA FORZA ELETTROMOTTRICE: SIGNIFICATO



Rispetto a quanto già visto quando si introdusse la f.e.m. nel capitolo dedicato alle correnti stazionarie, vale la pena di cogliere un aspetto di diversità. In quella sede pensavamo ai circuiti come costituiti da due zone: una zona dissipativa (dove si trovano gli utilizzatori) ed una zona di *attivizzazione energetica delle cariche* (dove si trova il generatore). La f.e.m. era una entità spazialmente ben collocata in corrispondenza del generatore. Quando si studia la induzione elettromagnetica (fenomeno che fa da padre alla maggioranza dei generatori) *il campo elettrico estraneo* (cioè non elettrostatico) con cui ci si trova ad operare *risulta distribuito sulla intera linea e la f.e.m. diventa una grandezza distribuita lungo l'intero percorso seguito dalle cariche in movimento.*

Esiste una connessione, ma anche una diversità concettuale tra circuitazione del campo elettrico e forza elettromotrice.

Per un verso *la definizione di forza elettromotrice è più generale di quella di circuitazione nel senso che la circuitazione è una forza elettromotrice, ma esistono forze elettromotrici non riconducibili ad un campo elettrico;* è il caso, per esempio, delle cariche che vengano messe in moto dalla forza di Lorentz come capita in uno dei possibili casi di induzione elettromagnetica.

Ma d'altra parte la circuitazione è più generale della f.e.m. perché la prima ha senso lungo una linea geometrica qualsiasi nello spazio mentre la f.e.m. viene associata ad una linea chiusa costituita da conduttori connessi tra loro.

### 9.2.4 IL FLUSSO DEL VETTORE $B$ : DEFINIZIONE

Per la trattazione quantitativa della legge della induzione elettromagnetica si rivela utile la introduzione di una seconda nuova grandezza mutuata dalla idrodinamica il *flusso del vettore  $B$* , chiamato anche semplicemente *flusso*, e indicato dal simbolo  $\Phi(\mathbf{B})$ . Si tratta della stessa grandezza già introdotta, con riferimento al campo elettrostatico per enunciare il teorema di Gauss.

Si pensa, nel dare la definizione, ad una grandezza che quantifichi le linee di forza che tagliano una superficie visto che il fenomeno della induzione dipende in maniera essenziale dalla variazione nel numero di linee di forza che tagliano una data linea.

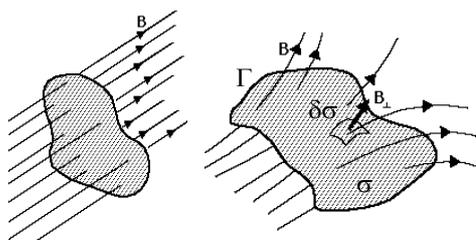
Consideriamo dunque una generica linea  $\Gamma$  il cui contorno delimiti una superficie  $\sigma$  che viene tagliata dalle linee di forza di un campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Nei diversi punti della superficie la superficie stessa e il campo presentano valori ed orientazioni spaziali diverse.

Ma se si suddivide la sezione  $\sigma$  in tante superfici elementari si potrà assumere che su ciascuna di esse il campo abbia un valore ben definito. Pertanto si chiama *flusso del vettore  $B$*  attraverso la superficie  $\sigma$  la somma dei flussi elementari  $\delta\phi$  relativi alla superficie elementare  $\delta\sigma$ , così definiti:

$$\delta\phi = B \delta\sigma \cos \alpha \tag{V.9.2}$$

flusso del vettore induzione magnetica

$$\delta\phi = B \delta\sigma \cos \alpha \quad \phi_{\sigma}(\mathbf{B}) = \sum \delta\phi$$

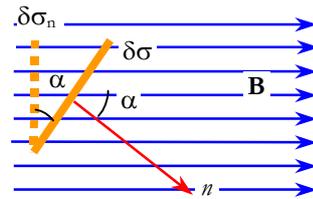


Per calcolare il flusso bisogna dividere la superficie in porzioni elementari su cui si possa applicare la definizione del flusso elementare

dove  $\alpha$  rappresenta l'angolo formato tra la linea di forza e la perpendicolare alla superficie.

$$\phi_{\sigma}(\mathbf{B}) = \sum \delta\phi \quad (V.9.3)$$

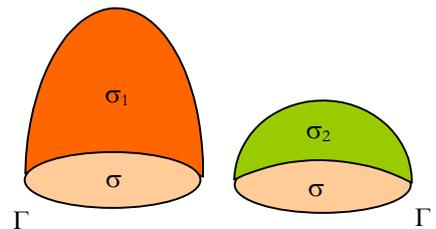
La unità di misura del flusso del vettore  $B$  (induzione per superficie) è il *Weber* pari a  $Tesla \cdot m^2$  <sup>(5)</sup>



Il flusso elementare valuta la componente della superficie in direzione ortogonale al campo

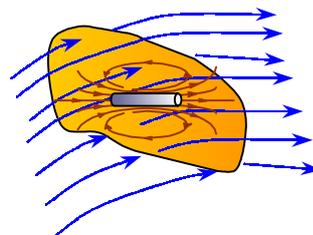
9.2.5 IL FLUSSO DEL VETTORE  $B$ : PROPRIETÀ, SIGNIFICATO E CASI PARTICOLARI <sup>6</sup>

➤ Una volta che sia fissata la linea di contorno  $\Gamma$ , il flusso dipende solo da essa e non dalla particolare superficie  $\sigma$  che la ammette come contorno. Per rendersene conto basta riflettere sul fatto che, prese due superfici diverse collocate sullo stesso contorno le linee di forza che entrano in una devono necessariamente passare anche dall'altra. Se invece una stessa linea di forza passa due volte per la stessa superficie (entra in un punto ed esce in un altro) essa non passerà per la seconda superficie, ma non darà nemmeno un contributo al flusso. Per questa ragione nei calcoli successivi *ci riferiremo, nel caso piuttosto comune di linee piane, a superfici piane e ciò non comporterà alcuna perdita di generalità perché il flusso non dipende dalla superficie ma solo dal contorno.*



Il flusso attraverso una superficie con una linea di contorno  $\Gamma$  non dipende dalla superficie  $\phi_{\sigma} = \phi_{\sigma_1} = \phi_{\sigma_2}$

➤ Come conseguenza della non esistenza dei monopoli magnetici, cioè del fatto che le linee di forza del campo magnetico sono sempre linee chiuse si dimostra che *il flusso del vettore  $B$  attraverso una superficie chiusa è sempre uguale a zero* (teorema di Gauss per il campo magnetico).



poiché non esistono monopoli le linee di forza entrano ed escono da una **superficie chiusa** compensandosi e determinando un **flusso nullo**

➤ La presenza del coseno nella definizione del flusso elementare equivale ad assumere che ciò che conta nella determinazione del flusso non è la superficie in sé ma piuttosto la sua componente in direzione perpendicolare alla linea di forza e ciò, se si tiene presente che si vuole fotografare il fenomeno di taglio delle linee di forza attraverso la linea considerata, è del tutto plausibile.

➤ Nel caso particolare di superfici piane e di campi uniformi il flusso attraverso una superficie  $\sigma$  presenta una espressione molto semplice:

$$\phi_{\sigma}(\mathbf{B}) = B \sigma \cos \alpha = B_n \sigma = B \sigma_n \quad (V.9.4)$$

È questo il caso che si incontra più frequentemente nelle applicazioni concrete, per esempio quando si studia il funzionamento delle macchine elettriche.

Se poi le linee di forza sono perpendicolari alla superficie si avrà  $\Phi_{\sigma}(\mathbf{B}) = B \sigma$  e nel caso in cui la superficie risulta tangenziale alla linea  $\Phi_{\sigma}(\mathbf{B}) = 0$ .



<sup>5</sup> Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), fisico tedesco (leggere il cognome con la v dura senza storpiature anglofone). Il suo nome compare una sessantina di volte nel *Trattato* di Maxwell e questo fatto ce la dice lunga sui contributi da lui forniti alle conoscenze di elettromagnetismo. Il contributo principale è consistito nella misurazione sperimentale delle costanti della elettricità e del magnetismo  $\epsilon$  e  $\mu$  il che, come vedremo nel capitolo dedicato alle onde elettromagnetiche, ha consentito di stimare la velocità delle onde elettromagnetiche scoprendo che tale valore corrispondeva alla velocità della luce.

<sup>6</sup> Avendo già trattato le proprietà del flusso in elettrostatica non verranno svolte in questa sede le dimostrazioni analitiche ma ci si baserà su ragionamenti di plausibilità senza entrare troppo in dettaglio.

Osserviamo ancora che quando una superficie ruota di  $180^\circ$  si passa da  $\cos \alpha$  a  $\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$  e dunque la definizione data distingue automaticamente tra il caso delle linee di forza entranti e quello delle linee di forza uscenti da una data superficie.

### 9.2.6 LA LEGGE DELL'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA E LA VARIAZIONE DI FLUSSO

Il fenomeno della induzione elettromagnetica si presenta, indipendentemente dalle apparenze (circuiti in moto, campo che varia., circuito che si deforma, movimento di un magnete, variazione della corrente in un circuito che produce un campo magnetico...) tutte le volte che, per le ragioni più diverse cambia il flusso attraverso una superficie delimitata da una linea  $\Gamma$ .

In questo caso lungo la linea  $\Gamma$  compare un *campo di tipo circuitale* che viene a dipendere dalla velocità di variazione del flusso. A tale campo circuitale corrisponde un valore della circuitazione secondo la definizione data nei paragrafi precedenti.

$\Phi \rightarrow \Phi' \Rightarrow$  nasce un campo elettrico  

$$\mathcal{E}_\Gamma(\mathbf{E}) = \frac{\delta\Phi_\sigma(\mathbf{B})}{\delta t}$$



La legge della induzione afferma che *considerata una linea chiusa  $\Gamma$  che delimita una superficie  $\sigma$  immersa in un campo magnetico  $\mathbf{B}$ , quando si verifica una variazione di flusso  $\delta\Phi_\sigma(\mathbf{B})$  del vettore  $\mathbf{B}$  nell'intervallo di tempo  $\delta t$ , a tale variazione corrisponde la comparsa di un campo elettrico nello spazio tale che:*

$$\mathcal{E}_\Gamma(\mathbf{E}) = \frac{\delta\Phi_\sigma(\mathbf{B})}{\delta t} \tag{V.9.6}$$

Quando la linea corrisponde ad un circuito useremo al posto del termine *circuitazione*, quello più comune di *forza elettromotrice*.



- Il campo  $\mathbf{E}$  ha caratteristiche molto diverse dal campo elettrostatico su una questione essenziale. La circuitazione lungo una linea chiusa è diversa da zero; dunque il campo elettrico indotto non è conservativo ed è in grado di produrre energia elettrica (naturalmente a spese di altre forme).
- In generale la quantità  $\frac{\delta\Phi_\sigma(\mathbf{B})}{\delta t}$  è una grandezza variabile nel tempo e pertanto, salvo casi particolari, anche la f.e.m. indotta è variabile nel tempo. Ciò che determina il valore della f.e.m. è la velocità di variazione del flusso. Non importa solo l'entità della variazione ma anche la durata temporale di tale variazione. Con il linguaggio dell'analisi matematica si dice che la f.e.m. è pari alla derivata del flusso rispetto al tempo. Se, invece di eseguire rapporti relativi a quantità infinitesime, ci si riferisce ad intervalli di durata finita, al posto del valore istantaneo della f.e.m. indotta si otterrà il suo valore medio.
- Sia la circuitazione, sia il flusso sono grandezze scalari e possono avere valori positivi o negativi perché nella loro definizione intervengono grandezze con segno.

Nella definizione del flusso compare il coseno di un angolo e se si inverte il verso della direzione  $n$  si passa da  $\alpha$  a  $180^\circ - \alpha$ . Nella definizione della circuitazione si esegue una sommatoria di quantità il cui segno dipende dal verso di percorrenza della linea chiusa considerata. Sarebbe pertanto necessario fissare delle convenzioni relative ai versi

da considerare nel calcolo delle quantità suddette. Per non appesantire la trattazione ci disinteresseremo del problema visto che l'aspetto fisico della questione sarà comunque affrontato come problematica separata connessa alla conservazione della energia.

9.2.7 CASO PARTICOLARE: LA SPIRA RETTANGOLARE A DIMENSIONE VARIABILE IMMERSA IN UN CAMPO UNIFORME

Se una spira rettangolare di ampiezza infinita viene immersa ortogonalmente ad un campo magnetico uniforme  $\mathbf{B}$  e si ipotizza che uno dei suoi lati possa scorrere con velocità  $v$  si determina una situazione in cui il flusso  $\Phi = B \sigma$  cambia perché cambia la superficie  $\sigma$  della spira.

Si osserva allora che nella spira si ha una circolazione di corrente e se si connette un utilizzatore elettrico questo risulta regolarmente alimentato (una lampadina si accende). Lungo la spira nasce un campo estraneo (il campo elettrico circuitale) che determina la comparsa di una forza elettromotrice pari alla circuitazione del campo elettrico indotto.

Poiché:  $\Phi = B \sigma$  e  $B$  è costante si ha che  $\delta\Phi = B \delta\sigma$ .

Ma  $\delta\sigma = l \delta x$  e pertanto  $\delta\Phi = B \delta\sigma = B l \delta x$

Se applichiamo la (V.9.6) avremo dunque che:

$$\mathcal{E} = \frac{\delta\Phi_{\sigma}(\mathbf{B})}{\delta t} = B l \frac{\delta x}{\delta t} = B l v \tag{V.9.7}$$

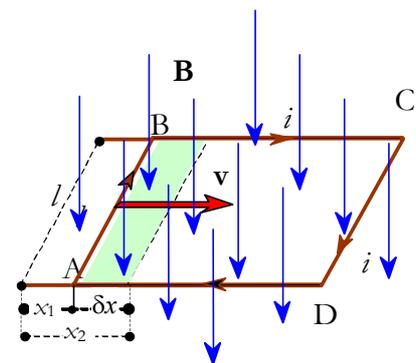
Dunque se il conduttore si muove a velocità costante anche la forza elettromotrice indotta è costante. Anche se tecnologicamente poco pratico, quello che abbiamo descritto è un primo esempio di generatore di f.e.m. costante. I suoi difetti stanno nel fatto che per operare con continuità deve avere dimensioni infinite. Un generatore del genere potrebbe essere realizzato utilizzando come sorgente di campo magnetico il campo terrestre e come spira le rotaie di una linea ferroviaria.

Il meccanismo in base al quale si induce una corrente elettrica in un conduttore in moto può essere spiegato attraverso la forza di Lorentz. Supponiamo che un conduttore si muova con velocità  $\mathbf{v}$  perpendicolarmente al vettore  $\mathbf{B}$ . Le cariche risulteranno allora soggette alla forza di Lorentz orientata lungo il conduttore con versi determinati dalla regola della mano sinistra.

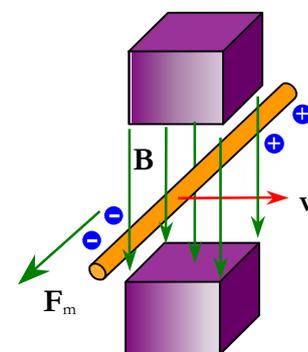
La forza di Lorentz tenderà a separare le cariche presenti nel conduttore e, in particolare, a spostare nel verso della forza gli elettroni liberi. Se il conduttore non è connesso ad alcun circuito, lo spostamento delle cariche continua finché la forza attrattiva coulombiana che agisce sulle cariche non diventa uguale alla forza di Lorentz.

L'azione della forza di Lorentz è in tutto simile a quella di un campo elettrico che si opponga al campo di Coulomb. Poiché questo campo non è dovuto a forze di tipo elettrostatico si tratta di un campo del tipo ipotizzato nel capitolo sui circuiti in corrente continua per definire la forza elettromotrice, cioè di un campo estraneo. La intensità di questo campo verrà definita ponendo:

$$E^* = \frac{F_m}{q} = v B$$



Se si fa variare la superficie di una spira rettangolare si osserva la comparsa di una f.e.m. pari a  $Blv$

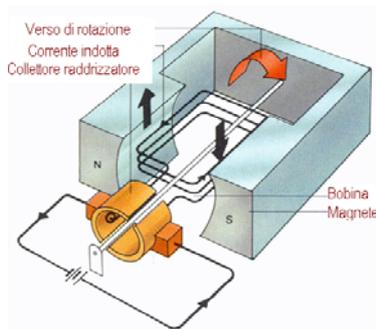


La f.e.m. indotta può essere spiegata come effetto della forza di Lorentz che sposta le cariche mobili presenti nel conduttore che taglia le linee di forza

A questo campo estraneo corrisponde una f.e.m. pari alla circuitazione che in questo caso riguarda il solo tratto di lunghezza  $l$  lungo il quale si presenta il campo estraneo e si ha dunque:

$$\mathcal{F} = E^* l = B l v$$

cioè il valore già determinato attraverso l'utilizzo della legge generale della induzione elettromagnetica.



### 9.2.8 CASO PARTICOLARE: SPIRA RETTANGOLARE IN MOTO CIRCOLARE UNIFORME IN UN CAMPO UNIFORME

Se una spira rettangolare di superficie  $\sigma$  viene fatta ruotare con velocità angolare  $\omega$  entro un campo magnetico uniforme e si indica con  $\alpha$  l'angolo formato tra la normale e la direzione della linea di forza si ha:

$$\Phi = B \sigma \cos \alpha$$

Ma  $\omega = \frac{\alpha - \alpha_0}{t}$  e pertanto  $\alpha = \omega t + \alpha_0$

Dunque il flusso varia con legge sinusoidale e se si deriva il flusso rispetto al tempo si ottiene la f.e.m. indotta:

$$\mathcal{F} = \frac{\delta \Phi_{\sigma}(\mathbf{B})}{\delta t} = -B \omega \sigma \sin(\omega t + \alpha_0)$$

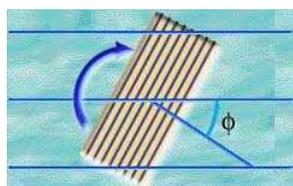
In effetti:

$$\Phi' = [B\sigma \cos(\omega t + \alpha_0)]' = -B\sigma \sin(\omega t + \alpha_0)(\omega t + \alpha_0)' = -B\omega \sigma \sin(\omega t + \alpha_0)$$

Dunque oltre che il flusso anche la f.e.m. indotta varia con legge sinusoidale. La f.e.m. che abbiamo determinato è quella relativa ad una singola spira e, in presenza di  $N$  spire il risultato viene moltiplicato per  $N$ .

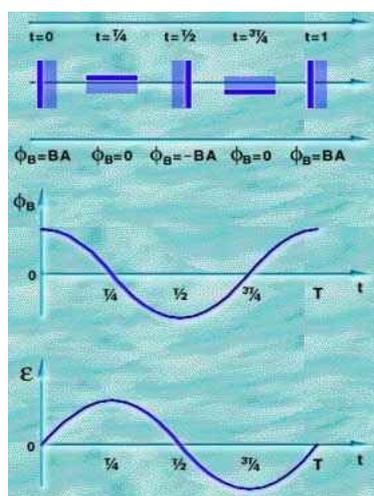
La f.e.m. può essere raccolta mediante dei contatti striscianti e se questi vengono tagliati in maniera di invertire il contatto nel momento in cui la f.e.m. cambia di segno si può produrre una f.e.m. unidirezionale come avviene nella dinamo.

L'argomento sarà ripreso trattando delle correnti alternate perché quello che è stato descritto è la base del funzionamento dell'alternatore.



$$\frac{df}{dx} = \int L$$

$$\int f(x) dx$$

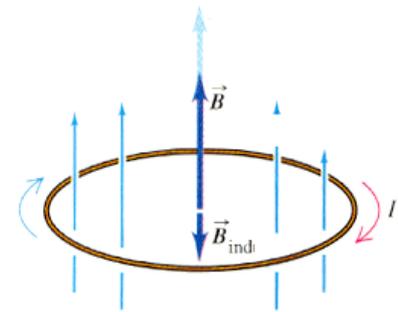


## 9.3 La legge di Lenz

### 9.3.1 CHI PAGA PER L'ENERGIA ELETTRICA CHE SI GENERA?

Nel 1834 H. F. E. Lenz (1804-1865) precisò un elemento relativo al verso delle forze elettromotrici indotte e dunque delle correnti elettriche che da esse si originano. Il criterio è semplicemente il seguente: *la forza elettromotrice indotta deve determinare una corrente in grado di opporsi alla causa che l'ha generata.*

Per esempio, se per effetto del movimento di un conduttore chiuso si determina un aumento del flusso attraverso una superficie contornata dalla linea del conduttore, si induce lungo tale linea una forza elettromotrice la quale a sua volta determina la comparsa di una corrente elettrica. La corrente elettrica così generata produce a sua volta un campo magnetico che si sovrappone a quella che già si concatenava al circuito. *La legge di Lenz ci dice che il verso di tale campo magnetico (determinato dal verso della corrente) è tale da far diminuire il flusso che era aumentato. In effetti, se ciò non accadesse si avrebbe un circolo vizioso infinito: l'aumento di flusso determinerebbe una corrente, essa determinerebbe un aumento di flusso, e così via. La spirale che si verrebbe a creare costituirebbe una evidente violazione del teorema di conservazione della energia.*



la legge di Lenz: gli effetti delle f.e.m. indotte si oppongono alla causa che le ha generate. Se B aumenta nasce una corrente indotta la quale genera un campo magnetico che tende a compensare l'aumento che l'ha generata

### 9.3.2 IL SEGNO DELLA F.E.M. INDOTTA

Vediamo cosa accade nell'esempio della spira rettangolare.

Supponiamo di muovere il conduttore in modo di far aumentare il flusso. La f.e.m. indotta avrà, in base alla legge di Lenz, un verso antiorario in modo che la corrente corrispondente generi un campo magnetico in grado di compensare l'aumento di flusso: la linea di forza del campo generato dalla corrente è indicata con  $\mathbf{B}^*$  (in rosso) e come si vede è parallela al campo  $\mathbf{B}$  (in blu) all'esterno della spira e antiparallela all'interno.

La interazione tra la corrente elettrica e il campo magnetico determina inoltre la comparsa di una  $\mathbf{F}_m$  opposta alla velocità del conduttore e pertanto, se si desidera continuare il movimento con velocità costante, occorre applicare una forza  $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_m$ . In questo modo si genera energia elettrica ma si consuma energia meccanica.

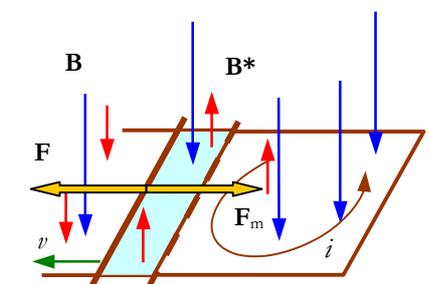
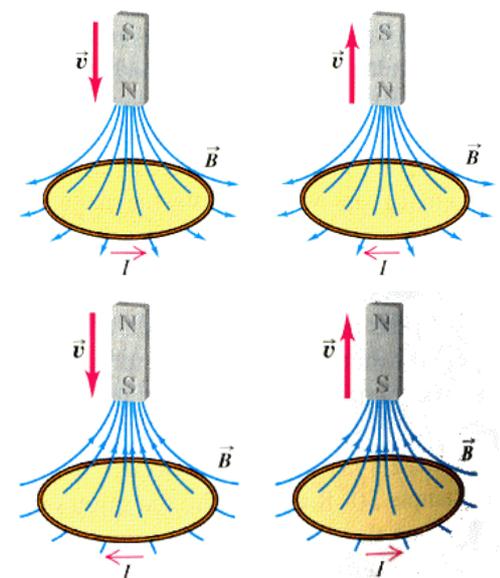
Il segno della f.e.m. indotta e il corrispondente verso della corrente indotta possono essere determinati per mezzo di un criterio generale.

Quando il flusso diminuisce i versi di  $\mathbf{B}$  e quello di  $\mathbf{B}^*$  coincidono; si determina pertanto un effetto contrario alla riduzione del flusso. Nell'altro caso, quando il flusso aumenta, il vettore  $\mathbf{B}^*$  risulta opposto al vettore  $\mathbf{B}$  e si oppone pertanto all'aumento del flusso.

Si condensa matematicamente tutto ciò, tenendo conto delle convenzioni già adottate per la rappresentazione dei versi dei campi e delle correnti, mettendo un segno meno davanti alla legge della induzione che, nella formulazione nota come legge di Faraday, Neumann, Lenz si scrive pertanto:

$$\mathcal{C}_\Gamma(\mathbf{E}) = - \frac{\delta\phi_\sigma(\mathbf{B})}{\delta t} \quad (\text{V.9.8})$$

Il significato fisico di quel segno meno è il seguente: *se si determina un aumento di flusso la circuitazione è negativa e cioè il campo elettrico ha un verso rotazionale opposto a quello definito da  $\mathbf{B}$ .*



la corrente indotta genera un campo magnetico che si oppone alla variazione del campo; se il flusso aumenta si induce una corrente che genera il campo magnetico indicato in rosso: tale campo fa diminuire il flusso

Quello che abbiamo descritto è un caso particolare di un fenomeno ampiamente studiato nella scienza e nella tecnologia e chiamato *controreazione negativa*. Esso si realizza quando il fenomeno in uscita influenza quello in ingresso tendendo ad opporsi ad esso. È evidente che un fenomeno del genere produce una stabilizzazione a differenza di quanto accade se la controreazione è invece di tipo positivo.

Ora che la legge della induzione è stata precisata in tutti i suoi aspetti possiamo enunciare la convenzione che si adotta nel calcolo dei versi delle diverse grandezze che compaiono in essa: *si utilizza la regola della vite nel senso che si assegna alla normale alla superficie utilizzata per il calcolo del flusso il verso di avanzamento di una vite avvitata nel verso utilizzato per il calcolo della circuitazione.*

### 9.3.3 L'ENERGIA SI CONSERVA

La legge di Lenz è strettamente collegata alla legge di conservazione dell'energia ed è una conseguenza di questa legge generale di natura. Il lavoro meccanico che viene richiesto dalla legge di Lenz risulta essere esattamente uguale alla energia elettrica prodotta.

Vediamo come funzionano le cose con la spira rettangolare a superficie variabile.

Il moto del conduttore con velocità  $v$  induce nel conduttore una corrente  $i$  che, come tutte le correnti, è soggetta alla forza di Lorentz

$$F_m = i B l$$

Perché il conduttore si possa muovere a velocità costante bisogna allora applicare una forza esterna uguale e contraria alla forza magnetica.

Il lavoro meccanico compiuto dalla forza esterna nello spostamento  $\delta x = v \delta t$  è:

$$\delta \mathcal{L}_{\text{mec}} = F \delta x = F v \delta t = i B l v \delta t = \delta q B l v$$

Il lavoro elettrico compiuto dal campo indotto nello stesso intervallo di tempo è:

$$\delta \mathcal{L}_{\text{el}} = \delta q \mathcal{F} = \delta q B l v$$

Dunque, se non ci sono perdite, il lavoro compiuto dalle forze esterne è uguale a quello compiuto dal campo indotto nello spostare le cariche lungo il circuito. *Pertanto, dal punto di vista energetico, l'induzione elettromagnetica è il processo di conversione dell'energia meccanica in energia del campo elettrico indotto. Questa relazione è alla base del funzionamento di tutti i generatori di corrente elettrica che si basano sul fenomeno della induzione.*

### 9.3.4 FENOMENI CONNESSI ALLA LEGGE DI LENZ

Il primo esempio è il disco di Arago, già presentato all'inizio del capitolo. Quando il disco di rame ruota il magnete posto sopra il disco induce nel disco delle f.e.m. che, operando su un conduttore massiccio sviluppano delle correnti elevate. Queste correnti, che circolano in sensi opposti in corrispondenza dei due poli, a loro volta producono un campo magnetico che tende ad attirare la sbarra magnetica in modo di opporsi al moto relativo.

Un sistema simile, ma più evoluto, è il sistema frenante utilizzato su alcuni tipi di treni: il freno elettromagnetico. In questo caso i dischi in materiale altamente conduttore sono collegati rigidamente agli apparati di

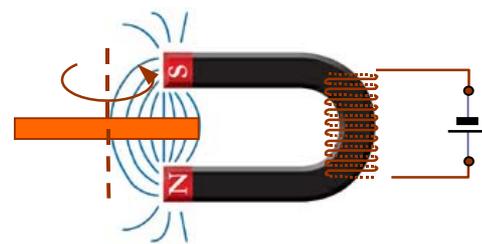
rotazione. Questi dischi scorrono attraverso le espansioni polari di elettromagneti (cioè di magneti formati da materiale ferroso su cui vengono avvolte bobine di rame che magnetizzano il sistema a comando).

Quando si vuole frenare basta alimentare l'elettromagnete. Il campo magnetico intenso crea nel disco rotante delle f.e.m. che, a loro volta, generano delle correnti molto intense; il campo magnetico prodotto da queste correnti si oppone alla rotazione, mentre l'energia cinetica del treno si trasforma in calore per effetto Joule.

Un dispositivo idoneo ad evidenziare le caratteristiche della legge di Lenz, che si trova in molti laboratori di fisica è il cosiddetto pendolo di Valtenhofen: un pendolo formato da una asta rigida e da una piastra rettangolare di alluminio o di rame viene fatto oscillare tra le espansioni polari di un elettromagnete.

In assenza di corrente il pendolo oscilla a lungo, ma le sue oscillazioni si smorzano molto rapidamente appena si eccita l'elettromagnete.

Se invece di una piastra rettangolare si utilizza un conduttore a pettine le oscillazioni proseguono. Infatti la particolare forma del conduttore ostacola la circolazione delle correnti indotte e ciò fa diminuire l'effetto smorzante.



il freno elettromagnetico sfrutta le correnti indotte in un disco massiccio di materiale conduttore che, per effetto Lenz, si oppongono alla rotazione del disco che le genera

## 9.4 Il fenomeno della autoinduzione

### 9.4.1 UN CIRCUITO INTERFERISCE CON SE STESSO

il flusso concatenato e quello autoconcatenato

Qualunque circuito chiuso immerso in un campo magnetico è caratterizzato da linee di forza che tagliano la superficie individuata dalla linea che descrive il circuito. Si parla in questo caso di *flusso concatenato* al circuito.

Se un flusso variabile concatenato ad un circuito determina la comparsa nel circuito di una f.e.m. indotta, dovremmo aspettarci che ciò accada anche come effetto di una influenza del circuito su se stesso. In effetti, quando un circuito è attraversato da una corrente variabile, tale corrente determina nello spazio circostante un campo magnetico variabile; a tale campo magnetico variabile corrispondono variazioni nel flusso concatenato con il circuito. A queste variazioni corrispondono delle forze elettromotrici indotte che, a loro volta, determineranno una influenza sul regime di funzionamento del circuito.

Questo fenomeno che si presenta ogni qualvolta un circuito elettrico viene attraversato da una corrente variabile, è particolarmente significativo nel determinare il regime di funzionamento di quei circuiti esplicitamente progettati per produrre campi magnetici e che sono attraversati da correnti variabili, per esempio bobine alimentate in corrente alternata. Se teniamo conto della legge di Lenz diremo anche che tale effetto di autoinduzione dovrà determinare una sorta di inerzia del circuito nel rispondere alle variazioni di corrente

### 9.4.2 IL COEFFICIENTE DI AUTOINDUZIONE

il coefficiente di autoinduzione  $L = \frac{\phi}{i}$

Per rendere misurabile il fenomeno di autoinduzione si rivela particolarmente utile una nuova grandezza, tipica di ogni circuito, che viene chiamata *coefficiente di autoinduzione o induttanza*.<sup>7</sup>

La f.e.m. autoindotta è proporzionale alle variazioni di flusso e le variazioni di flusso, a loro volta, sono proporzionali alle variazioni di campo che, in ultima analisi sono proporzionali alle variazioni di corrente.

$$\mathcal{E} \Delta t \propto \Delta \phi \propto \Delta B \propto \Delta i$$

Si chiama *coefficiente di autoinduzione la costante di proporzionalità tra il flusso concatenato ad un circuito e la corrente che circola nel circuito*.

Poiché  $\phi \propto i$  si pone, per definizione:

$$L = \frac{\phi}{i} \tag{V.9.9}$$

Il coefficiente di autoinduzione è una grandezza dipendente dalle caratteristiche geometriche del circuito e si misura in *Weber/Ampere* e questa unità viene chiamata *Henry*.<sup>(8)</sup>

L'Henry, dal punto di vista dimensionale corrisponde a  $\Omega \cdot s$  infatti:



<sup>7</sup> Si parla allora di f.e.m. e di correnti autoindotte.

<sup>8</sup> Joseph Henry (1797-1878), fisico statunitense condusse numerosi esperimenti relativi alla induzione elettromagnetica quasi contemporaneamente a Faraday, ma i suoi contributi non furono riconosciuti. Il suo nome non viene mai citato da Maxwell; gli Usa della prima metà dell'800 non erano al centro della attenzione del mondo scientifico ed accademico.

$$[L] = \frac{[\Phi]}{[i]} = \frac{[\mathcal{E}][\lambda]}{[i]} = [R][\lambda] = \Omega \cdot s$$

1 henry = 1 Ω·s

Se si tiene conto del fatto che, essendo  $L$  costante,  $\delta\phi = L \delta i$  avremo, applicando la legge dell'induzione elettromagnetica:

$$\mathcal{E}_{ai} = - \frac{\delta\phi}{\delta t} = -L \frac{\delta i}{\delta t} \tag{V.9.10}$$

### 9.4.3 IL COEFFICIENTE DI AUTOINDUZIONE DEL SOLENOIDE

Calcoliamo, per esempio, il flusso magnetico concatenato alle spire di un solenoide.

Il flusso concatenato ad una spira, in base alla definizione, è pari al prodotto dell'area racchiusa dalla spira per l'induzione magnetica, cioè  $B \sigma$ . Se il solenoide ha  $N$  spire il fenomeno della induzione elettromagnetica riguarderà tutte le spire del solenoide e pertanto la f.e.m. autoindotta sarà  $N$  volte quella di una singola spira. Per questa ragione ci si riferisce ad un flusso concatenato totale:

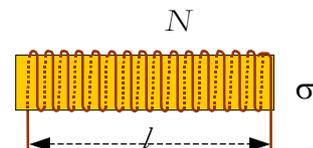
$$\phi_c = N B \sigma$$

Ma  $N = n l$  dove  $n$  è il numero di spire per unità di lunghezza e  $l$  è la lunghezza. Inoltre  $B = \mu_r \mu_0 i n = \mu i n$  e pertanto si avrà:

$$\phi_c = \mu n^2 \sigma l i$$

Pertanto, nel caso di un solenoide  $L$  vale:

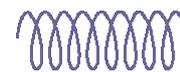
$$L = \mu n^2 \sigma l = \frac{\mu N^2 \sigma}{l} \tag{V.9.11}$$



$$L = \frac{\mu N^2 \sigma}{l}$$

In assenza di materiali ferromagnetici, o quando si sia raggiunta la condizione di saturazione, la induttanza è determinata esclusivamente dalle dimensioni e dalla densità dell'avvolgimento.

Per sottolineare il fatto che i solenoidi sono apparati dotati di un elevato valore di coefficiente di autoinduzione, si utilizza, per rappresentare l'induttanza proprio il simbolo del solenoide (un avvolgimento stilizzato).



### 9.4.4 L'AUTOINDUZIONE COME INERZIA ELETTRICA

Il segno della f.e.m. autoindotta è determinabile attraverso la legge di Lenz. Se la corrente aumenta, il campo indotto si opporrà all'aumento e pertanto il segno della f.e.m. autoindotta sarà opposto a quello della d.d.p. ai capi del circuito. Per converso, quando la corrente nel circuito tende a diminuire, il campo indotto tenderà a farla aumentare e pertanto la f.e.m. indotta avrà lo stesso segno della d.d.p. ai capi dell'avvolgimento.

Come vedremo questo elemento gioca un ruolo fondamentale nel funzionamento dei circuiti induttivi in corrente alternata nei quali la corrente che circola non è più prevalentemente determinata dalla resistenza del circuito; in questi casi il ruolo fondamentale viene giocato dalla induttanza che determina la comparsa di una f.e.m. opposta alla d.d.p. applicata. Pertanto si ottiene una intensità di corrente nettamente inferiore a quella che si avrebbe in corrente continua nello stesso circuito.

Inoltre, anche in corrente continua, quando un circuito contenente avvolgimenti inizia o termina il suo funzionamento per la chiusura o la a-



apertura di un interruttore si viene a creare una brusca variazione di corrente. Nel primo caso nasce una forza elettromotrice che si oppone alla andata a regime del circuito. La corrente prevista non si instaura immediatamente ma impiega un certo tempo.

Nel secondo caso per impedire la quasi istantanea cessazione della corrente si induce nel circuito una f.e.m. che può essere anche molto maggiore della tensione di alimentazione. Tale f.e.m., agendo in corrispondenza del punto di interruzione del circuito, può determinare la comparsa di scintille anche di notevoli dimensioni.

Per questa ragione quando si opera con elettrodomestici non si deve mai estrarre la spina di alimentazione sotto carico ma occorre sempre aprire preventivamente l'apposito interruttore per evitare ustioni e scintille che possono danneggiare con il tempo sia la spina, sia la presa.

Poiché anche un semplice filo rettilineo ha un proprio coefficiente di autoinduzione, quando si ha a che fare con il trasporto di segnali o di energia attraverso linee elettriche il fenomeno della autoinduzione va preso in attenta considerazione perché può determinare sia ritardi, sia variazioni nel segnale trasmesso.

#### 9.4.5 L'ENERGIA DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

Supponiamo che la corrente di un avvolgimento aumenti da zero sino al valore  $I$  con creazione nello spazio circostante di un campo magnetico e dunque di un flusso concatenato che aumenta da 0 sino a  $\Phi = L I$ ; ma come si è visto nel paragrafo precedente, per effetto della variazione, si induce una f.e.m. che si oppone a tale aumento.

Pertanto il generatore deve compiere del lavoro per opporsi al campo indotto e come risultato di ciò l'energia del generatore si converte in energia del campo magnetico. La variazione di energia del campo magnetico sarà pari al lavoro elementare compiuto nello spostare una carica  $\delta q$  lungo il circuito:

$$\delta \mathcal{E}_m = \delta \mathcal{L} = \delta q \mathcal{I}$$

ma poiché  $\mathcal{I} = \delta \phi / \delta t$  e  $i = \delta q / \delta t$  si ha:

$$\delta \mathcal{E}_m = \delta q \frac{\delta \phi}{\delta t} = i \delta \phi$$

Nel diagramma in figura tale quantità è rappresentata dall'area del rettangolino in verde e pertanto l'energia totale del campo magnetico è pari all'area del triangolo rettangolo tratteggiato:

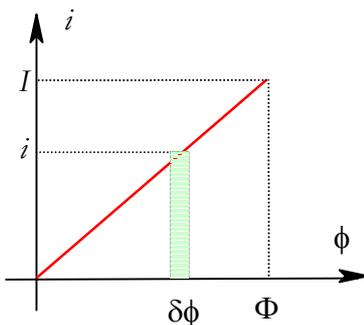
$$\mathcal{E}_m = \frac{I \Phi}{2} = \frac{L I^2}{2} \tag{V.9.12}$$

La equazione (V.9.12) può essere espressa in una forma contenente il valore di  $B$ . Allo scopo basta ricordare la dipendenza tra  $B$  e  $i$  ed il valore appena trovato del coefficiente di autoinduzione

$$\mathcal{E}_m = \frac{L I^2}{2} = \frac{1}{2} \mu n^2 \sigma l \left( \frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu} \sigma l = \frac{B^2}{2\mu} \Delta v$$

Pertanto la energia del campo magnetico all'interno del solenoide presenta una densità

$$u_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\Delta v} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{\mu H^2}{2}$$



energia magnetica  $\mathcal{E}_m = \frac{L I^2}{2}$

Maxwell ha dimostrato che la relazione trovata ha una validità del tutto generale quando si è in presenza di campi magnetici nello spazio e, per quanto riguarda il campo elettromagnetico, si ha una densità energetica data dalla somma della energia magnetica e della energia elettrica che abbiamo ricavato nel capitolo dedicato ai condensatori:

$$u_e = \frac{\mathcal{E}_e}{\Delta v} = \frac{\epsilon E^2}{2}$$

### 9.4.6 IL FUNZIONAMENTO TRANSITORIO DI UN CIRCUITO INDUTTIVO

Consideriamo un circuito alimentato da un generatore di f.e.m. costante formato da due rami: in uno colleghiamo una lampada ad incandescenza di resistenza  $R$  e una induttanza  $L$ ; nell'altro solo la lampadina.

Alla chiusura dell'interruttore osserveremo che, mentre nel secondo tratto di circuito la lampadina si accende istantaneamente, nel primo, in cui è presente l'avvolgimento, la lampadina si accende gradualmente e raggiunge la sua massima brillantezza solo dopo un certo tempo finito  $\Delta t$  dipendente dal valore della induttanza. Dunque, in un circuito contenente una induttanza, la corrente va a regime gradualmente come indicato nel diagramma qui a lato.

La ragione di ciò risiede nella f.e.m. autoindotta che si produce quando la corrente nell'avvolgimento aumenta. Tale f.e.m., in accordo con la legge di Lenz, si oppone all'aumento della corrente e la legge di Ohm per questo circuito si scrive:

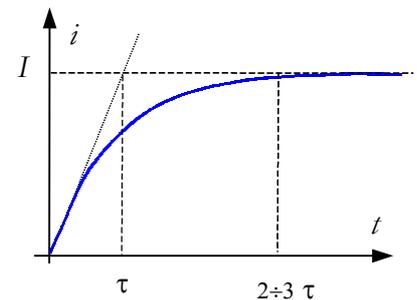
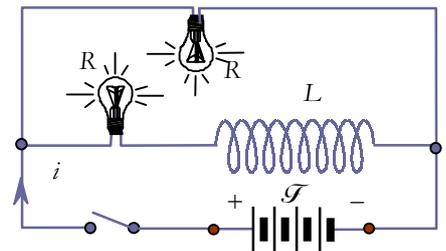
$$i = \frac{\mathcal{G} + \mathcal{G}_L}{R} = \frac{\mathcal{G}}{R} - \frac{L}{R} \frac{\delta i}{\delta t} \tag{V.9.13}$$

La corrente nel tempo è data dalla differenza tra un termine costante che rappresenta il valore che la corrente avrebbe in assenza dei fenomeni di autoinduzione e di un termine variabile legato alla rapidità di variazione della corrente. Tale termine, con il trascorrere del tempo tende a zero.

L'equazione (V.9.13) rappresenta una *equazione differenziale* cioè una equazione nella quale sono presenti contemporaneamente una funzione del tempo (la corrente) e la sua derivata.<sup>9</sup>

Dopo un tempo  $\bar{t}$  che ci proponiamo di determinare la corrente avrà raggiunto il suo valore massimo  $I_M = \frac{\mathcal{G}}{R}$  e non aumenterà più. Si osservi che la f.e.m. indotta, oltre che opporsi a quella del generatore, tende gradualmente a spegnersi man mano che la corrente cessa di aumentare. Siamo di fronte ad un fenomeno che, teoricamente presenta una durata infinita ma che, come vedremo, può essere espresso quantitativamente da un opportuno tempo dipendente dai valori di  $L$  e  $R$ .

La determinazione rigorosa del *tempo di andata a regime*<sup>10</sup> richiede l'utilizzo di strumenti di analisi matematica, ma tale tempo può comun-



Per effetto della **induttanza** il circuito va a regime con **andamento esponenziale**

<sup>9</sup> Basta ricordare che la funzione esponenziale è l'unica funzione che si ripete attraverso il processo di derivazione per comprendere che la soluzione di tale equazione dovrà consistere in una opportuna funzione esponenziale.

<sup>10</sup> Molti autori lo indicano con il termine di *tempo di rilassamento*

que essere stimato per via elementare attraverso considerazioni di natura energetica.

In base alla legge di conservazione dell'energia il lavoro compiuto dal generatore nello spostare le cariche lungo il circuito è speso in parte per aumentare l'energia interna del conduttore, riscaldamento per effetto Joule, e in parte per aumentare l'energia del campo magnetico. Pertanto:  $\mathcal{L} = Q + \mathcal{E}_m$  o equivalentemente

$$\mathcal{G} \bar{I} \bar{t} = \bar{I}^2 R \bar{t} + \frac{L I_M^2}{2}$$

dove  $I_M = \frac{\mathcal{G}}{R}$  rappresenta il valore massimo di corrente nel circuito e  $\bar{I}$  rappresenta il valore medio della corrente durante l'intervallo di tempo  $\bar{t}$  necessario per l'andata a regime

Supponendo, in prima approssimazione, che sia

$$\bar{I} \approx \frac{I_M}{2} = \frac{\mathcal{G}}{2R}$$

si ha:

$$\frac{\mathcal{G}^2 \bar{t}}{2R} \approx \frac{\mathcal{G}^2 R \bar{t}}{4R^2} + \frac{L \mathcal{G}^2}{2R^2} \Leftrightarrow \frac{\bar{t}}{R} \approx \frac{\bar{t}}{2R} + \frac{L}{R^2} \Leftrightarrow \frac{\bar{t}}{2R} \approx \frac{L}{R^2}$$

Ne consegue che la corrente raggiunge il suo valore massimo in un tempo pari a:

$$\bar{t} \approx 2 \frac{L}{R} = 2 \tau_L$$

In analogia a quanto già visto trattando del circuito RC per la carica del condensatore, la quantità

$$\tau_L = \frac{L}{R} \tag{V.9.14}$$

viene chiamata *costante di tempo del circuito* formato da una resistenza ed una induttanza.

Con considerazioni di analisi matematica si può dimostrare che tracciando la tangente alla curva nell'origine essa taglia la retta di  $I_M$  proprio nel punto di ascissa  $\tau_L$  e ciò consente di avere una visualizzazione diretta della costante di tempo. Il processo di andata a regime è di tipo esponenziale pertanto dopo valori di tempo pari a 2 o 3 volte la costante di tempo si può ormai considerare la corrente come costante.

Costante di tempo del circuito RL

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$

## 9.5 Applicazioni pratiche della induzione elettromagnetica

Il fenomeno della induzione elettromagnetica può essere considerato tra quelli che hanno maggiormente influenzato lo sviluppo della società nei secoli XIX e XX e l'analisi approfondita di alcune applicazioni basate sulla induzione elettromagnetica sarà oggetto del capitolo dedicato alle correnti alternate (generatore di corrente alternata, trasformatore, motore asincrono).

In questa sede ci limitiamo a sottolineare gli aspetti legati alla storia della tecnologia.

### 9.5.1 L'ALTERNATORE E LA DINAMO

Basta far ruotare una bobina rettangolare all'interno di un campo magnetico uniforme per produrre un flusso che varia con legge sinusoidale e dunque indurre una f.e.m. con andamento sinusoidale secondo quanto previsto dalla legge dell'induzione elettromagnetica.

Su questo principio funziona l'alternatore cioè la macchina che produce tutta la energia elettrica che consente alla società moderna di tipo industriale di esistere. Il funzionamento dell'alternatore è descritto più dettagliatamente nel capitolo dedicato alle correnti alternate.

La dinamo è invece il generatore basato sull'induzione elettromagnetica ma in grado di generare un f.e.m. unidirezionale. Si tratta ancora di un alternatore, ma attraverso una serie di contatti striscianti si fa in modo di prelevare il segnale sempre da punti diversi dell'avvolgimento, che è costituito da tante spire disposte a raggiera in modo di coprire l'intero angolo giro (per la precisione si preleva da quelle per le quali è massima in quell'istante la f.e.m. indotta). In questo modo si opera un raddrizzamento meccanico della f.e.m. che corrisponde sempre alla parte culminante di tante sinusoidi sfasate.

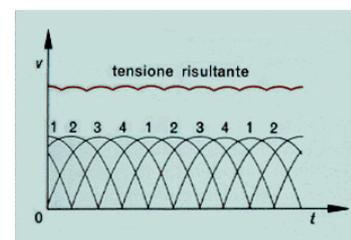
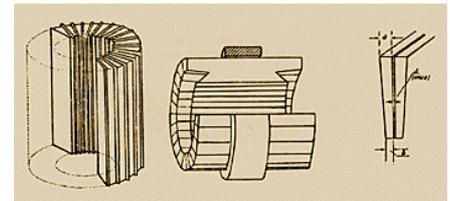
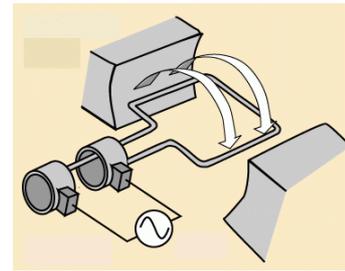
La dinamo è stata storicamente importante a fine 800 quando i grandi motori elettrici funzionavano solo a corrente continua e dunque anche la elettricità veniva distribuita con un segnale costante nel tempo.

### 9.5.2 IL TRASFORMATORE

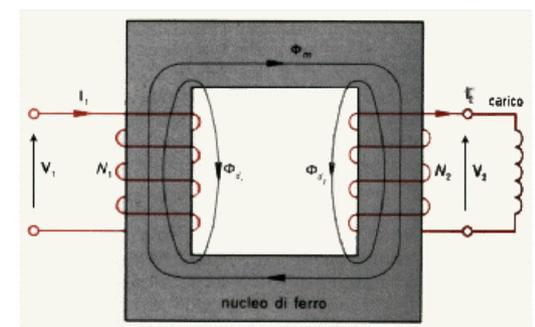
Se si avvolge un solenoide di  $N_1$  spire intorno ad un nucleo di materiale magnetico e sullo stesso nucleo si avvolge un secondo solenoide con  $N_2$  spire si ottiene un trasformatore. Esso si basa sul meccanismo della mutua induzione, cioè sulla capacità di un avvolgimento di influenzare l'altro e viceversa. In effetti il campo presente nel nucleo di materiale magnetico crea un flusso identico concatenato ad ogni spira dei due avvolgimenti e quando si hanno variazioni di corrente su uno qualsiasi dei due circuiti esse si ripercuotono immediatamente (attraverso la mediazione del campo magnetico) anche sull'altro.

Quando sul primo avvolgimento si applica una d.d.p. alternata sinusoidale  $V_1$  tale d.d.p. produce una corrente alternata, da essa si origina un campo magnetico variabile che produce una f.e.m. indotta  $f$  identica su ogni spira degli avvolgimenti.

Sul circuito primario si ha  $V_1 \approx N_1 f$  e su quello secondario  $V_2 \approx N_2 f$ ; pertanto:



L'anello di Pacinotti, il sistema di contatti striscianti che caratterizza la dinamo; si utilizzano tante bobine disposte secondo angoli diversi e si preleva il segnale sempre da quella che si presenta in condizione di massimo positivo



Nel trasformatore vengono accoppiati due circuiti induttivi attraverso un nucleo di materiale magnetico; in questo modo su ogni spira dei due avvolgimenti si induce la stessa f.e.m. e, operando opportunamente sul rapporto tra spire del primario e del secondario si possono alzare o abbassare liberamente le d.d.p.

$$\frac{V_1}{V_2} \approx \frac{N_1}{N_2} \tag{V.9.15}$$

Se  $N_1 > N_2$  si ottiene un trasformatore abbassatore che produce sul circuito secondario una d.d.p. minore di quella del primario; se invece  $N_1 < N_2$  si ottiene un trasformatore elevatore. I trasformatori, essendo macchine statiche, hanno rendimenti molto elevati e ciò permette di alzare od abbassare la d.d.p. con cui si opera a seconda delle esigenze.

Supponiamo ora che sul circuito secondario venga collegato un carico. Alla d.d.p.  $V_2$  corrisponderà una corrente  $I_2$  e tale corrente percorrendo le spire del secondario, per la legge di Lenz tenderà ad eliminare la causa che l'ha generata, cioè la variazione di campo magnetico. A questo punto sul circuito primario verrà indotta una corrente elettrica  $I_1$  che si opponga magneticamente ad  $I_2$ . Il risultato finale è che sotto carico la energia elettrica richiesta dal circuito secondario viene risucchiata dal primario e, per il teorema di conservazione dell'energia (se si prescinde dalle perdite nel ferro e da quelle dovute all'effetto Joule connesso al riscaldamento dei conduttori) dovrà essere:

$$V_1 I_1 \approx V_2 I_2$$

e pertanto:

$$\frac{V_1}{V_2} \approx \frac{I_2}{I_1} \tag{V.9.16}$$

Dunque quando la d.d.p. di un avvolgimento è elevata si avranno conduttori sottili e viceversa.

La introduzione dei trasformatori ha permesso, a partire dalla fine dell'800 di collocare le centrali elettriche fuori dalle città perché i costi di trasporto della energia risultano molto bassi se si effettuano ad alta tensione <sup>(11)</sup>. In effetti l'energia viene prodotta nelle centrali a valori di d.d.p. dell'ordine dei 10 kV, alzata a 380 kV per il trasporto, riabbassata intorno ai 10 kV per la prima distribuzione ed infine ulteriormente abbassata a 220 V e 380 V per gli utilizzi finali.

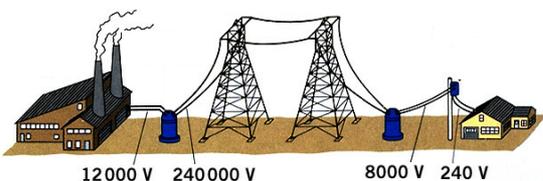
Il passaggio dal ristretto utilizzo iniziale della energia elettrica in corrente continua (seconda metà dell'800) alla corrente alternata (utilizzo esteso per far funzionare le macchine, per i trasporti e per la illuminazione) avviene grazie al trasformatore che funziona solo con d.d.p. variabili essendo basato sulla induzione elettromagnetica.

### 9.5.3 IL ROCCHETTO DI RUHKORFF

Il rocchetto di Ruhmkorff o bobina ad induzione è stato, nella fase finale dell'800 l'alimentatore di d.d.p. continue e di valore elevato che ha consentito lo studio delle scariche nei gas, la scoperta dei raggi X, dei raggi catodici oltre che la esecuzione degli esperimenti di Hertz per la produzione delle onde elettromagnetiche.

Il rocchetto è un incrocio tra un trasformatore ed un campanello: è costituito da un circuito primario avvolto su un nucleo di sbarre di ferro cilindrico. Il primario è alimentato in corrente continua a bassa tensione (solitamente da un accumulatore) e su di esso è inserito un interruttore elettromagnetico: quando la corrente circola nel primario il nucleo attira

<sup>11</sup> Ricordiamo che le perdite di potenza sono date, fissata la resistenza  $R$  della linea, da  $R I^2$  e che, a parità di potenza trasportata,  $I$  è inversamente proporzionale a  $V$ .



Nel rocchetto di Ruhmkorff si sfruttano il principio del trasformatore e quello del campanello per produrre d.d.p. unidirezionali molto elevate a partire dalla bassa tensione di una pila; questo strumento ha consentito la scoperta di molti fenomeni rivoluzionari a fine 800

un corpo metallico collegato ad una molla e ad un sistema di contatti simile alle puntine dell'automobile; ciò determina l'apertura del circuito; ma quando il circuito si apre l'elettromagnete rilascia il corpo metallico e il circuito per l'azione della molla si chiude di nuovo.

Si hanno così una serie di aperture e chiusure del circuito determinate dalla costante della molla e dalla distanza tra i contatti che può essere regolata con una vite micrometrica. Solitamente in parallelo all'interruttore si trova un condensatore che serve ad evitare che i contatti dell'interruttore si brucino sotto l'effetto delle scintille prodotte dalle aperture e chiusure rapide di un circuito fortemente induttivo.

Sopra il primario è avvolto il circuito secondario formato da filo molto sottile con un numero di spire anche 10'000 volte più alto del primario. In questo modo le variazioni di flusso determinate dal primario inducono sul secondario forze elettromotrici unidirezionali molto elevate che possono raggiungere anche le centinaia di migliaia di volt.

Sullo stesso principio funziona la bobina dell'automobile che produce le differenze di potenziale necessarie a far scoccare la scintilla sulle candele di accensione, ma in questo caso l'apertura e chiusura del circuito sono dovute alle puntine collegate meccanicamente al movimento dell'albero motore in modo che il momento in cui scocca la scintilla corrisponda alla fase di massima compressione del pistone.

#### 9.5.4 IL MOTORE ASINCRONO TRIFASE

Il motore asincrono trifase messo a punto dall'italiano Galileo Ferraris si basa su una ulteriore applicazione della induzione ed è ancora oggi il motore elettrico industriale utilizzato in tutto il mondo.

Grazie all'utilizzo di particolari correnti alternate sfasate tra loro di 120° si riesce a produrre un campo magnetico rotante. Tale campo magnetico mette in rotazione, grazie alla legge di Lenz, un rotore costituito da un blocco di materiale magnetico scanalato che, dopo essere stato immerso in un bagno di alluminio fuso, si presenta come un insieme di spire disposte a 360°.

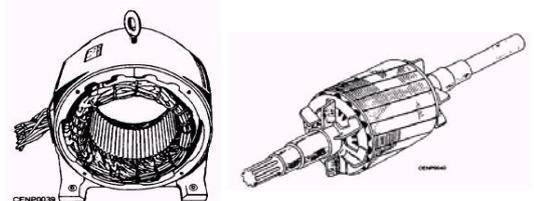
Tale disposizione è nota come *rotore a gabbia di scoiattolo* a causa della particolare forma che assomiglia ad una gabbietta per animali

Quando il campo rotante taglia le spire del rotore induce in esso delle f.e.m. che, a loro volta producono correnti molto intense (il rotore è costantemente in corto circuito). Per la legge di Lenz tali correnti producono un campo magnetico che si oppone alla causa che le ha generate (moto relativo tra campo rotante e rotore). Pertanto il rotore si mette in rotazione ad una velocità angolare leggermente inferiore a quella del campo rotante (di qui il termine *asincrono*).

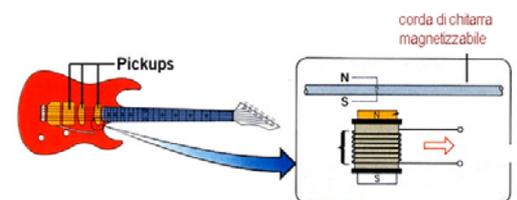
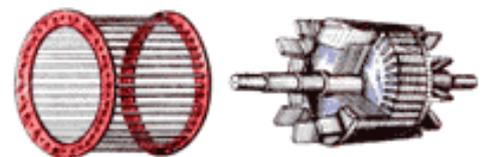
#### 9.5.5 REGISTRAZIONE DI INFORMAZIONI

Da qualche anno grazie allo sviluppo della microelettronica si sono resi disponibili anche per le biciclette dei tachimetri elettronici di basso costo. Si tratta di orologi digitali dotati di semplici capacità di calcolo.

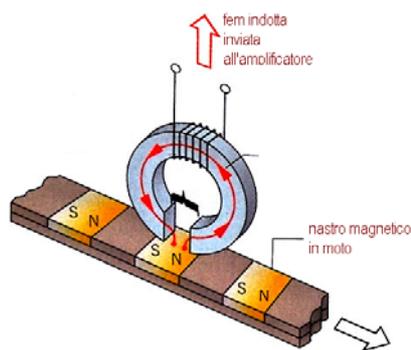
Sul telaio che regge la ruota viene collocata una bobina i cui estremi vanno a finire nel minicomputer. Sul raggio della bicicletta viene fissato un piccolo magnete che ad ogni giro della ruota passa davanti alla bobina inducendo in essa un impulso di tensione. Il computer analizza la distanza temporale tra gli impulsi attraverso il proprio orologio interno e



Lo statore di un motore asincrono trifase: disponendo opportunamente gli avvolgimenti ed alimentando con 3 correnti alternate sfasate nel tempo di 2/3 di periodo si riesce a produrre un **campo magnetico rotante**. Il campo rotante induce nel **rotore a gabbia di scoiattolo** delle correnti molto elevate e queste correnti mettono in moto per **effetto Lenz** il rotore il quale ruota a velocità leggermente inferiore al campo in modo che il moto relativo consenta la induzione delle correnti; da qui nasce il nome di motore asincrono.



nella **chitarra elettrica** la corda si magnetizza temporaneamente e i suoi movimenti di fronte ad una bobina avvolta intorno ad un magnete producono **una f.e.m. indotta**



in un **lettore di nastro magnetico** lo scorrimento del nastro magnetizzato induce in una bobina una f.e.m.

calcola la frequenza degli stessi. Da questa informazione, se lo strumento è stato tarato informandolo della distanza spaziale corrispondente ad un giro, è possibile calcolare in tempo reale la velocità istantanea, la velocità media e la distanza percorsa.

Anche il principio della registrazione e riproduzione delle informazioni su/da nastro magnetico (inizialmente solo sonore e successivamente anche immagini) si basa sulla induzione elettromagnetica.

Sul nastro viene depositato del materiale magnetico sul quale una bobina scrive informazioni (sfruttando la magnetizzazione residua) e una seconda bobina le legge (per induzione) quando il nastro (campo magnetico variabile nello spazio) le passa davanti (campo variabile nel tempo). Sugli stessi principi, ma con tecnologie molto più raffinate si basano le memorie di massa per computer (floppy disk e hard disk).

## 9.6 Perché il movimento del magnete genera un f.e.m.?

### 9.6.1 UNA ASIMMETRIA AL CAMBIARE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

Nel paragrafo 9.2.7 si è data una spiegazione della induzione in un filo che taglia un campo magnetico attraverso la forza di Lorentz; essa agisce sugli elettroni del tratto di conduttore in moto, li fa spostare dalla situazione di distribuzione uniforme in cui si trovano e ciò determina la comparsa di una f.e.m.

Ma, negli esperimenti di Faraday il fenomeno della induzione si presenta anche quando si muove un magnete nei confronti di un circuito ad anello o quando si opera con due avvolgimenti disposti su di uno stesso nucleo. In tutti i casi appare una corrente nel circuito secondario solo quando si hanno cambiamenti nel flusso del campo magnetico. Il modo in cui si determina la variazione di campo magnetico e la stessa origine del campo magnetico non hanno alcuna importanza. Si può muovere un avvolgimento rispetto all'altro, oppure si può attivare ed interrompere la corrente nel primario mediante un interruttore, oppure si può variare la corrente che lo attraversa mediante un reostato. In ogni caso si avrà lo stesso risultato: si induce una corrente nel circuito secondario ogni volta che cambia il campo magnetico.

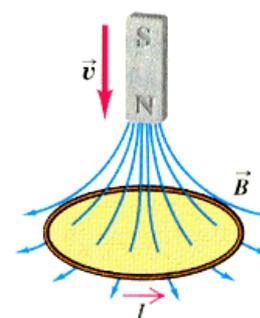
I cambiamenti nel campo magnetico sono accompagnate dalla generazione di un campo elettrico di tipo circuitale. Ma *perché* succede tutto ciò. Chi fa nascere il campo elettrico circuitale? La risposta verrà data dalla teoria della relatività attraverso la unificazione in un concetto unico di campo elettrico e magnetico.

Una delle questioni che hanno ritardato la comprensione del fenomeno della induzione elettromagnetica era il presentarsi della seguente asimmetria:

- la forza di Lorentz si presenta solo quando si ha un movimento di cariche rispetto ad un campo magnetico; non si ha forza di Lorentz se le cariche sono stazionarie
- il fenomeno della induzione elettromagnetica si presenta identicamente sia quando si muovono le cariche, sia quando si muove il campo magnetico.

Per spiegare il fenomeno della induzione elettromagnetica relativo al caso in cui a muoversi sia il campo magnetico rispetto ad un conduttore stazionario utilizzeremo l'apparato illustrato in figura. Il sistema di riferimento  $xyz$  è solidale con l'anello conduttore, mentre il sistema  $x'y'z'$  lo è con la sorgente del campo magnetico, per esempio un magnete permanente. Supponiamo che l'anello e il magnete si avvicinino con una velocità relativa  $v$ .

Nel sistema di riferimento  $xyz$  solidale con l'anello le cariche sono stazionarie e pertanto non sono soggette alla forza di Lorentz. Ciononostante quando il magnete si avvicina all'anello in quest'ultimo si induce una corrente. Questo risultato è pienamente in accordo con il principio di relatività secondo il quale tutti i sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti e i fenomeni (in questo caso le correnti) sono determinati solo dalla velocità relativa con cui l'anello ed il magnete si avvicinano. Ma in questo caso qual è la forza che determina il passaggio di corrente?



A cosa è dovuta la induzione della corrente quando si muove il campo magnetico visto che in questo caso le cariche nell'anello conduttore sono stazionarie?

### 9.6.2 LA SPIEGAZIONE NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO STAZIONARIO CON LE CARICHE MOBILI

Sappiamo che il moto delle cariche può essere dovuto all'azione o di forze elettriche o di forze di Lorentz. Poiché nel sistema di riferimento  $xyz$  solidale con l'anello non agiscono forze di Lorentz dobbiamo concludere che la corrente è dovuta ad un *campo elettrico indotto* che non agisce nel sistema  $x'y'z'$ .

Il campo indotto ha le seguenti caratteristiche:

- *non è un campo di Coulomb*: infatti non è dovuto ad una dislocazione di cariche ma all'avvicinamento di un magnete al conduttore (cioè all'avvicinarsi di una sorgente di campo magnetico).
- a differenza di quanto accade per le linee di forza del campo di Coulomb che iniziano su una carica positiva e terminano su una negativa *le linee di forza del campo indotto sono chiuse su se stesse*. Per tale ragione questo tipo di campo è detto *campo circuitale*.
- Il *campo indotto non è conservativo* perché il lavoro compiuto nel percorrere un circuito chiuso non è uguale a zero. Di conseguenza la grandezza caratteristica a livello energetico per questo tipo di campo non è una differenza di potenziale ma una forza elettromotrice.

### 9.6.3 TIRIAMO LE SOMME

L'analisi del fenomeno dell'induzione elettromagnetica dal punto di vista dei due sistemi di riferimento inerziali ci porta alle stesse conclusioni cui si era già accennato nel capitolo introdotto al magnetismo. In particolare sottolineiamo che la divisione del campo elettromagnetico in componenti elettrica e magnetica dipende dal sistema di riferimento in cui si effettua la descrizione.



Nel sistema di riferimento rispetto al quale le cariche sono a riposo, la loro interazione avviene attraverso un campo che chiamiamo elettrostatico. In quel sistema di riferimento non esiste campo magnetico.

Nell'altro sistema di riferimento, rispetto al quale le cariche sono in movimento, l'interazione tra esse avviene attraverso un campo che può essere scomposto in due componenti (elettrica e magnetica). Possiamo anche dire che in questo sistema di riferimento esistono due campi (elettrico e magnetico) e che l'interazione tra le cariche, in questo sistema di riferimento avviene attraverso i due campi.

Nel sistema di riferimento solidale con il magnete esiste solo il campo magnetico e il movimento delle cariche nell'anello è dovuto alla forza di Lorentz. Nel sistema di riferimento dell'anello, oltre al campo magnetico esiste un campo elettrico circuitale che produce la corrente.

Siamo ancora arrivati alla conclusione secondo cui *il campo elettrico e il campo magnetico non esistono indipendentemente dallo stato di moto del sistema di riferimento*. Si tratta di una affermazione ripresa dalla prima pubblicazione di Einstein sulla teoria della relatività pubblicata nel 1905 e intitolata *Sulla elettrodinamica dei corpi in movimento*.



Nelle primissime righe della memoria del 1905 Einstein afferma che:

*È noto che l'elettrodinamica di Maxwell - così come essa è oggi comunemente intesa conduce nelle sue applicazioni a corpi in movimento, ad asimmetrie che non sembrano conformi ai fenomeni. Si pensi ad esempio alle interazioni elettrodinamiche tra un magnete ed un conduttore. Laddove la concezione usuale contempla due casi netta-*

*mente distinti, a seconda di quale dei due corpi sia in movimento, il fenomeno osservabile dipende in questo caso, solo dal moto relativo di magnete e conduttore. Infatti, se si muove il magnete e rimane stazionario il conduttore, si produce, nell'intorno del magnete un campo elettrico con una ben determinata energia, il quale genera una corrente nei luoghi nei quali si trovino parti del conduttore. Se viceversa il magnete resta stazionario e si muove il conduttore, non nasce, nell'intorno del magnete, alcun campo elettrico; tuttavia si osserva, nel conduttore, una forza elettromotrice, alla quale non corrisponde, di per sé, una energia, ma che - supponendo che il moto relativo sia lo stesso nei due casi- genera correnti elettriche della stessa intensità di quelle prodotte dalle forze elettriche nel caso precedente e che hanno lo stesso percorso.*<sup>(12)</sup>



Dopo aver sviluppato la sua nuova teoria Einstein sostiene che non è più necessaria la vecchia distinzione tra una forza elettrica ed una forza elettromotrice di origine magnetica ma che la forza che agisce su una carica puntiforme è uguale alla forza elettrica presente là dove la carica si trova e che si ottiene trasformando il campo in un sistema di coordinate in quiete relativamente alla carica... la forza elettromotrice ha solo il ruolo di concetto ausiliario, la cui introduzione si deve al fatto che le forze elettriche e magnetiche non esistono indipendentemente dallo stato di moto del sistema di riferimento.

---

<sup>12</sup> A. Einstein, *l'elettrodinamica dei corpi in movimento*, 1905 in *Opere scelte di Einstein*, pag. 148, ed. Bollati Boringhieri

## 9.7 Problemi sulla induzione elettromagnetica

### 9.7.1 SEMPLICI APPLICAZIONI DELLE LEGGI E DELLE DEFINIZIONI DELLE GRANDEZZE COINVOLTE



Una spira di superficie  $S = 225 \text{ cm}^2$  e resistenza  $R = 0.125 \Omega$  è posta in aria all'interno di un solenoide ( $n = 2500$  spire/m). La normale al piano della spira forma un angolo  $\theta = 27.0^\circ$  con l'asse del solenoide. Inizialmente la corrente che fluisce nel solenoide vale  $i_1 = 5.0 \text{ A}$ . Calcolare: a) il valore del flusso di  $B$  attraverso la spira. Successivamente la corrente che attraversa il solenoide, viene aumentata fino a  $i_2 = 25.0 \text{ A}$  in un tempo  $\Delta t = 0.85 \text{ sec}$ . Calcolare: b) la corrente media indotta nella spira; c) la potenza media dissipata nella spira per effetto Joule.



a) Il campo creato nel solenoide è dato dalla relazione:

$$B_1 = \mu_0 n i_1 = 12.56 \cdot 10^{-7} \cdot 2500 \cdot 5.0 = 0.0157 \text{ T}$$

$$\phi_{S1} = B S \cos \theta = 0.0157 \cdot 2.25 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 27.0^\circ = 3.15 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

b) La f.e.m. media indotta è data dalla legge di Lenz e utilizzando anche la legge di Ohm si ha per la corrente indotta nella spira

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\Delta \phi}{R \Delta t}$$

Il flusso è proporzionale alla corrente che circola nel solenoide e non occorre dunque rieseguire il calcolo anche per il secondo valore di corrente:

$$\phi_{S2} = \phi_{S1} \frac{i_2}{i_1} = 3.15 \cdot 10^{-4} \frac{25.0}{5.0} = 5 \cdot 3.15 \cdot 10^{-4} \text{ Wb mentre}$$

$$\Delta \phi = 4 \cdot 3.15 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

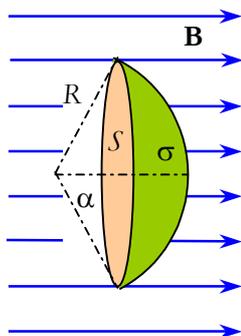
$$i = \frac{\Delta \phi}{R \Delta t} = \frac{4 \cdot 3.15 \cdot 10^{-4}}{0.125 \cdot 0.85} = 0.0119 \text{ A}$$

c) La potenza media vale:

$$P = R i^2 = 0.125 \cdot 0.0119^2 = 1.77 \cdot 10^{-5} \text{ W}$$



Un campo magnetico uniforme di intensità  $B = 0.820 \text{ T}$  attraversa una porzione di calotta sferica di raggio di curvatura  $R = 0.450 \text{ m}$  e che presenta un angolo di apertura  $2\alpha = 140^\circ$ . Determinare il flusso del vettore  $\mathbf{B}$  attraverso la calotta.



Il flusso attraverso la calotta  $\sigma$  è lo stesso che si ha attraverso la superficie piana  $S$  che ne definisce il contorno.

Ciò semplifica notevolmente il calcolo perché l'angolo formato tra  $\mathbf{B}$  e la normale  $\mathbf{n}$  a  $S$  è costante ed è nullo.

Pertanto  $\phi = B S$ .

Il raggio  $r$  di  $S$  vale  $R \sin \alpha$  e pertanto:

$$\phi = B S = B \pi (R \sin \alpha)^2 = 0.820 \cdot \pi \cdot (0.450 \cdot \sin 70^\circ)^2 = 0.461 \text{ Wb}$$



9.7.2 LA LEGGE DI LENZ PUÒ PROVOCARE UNA FORZA DI TIPO VISCOSO

Una spira rettangolare è disposta in un piano verticale e presenta i due lati verticali di lunghezza infinita mentre sugli altri due orizzontali di lunghezza  $l$  sono presenti una resistenza  $R$  e un conduttore mobile di massa  $m$  che striscia senza attrito. Nel piano verticale agisce un campo magnetico uniforme  $B$ . Determinare la relazione che lega la accelerazione con la velocità di caduta, discutere il risultato e quindi determinare la velocità limite.



Dati numerici:  $l = 25.0$  cm,  $R = 0.150$   $\Omega$ , massa  $m = 65.0$  g,  $B = 0.160$  T.



La sbarra cade sotto l'azione della gravità ma risulta anche soggetta alla azione della forza di Lorentz prodotta dalla interazione tra la corrente che circola nella spira per effetto della forza elettromotrice indotta dovuta al moto rispetto al campo magnetico.

Per effetto della legge di Lenz il verso della corrente è tale da opporsi alla causa che la genera e per questa ragione la forza magnetica e la forza peso hanno verso opposto.

$$F_p = m g \quad F_m = B l i$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B l v}{R}$$

pertanto se applichiamo la seconda legge della dinamica avremo che:

$$m a = F_p - F_m = m g - B l \frac{B l v}{R}$$

$$a = g - \frac{B^2 l^2 v}{m R}$$

Come si vede la accelerazione decresce al crescere della velocità (come accade per la caduta di un grave in un mezzo viscoso) e si annulla in corrispondenza del valore della velocità limite che risulta pari a:

$$v = \frac{m g R}{B^2 l^2}$$

Con i dati numerici forniti si ha:

$$v = \frac{m g R}{B^2 l^2} = \frac{0.065 \cdot 9.81 \cdot 0.150}{0.160^2 \cdot 0.250^2} = 59.8 \text{ m/s}$$

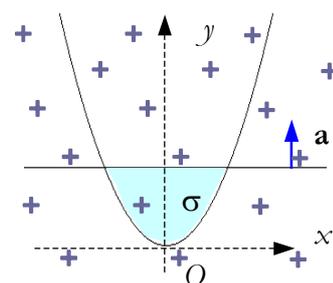
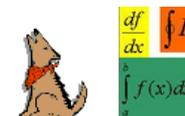
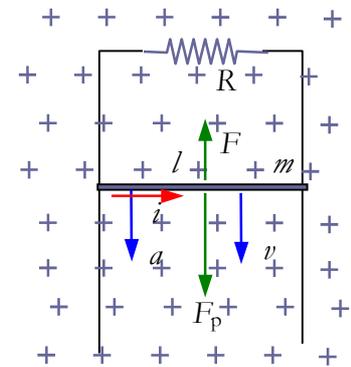


9.7.3 LA F.E.M. INDOTTA IN UNA SPIRA DI FORMA PARABOLICA

Un campo magnetico uniforme di modulo  $B$  è perpendicolare al piano  $xOy$  in cui si trova un filo conduttore a forma di parabola con equazione  $y = k x^2$ . Un filo rettilineo indefinito si muove parallelamente all'asse  $x$  con accelerazione  $a$  costante partendo dal vertice e con velocità iniziale nulla.

a) Esprimere le coordinate dei punti di intersezione tra filo e parabola in funzione del tempo. b) Determinare l'area  $\sigma$  del segmento parabolico individuato dal circuito (parabola e filo) esprimendo il risultato in funzione del tempo. c) Applicando la legge della induzione elettromagnetica dimostrare che la forza elettromotrice indotta in

funzione di  $y$  ha modulo  $\mathcal{E} = \sqrt{\frac{8a}{k}} B y$  e d) Determinare il valore di  $\mathcal{E}$  al tempo  $t = 6.75$  s nella ipotesi che sia  $B = 0.245$  T,  $a = 2.54$  m/s<sup>2</sup> e che  $k = 3.00$  m<sup>-1</sup>.





a) La legge che dà la posizione del filo è la legge oraria del m.u.a. con condizioni iniziali nulle  $y = \frac{1}{2} at^2$  mentre i punti di intersezione tra il filo mobile e la parabola

hanno ascissa  $x = \pm \sqrt{\frac{y}{k}}$ . Pertanto si ha sostituendo  $x = \pm \sqrt{\frac{a}{2k}} t = \pm m t$  dove  $m$  è una costante che viene introdotta per semplificare i calcoli

b) L'area del segmento parabolico si ottiene sia con un banale integrale definito sia applicando il teorema di Archimede. In entrambi i casi si ottiene

$$\sigma = \frac{4}{3} kx^3 = \frac{4}{3} k m^3 t^3$$

$$c) \mathcal{F} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d(B\sigma)}{dt} = B \frac{4}{3} k m^3 3t^2 = 4 B k m^3 t^2 = 4 B k m x^2 = 4 B m y =$$

$$= 4 B \sqrt{\frac{a}{2k}} y = \sqrt{\frac{8a}{k}} B y$$

$$d) \mathcal{F} = 4 B k m^3 t^2 = 4 \cdot 0.245 \cdot 3.00 \cdot \sqrt{\frac{2.54^3}{8 \cdot 3.00^3}} 6.75^2 = 36.9 \text{ V}$$



### 9.7.4 LA FORZA ELETTROMOTRICE INDOTTA IN UNA SBARRA ROTANTE CON VELOCITÀ ANGOLARE DATA

Una sbarra di materiale conduttore di lunghezza  $l$  ruota con velocità angolare  $\omega$  in un piano orizzontale intorno ad un asse verticale passante per un estremo. Determinare la d.d.p. che si determina tra gli estremi se si applica un campo magnetico uniforme  $B$  diretto come l'asse di rotazione.

Gli elettroni si possono spostare anche per effetto centrifugo calcolare anche la f.e.m. dovuta a questo effetto e confrontarla con la precedente mediante rapporto.



Sugli elettroni presenti nella sbarra agisce la forza magnetica la quale viene a corrispondere ad un campo estraneo. Ma gli elettroni presenti nella sbarra sono soggetti a velocità diverse a seconda della distanza  $x$  dall'asse di rotazione. Avremo pertanto:

$$\mathcal{F} = \int_0^l E^* \delta x = \int_0^l B v \delta x = \omega B \int_0^l x \delta x = \frac{1}{2} \omega B l^2$$

Anche la forza centrifuga  $F_c = m \omega^2 r$  corrisponde ad un campo estraneo

$E^{**} = \frac{F_c}{e} = \frac{m}{e} \omega^2 r$  e pertanto avremo la comparsa di una fem anche in assenza del campo magnetico:

$$\mathcal{F}' = \int_0^l E^{**} \delta x = \frac{m}{e} \omega^2 \int_0^l x \delta x = \frac{1}{2} \frac{m}{e} \omega^2 l^2$$

La presenza del rapporto  $\frac{m}{e}$  rende il fenomeno scrsamente rilevante anche se la forza elettromotrice dovuta all'effetto centrifugo è proporzionale a  $\omega^2$  anziché ad  $\omega$ .

Il rapporto richiesto non dipende dalle caratteristiche geometriche e vale:

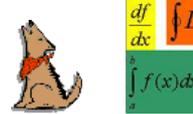
$$\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}'} = \frac{e B}{m \omega}$$

Consideriamo in via ipotetica il caso di una sbarra che compia 50 rotazioni al secondo nel campo magnetico terrestre ( $5 \cdot 10^{-5}$  T) si avrà allora:

$$\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}'} = \frac{e B}{m \omega} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 6.28 \cdot 50} \approx 3 \cdot 10^4$$

☺

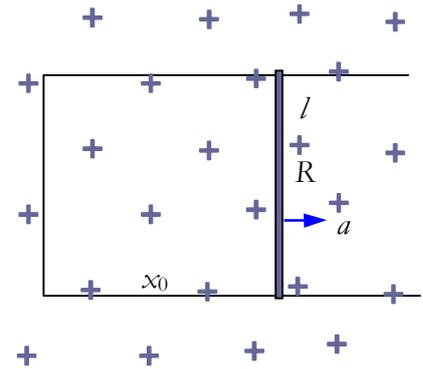
9.7.5 IL MOTO DI UNA SPIRA RETTANGOLARE A GEOMETRIA VARIABILE IN PRESENZA DI UN CAMPO UNIFORME VARIABILE NEL TEMPO



Una spira rettangolare di resistenza trascurabile, di lunghezza infinita e altezza  $l = 0.85$  m è chiusa ad un estremo da una sbarra metallica di resistenza  $R = 0.15 \Omega$  e massa  $m = 24$  g. Al tempo  $t = 0$  viene applicato un campo magnetico  $B_0 = 0.025$  T ortogonale al piano della pagina. Il campo è uniforme e varia nel tempo con velocità di variazione  $\delta B/\delta t = -0.0012$  T/s mentre  $x_0 = 0.65$  m. Analizzare quanto accade alla spira e determinare in particolare la accelerazione cui è soggetta la sbarra conduttrice all'istante iniziale.

☹

Nella spira si induce una fem il cui effetto è quello di generare una corrente che si opponga alla variazione del flusso e poiche esso diminuisce la forza elettrodinamica sarà diretta nel senso di far aumentare la superficie come indicato in figura.



$$\phi_0 = B_0 x_0 l = 0.025 \cdot 0.85 \cdot 0.65 = 0.0138 \text{ Wb}$$

La variazione di flusso che in generale sarebbe data dalla relazione:

$$\frac{\delta \phi}{\delta t} = l \left( B \frac{\delta x}{\delta t} + x \frac{\delta B}{\delta t} \right)$$

si riduce, visto che la sbarra è inizialmente in quiete a

$$\frac{\delta \phi}{\delta t} = l x_0 \frac{\delta B}{\delta t}$$

e pertanto

$$\mathcal{F}_0 = - \frac{\delta \phi}{\delta t} = - l x_0 \frac{\delta B}{\delta t} = 0.85 \cdot 0.65 \cdot 0.0012 = 6.63 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

La f.e.m. determina una corrente  $i_0 = \frac{\mathcal{F}_0}{R} = 4.42 \cdot 10^{-3} \text{ A}$

Questa corrente determina una forza magnetica

$$F = B_0 l i_0 = 0.025 \cdot 0.85 \cdot 4.42 \cdot 10^{-3} = 9.39 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

cui corrisponde la accelerazione:

$$a = \frac{F}{m} = 3.91 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

☺

