0b - Le grandezze fisiche, la loro misura e la matematica che ci serve

in fisica la misura corrisponde ad un insieme di operazioni materiali; le misurazioni finiscono sempre con un numero razionale perché i processi di misura corrispondono sempre ad un numero finito di operazioni

classe di grandezze, rapporto tra grandezze omogenee, misura ed unità di misura

0.1. Cosa significa misurare?

0.1.1. La Misura in Matematica

Lo studente ha già incontrato, nel secondo anno dei corsi di geometria, un capitolo piuttosto complesso intitolato *teoria delle grandezze* e su cui molto spesso si sorvola perché la sua trattazione rigorosa richiederebbe di introdurre contestualmente l'insieme dei numeri reali. La teoria delle grandezze consente di specificare, da un punto di vista matematico, cosa si intende per confronto (o rapporto di grandezze).

Riassumiamo rapidamente quello che si fa in matematica:

- si chiama *grandezza* un ente astratto (per esempio l'angolo) per il quale sono state definite alcune operazioni (per esempio la somma che consente di stabilire il concetto di multiplo), sono stati stabiliti alcuni *criteri di confronto* (per esempio *essere uguale*, *essere maggiore …*) e si è assunto assiomaticamente che valgono alcune *proprietà* (per esempio *dato un angolo* α *e fissato in qualsiasi numero naturale n esiste sempre un angolo* β*, detto sottomultiplo, tale che n* $\beta = \alpha$; *il sottomultiplo si scrive* $\beta = \frac{1}{n}\alpha$); l'insieme di tutte le grandezze di uno stesso tipo (che godono cioè di un insieme specificato di proprietà e per le quali sono state definite le operazioni di somma, multiplo e sottomultiplo) si chiama *classe di grandezze*.
- la matematica, attraverso opportuni assiomi e la costruzione dell'insieme dei numeri reali, consente di affermare che date due grandezze dello stesso tipo (si dice *appartenenti alla stessa classe*) γ e δ esiste sempre un numero reale *a* tale che $\gamma = a\,\delta$. Il numero *a* è detto *misura di* γ rispetto a δ *o rapporto di* γ *rispetto a* δ e si scrive $a = \frac{\gamma}{\delta}$
- poiché tra due grandezze si può sempre fare il rapporto, è comodo, per eseguire confronti, fissare una particolare grandezza che viene assunta come termine di confronto con tutte le altre, chiamarla *unità di misura*, ed esprimere tutte le altre rispetto ad essa. Indicheremo con υ l'unità di misura.

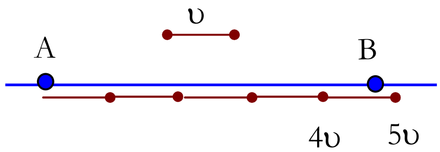
0.1.2. La misura in Fisica

Cosa cambia in fisica? La situazione è più semplice.

- ♦ La *misura delle grandezze in fisica* (rapporto è sempre il risultato di operazioni concrete che vanno dichiarate esplicitamente e non di postulati. *Se misuro una lunghezza devo specificare cosa intendo dire con misurarla.* Nel dare le regole per la misura devo anche stabilire se per quella definizione valgono oppure no le usuali proprietà del calcolo matematico. In altri termini, fissata la definizione, le proprietà di una grandezza riguardano la fisica e non la matematica.
- ♦ Nella fisica sperimentale i numeri reali non esistono perché non esistono misure rappresentate da numeri con infinite cifre non periodi-

che dopo la virgola, e ci bastano le frazioni. I numeri reali si usano invece quando si applica la matematica ai calcoli della fisica.

0.1.3. UN ESEMPIO DI MISURAZIONE FISICA



un esempio di misurazione: la distanza tra due punti con il trasporto della unità di misura e la determinazione delle cifre decimali tramite i sottomultipli (decimi e centesimi) della unità

Supponiamo di voler misurare la distanza tra due punti A e B. Ci servono:

- un oggetto che consenta di tracciare le *linee rette della fisica* (per esempio lo spigolo di un foglio piegato);
- una unità di misura (per esempio due punti lungo lo spigolo, cioè un *segmento fisico*);
- un compasso per riportare la unità di misura e per effettuare la costruzione dei sottomultipli.

A questo punto tracciamo un segmento tra i due punti e riportiamo più volte la unità di misura a partire da A. Supponiamo che la distanza tra A e B sia compresa tra 4 e 5 volte la unità. Dividiamo in dieci parti la unità e riportiamo il decimo della unità nella parte di segmento compresa tra 4 υ e B. Supponiamo che tale distanza sia tra 6 e 7 decimi. A questo punto dividiamo il decimo in dieci parti e proseguiamo. Ad un certo punto si smette perché i punti della fisica diventano più grandi del sottomultiplo che stiamo costruendo. Supponiamo, per esempio di non essere riusciti ad andare oltre il centesimo e che sia risultato $\overline{AB} = 4\,\upsilon + 6\,\frac{1}{10}\,\upsilon + 9\,\frac{1}{100}\,\upsilon$. Allora scriveremo $\overline{AB} = 4.69\,\upsilon$.

la prima unità internazionale per le lunghezze rimanda alla misura del meridiano di Greenwich; si assume come unità di lunghezza un sottomultiplo semplice di una grandezza naturale; la misurazione perfezionata nel corso della rivoluzione francese ha richiesto un enorme numero di triangolazioni con punti fissi dati da montagne, campanili, castelli, …

Si presti attenzione al fatto che il numero 4.69 non significa 4 unità, 69 centesimi e 0 millesimi. Significa invece 4 unità e 69 centesimi senza ulteriori precisazioni. Sui millesimi non possiamo dire nulla perché il nostro strumento non riusciva a misurarli.

Questo significa che 4.69 υ indica che la grandezza misurata è compresa tra 4.685 υ e 4.695 υ. Infatti nel caso in cui la grandezza fosse finita al di fuori di tale intervallo avremmo scritto rispettivamente 4.68 oppure 4.70.

0.2. Espressione di una misura

0.2.1. I NUMERI DELLA FISICA E QUELLI DELLA MATEMATICA

attenzione, in fisica: 4.69 ≠ 4.690 perché i due numeri indicano un diverso grado di **precisione**

Abbiamo appena visto che, dal punto di vista fisico i numeri 4.69 e 4.690, che in matematica rappresentano lo stesso numero, in fisica rappresentano due numeri diversi e la diversità sta nel grado di precisione che questi due numeri esprimono. Il primo significa un numero tra 4.685 e 4.695, invece il secondo indica un numero compreso tra 4.6895 e 4.6905.

Questa considerazione ci induce a scrivere solo gli zeri finali dotati di senso. Ma sorge subito un altro problema; nel nostro sistema di rappresentazione dei numeri gli zeri finali dopo il punto decimale non hanno significato, ma quelli prima servono a rappresentare l'*ordine di grandezza* mi dicono cioè se il mio numero è più o meno grande (ogni zero finale corriponde a moltiplicare per 10 il risultato).

Come faccio a sapere, quando scrivo 12'000, quali degli zeri finali hanno significato (cioè mi informano sulla *precisione*) e quali servono solo a stabilire l'*ordine di grandezza del numero*? In altre parole 12'000 vuol dire tra 11'995 e 12'005 oppure significa tra 11'950 e 12'050?

Per risolvere questo problema, e per evitare di scrivere degli allineamenti di cifre molto lunghi, quando i numeri sono molto grandi o molto piccoli, si utilizza la cosiddetta *notazione scientifica*.

0.2.2. LA NOTAZIONE SCIENTIFICA

Nella *notazione scientifica* i numeri vengono sempre scritti con un numero compreso tra 1 e 9 seguito dal punto decimale, dalle altre cifre e da una potenza del 10 che rimette le cose a posto dal punto di vista dell'ordine di grandezza. [1]

la **notazione scientifica**
le **cifre significative** ci informano sul grado di precisione mentre l'**ordine di grandezza** tramite l'esponente ci fornisce una immediata visione di tipo quantitativo della grandezza; 2.356×10^4

Si scriverà dunque $x = 2.356 \times 10^4$ per rappresentare un generico numero compreso tra 23'555 e 23'565 cioè $2.3555 \times 10^4 < x < 2.3565 \times 10^4$. Le cifre 2,3,5,6 sono dette *cifre significative* e sono le cifre certe (cioè dotate di significato) e la prima incerta (cioè influenzata dal grado di precisione della misura). La potenza 10^4 è detta *ordine di grandezza*.

Si presti attenzione al fatto che l'ordine di grandezza di 7.32×10^4 è 10^5 perché 7 è più vicino a 10 che a 1 e pertanto l'ordine di grandezza è $10\times 10^4 = 10^5$.

L'uso dell'ordine di grandezza nella rappresentazione delle grandezze fisiche è assolutamente indispensabile visto che si opera su numeri che possono essere sia molto grandi sia molto prossimi a zero. Per esempio, per quanto riguarda le lunghezze si spazia dal valore 10^{-15} m delle dimensioni nucleari al 10^{28} m delle galassie più lontane.

Quando nello studio della fisica viene richiesta la memorizzazione di qualche costante importante è buona norma memorizzare sempre per

[1] Qualche autore scrive le cifre significative sempre comprese tra 0.1 e 0.9 invece che tra 1 e 9 e, ovviamente, ciò non cambia nulla rispetto a quanto affermato. Approfittiamo per ricordare che in tutta la letteratura scientifica internazionale il separatore decimale è il punto e non la virgola e che, pertanto, in questo testo, ci atterremo a tale notazione.

primo l'ordine di grandezza (che ci dice subito se si tratta di una quantità grande o piccola) e solo dopo le cifre significative.

0.2.3. IMPRECISIONE IMPLICITA ED ESPLICITA

Quanto abbiamo detto a proposito della *imprecisione* associata a qualunque misura richiede una puntualizzazione. Quando il grado di imprecisione non viene specificato, cioè è sottinteso, la imprecisione è pari a $\frac{5}{10}$ dell'ordine di grandezza dell'ultima cifra significativa. Ma, in generale la imprecisione può anche essere superiore e, in quel caso, tale valore viene esplicitato scrivendolo come in

$l = (2.352 \pm 0.003) \times 10^3$ m.

Ovviamente è insensata una scrittura come $l = 2.362 \pm 0.4$ perché se l'imprecisione incide già sulla seconda cifra significativa non ha molto senso scrivere le altre due. Cosa si fa in tale caso?

Prima si approssima il numero alla prima cifra significativa su cui incide la indeterminazione (in questo caso si deve approssimare per eccesso perché 6 è più vicino a 10 che a 1) e poi si scrive il nuovo valore che risulta $l = 2.4 \pm 0.4$.

0.2.4. VALORE MEDIO E DISPERSIONE

Una grandezza si indica dunque così:

$$x = (<x> \pm \varepsilon) \times 10^{\alpha}\ \upsilon \qquad \text{(b.0.1)}$$

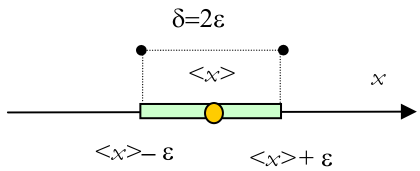
La quantità <x> è detta *valore medio* e rappresenta il centro di oscillazione dei valori di *x*. [2]

La quantità ε è detta *semi dispersione o errore assoluto* e rappresenta il grado di oscillazione di *x* intorno al valore medio.

L'intervallo di oscillazione δ, pari a 2ε, è detto *dispersione.*

La quantità 10^{α}, con la precisazione relativa alla necessità di approssimare per eccesso o difetto le cifre significative, è detta *ordine di grandezza.*

Infine, la quantità υ indica la unità di misura. Si ricordi che in Fisica nessuna misura ha mai significato se non viene accompagnata dalla unità di misura a cui tale numero si riferisce. [3]



valor medio e semidispersione forniscono il grado di imprecisione nella conoscenza di una grandezza

0.2.5. PRECISIONE DI UNA MISURA ED ERRORE

L'*errore assoluto non è un buon indicatore del grado di precisione di una misura*. Saremo tutti concordi nell'osservare che, in una logica di precisione, non è la stessa cosa sbagliare di 1 cm su 1 m o di 1 cm su 100 m. Nel secondo caso, ci si rende immediatamente conto immediatamente che la misurazione è "più precisa".

In effetti la parola *precisione* non indica *l'errore assoluto*, ma il raffronto tra l'errore assoluto e la grandezza misurata. Ma *i raffronti in fisica si fanno sempre eseguendo il rapporto.*

[2] Il valore medio va ovviamente moltiplicato per l'ordine di grandezza prima di essere confrontato con *x*.

[3] La dimenticanza delle unità di misura è uno degli errori più diffusi tra i giovani che si avvicinano alle scritture scientifiche e, purtroppo per loro, si tratta di un errore il più delle volte imperdonabile perché rende insensata l'argomentazione.

Pertanto la precisione di una misurazione $x = (<x> \pm \varepsilon) \times 10^{\alpha}\ \upsilon$ si determina attraverso una nuova quantità, detta *errore relativo*, definita come *rapporto tra l'errore assoluto e la grandezza misurata*. Scriveremo così:

$$\varepsilon_r = \qquad \varepsilon_r\% = \frac{\varepsilon}{<x>}\,100 \qquad \text{(b.0.2)}$$

l'errore relativo ci informa sulla precisione di una misura molto meglio della semidispersione perché la confronta con il valor medio

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{<x>}$$

Nota bene:

- L'errore relativo, essendo un rapporto tra grandezze misurate nella stessa unità di misura, è un numero puro.
- Per il calcolo dell'*errore* relativo non occorre tener conto dell'ordine di grandezza perché nel rapporto esso si semplifica comunque.

0.2.6. ESERCIZI: LE COMPETENZE INDESPENSABILI

- *Esercizio*: *Approssimare alla terza cifra significativa il numero* 2.357.

  ☹

  Poiché 7 è più vicino a 10 che a 1 si approssima per eccesso e si ottiene 2.36. ☺

- *Esercizio*: *Scrivere in notazione scientifica il numero* 0.000356.

  ☹

  Spostando verso destra il punto decimale di 4 posti si ottiene 3.56×10^{-4}. ☺

- *Esercizio*: *Calcolare l'errore relativo per la grandezza* $x = (3.254 \pm 0.007) \times 10^5\ \upsilon$

  ☹

  $$\varepsilon_r\% = \frac{\varepsilon}{<x>}\,100 = \frac{0.007}{3.254}\,100 = 0.2\ \%$$ [4] ☺

- *Esercizio*: *Dato il numero* 3.45×10^6 *determinarne l'errore assoluto sapendo che è affetto da un errore relativo percentuale* $\varepsilon_r\% = 0.6\%$ *e quindi scrivere la grandezza esplicitandone la indeterminazione.*

  ☹

  Invertendo la (b.0.2) si ottiene:

  $$\varepsilon = \frac{\varepsilon_r\%\ <x>}{100} = \frac{0.6 \times 3.45 \times 10^6}{10^2} = 0.02 \times 10^6$$ e pertanto $x = (3.45 \pm 0.02) \times 10^6$ ☺

Carl Friedrich Gauss oltre che un valente matematico si pose problemi di geometria fisica connessi alla misurazione di grandi distanze; trascorse una parte notevole della sua vita a compiere rilievi topografici del territorio della attuale Germania ed in questo contesto elaborò la teoria degli errori quale viene ancor oggi utilizzata

[4] Poiché gli errori rappresentano una imprecisione, solitamente li si rappresenta con una sola cifra significativa. Al massimo è ammissibile usarne due.

0.3. Origine e propagazione degli errori

0.3.1. COME STIMARE GLI ERRORI DI UNA MISURA

Abbiamo già osservato, nei paragrafi precedenti, che gli errori si originano in primo luogo dalle limitazioni di precisione poste dagli strumenti di misura utilizzati.

A questo proposito, nella metrologia[5], si utilizza il termine *sensibilità* per indicare la minima grandezza apprezzabile da un dato strumento. Per esempio, in un righello scolastico millimetrato la sensibilità è di 0.5 mm perché noi siamo in grado di percepire se l'estremo che cade tra due tacche distanti 1 mm è più vicino a quella di destra o di sinistra. [6]

la sensibilità oltre che una virtù è una grandezza fisica che caratterizza la qualità degli strumenti di misura e rappresenta la minima quantità apprezzabile dallo strumento

Ma l'errore assoluto reale che si commette nel misurare una lunghezza è solitamente superiore alla sensibilità dello strumento perché le letture delle tacche sono come minimo due (allineamento a sinistra e a destra), possono porsi problemi di trasporto del righello (se è più corto del segmento da misurare), possono infine insorgere errori di natura soggettiva.

In casi del genere si possono assumere due atteggiamenti:

- eseguire una sola misurazione e poi *largheggiare* nel fissare l'errore assoluto; ricordiamo che è più grave prendere un errore troppo piccolo piuttosto che stimarne, precauzionalmente, uno troppo grande;
- eseguire una misurazione ripetuta. In questo caso le operazioni da fare sono le seguenti:
  - riportare in una tabella i valori misurati
  - calcolare il valore medio dei valori ottenuti dopo avere scartato le misure affette da differenze grossolane:

    $$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n} \qquad \text{(b.0.3)}$$

    La sigma maiuscola indica *somma* e si legge *somma di tutti gli* x_i per i che varia da 1 a n. Ovviamente, se un valore si presenta più volte, va contato con la sua molteplicità. [7]
  - calcolare, prudenzialmente, la dispersione come differenza tra il valore più grande e quello più piccolo e prendere poi come errore assoluto la semi dispersione.

    $$\delta = x_{max} - x_{min} \qquad \varepsilon = \frac{\delta}{2} \qquad \text{(b.0.4)}$$

con gli errori è meglio largheggiare piuttosto che restringerne arbitrariamente il valore

il valore medio $\langle x \rangle = \frac{\sum x_i}{n}$

la semidispersione $\varepsilon = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$

0.3.2. PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI NELLE MISURE INDIRETTE

Oltre che nelle misurazioni dirette, gli errori possono essere determinati dagli effetti indotti dalle misurazioni su grandezze che sono ottenute indirettamente. Si parla di *propagazione degli errori* nelle misurazioni indirette.

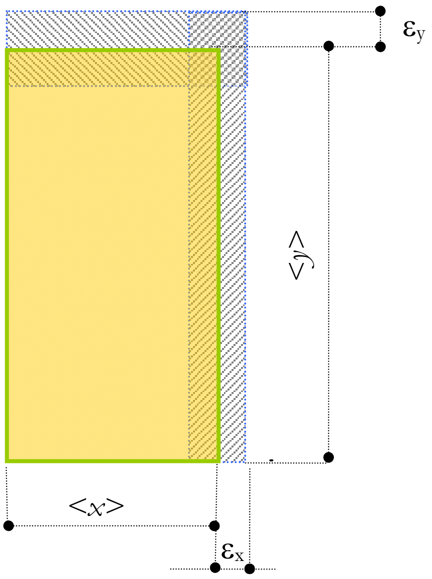
L'esempio più semplice a cui possiamo pensare riguarda il calcolo dell'area di un rettangolo i cui lati sono stati misurati e sono affetti da una imprecisione.

---

5 Si chiama *metrologia* la disciplina che si occupa delle problematiche della misurazione.

6 Qualche autore affermerebbe che la sensibilità è di 1 mm riferendosi alla unità espressa dall'ultima cifra significativa della misura.

7 Si parla di *media pesata* o *media ponderata*



Esercizio: Sia per esempio x = (2.37 ± 0.01) m e y = (5.48±0.01) m. Siamo abituati a calcolare l'area σ come $\sigma = x\, y$, ma quale valore bisogna assumere per x e per y?

Dalla figura si osserva che i rettangoli possibili sono infiniti e che la loro estensione può variare liberamente all'interno della zona delimitata dal tratteggio.

Avremo dunque un'area massima

$$\sigma_{max} = x_{max}\ y_{max}$$

un'area minima

$$\sigma_{min} = x_{min}\ y_{min}$$

e un'area media

$$\langle\sigma\rangle = \langle x\rangle\ \langle y\rangle$$

Pertanto calcoleremo l'errore assoluto di σ attraverso la semi dispersione e, dopo averlo determinato, scriveremo il risultato con il corretto numero di cifre significative.

Nota Bene: è importante che i calcoli provvisori non vengano arrotondati prima di conoscere l'errore per evitare di aggiungere agli errori già presenti ulteriori approssimazioni che possono falsare il risultato.

Con i numeri forniti i risultati sono i seguenti:

$\sigma_{max} = x_{max} y_{max} = 2.38 \times 5.49 = 13.0662$ m^2

$\sigma_{min} = x_{min} y_{min} = 2.36 \times 5.47 = 12.9092$ m^2

$\langle\sigma\rangle = \langle x\rangle\ \langle y\rangle = 2.37 \times 5.48 = 12.9876$ m^2 media aritmetica tra σ_{max} e σ_{min}

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{13.0662 - 12.9092}{2} = 0.0785 \approx 0.08 \text{ m}^2 \quad (8)$$

Pertanto, visto il valore dell'errore, si ha $\sigma = (12.99 \pm 0.08)$ m^2

☺

0.3.3. REGOLA AUREA E DETERMINAZIONE ESATTA DELL'ERRORE

Per evitare di dover calcolare ogni volta il valore massimo, quello minimo, e poi determinare valor medio e semidispersione come nell'esempio precedente, esistono due possibili strategie di *determinazione dell'errore*:

le cifre significative non possono mai aumentare nel corso dei calcoli

- la prima, molto semplice da applicare, dice che poiché nelle determinazioni indirette gli errori tendono a crescere, *il risultato non può mai avere un numero di cifre significative superiore a quello della grandezza misurata che ne ha di meno*. Così, se si moltiplicano due numeri, uno di 4 cifre significative e l'altro di 3 cifre significative, il risultato va scritto con non più di 3 cifre significative. Useremo questo sistema nello scrivere le risposte ai problemi presentati nel corso a meno che sia esplicitamente richiesto il calcolo dell'errore.
- se si desidera una accuratezza migliore si utilizzano alcuni teoremi del calcolo approssimato che ci limitiamo ad enunciare e la cui dimostrazione può essere condotta per esercizio (vedi oltre):

---

[8] Ricordiamo che gli errori vanno espressi con 1 o al massimo 2 cifre significative

- *nella somma e nella differenza di grandezze si sommano sempre gli errori assoluti*. Basta riflettere sul fatto che il valore massimo ed il valore minimo misurati si ottengono rispettivamente quando si sommano a destra e a sinistra del valore medio i due errori assoluti. Dunque se $z = x \pm y$ si ha che $\varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y$.

  La cosa risulta particolarmente *pericolosa* quando si sottraggono grandezze quasi uguali perché ciò può determinare errori relativi molto grandi perché, mentre il numeratore aumenta, il denominatore può diventare quasi zero e ciò determina un rapporto (errore relativo) molto grande.

nella addizione e sottrazione di grandezze omogenee si sommano gli errori assoluti

- *nel prodotto e nel rapporto di grandezze si sommano sempre gli errori relativi.*

  Cioè se $z = x \cdot y$ oppure $z = x / y$ si ha che $\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{rx} + \varepsilon_{ry}$

  La dimostrazione è piuttosto semplice e consiste nell'applicare le definizioni trascurando, nelle somme, le grandezze che non incidono sui risultati perché si collocano al di là delle cifre significative. Se per esempio si ha $\langle x\rangle\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_y$ si trascura il secondo termine rispetto al primo perché gli errori sono, solitamente molto più piccoli delle grandezze misurate.

nella moltiplicazione e nella divisione si sommano gli errori relativi

0.3.4. ESEMPI: COMPETENZE DA ACQUISIRE

- *Esercizio*: *Determinare il risultato della seguente espressione:*

$$y = \sqrt{\frac{2.356\times10^{37}\times3.452\times10^{26}}{7.359\times10^{-39}\times1.602\times10^{-19}}}$$

☹

In casi come questo è buona norma distinguere il calcolo delle cifre significative, che può essere eseguito anche con una banale calcolatrice aritmetica, dal calcolo dell'ordine di grandezza. Ciò per due buone ragioni:

◊ perché il calcolo dell'ordine di grandezza si può eseguire mentalmente e con un rischio di errore inferiore a quello legato alla digitazione di numeri sulla calcolatrice,

◊ perché, anche se si dispone di una calcolatrice scientifica, se il risultato è superiore a 10^{99}, la calcolatrice non riesce a visualizzarlo.

Si esegue dapprima a mente il calcolo dell'ordine di grandezza dell'espressione sotto radice e, applicando le proprietà delle potenze si ottiene 10^{121}.

Poiché 121 è dispari si calcolerà $\sqrt{10^{120}} = 10^{60}$ associando il 10 rimanente al prodotto delle cifre significative $\sqrt{\frac{2.356\times10\times3.452}{7.359\times1.602}} \approx$ 2.626. È importante eseguire questo calcolo con una sola sequenza di operazioni ed approssimarlo alle cifre significative giuste (in questo caso 4).

Pertanto si ottiene $y \approx 2.626 \times 10^{60}$ ☺

- *Esercizio*: *Determinare il valor medio e l'errore assoluto relativi alla seguente serie di misurazioni di uno stesso oggetto:*

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	12.37	12.39	12.41	17.94	12.35	12.34	11.12	12.45	12.41

☹

Osserviamo preliminarmente che le misurazioni 4 e 7 sono molto diverse dai restanti valori e ciò fa temere che si tatti di un errore grossolano; pertanto vengono scartate.

$$<x> = \frac{\sum x_i}{7} = \frac{12.37+12.39+12.41+12.35+12.34+12.45+12.41}{7} = 12.39$$

$$\varepsilon = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} = \frac{12.45 - 12.34}{2} = 0.055 \approx 0.06$$ [9]

Potremo pertanto scrivere che $x = 12.39 \pm 0.06$

☺

- *Esercizio*: *Determinare l'errore assoluto nel calcolo dell'area del rettangolo di cui al punto 2 applicando la propagazione degli errori (somma degli errori relativi):*

  ☹

Se applichiamo il metodo della somma degli errori relativi all'esempio precedente avremo:

$$\varepsilon_{rx} = \frac{0.01}{2.37} \approx 0.00422 \quad \varepsilon_{ry} = \frac{0.01}{5.48} \approx 0.00182$$

$$\varepsilon_{r\sigma} = \varepsilon_{rx} + \varepsilon_{ry} = 0.00604$$

$$\varepsilon_{\sigma} = \varepsilon_{r\sigma} <\sigma> = 0.00604 \times 12.9876 = 0.07844 \text{ m}^2$$

A questo punto, e solo ora, approssimiamo gli errori ad una cifra significativa e il risultato alla cifra su cui incide l'errore; otterremo così: $\sigma = (12.99 \pm 0.08)$ m² come nel calcolo precedente.

☺

- *Esercizio*: *Dimostrare che se* $z = x \cdot y$ si ha che $\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{rx} + \varepsilon_{ry}$.

  ☹

L'errore assoluto su z si otterrà attraverso il calcolo della semidispersione di z; pertanto:

perché si sommano gli errori relativi?

$\varepsilon_z = ½ (z_{max} - z_{min}) = ½ (x_{max}\, y_{max} - x_{min}\, y_{min}) = ½ [(<x> + \varepsilon_x)(<y> + \varepsilon_y) - (<x> - \varepsilon_x)(<y> - \varepsilon_y) = ½ [2<x>\varepsilon_y + 2<y>\varepsilon_x] = <x>\varepsilon_y + <y>\varepsilon_x$.

Se applichiamo ora la definizione di errore relativo avremo che:

$$\varepsilon_{rz} = \frac{\varepsilon_z}{<z>} = \frac{<x>\varepsilon_y + <y>\varepsilon_x}{<x><y>} = \frac{<x>\varepsilon_y}{<x><y>} + \frac{<y>\varepsilon_x}{<x><y>} = \frac{\varepsilon_y}{<y>} + \frac{\varepsilon_x}{<x>} = \varepsilon_{rx} + \varepsilon_{ry}$$

Si procede analogamente nel caso del rapporto, ma bisogna usare l'intelligenza; provare per credere. ☺

[9] Nel dubbio è meglio eccedere

0.4. Il principio di omogeneità delle grandezze

0.4.1. GRANDEZZE FONDAMENTALI E DERIVATE

Le grandezze fisiche si distinguono in *grandezze fondamentali e grandezze derivate*.

- Si chiamano *grandezze fondamentali* quelle grandezze per le quali è stato definito un criterio diretto di misurazione ed è stata definita esplicitamente, con riferimento a quel criterio di misurazione, la unità di misura.
- Si chiamano *grandezze derivate* quelle grandezze che vengono definite attraverso operazioni di tipo algebrico sulle grandezze fondamentali e ciò indipendentemente dal fatto che tali grandezze, attraverso opportuni strumenti di misura, e nell'ambito di una data teoria fisica, possano essere misurate direttamente.

grandezze **fondamentali** sono quelle per cui si utilizza un **processo diretto di misurazione**; le grandezze **derivate** sono quelle esprimibili tramite **operazioni** su quelle fondamentali

Nella storia della scienza, fin dai tempi della rivoluzione francese (1789), è in atto un tentativo di unificare su scala mondiale i metodi di misura e le unità delle grandezze fondamentali e, nel tempo, si sono succeduti diversi sistemi di unità di misura; il prevalere di un sistema rispetto ad un altro è stato legato sia alla evoluzione politico-economica sia al miglioramento delle metodologie di misura su cui si fonda la scelta delle unità.[10]

dal Sistema Giorgi al Sistema Internazionale

Da qualche decina di anni, per accordo internazionale, viene utilizzato il *Sistema Internazionale* (S.I.) e una apposita commissione si riunisce periodicamente per definire (o ridefinire le unità di misura). Non entreremo in questa sede sulla definizione tecnica di alcune di queste unità, perché, spesso, la comprensione delle metodiche presupporrebbe la conoscenza della teoria fisica e ci soffermeremo, invece, brevemente, sulle caratteristiche che tali definizioni debbono rispettare.

In alcuni casi le unità di misura sono *oggetti* (come nel caso del chilogrammo massa). In altri casi sono *concetti* associati a fenomeni, come nel caso della definizione del secondo, associata alla frequenza della luce emessa da un particolare isotopo di un particolare elemento in determinate condizioni. I ogni caso deve esserne garantita la *riproducibilità nello spazio e nel tempo*.

Le unità di misura, oltre che obbedire ad un criterio di riproducibilità, devono essere, ovviamente, definite in maniera univoca. Ci si può chiedere come mai, a partire da definizioni semplici come quella del metro adottata ai tempi della Rivoluzione Francese (*il metro è la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre passante per Parigi*) si sia passati a definizioni complicate come quella attuale (*il metro è pari alla distanza percorsa dalla luce nel vuoto nel tempo* $t = \frac{1}{299'792'458}$ s *mentre il secondo è definito come la durata di 9'192'631'770 periodi della lunghezza d'onda della radiazione emessa dal Cesio 133 nella transizione tra due livelli iperfini dello stato fondamentale).* [11]

i **campioni** per le grandezze fondamentali vanno scelti con criteri di **riproducibilità** nello spazio e nel tempo
Migliorando la riproducibilità si ottengono definizioni che, a prima vista, appaiono bizzarre e astruse

[10] Chiamiamo *sistema di unità di misura* un insieme integrato di definizioni di grandezze ed unità fondamentali associato alla corrispondente definizione delle unità derivate.

[11] Si osservi che con questa definizione del metro la velocità della luce nel vuoto è, per definizione, c = 299'792'458 m/s

La risposta a questa domanda sta ancora nel problema della *riproducibilità e invariabilità* (atomi e luce) delle unità e nel numero di cifre significative associabili a misure eseguite con quella unità. Man mano che migliorano i mezzi di misura si complica la definizione delle unità stesse.

Se non si usasse questo metodo e, si fosse invece deciso che andava bene la definizione originaria dei francesi, ad ogni miglioramento nella misura del meridiano terrestre si sarebbero dovute sostituire tutte le unità campione distribuite nel mondo.

0.4.2. LE UNITÀ FONDAMENTALI DEL SISTEMA INTERNAZIONALE

Il *Sistema Internazionale* adotta le seguenti grandezze fondamentali:

- *lunghezza*: si misura in metri (m) e ha come simbolo dimensionale L
- *tempo*: si misura in secondi (s) e ha come simbolo dimensionale T
- *massa*: si misura in chilogrammi (kg) ed ha come simbolo dimensionale M
- *quantità di materia*: si misura in moli (mol)
- *intensità di corrente*: si misura in ampere (A)
- *temperatura*: si misura in kelvin (K)
- *intensità luminosa*: si misura in candele (cd)

Ognuna di queste grandezze ha una sua *definizione operativa* e una corrispondente definizione della unità. Rinviamo la definizione di queste grandezze allo specifico corso, quando si tratti di grandezze nuove, mentre ci limiteremo ad un breve richiamo quando si tratti di grandezze di uso consueto.

attenzione a non pensare che la somma fisica che è una sovrapposizione di fenomeni e/o operazioni debba sempre corrispondere ad una somma di numeri

In questa sede è invece importante sottolineare quanto già detto all'inizio sulla teoria delle grandezze. Nella definizione di qualsiasi grandezza fisica interviene sempre anche una definizione della *somma* come *sovrapposizione fisica* e non è detto che alla sovrapposizione fisica corrisponda la somma numerica delle corrispondenti misure.

Ciò succede per alcune grandezze che si dicono *estensive* (è il caso della massa) e non succede per altre grandezze (è il caso della temperatura). In effetti se si prendono due corpi di massa 2 e 3 kg e li si considera insieme si ottiene un corpo di 5kg. Ma se si prendono due corpi a temperature diverse e li si mette insieme non si ottiene un corpo con temperatura pari alla somma delle due, anzi la temperatura di equilibrio è sempre intermedia tra esse.

0.4.3. LE UNITÀ DERIVATE DEL SISTEMA INTERNAZIONALE

Le *grandezze derivate* si ottengono attraverso una definizione che utilizza esplicitamente le grandezze fondamentali.

Mentre è ovvio il significato di somma e differenza tra grandezze omogenee (si produce una grandezza omogenea alle precedenti) che senso ha dividere o moltiplicare grandezze omogenee o eterogenee? Ne abbiamo già visto un esempio con il calcolo dell'area del rettangolo. Vediamo un altro esempio che riguarda la divisione di grandezze eterogenee.

Cosa significa dividere un numero che rappresenta uno spazio per un numero che rappresenta un tempo? Osserviamo intanto che non si tratta di un rapporto nel senso tradizionale (il rapporto è un confronto tra grandezze omogenee e produce sempre un numero puro).

Supponiamo che la grandezza $\alpha = a$ ♥ e che la grandezza $\beta = b$ ♣ dove a e b sono delle misure (cioè dei numeri puri) mentre ♥ e ♣ sono le unità di misura di α e β.

Il rapporto $\frac{\alpha}{\beta}$ viene definito semplicemente così:

$$\frac{\alpha}{\beta} = (a : b)\,\frac{♥}{♣} \qquad \text{(b.0.5)}$$

il rapporto di grandezze eterogenee ha come misura il rapporto delle misure ma corrisponde ad una nuova grandezza fisica

$$\frac{\alpha}{\beta} = (a : b)\,\frac{♥}{♣}$$

dove $\frac{\alpha}{\beta}$ è una nuova grandezza fisica, $\frac{♥}{♣}$ è la sua unità di misura e il numero $(a : b)$ è il valore (o misura) della nuova grandezza.

Si dice per esempio che la velocità media è data dal rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato.

Nel dare questa definizione è implicita la scelta di usare *sistemi di unità di misura coerenti* il che vuol dire che se le unità di spazio e tempo sono m ed s la unità di velocità dovrà essere m/s (metro al secondo).

sistemi coerenti di unità di misura sono quelli che fanno derivare le nuove unità di misura dai rapporti di quelle fondamentali

Quando non si usano unità coerenti le leggi e le definizioni contengono sempre una costante adimensionale che esprime il rapporto tra la unità del sistema coerente e la unità adottata al suo posto.

Per esempio, se si sceglie come unità di misura della velocità il chilometro all'ora km/h, la definizione della velocità diventa $v = k\,\frac{\Delta x}{\Delta t}$ dove Δx si misura in metri, Δt si misura in secondi, v si misura in km/h e k vale 3.6 $\frac{km/h}{m/s}$ (che essendo un rapporto tra due velocità è un numero puro).

0.4.4. La espressione dimensionale delle grandezze e il principio di omogeneità delle equazioni fisiche

La espressione dimensionale delle grandezze derivate si fa scrivendole tra parentesi quadre, avremo pertanto:

$$[v] = \left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = \mathrm{L\,T^{-1}}$$

espressione dimensionale di una grandezza

Il *principio di omogeneità delle grandezze fisiche* afferma che poiché le grandezze fisiche sono sempre definite attraverso operazioni di natura algebrica le dimensioni delle grandezze presenti in una legge fisica si associano con le leggi del calcolo algebrico e, poiché le operazioni di somma devono avvenire tra grandezze della stessa specie, ne consegue che *condizione necessaria affinché una legge fisica contenente grandezze diverse sia plausibile è che le grandezze che vengono sommate e confrontate attraverso essa siano della stessa specie, cioè omogenee.* Questo tipo di controllo, in presenza di grandezze di tipo diverso, si fa riconducendosi alle dimensioni delle grandezze fondamentali. Si vedano gli esempi di controllo dimensionale a fine paragrafo.

Per consentire controlli dimensionali diamo, qui di seguito, la definizione dimensionale di alcune grandezze fisiche fondamentali in meccanica. La definizione delle principali di esse va studiata immediatamente per incominciare a memorizzare il legame tra le diverse grandezze.

Nome	Simbolo	Definizione

equazioni dimensionali di grandezze fisiche di uso comune

Nome	Simbolo	Definizione
Area	$\mathcal{A}$, σ	$[A] = L^2$
Volume	V	$[V] = L^3$
Velocità	V	$[v] = L\,T^{-1}$
Angolo	α	numero puro
Accelerazione	A	$[a] = \left[\frac{v}{t}\right] = L\,T^{-2}$
Forza	F	$[F] = [m\,a] = M\,L\,T^{-2}$
Lavoro Energia	$\mathscr{L}$ $\mathscr{E}$	$[\mathscr{L}] = [F\,\Delta x] = M\,L\,T^{-2}\,L = M\,L^2\,T^{-2}$
Potenza	P	$[P] = \left[\frac{\mathscr{L}}{t}\right] = M\,L^2\,T^{-3}$
Densità	ρ	$[\rho] = \left[\frac{M}{V}\right] = M\,L^{-3}$
Quantità di moto	P	$[p] = [mv] = M\,L\,T^{-1}$

Tabella 0.1

0.4.5. CONTROLLO DIMENSIONALE DI UNA RELAZIONE

- *Esercizio*: *Verificare attraverso il controllo dimensionale se la seguente legge che fornisce il periodo di oscillazione di una molla di costante elastica k* [12] *cui sia appesa una massa m è dimensionalmente corretta:* $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

☹

Per verificare la plausibilità calcoliamo le dimensioni del termine di destra che dovrà risultare un tempo: [13]

$$\left[2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right] = M^{½}\,[k]^{-½} = M^{½}\left[\sqrt{\frac{F}{L}}\right]^{-1} = M^{½}\left[\frac{M\,L\,T^{-2}}{L}\right]^{-½} =$$

$$= M^{½}\,M^{-½}\,T = T$$

La formula ha le dimensioni di un tempo e pertanto è dimensionalmente plausibile.

☺

0.4.6. ESEMPIO: DETERMINAZIONE DI UNA LEGGE DA CONSIDERAZIONI DIMENSIONALI

- *Esercizio*: *Supponiamo di sapere da risultati di origine sperimentale che la legge che fornisce la potenza necessaria ad un elicottero per sostenersi in volo dipenda esclusivamente dal peso F dell'elicottero, dall'area A spazzata dalle pale dell'eli-*

---

12 Si chiama costante elastica di una molla la costante di proporzionalità tra la compressione o l'allungamento Δx della molla e la forza esercitata dalla molla stessa. Pertanto $[F] = [k]\,L$

13 Ricordiamo che le radici si possono scrivere come potenze ad esponente frazionario secondo la seguente convenzione derivata dal fatto che i radicali e le potenze hanno le stesse proprietà $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

ca e dalla densità ρ dell'aria. Determinare attraverso considerazioni di ordine dimensionale le caratteristiche matematiche della legge.

☹

Osserviamo che, in base al principio di omogeneità delle grandezze fisiche la legge dovrà essere del tipo: $P = k\, F^{\alpha} A^{\beta} \rho^{\gamma}$

- k è una costante adimensionale dipendente dal sistema di unità di misura scelto (e dunque non determinabile attraverso considerazioni dimensionali),
- α, β, γ sono esponenti opportuni (interi o frazionari) che consentono di fare in modo che il termine di destra sia dimensionalmente una potenza.

Poiché, in base a quanto visto $[P] = M L^2 T^{-3}$ se inseriamo nel termine di destra le grandezze fondamentali avremo:

$[P] = M L^2 T^{-3} = [k\, F^{\alpha} A^{\beta} \rho^{\gamma}] = [M L T^{-2}]^{\alpha} [L^2]^{\beta} [M L^{-3}]^{\gamma} =$

$= M^{\gamma+\alpha} L^{\alpha+2\beta-3\gamma} T^{-2\alpha}$

Per il principio di omogeneità dovranno essere uguali gli esponenti di tutte le grandezze fondamentali presenti e pertanto sarà:

$\gamma + \alpha = 1 \wedge \alpha + 2\beta - 3\gamma = 2 \wedge -2\alpha = -3$

Si tratta di un sistema di equazioni di primo grado che, risolto, ci porta a:

$\alpha = \frac{3}{2} \quad \gamma = 1 - \alpha = -\frac{1}{2} \qquad \beta = \frac{2 + 3\gamma - \alpha}{2} = -\frac{1}{2}$

Pertanto l'espressione ottenuta con considerazioni dimensionali è:

$P = k\, F^{\frac{3}{2}} A^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} = k \sqrt{\frac{F^3}{A\,\rho}}$

Per sottolineare la potenza di questo metodo si tenga presente che il valore vero di questa espressione (cioè quello contenente il valore di k) deducibile entro la teoria fisica e confermata dalla esperienza è:

$P = \sqrt{\frac{F^3}{2\,A\,\rho}}$

☺

0.5. Diamo un po' di numeri

0.5.1. I NUMERI CHE CI DICONO COME È FATTO IL MONDO IN CUI VIVIAMO

In fisica è opportuno conoscere, anche a memoria, *due tipi di numeri*:

- i valori di alcune grandezze fondamentali relative a fenomeni significativi
- i valori di alcune costanti presenti nelle leggi fisiche, costanti non deducibili da ragionamenti, ma il cui valore è stato ottenuto da misurazioni dirette.

alcune costanti fisiche, con il loro valore, ci informano su caratteristiche fondamentali dell'universo

Entrambe questo tipo di informazioni ci dicono *come è fatto l'universo in cui viviamo* nel senso che se una di queste grandezze avesse un valore fortemente diverso sarebbe anche diverso il mondo della nostra esperienza quotidiana.

Per esempio se la accelerazione media di gravità, invece di valere 9.80 m/s² valesse 2 m/s² non riusciremmo a camminare ma in compenso faremmo dei salti in alto di diversi metri e, di conseguenza, nel corso del processo di evoluzione, l'uomo si sarebbe sviluppato diversamente sul piano fisiologico, probabilmente con delle gambe più corte e con una muscolatura meno importante. Lo stesso sarebbe accaduto al sistema scheletrico che, dovendo sorreggere un peso inferiore, avrebbe avuto una struttura più esile.

0.5.2. LE COSTANTI FISICHE FONDAMENTALI

Le *costanti fisiche fondamentali* hanno sempre un numero di cifre significative diverso a seconda del grado di precisione delle esperienze con cui sono state determinate.

le costanti universali espresse nel S.I. che, pian piano, bisogna mandare a memoria perché il loro valore corrisponde a qualche proprietà fondamentale della natura e può essere conosciuto solo misurandolo direttamente

Tabella 0.2: costanti universali		Valore	Unità
Accelerazione media di gravità	g	9.80665	m/s^2
Carica elementare	e	1.602177×10^{-19}	C (C = coulomb)
Costante dei gas perfetti	R	8.31451	J mol^{-1} K^{-1}
Costante di Boltzmann	k	1.38066×10^{-23}	J K^{-1}
Costante di plance	h	6.626075×10^{-34}	J s (J = joule)
Costante dielettrica del vuoto	ε_0	8.85419×10^{-12}	F m^{-1} (F = farad)
Costante gravitazionale	G	6.67259×10^{-11}	N kg^{-2} m^2
Costante magnetica	μ_0	$4\pi\times10^{-7}$	H m^{-1} (H = henry)
Massa di riposo del neutrone	m_n	1.675×10^{-27}	Kg
Massa di riposo del protone	m_p	1.673×10^{-27}	Kg
Massa di riposo dell'elettrone	m_e	9.109×10^{-31}	Kg
Numero di Avogadro	$\mathcal{N}$	6.0221367×10^{23}	mol^{-1}
Pressione standard (atmosfera)	p_0	1.013×10^{5}	Pa (Pa = pascal)
Unità di massa atomica	$a.m.u.$	1.660540×10^{-27}	Kg
Velocità della luce nel vuoto	c	2.99792458×10^{8}	m/s

Le costanti universali della fisica non hanno tutte la stessa importanza e possiamo collocarle in un ordine gerarchico a seconda del peso che esse hanno nel determinare le caratteristiche dell'universo. Per esempio il fatto che l'elettrone sia una particella fondamentale (non dotata di struttura interna), mentre il protone non lo sia, rende più importante per la fisica l'elettrone rispetto al protone.

Il fatto che la velocità della luce nel vuoto si sia dimostrata identica per tutti gli osservatori ha fatto sì che si assumesse essa come strumento per definire l'unità di lunghezza.

0.5.3. I FATTORI DI CONVERSIONE

Oltre alle unità del S.I. sono ancora di uso comune alcune unità non appartenenti ad esso il cui uso è legato ad una migliore possibilità di impiego nel contesto dato. Nella tabella 0.3 vengono forniti i fattori di conversione da utilizzare:

Tabella 0.3	Simbolo	Fattore di conversione	Unità nel S.I
Angström	Å	10^{-10}	m
Caloria	cal	4.180	J
Cavallo vapore	CV	735.5	W
Elettronvolt	eV	1.602×10^{-19}	J
Gauss	G	10^{-4}	T (T = tesla)
Litro	l	10^{-3}	m^3
Parsec	pc	3.086×10^{16}	m
Unità astronomica	UA	1.496×10^{11}	m

da tenere presente

L'errore più comune, quando si operano delle conversioni di unità è legato alla scelta di dividere o moltiplicare per il fattore di conversione. Per non sbagliare, quando si operano le prime conversioni, può essere utile esplicitare le unità come nel seguente esempio:

$$1 \text{ eV} = 1.602\times10^{-19} \text{ J} \Rightarrow 1 \text{ J} = \frac{1}{1.602\times10^{-19}} \text{ eV}$$

Dunque se si vuole sapere il valore in eV della energia di 2.73 J si opererà così:

$$2.73 \text{ J} = 2.73 \text{ J} \times \frac{1}{1.602\times10^{-19}} \text{ eV /J} = 1.704\times10^{19} \text{ eV}$$

0.5.4. COSTANTI SPERIMENTALI E VALORI DI USO COMUNE

Esistono poi alcuni numeri, tra i moltissimi disponibili, che riguardano valori misurati relativi a particolari oggetti o sostanze il cui valore è opportuno conoscere o ritrovare rapidamente. Si consiglia di incominciare con l'abituarsi agli ordini di grandezza delle *costanti sperimentali* di uso comune.

Tabella 0.4	Simbolo	Valore	Unità nel S.I
Densità acqua	ρ_{acqua}	1.00×10^3	kg/m^3
Densità Alluminio	ρ_{Al}	2.70×10^3	kg/m^3
Densità aria in condizioni standard	ρ_{aria}	1.29	kg/m^3
Densità Ferro	ρ_{Fe}	7.87×10^3	kg/m^3
Densità Oro	ρ_{Au}	19.3×10^3	kg/m^3
Densità vapore acqueo a 100°	ρ_{vap}	0.60	kg/m^3
Distanza Terra Luna	R_{TL}	3.84×10^8	m
Distanza Terra Sole	R_{TS}	1.50×10^{11}	m

Tabella 0.4	Simbolo	Valore	Unità nel S.I
Massa del Sole	M_S	1.99×10^{30}	kg
Massa della Luna	M_L	7.35×10^{22}	kg
Massa della Terra	M_T	5.98×10^{24}	kg
Massa di Giove	M_G	1.90×10^{27}	kg
Raggio equatoriale del Sole	R_S	6.96×10^{8}	m
Raggio equatoriale della Luna	R_L	1.74×10^{6}	m
Raggio equatoriale della Terra	R_T	6.38×10^{6}	m
Raggio equatoriale di Giove	R_G	7.13×10^{7}	m

0.5.5. CONFRONTIAMO LUNGHEZZE, TEMPI E MASSE

il **rapporto di due grandezze omogenee** è un numero puro che esprime la misura dell'una rispetto all'altra e pertanto **non dipende dalla unità di misura** con cui le due grandezze sono state espresse

L'ultima tabella è dedicata ad un confronto dimensionale, cioè ad un confronto tra ordini di grandezza relativi alle tre unità fondamentali della meccanica, la lunghezza, il tempo e la massa.

Il lettore tenga presente che mentre la misura di una grandezza dipende dalla unità di misura scelta, il *rapporto di due grandezze omogenee non dipende dalla unità di misura perché rappresenta la misura dell'una rispetto all'altra*. Pertanto il rapporto tra la lunghezza più grande che conosciamo e quella più piccola esprime una proprietà della natura.

Scopriamo così che la escursione nel settore delle masse tra molto grande e molto piccolo è di circa 80 ordini di grandezza ed è nettamente superiore a quella di tempo (60 ordini di grandezza) e lunghezza (40 ordini di grandezza).

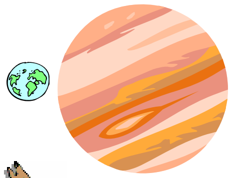
da tenere presente da tenere presente da tenere presente da tenere presente da tenere presente

Lunghezze	m	Durate	s	Masse	kg
Nucleo atomico	10^{-15}	Tempo minimo quantistico	10^{-43}	Elettrone	10^{-30}
Atomo	10^{-11}	Tempo dopo il big bang per la nascita della materia	10^{-33}	Protone	10^{-27}
Molecola semplice	10^{-10}	Luce che attraversa un nucleo	10^{-23}	Atomo di ferro	10^{-25}
DNA	10^{-9}	Vita media del pione	10^{-16}	Molecola antibiotico	10^{-17}
Virus	10^{-8}	Periodo rotazione molecolare	10^{-12}	Virus	10^{-12}
Batterio piccolo	10^{-7}	Reazioni biochimiche	$10^{-8}\div10^{2}$	Polvere	10^{-10}
Luce (lunghezza onda)	5×10^{-7}	Contrazione muscolo	10^{-1}	1 cm^3 di aria	10^{-6}
Batterio grande	10^{-6}	Vita media neutrone	10^{3}	1 cm^3 di acqua	10^{-3}
Microcristalli	10^{-6}	Riproduzione dei mammiferi	10^{7}	Uomo	10^{2}
Uccello	10^{-1}	Durata di 1 Anno	3×10^{7}	Transatlantico	10^{8}
Uomo	10^{0}	Età dell'uomo	6×10^{13}	Atmosfera	10^{18}
Edifici	10^{1}	Differenziazione dalle scimmie	4×10^{14}	Oceani	10^{21}
Montagne	10^{3}	Primi mammiferi	7×10^{15}	Luna	10^{23}
Diametro terrestre	10^{7}	Primi rettili	10^{16}	Terra	10^{25}
Distanza terra-sole	10^{11}	Primi pesci	2×10^{16}	Giove	10^{27}
Anno luce	10^{16}	Batteri e alghe primitivi	10^{17}	Sole	10^{30}
Raggio della galassia	3×10^{20}	Età sistema solare	1.5×10^{17}	Galassia	2×10^{41}

Lunghezze	m	Durate	s	Masse	kg
Nebulosa più vicina	3×10^{22}	Età della galassia	3×10^{17}	Universo	10^{51} ?
Universo visibile (raggio)	3×10^{25}	Età dell'universo	5×10^{17}	**Tabella 0.5**	

0.5.6. I PRIMI CALCOLI USANDO LE TABELLE DELLE COSTANTI

Vediamo operativamente come le tabelle delle *costanti* consentano di derivare informazioni utili.



- *Esercizio: determinare la densità della Terra e confrontarla con quella di Giove.*

☹

La densità è data dal rapporto tra la massa e il volume mentre il volume della sfera è $\frac{4}{3}\pi R^3$ pertanto:

$$\rho_T = \frac{M_T}{V_T} = \frac{3M_T}{4\pi\, R_T{}^3} = \frac{3\times5.98\times10^{24}}{4\times\pi\times6.38^3\times10^{18}} = 5.5\times10^3 \text{ kg/m}^3$$

Applicando lo stesso metodo, per il caso di Giove si ottiene invece: 1.3×10^3 kg/m^3

Se fosse stato richiesto il solo confronto delle densità sarebbe stato più utile eseguire un solo calcolo dopo aver determinato la relazione simbolica corrispondente al rapporto delle densità; infatti nel rapporto si sarebbero semplificate tutte le costanti presenti nella relazione ed il calcolo sarebbe risultato più rapido.

☺

- *Esercizio: calcolare il volume occupato da una molecola d'acqua allo stato liquido.*

☹

Il peso molecolare dell'acqua H_2O è 18 e si ottiene dal fatto che i pesi atomici di ossigeno e idrogeno sono, rispettivamente, 16 e 1. Pertanto una mole di acqua corrisponde a 18 g = 1.8×10^{-2} kg.

Poiché la densità dell'acqua è 10^3 kg/m^3, ne consegue che il volume occupato da 1 mole è:

$V = \frac{M}{\rho} = \frac{1.8\times10^{-2}}{10^3} = 1.8\times10^{-5}$ m^3. Ma poiché in 1 mole è contenuto un numero di molecole pari al numero di Avogadro si ha, indicando con $\mathcal{V}$ il volume a disposizione di una molecola:

$$\mathcal{V} = \frac{V}{\mathcal{N}} = \frac{1.8\times10^{-5}}{6.02\times10^{23}} = 0.30\times10^{-28} \text{ m}^3.$$

Se teniamo conto del fatto che l'acqua è praticamente incomprimibile potremo affermare che, quello trovato può essere considerato una buona stima del volume molecolare e, poiché il volume è, dimensionalmente una L^3 potremo determinare la *dimensione lineare di una molecola* estraendo la radice cubica:

$$L \approx \sqrt[3]{0.30\times10^{-28}} = 3\times10^{-10} \text{ m} \quad [14]$$

[14] Il simbolo ≈ serve a rappresentare *uguale circa*. Precisiamo inoltre che il simbolo ÷ serve a rappresentare un intervallo; così 10÷15 significa compreso tra 10 e 15. Il simbolo ∝ indica proporzionalità.

☺

- *Esercizio*: *stimare lo spazio disponibile per una molecola d'acqua allo stato di vapore alla temperatura di 100°.*

☹

Dalla tabella 04 sappiamo che la densità del vapor acqueo nelle condizioni date è di 0.60 kg/m³ e pertanto si possono ripetere i ragionamenti di cui al punto precedente ottenendo:

$$V' = \frac{M}{\rho} = \frac{1.8\times10^{-2}}{0.60} = 3.0\times10^{-2}\,\mathrm{m}^3$$

$$\mathcal{V}' = \frac{V'}{\mathcal{N}} = \frac{3.0\times10^{-2}}{6.02\times10^{23}} = 0.50\times10^{-25}\,\mathrm{m}^3$$

$$\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} \approx 1.7\times10^3$$

dunque, quando si trova allo stato di vapore, la molecola d'acqua, le cui dimensioni, ovviamente non mutano in maniera sensibile, si trova ad occupare uno spazio pari a 1700 volte le sue dimensioni.
Se calcoliamo la radice cubica di $\mathcal{V}'$ otterremo la dimensione lineare dello spazio disponibile:

$l' = \sqrt[3]{\mathcal{V}'} = 3.7\times10^{-9}$ m e dunque una molecola allo stato di vapore ha a disposizione uno spazio lineare che è grosso modo pari a 10 volte la sua dimensione

- *Esercizio*: *stimare la densità del protone ipotizzando che le sue dimensioni siano approssimativamente le dimensioni tipiche nucleari e cioè 10^{-15} m.*

☹

Se assimiliamo il protone ad un cubo (ma non cambia molto se ci si riferisce ad una sfera) il suo volume tipico risulta $(10^{-15})^3 = 10^{-45}\,\mathrm{m}^3$ e pertanto, vista la sua massa (tabella 01) si ha:

$$\rho \approx \frac{10^{-27}}{10^{-45}} = 10^{18}\,\mathrm{kg/m^3}$$

Osserviamo che si tratta di un valore nettamente superiore alla materia più densa che conosciamo sulla terra (10^4) e ciò induce a riflettere sulla necessità di staccarsi, nei ragionamenti scientifici, dagli ambiti angusti della sola esperienza sensibile.

☺

0.6. Grandezze proporzionali

0.6.1. La proporzionalità diretta e inversa

La matematica necessaria per capire gli aspetti essenziali della fisica non è molta, ma cambia il modo con cui certi concetti, noti fin dalla scuola media, vengono utilizzati.

Due *grandezze* si dicono *direttamente proporzionali quando il rapporto tra di esse è costante*. Il concetto è molto semplice, ma molto spesso ci si dimentica di dire che le grandezze considerate sono variabili, che mentre esse variano, altri aspetti del fenomeno considerato devono rimanere costanti, e che bisogna dire quali siano.

quando si discute di proporzionalità non dimenticarsi di precisare cosa cambia e cosa non cambia

Due *grandezze* si dicono *inversamente proporzionali quando il loro prodotto rimane costante*.

0.6.2. Le leggi della proporzionalità

Consideriamo la seguente relazione che lega tre grandezze:

$$z = \frac{x}{y}$$

Con riferimento ad essa diremo che, se z è costante, x e y sono direttamente proporzionali, mentre che, se x è costante, z e y sono inversamente proporzionale; infine, se y è costante, x e z sono direttamente proporzionali.

proporzionalità diretta: rapporto costante
proporzionalità inversa: prodotto costante

Quando due grandezze x e y sono direttamente proporzionali useremo il simbolo $\propto$ e scriveremo:

$$x \propto y$$

mentre z sarà la costante di proporzionalità tale che $x = z\,y$.

La proporzionalità è fondamentale per capire l'evoluzione dei fenomeni. Se conosco il valore di x e y in un caso, per esempio x_1 e y_1, il loro modo di variare rispetterà il rapporto iniziale $\frac{x_1}{y_1} = z$ e pertanto dato y_2 sarà $x_2 = z\,y_2$ o anche

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Nel caso della proporzionalità inversa scriveremo:

$$z \propto \frac{1}{y}$$

e avremo che

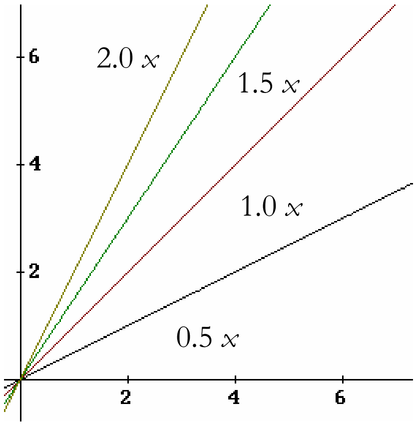
$$x_1 y_1 = x_2 y_2 \text{ o anche } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

I risultati presentati sono condensati nella seguente tabella riassuntiva in cui si evidenziano le diverse proprietà:

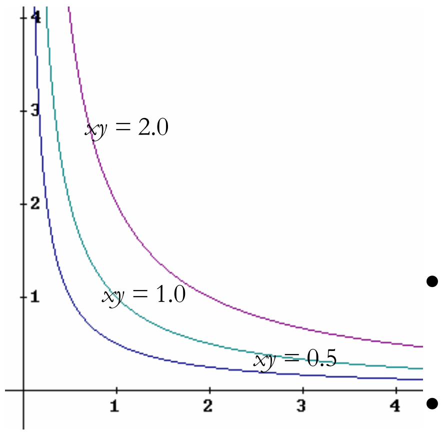
proporzionalità diretta	$x \propto y$	$\frac{x}{y} = \text{cost}$	$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$	(b.0.6)
proporzionalità inversa	$x \propto \frac{1}{y}$	$x\,y = \text{cost}$	$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$	(b.0.7)

0.6.3. I DIAGRAMMI DELLA PROPORZIONALITÀ

Le grandezze direttamente proporzionali hanno come *diagramma* una retta passante per l'origine, mentre quelle inversamente proporzionali hanno come diagramma una particolare curva decrescente detta *iperbole equilatera.*



proporzionalità **diretta**: retta per l'origine



proporzionalità **inversa**: iperbole

La iperbole equilatera è caratterizzata dal fatto che quando il termine in ascissa diventa piccolo (va verso lo zero) quello in ordinata diventa arbitrariamente grande (va verso l'infinito) e viceversa

Al crescere della costante di *proporzionalità* le rette risultano più inclinate mentre le iperboli si allontanano dall'origine.

Si osservi che i diagrammi della fisica, molto spesso non utilizzano la stessa scala sia per esigenze di rappresentazione del fenomeno (che potrebbe presentare insiemi di valori molto grandi per una grandezza e molto piccoli per l'altra), sia perché i due assi, in generale, riportano grandezze fisiche di tipo diverso. La problematica dei fattori di scala sarà ripresa più avanti.

La nozione di proporzionalità non riguarda sempre grandezze con esponente unitario e può avvenire sia con esponenti di tipo maggiore di uno sia con esponente minore di 1 compresi quelli frazionari. Per esempio l'area del quadrato è direttamente proporzionale al quadrato del lato.

I diagrammi della proporzionalità per i casi di esponenti diversi da 1 e –1 sono diversi sia dalla retta sia dalla iperbole e verranno esaminati man mano che si incontreranno i relativi fenomeni.

0.6.4. ESEMPI DI PROPORZIONALITÀ

- Quando un corpo viene lasciato cadere da fermo lungo la verticale lo spazio percorso è proporzionale al quadrato del tempo trascorso mentre la velocità è proporzionale alla prima potenza del tempo.
- Il periodo di oscillazione di un pendolo è direttamente proporzionale alla radice quadrata della lunghezza l, cioè $T \propto \sqrt{l} = l^{1/2}$ ed equivalentemente $l \propto T^2$.
- Come cambia il periodo se la lunghezza raddoppia ? Per quanto detto in precedenza si ha $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} = \sqrt{2}$ pertanto $T_2 = \sqrt{2}\, T_1$

- Come deve cambiare la lunghezza per raddoppiare il periodo? Si ha si ha $\frac{l_2}{l_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 4$. Pertanto $l_2 = 4\, l_1$

0.7. Leggere e costruire un diagramma

0.7.1. IL FATTORE DI SCALA

Per rappresentare il legame tra due grandezze il modo più semplice e completo è quello basato sull'utilizzo dei diagrammi. I diagrammi vengono costruiti disponendo sull'asse delle ascisse (solitamente orizzontale) la grandezza che si ipotizza vari liberamente (la *causa*) e sull'asse delle ordinate quella che fa da *effetto* (variabile dipendente).

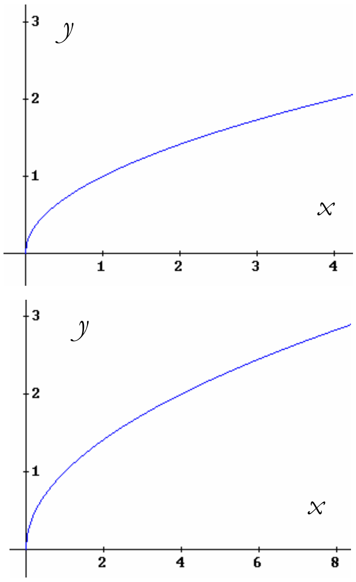
Come si è già osservato, trattandosi di grandezze non omogenee, non ha senso rappresentarle nella stessa scala e dunque, in generale si fisseranno due fattori di scala diversi.

Si chiama *fattore di scala* il rapporto (costante) tra la il valore della grandezza rappresentata e la corrispondente misura (solitamente in cm nel caso di un libro o di una dispensa). Pertanto se indichiamo con α il fattore di scala della grandezza x rappresentata da una lunghezza l_x avremo che $x = \alpha\ l_x$.

Quando si legge un diagramma la conoscenza del fattore di scala è essenziale perché la possibilità di determinare le *coordinate fisiche* di un punto è legata alla lettura di quelle geometriche con un righello e alla successiva traduzione attraverso i *fattori di scala*.

Si osservi che quando si cambia la scala di un diagramma esso subisce delle dilatazioni o contrazioni ma la sua *forma non cambia*. (15)

Nella seconda figura è rappresentato lo stesso fenomeno dopo che si è scelto un fattore di scala 2 volte superiore lungo l'asse delle x e l'effetto è stato quello di una contrazione.



la stessa legge con diverso fattore di scala

0.7.2. COME SI FISSA IL FATTORE DI SCALA?

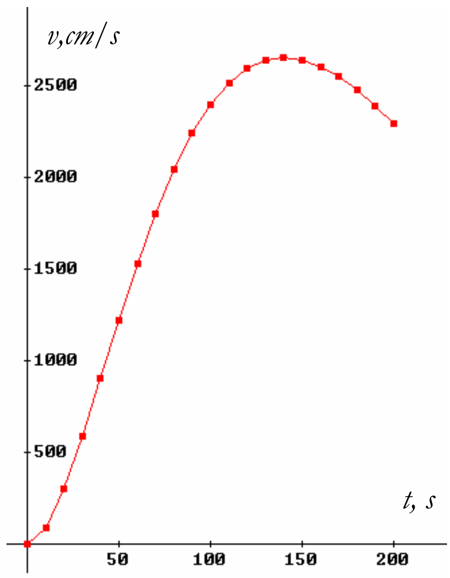
I diagrammi possono essere costruiti in due modi: a partire da una legge matematica che lega le grandezze considerate, oppure a partire da una tabella di valori. Il primo caso si riduce al secondo perché la tabella si ottiene per sostituzione di valori all'interno della legge.

Esercizio: Supponiamo dunque di possedere una tabella come la seguente in cui sono rappresentati dei tempi espressi in secondi e delle velocità espresse in cm/s.

t, s	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
v, cm/s	0	87	301	586	904	1224	1528	1803	2041	2239	2397
t, s		110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
v, cm/s		2514	2593	2638	2653	2640	2604	2548	2476	2392	2297

Per disegnare il corrispondente diagramma bisogna fissare, in primo luogo, i due fattori di scala e per farlo bisogna stabilire in anticipo la dimensione del disegno che si desidera.

Se decidiamo, per esempio, che il diagramma debba essere largo 6 cm fisseremo per l'asse dei tempi il fattore di scala $\alpha = 200/6 = 33.3$ s/cm



rappresentazione di dati da tabella e interpolazione

15 Con la dizione *la forma non muta* si intende affermare che alcune caratteristiche importanti della curva non si modificano; così: i massimi rimangono massimi, la concavità non muta, l'ordine dei diversi punti non muta, …

Se decidiamo poi che il diagramma debba essere alto 7 cm visto che la velocità massima è compresa tra 2500 e 3000 cm/s fisseremo un fattore di scala β = 3000/7 = 428.6 (cm/s)/cm = 428.6 s^{-1}.

A questo punto disegneremo gli assi riportando un po' di valori che agevolano la lettura (non necessariamente quelli della tabella). La rappresentazione dei punti può essere fatta o usando una griglia (tipo carta millimetrata) oppure dividendo il valore tabellato per il corrispondente fattore di scala. Per esempio, il punto t = 100 s e v = 2239 cm/s corrisponderà ad una ascissa (100s)/(33.3 s/cm) = 3.00 cm e ad una ordinata (2397 cm/s)/(428.6 s^{-1}) ≈ 5.59 cm; e così via.

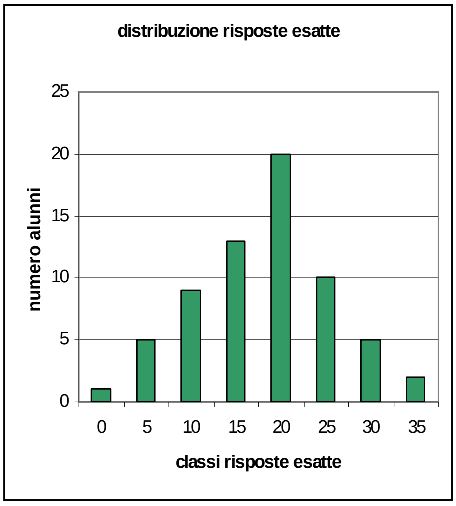
Dopo aver rappresentato i diversi punti li si raccorderà in maniera continua ottenendo un risultato del tipo indicato nella Figura qui a lato.

La figura rappresentata va considerata come indicativa perché le sue dimensioni sono state scelte con criteri di natura puramente tipografica, pertanto i valori di α e β, pur rispettando la corrispondenza con i dati potrebbero risultare diversi da quelli indicati.

0.7.3. GLI ISTOGRAMMI

Oltre ai diagrammi continui, nella scienza si utilizzano, in alcuni casi i cosiddetti *istogrammi*. Un istogramma è un diagramma che, invece di rappresentare grandezze continue, rappresenta grandezze discontinue e questa situazione si verifica tutte le volte che si vogliono rappresentare gli elementi di una popolazione finita.

Supponiamo, per esempio, di voler rappresentare la frequenza nella distribuzione delle altezze di una popolazione finita di uomini. Poiché ogni uomo ha la sua propria altezza diversa da quella di un altro (per rendersene conto basta pensare a cosa accade se la precisione della misura viene spinta molto in avanti) è più conveniente prendere la popolazione e dividerla in classi di altezza, cioè in raggruppamenti in cui gli individui hanno altezze comprese tra un valore minimo ed un valore massimo predeterminati.



Un altro esempio si ha quando si vogliono rappresentare i valori di una certa grandezza in intervalli di tempo predeterminati come nel caso del tasso di inflazione nei diversi mesi dell'anno. Anche se il tasso è teoricamente diverso istante per istante, lo si misura convenzionalmente mese per mese e poi se ne rappresenta l'andamento attraverso un istogramma, cioè una serie di rettangoli della stessa base (i mesi) la cui altezza è il tasso di inflazione.

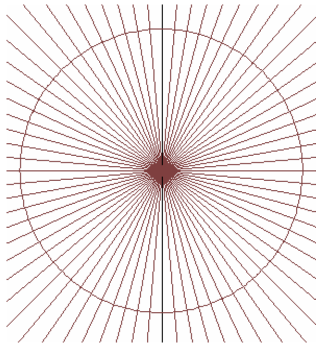
La figura rappresenta l'istogramma con il numero di alunni che hanno risposto correttamente ad un compito a risposta chiusa, dividendo gli alunni stessi in classi sulla base del numero di risposte esatte.

Classe	0÷4	5÷9	10÷14	15÷19
N. alunni	1	5	9	13
Classe	20÷24	25÷29	30÷34	35÷40
N. alunni	20	10	5	2

0.8. Le funzioni trigonometriche e la pendenza di una curva

0.8.1. LA MISURA DEGLI ANGOLI

Si chiama *angolo* la *porzione di piano racchiusa tra due semirette*. Da tempo immemorabile, per la precisione dai tempi della civiltà babilonese, gli angoli vengono confrontati e misurati osservando la loro capacità di suddividere la circonferenza in archi.

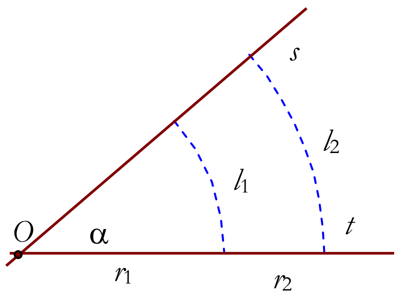


i gradi sessagesimali corrispondono alla divisione dell'angolo giro in 360 parti e sono una unità di misura *preistorica*

La prima unità di misura introdotta, il grado sessagesimale, è ancora largamente utilizzata, anche se non fa parte del S.I. e anche se rivela, proprio nella definizione, il suo *carattere arcaico.*

Si chiama *grado sessagesimale* si indica con ° la trecentosessantesima parte dell'angolo giro. La scelta di suddividere l'angolo giro in 360 parti risale a civiltà che, non conoscendo l'uso delle frazioni (e dei numeri decimali), erano costrette ad utilizzare definizioni che consentissero la suddivisione dell'angolo di riferimento in forma esatta secondo numerosi rapporti. Il numero 360 risulta divisibile per 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, …

La definizione della misura angolare del Sistema Internazionale prende le mosse da una osservazione di natura geometrica illustrata nella Figura.



la misura in radianti si basa sulla costanza del rapporto tra arco e raggio al variare del raggio

Dato un angolo $t\hat{O}s$ se si tracciano con centro O diverse circonferenze di raggi r_1, r_2, … esse individuano sull'angolo archi di lunghezza variabile l_1, l_2, …

Con considerazioni geometriche si dimostra che $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$ cioè il rapporto tra la lunghezza dell'arco e il raggio non dipende dalla particolare circonferenza ma solo dalle caratteristiche dell'angolo. Per questa ragione, si assume come misura α dell'*angolo* $t\hat{O}s$ la quantità costante:

$$\alpha = \frac{l}{r} \qquad \text{(b.0.7)}$$

La unità di misura è detta *radiante e corrisponde all'angolo che fornisce valore unitario alla definizione cioè all'angolo per il quale l'arco e il raggio corrispondente sono uguali.*

Il legame tra la misura di un angolo in radianti α e la corrispondente misura in gradi α° si ottiene attraverso una semplice proporzione. In effetti poiché il metodo di misurazione è lo stesso, mentre cambia la unità di misura, il rapporto tra un angolo in gradi e lo stesso angolo in radianti avrà lo stesso valore del rapporto per un particolare angolo (per esempio l'angolo piatto).

la conversione gradi radianti si fa attraverso una semplice proporzione

L'angolo piatto, in radianti, è pari alla semicirconferenza (π *r*) divisa per il raggio e dunque vale π. Lo stesso angolo in gradi vale 180. Avremo pertanto che:

$$\frac{\alpha°}{\alpha} = \frac{180}{\pi} \qquad \text{(b.0.8)}$$

Dalla (b.0.8) si ottiene ponendo α = 1 che il radiante in gradi vale $\frac{\alpha°}{1} = \frac{180}{\pi} \approx 57°$

La *conversione* tra gradi e radianti e viceversa, si fa attraverso la (b.0.8).

La tabella 0.6 illustra alcuni valori angolari tipici che è bene memorizzare nelle due unità.

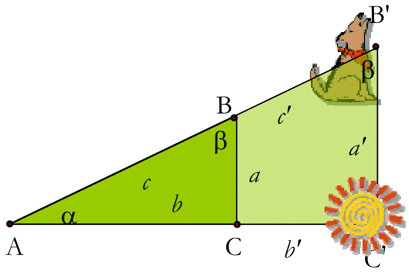
$\alpha°$	α	$\alpha°$	α	$\alpha°$	α
30	$\frac{\pi}{6}$	45	$\frac{\pi}{4}$	60	$\frac{\pi}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	120	$\frac{2\pi}{3}$	135	$\frac{3\pi}{4}$
150	$\frac{5\pi}{6}$	180	π	360	2π

Tabella 0.6

0.8.2. Definizione di Seno Coseno e Tangente

È ben noto dai corsi di matematica della scuola inferiore che i triangoli che possiedono angoli eguali, pur avendo dimensioni diverse, hanno la stessa forma e presentano i lati corrispondenti in proporzione.

Consideriamo, in particolare due triangoli rettangoli simili $\overset{\Delta}{ABC}$ e $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ con l'angolo retto in C e C', indichiamo con α e β i due angoli acuti in A e B e indichiamo con le lettere minuscole le misure dei lati opposti ai vertici (a, b, c, a', b', c') come in Fig. 0.8.



seno, coseno, tangente

$\frac{a}{b}=\tan\alpha \quad \frac{a}{c}=\sin\alpha \quad \frac{b}{c}=\cos\alpha$

Per quanto detto sarà $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Questa catena di uguaglianze può essere scritta diversamente attraverso rapporti che confrontano i lati di uno stesso triangolo:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \text{costante} \qquad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \text{costante} \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \text{costante}$$

Poiché i rapporti considerati sono costanti al variare del triangolo potremo affermare che si tratta di elementi caratteristici dell'angolo α (o dell'angolo β che ne è il complementare).

In effetti, per *seno, coseno e tangente* si pone per definizione:

$$\frac{a}{b} = \tan\alpha \qquad \frac{a}{c} = \sin\alpha \qquad \frac{b}{c} = \cos\alpha \qquad \text{(b.0.8)}$$

Dunque, *dato un triangolo rettangolo la tangente dell'angolo è il rapporto tra i due cateti (quello opposto diviso quello adiacente) mentre il seno è il rapporto tra cateto opposto ed ipotenusa e il coseno è il rapporto tra cateto adiacente ed ipotenusa.*

Le funzioni goniometriche si trovano in apposite tabelle e su tutte le macchine calcolatrici scientifiche e consentono di determinare completamente le caratteristiche di un triangolo rettangolo noti due suoi elementi che non siano due angoli (perché in tale caso i triangoli possibili sono gli infiniti triangoli simili tra loro). [16]

0.8.3. Esempi

Applicazioni relative all'uso delle funzioni goniometriche *seno, coseno e tangente.*

- *Esercizio*: *determinare gli elementi di un triangolo rettangolo sapendo che: a = 3.00 cm, b = 7.21 cm*

☹

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{3.00}{7.21} = 0.416 \qquad \alpha = \tan^{-1}(b.0.416) = 22.59°$$

---

16 Sulle calcolatrici scientifiche basta digitare l'angolo e premere poi l'apposito tasto per avere *seno, coseno e tangente*. Invece, dato il seno per avere l'angolo occorre digitare il valore e quindi premere in sequenza il tasto di seconda funzione (detto anche *shift)* seguito da seno per avere la funzione inversa del seno, cioè quella che dà l'angolo se si digita il seno. Lo stesso discorso vale per coseno e per tangente.

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{3.00}{0.384} = 7.81 \text{ cm}$$

☺

- *Esercizio*: determinare gli elementi del triangolo rettangolo sapendo che: $a = 3.00$ cm, $\beta = 37.2°$

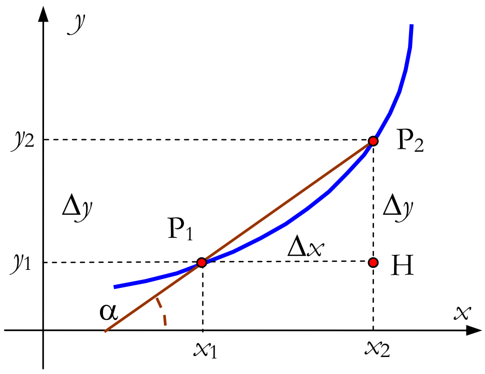
  ☹

$$\tan\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \tan\beta = 3.00 \tan 37.2° = 2.28 \text{ cm}$$

$$c = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{2.28}{\sin 37.2} = 3.77 \text{ cm}$$

☺

0.8.4. La tangente goniometrica e la pendenza di una curva



la tangente come pendenza di una curva

La *tangente goniometrica* ha un significato particolarmente importante perché, per indicare la pendenza di una curva in un intervallo dato, si prendono due punti sul diagramma e si misura il rapporto delle variazioni di coordinate tra la variabile dipendente e quella indipendente.

Precisamente, con riferimento alla Figura si chiama *pendenza della curva nel tratto P_1P_2 il rapporto*

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h\ \overline{HP_2}}{k\ \overline{P_1H}} = \frac{h}{k} \tan\alpha \qquad \text{(b.0.9)}$$

dove si sono indicati con h e k i fattori di scala dell'asse y e dell'asse x.

Possiamo dunque concludere che *la pendenza di una curva è la tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla retta secante per il rapporto dei fattori di scala*. In particolare se i fattori di scala sono uguali allora la pendenza è proprio la tangente trigonometrica.

La pendenza di una curva ci informa della maggiore o minore rapidità con cui il fenomeno (rappresentato sull'asse y) varia al variare della grandezza rappresentata sull'asse x.

Abituiamoci dunque, dato un diagramma, a percepirne, anche visivamente, la pendenza (legata all'angolo) come un buon indicatore del modo con cui il fenomeno sta cambiando.

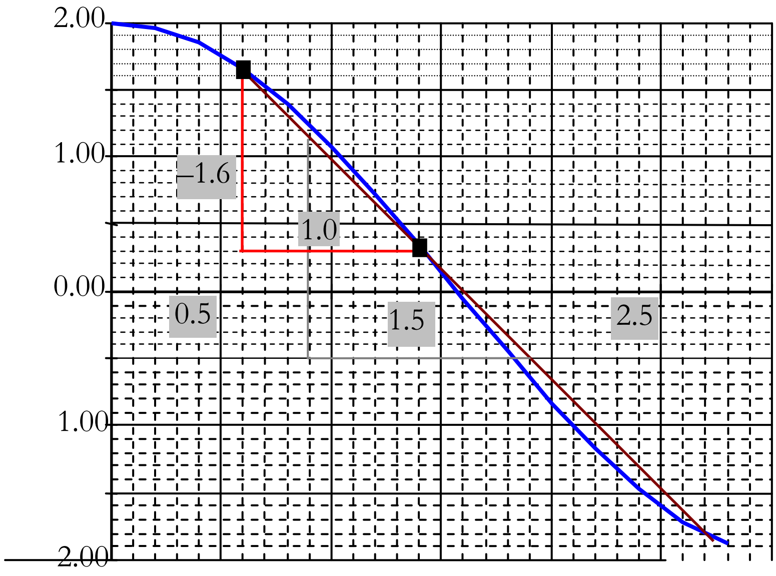
G. W. Leibnitz (1646–1716)crea gli strumenti matematici necessari allo studio delle curve

0.8.5. Esempio di determinazione della pendenza

Dato un diagramma il metodo più rapido ed efficace per determinare il valore della pendenza tra due suoi punti è quello di tracciare la retta secante che passa per i due punti dati e quindi misurare Δy e Δx su un intervallo comodo da misurare perché tanto l'inclinazione della retta non dipende da dove la si misura (se si prende $\Delta x = 1$ il valore di Δy fornisce direttamente la pendenza).

Si osservi, a questo proposito, l'esempio della figura di pagina seguente.

Esercizio Si vuole *calcolare la pendenza* della secante che unisce i due punti anneriti. A questo scopo si considerano sulla retta secante due punti qualsiasi per i quali sia comodo il calcolo di Δy e Δx.



Nel caso considerato risulta $\Delta x = 1.0$ e $\Delta y = -1.6$ pertanto la pendenza è –1.6. Si osservi che le misure sono state effettuate sfruttando la griglia di retinatura che risulta formata da rettangoli entrambi di ampiezza 0.1 (il fatto che siano dei rettangoli e non dei quadrati è una conferma del fatto che i due fattori di scala non sono uguali).

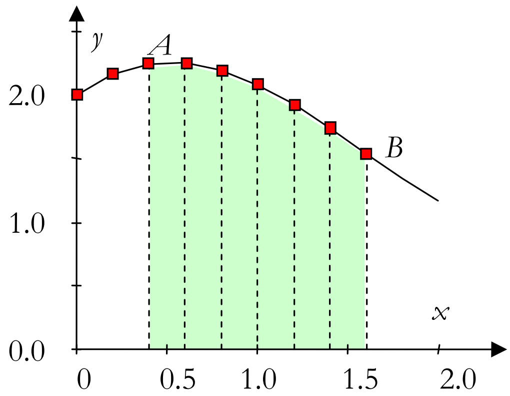
0.9. Il calcolo dell'area sottesa da un diagramma

Nei calcoli di fisica capita spesso di dover calcolare, per determinare il valore di grandezze derivate, l'*area sottesa da un diagramma* che rappresenta altre grandezze.

Il metodo più semplice per eseguire tale calcolo è quello di suddividere l'intervallo della variabile indipendente in tanti intervallini uguali e sufficientemente piccoli di ampiezza δx in modo che il diagramma risulti dalla sovrapposizione di tanti trapezi rettangoli di altezza δx.

A questo punto, detta $\delta\sigma$ l'area di uno di questi singoli trapezi, l'area racchiusa dal diagramma è semplicemente la somma dei $\delta\sigma$ e si scrive:

$\sigma = \sum \delta\sigma$.



l'area sottesa da un diagramma curvilineo come somma delle aree di trapezi

Consideriamo, a titolo di esempio, il diagramma della figura qui a lato e supponiamo di voler calcolare l'area racchiusa tra i punti A e B.

Esercizio: L'area di ogni trapezio può essere calcolata in due modi: o con la formula dell'area del trapezio o come area di un rettangolo equivalente.

- Nel primo caso, se si indicano con y_i e y_f le ordinate nei due estremi del trapezio elementare e si suppone di aver diviso in n intervallini di ampiezza identica si ha:

$\delta x = \dfrac{x_B - x_A}{n}$ mentre $\delta\sigma = \dfrac{y_i + y_f}{2}\,\delta x$

Poiché ½ δx ha lo stesso valore in tutta la somma lo si può mettere in evidenza e si ottiene:

$\sigma = \sum \delta\sigma = ½\,\delta x\,[(y_A + y_1) + (y_1 + y_2) + \dots + (y_{n-1} + y_B)] =$

$= \delta x\,[½(y_A + y_B) + \sum y_i]$ e pertanto:

$$\sigma = \delta x\,[½(y_A + y_B) + \sum y_i] \qquad \text{(b.0.10)}$$

La somma si riferisce alle ordinate intermedie tra quella iniziale e finale, cioè a n–1 (nel nostro caso, avendo usato 6 intervalli esse sono 5).

Nell'esempio considerato risulta:

$\delta x = (1.6 - 0.4)/6 = 0.2$

$\sigma = 0.2\,[½(2.20 + 1.55) + (2.25 + 2.20 + 2.10 + 1.90 + 1.70) = 2.40\ \upsilon_x \upsilon_y$

- Nel secondo caso, se si indica con $\tilde{y}_i$ un valore medio (che si legge, per esempio, a metà intervallo) si ha $\delta\sigma_i = \tilde{y}_i\,\delta x$ e si ottiene:

$$\sigma = \delta x \sum \tilde{y}_i \qquad \text{(b.0.11)}$$

e la somma si riferisce agli n intervallini prescelti.

Nell'esempio considerato risulta:

$\delta x = (1.6 - 0.4)/6 = 0.2$

$\sigma = 0.2\,(2.25 + 2.20 + 2.15 + 2.00 + 1.80 + 1.60) = 2.40\ \upsilon_x \upsilon_y$

0.10. La retta e la parabola

0.10.1. L'EQUAZIONE DELLA RETTA

La *retta* è la curva di pendenza costante e il suo diagramma è rappresentato da una equazione molto semplice, la equazione di I grado.

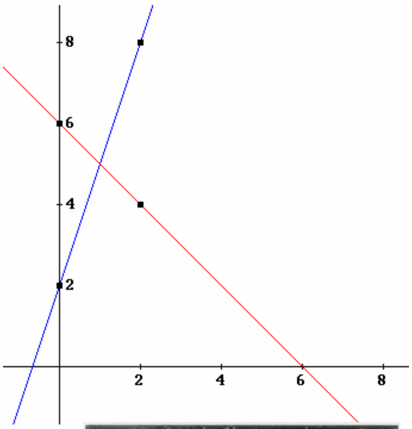
$$y = mx + q \qquad \text{(b.0.12)}$$

dove m e q sono due costanti il cui significato sarà spiegato tra breve.

r: $y = 3x + 2$

s: $y = -x + 6$

x	y_r	y_s
0	2	6
2	8	4



Per disegnare una retta è sufficiente sostituire alla variabile x due particolari valori ed ottenere i corrispondenti valori di y come nell'esempio riportato qui a lato.

Si osservi che la prima retta ha un andamento crescente mentre la seconda è decrescente e questa caratteristica, come vedremo tra breve è legata al valore di m.

Osserviamo ancora che la ordinata del punto di ascissa 0 vale sempre q, perché se si sostituisce 0 al posto di x nella 0.12 si ha che

$y = m\,0 + q = q$.

Pertanto il punto $(0,q)$ è sempre il primo punto da cui partire disegnando una retta e rappresenta il punto di intersezione con l'asse delle ordinate.

Supponiamo che i punti A e B appartengano ad una retta r: $y = mx + q$.

Poiché il rapporto $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ rappresenta la inclinazione (che nella retta è costante) cerchiamo di stabilire da quali elementi della equazione essa dipende.

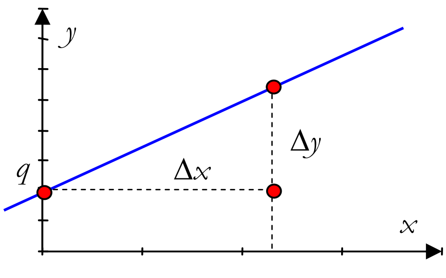
Per il punto $A \equiv (x_A , y_A)$ e per il punto $B \equiv (x_B , y_B)$ si ha, dalla equazione:

$y_A = m\,x_A + q \qquad y_B = mx_B + q$

per cui, facendo la differenza delle due equazioni, si elimina q e si ottiene $y_B - y_A = m\,(x_B - x_A)$, cioè:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{(b.0.12)}$$

dunque possiamo affermare che *nella equazione della retta il coefficiente della x rappresenta l'inclinazione della retta, e lo si chiama coefficiente angolare.*



il coefficiente angolare o pendenza della retta è il rapporto costante $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Visto che m è la inclinazione della retta suggeriamo un metodo per il tracciamento delle rette, alternativo e più significativo di quello banale che consiste nel determinare due punti per sostituzione.

Si segna il punto $(0,q)$ e, a partire da esso, ci si sposta di un valore qualsiasi Δx lungo la orizzontale; il corrispondente spostamento verticale vale $\Delta y = m\,\Delta x$ e ciò consente di determinare il secondo punto. Determinati i due punti è possibile disegnare la retta.

Per esempio, data la retta $y = -\dfrac{3}{5}x + 2$ disegno il punto (0,2) e, a partire da esso mi sposto verso destra di $\Delta x = 5$. Il corrispondente $\Delta y = -\dfrac{3}{5}\cdot 5 = -3$, pertanto mi abbasso di 3 unità. Quello trovato è il secondo punto.

0.10.2. L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA

la parabola ad asse verticale ha una equazione di II grado ed è caratterizzata da concavità, vertice ed asse di simmetria

Una seconda curva particolarmente importante è quella rappresentata dal trinomio di II grado detta *parabola ad asse verticale*: La sua equazione è:

$y = ax^2+bx + c$ (b.0.13)

La curva rappresentata da questa equazione presenta le seguenti caratteristiche:

- ha *concavità* verso l'alto se $a > 0$ e concavità verso il basso se $a < 0$
- il *valore di a* determina il grado di apertura (per valori di a grandi in valori assoluti si hanno le curve più strette).
- presenta un *asse di simmetria* di equazione $x = -\frac{b}{2a}$
- l'asse di simmetria taglia la curva in un punto detto *vertice* di coordinate $V \equiv \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
- la curva taglia l'asse y nel punto $(0,c)$ mentre le intersezioni con l'asse x sono le soluzioni della corrispondente equazione di II grado (ammesso che esistano).

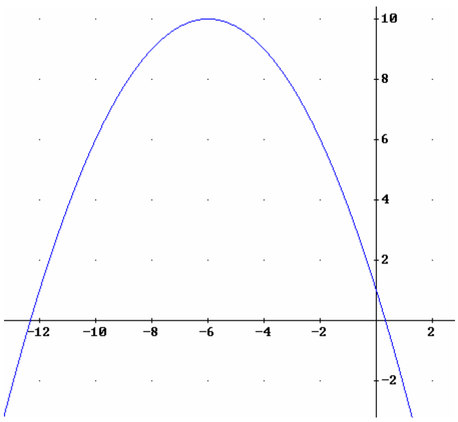
esempio

Esercizio: disegnare la parabola $\mathscr{P} : y = -\frac{1}{4}x^2 - 3x + 1$

Per $x = 0$ si ha $y = 1$;

$\Delta = 9 + 1 = 10$ e dunque la curva taglia l'asse x in punti di ascissa irrazionale che non vengono calcolati in questo esempio;

$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{-½} = -6; y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-10}{-1} = 10;$



gli altri punti si trovano per sostituzione tenendo presente il criterio di simmetria.

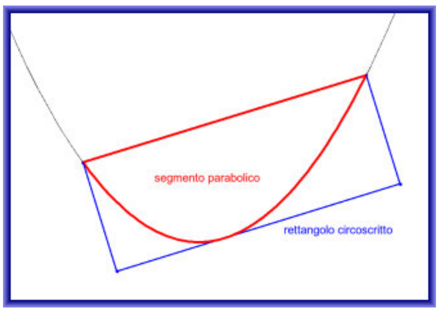
x	-12	-8	-6	-4	-2	0	2
y	1.00	9.00	10.00	9.00	6.00	1.00	-6.00

Osserviamo che il vertice corrisponde ad un punto di massimo quando la concavità è verso il basso e ad un punto di minimo quando la concavità è verso l'alto.

Per quanto riguarda la determinazione della inclinazione di questa curva valgono le indicazioni generali già esposte nei paragrafi precedenti.

0.10.3. L'AREA DEL SEGMENTO PARABOLICO: IL TEOREMA DI ARCHIMEDE

La porzione di piano compresa tra un arco di parabola e il segmento che ne unisce gli estremi è detta *segmento parabolico*.



Il *teorema di Archimede*, dimostrato molti secoli prima che l'analisi matematica consentisse la determinazione in generale delle aree delle curve afferma che *l'area del segmento di parabola è pari a 2/3 dell'area del rettangolo circoscritto alla parabola.*

Si tratta pertanto di riuscire a calcolare la distanza tra la retta secante e la tangente per trovare l'altezza del rettangolo. Il conto si rivela particolarmente semplice quando il segmento parabolico ha la base parallela all'asse delle ascisse perché in quel caso l'altezza è la differenza tra la ordinata del vertice e l'ordinata della retta di base.

0.11. La funzione esponenziale

0.11.1. ALCUNE PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE CHE INTERESSANO ALLA FISICA

Esiste una seconda funzione dotata di particolari proprietà riferite al suo tasso di variazione, si tratta della *funzione esponenziale* $y = e^x$ dove e è un particolare numero irrazionale trascendente.[17]

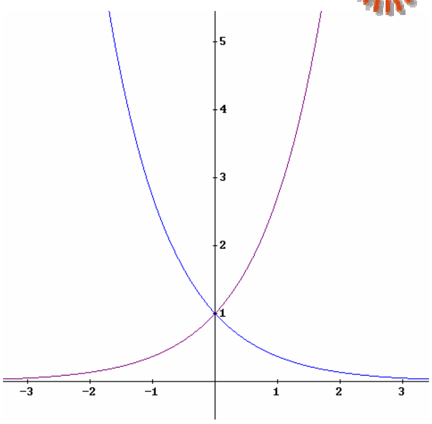
le **funzioni esponenziali** hanno tutte lo stesso andamento al cambiare della base; **molti fenomeni fisici hanno andamento esponenziale**; si tratta di quelli in cui il **tasso di variazione** di una grandezza è **proporzionale alla grandezza** stessa

La funzione $y = A\,e^x$ gode di una particolare proprietà, unica tra tutte le funzioni: $y' = y$ ovvero *la funzione esponenziale cresce con un tasso di variazione pari al proprio valore.* Si tratta, se si riflette sul significato di tasso di variazione, della funzione che cresce più di qualsiasi altra perché il fatto di aumentare fa sì che aumenti proporzionalmente anche il tasso di crescita.

La dimostrazione di questo fatto non può essere svolta con metodi elementari sufficientemente contenuti e pertanto non viene svolta qui ma capiterà di trattarne sia nel corso di matematica sia in quello di fisica.

Poiché molti fenomeni fisici variano con leggi esponenziali del tipo:

$$y = A\,e^{kx} \qquad \text{(b.0.14)}$$



dove k è una costante che può essere sia positiva sia negativa e x è la variabile indipendente del fenomeno considerato cerchiamo di riassumere le proprietà di questa funzione a partire dal diagramma.

In figura si sono rappresentate in un sistema ortonormale la *funzione esponenziale* $y = e^x$ e la sua simmetrica $y = e^{-x}$ che si ottiene scambiando x con $-x$.

Come si osserva si tratta di due funzioni rapidamente crescenti e rapidamente decrescenti e ciò è dovuto alla particolare proprietà della derivata della funzione. Come cambia l'andamento quando si passa alla (b.0.14)?

Il fattore A è un fattore moltiplicativo che si limita a modificare la scala lungo l'asse y nel senso che, al valore 1 verrà a corrispondere il valore A. Il ruolo del fattore k è analogo, ma invece di moltiplicare bisogna dividere perché:

$$y = A\,e^{kx} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{A} = e^{kx} \quad \Leftrightarrow \quad Y = e^X$$

---

[17] Un numero irrazionale è trascendente se non può essere ottenuto mediante espressioni contenenti radicali. Anche se gli unici due numeri trascendenti noti alla esperienza ordinaria sono π e e si tenga presente che i numeri trascendenti costituiscono la maggioranza dei numeri reali.

Il *numero "e"* detto anche *base dei logaritmi naturali* o *numero di Nepero* può essere ottenuto in svariati modi. Ne citiamo due:

- $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ tende al valore e quando x diventa arbitrariamente grande e non a 1 come ci si potrebbe attendere. Provare, usando la calcolatrice scientifica e il suo tasto funzione y^x a determinare 1.1^{10} 1.01^{100} 1.001^{1000}…Si vedrà che il risultato si avvicina abbastanza rapidamente a 2.718…
- La espressione composta da infiniti termini $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{1\times2\times3\times4} +$ … produce come risultato il numero e

con la condizione $\frac{y}{A} = Y$ e $k\,x = X$ e pertanto:

$$y = A\,Y \qquad x = \frac{X}{k}$$

Dunque la (b.0.14) ha ancora il diagramma di $y = e^x$ e differisce da esso solo per un fattore di scala.

Vediamo infine quale sia il legame tra la funzione e il suo tasso di crescita.

Se si tiene presente che $y' = \frac{\delta y}{\delta x}$ avremo:

$$y' = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta(A\,Y)}{\delta[(1/k)\,X]} = \frac{A\,\delta Y}{\frac{1}{k}\,\delta X} = A\,k\,\frac{\delta Y}{\delta X} = A\,k\,Y = k\,y$$

Dunque, nel caso della funzione esponenziale generica data dalla equazione (b.0.14)*, tra la funzione e il suo tasso di crescita vale la semplice relazione:*

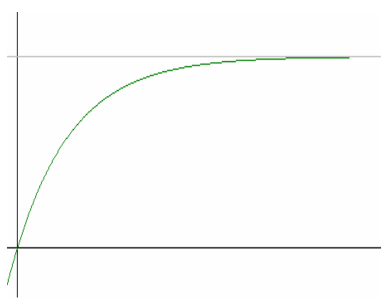
$$y' = k\,y \qquad \text{(b.0.15)}$$

Nota bene:

- Il numero *e* sembra essere un numero molto speciale, ma non è così: anche le altre basi, a meno di un fattore moltiplicativo godono della stessa proprietà di proporzionalità tra la grandezza e il suo tasso di variazione. Poiché le leggi fisiche sono leggi di proporzionalità e non uguaglianze il numero *e* viene immediatamente detronizzato dal suo ruolo speciale.
- Le funzioni esponenziali hanno tutte lo stesso andamento qualunque sia la base nella quale sono espresse. In effetti, presi due numeri positivi α e β esiste sempre un numero γ per il quale $\alpha^\gamma = \beta$ e tale numero è detto *logaritmo in base* α *di* β *e si scrive* $\gamma = \log_\alpha\beta$.
- Pertanto il diagramma della funzione $y = \beta^x = (\alpha^\gamma)^x = \alpha^{\gamma x}$ e si può concludere che il cambio di base, in una funzione esponenziale, equivale ad un cambiamento di scala lungo l'asse x.
- Se invece della (b.0.14) utilizzassimo una funzione che differisce da questa per una costante additiva avremmo gli stessi risultati perché le due funzioni presentano la stessa velocità di crescita. Si ricordi che la velocità corrisponde alla inclinazione della retta tangente e dunque non è influenzata da un fattore additivo che sposta le curve ma non ne modifica le inclinazioni.

0.11.2. LA FUNZIONE ESPONENZIALE E I FENOMENI FISICI

Si tenga presente che il fattore k oltre che influenzare il tasso di crescita della funzione ne influenza anche il carattere crescente o decrescente. Precisamente se $k > 0$ la funzione è crescente mentre se $k < 0$ la funzione è decrescente.

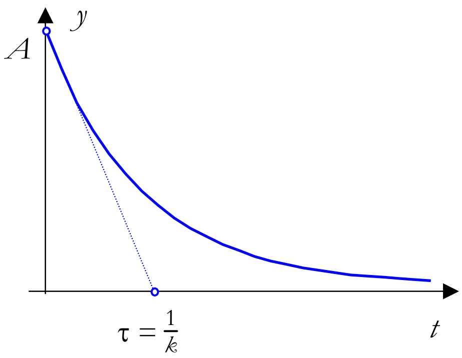


La gran parte dei *fenomeni fisici* di raggiungimento dell'equilibrio sono governati da leggi nelle quali il processo ha natura esponenziale a volte di tipo crescente, altre volte di tipo decrescente.

Si tratta di tutti i fenomeni nei quali si incontra la proporzionalità tra la grandezza che descrive il fenomeno ed il suo tasso di variazione. Ciò accade per esempio in molti processi aventi natura probabilistica, ma accade anche nei circuiti elettrici quando il funzionamento è influenzato dalla presenza di campi magnetici. A puro titolo esemplificativo citiamo alcuni fenomeni importanti governati da leggi esponenziali:

◊ crescita di una popolazione di batteri con risorse limitate
◊ meccanismo di azione di un antibiotico
◊ equilibrio preda predatore
◊ corrente elettrica in un circuito resistenza condensatore o resistenza induttanza
◊ trasformazione dei materiali radioattivi
◊ assorbimento delle radiazioni da parte della materia
◊ andamento della pressione atmosferica con la quota
◊ dipendenza del numero di elettroni liberi in un semiconduttore al variare della temperatura

0.11.3. COME SI DETERMINA LA VELOCITÀ DI VARIAZIONE DI UN FENOMENO ESPONENZIALE ?



costante di tempo di un fenomeno ad andamento esponenziale

I fenomeni fisici, nella maggioranza dei casi, sono fenomeni variabili nel tempo. Supponiamo che sia assegnato un fenomeno la cui legge di variazione sia rappresentata dalla *funzione esponenziale*:

$$y = A\, e^{-k\,t} \qquad \text{(b.0.16)}$$

ci chiediamo quale sia il significato dei due parametri A e k che compaiono in essa? In base a quanto osservato in precedenza sappiamo già che, dal punto di vista matematico, si tratta di due *fattori di scala* che agiscono rispettivamente sull'asse delle ordinate e su quello delle ascisse. Ma qual è il loro significato fisico?

A questo scopo cerchiamo di fissare le principali caratteristiche rappresentate nel diagramma qui a lato.

- si tratta di una funzione decrescente che, per $t = 0$, assume il valore A
- la intersezione della tangente nel punto iniziale con l'asse dei tempi vale $\tau = 1/k$.

Infatti, se tracciamo la retta tangente nel punto $t = 0$ e indichiamo con τ l'ascissa del suo punto di intersezione con l'asse t avremo che:

per definizione di coefficiente angolare $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = -\dfrac{A}{\tau}$

ma utilizzando la nozione di derivata (analisi matematica) e il calcolo della stessa per la funzione considerata si ha che $y_0' = -ky_0 = -kA$

Pertanto, eguagliando i due termini, si ottiene: $\tau = \dfrac{1}{k}$

Dunque il valore di k o meglio, il suo inverso, sono un ottimo indicatore della rapidità di decrescita della funzione. Se τ è piccolo la funzione decresce rapidamente e viceversa. La quantità τ è detta *costante di tempo del fenomeno*.

0.11.4. IL CONCETTO DI TEMPO DI DIMEZZAMENTO

I fenomeni decrescenti nel tempo con legge esponenziale vengono solitamente descritti attraverso una costante, dipendente da k, detta *tempo di* *dimezzamento*. Infatti, come vedremo tra breve, tutti i processi esponenziali sono caratterizzati da una ulteriore regolarità: *quella di impiegare sempre lo stesso tempo a ridursi a metà* (naturalmente, quelli caratterizzati da crescita, hanno la stessa proprietà in relazione ai processi di raddoppio).

Dalla (b.0.15) si ha che $y' = \frac{\delta y}{\delta t} = k\,y$ e pertanto:

$$\delta y = k\,y\,\delta t \tag{b.0.17}$$

Dunque: *tutti i fenomeni nei quali la variazione elementare è proporzionale alla grandezza variabile e all'intervallo elementare della variabile indipendente hanno natura esponenziale, crescente quando k è positivo e decrescente quando k è negativo.*

E' questa la ragione per cui la legge esponenziale è molto diffusa in natura. Quando un fenomeno ha natura probabilistica l'unica cosa che lo può influenzare è la quantità di causa presente. Più cose ci sono e più se ne trasformano e, in un tempo elementare doppio se ne trasforma il doppio.

Data la funzione (b.0.16) si chiama tempo di dimezzamento e lo si indica con $T_{½}$ il tempo che impiega il fenomeno considerato a ridursi al valore metà di quello iniziale.

Per trovare tale tempo basta porre $y = ½\,A$ e risolvere la corrispondente equazione esponenziale.

$½ = e^{-k\,T}$ da cui si ha $-k\,T = ln\,0.5$ e infine:

$$T_{½} \approx 0.693 \,/\, k = 0.693\,\tau \tag{b.0.18}$$

Il tempo di dimezzamento è significativo per i fenomeni ad andamento esponenziale perché, convenzionalmente, si assume esaurito il fenomeno quando sono trascorsi 10 tempi di dimezzamento. In effetti, dopo 10 tempi di dimezzamento il valore attuale risulta pari a $0.5^{10} = 1/\,1024$ (cioè a circa un millesimo di quello iniziale).

0.12. Alcune identità goniometriche di uso comune in fisica

0.12.1. Relazioni tra seno coseno e tangente

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ è nota come *identità fondamentale della goniometria* e consente di esprimere seno, coseno e tangente l'uno in funzione dell'altra.

0.12.2. Archi associati

Le funzioni goniometriche per gli angoli acuti sono in relazione semplice con quelle degli altri tre quadranti (scambio di seno e coseno, cambiamenti di segno e modifiche conseguenti della tangente). Si parla di *identità tra archi associati*. Per vedere le relazioni basta disegnare semplici figure nei quattro quadranti.

Si riportano le principali:

complementare

$\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$ (coseno vuol dire seno del complementare)

$\cos(90°-\alpha) = \sin\alpha$ e dunque $\tan(90°-\alpha) = 1/\tan\alpha$

supplementare

$\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(90°-\alpha) = -\cos\alpha$ e dunque $\tan(90°-\alpha) = 1/\tan\alpha$

opposto

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

0.12.3. Somma e sottrazione

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

0.12.4. Duplicazione

Si ottengono come caso particolare dalle precedenti

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

0.12.5. Relazione lineare di seno e coseno

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \frac{a}{|a|}\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi) \text{ con } \varphi = \text{inv}\tan(b/a)$$

Usando gli angoli complementari si può ricavare una equivalente relazione in coseno.

0.12.6. Esercizio

Usando gli elementi del calcolo vettoriale e in particolare le proprietà del *prodotto scalare*, dimostrare la relazione sul coseno della differenza.

☹

Si considerino due vettori $\vec{a} \equiv(\cos\alpha,\sin\alpha)$ e $\vec{b} \equiv(\cos\beta,\sin\beta)$ di modulo unitario e i *versori* (vettori unitari degli assi) $\vec{i} \equiv (1,0)$ e $\vec{j} \equiv (0,1)$.

Il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)$

Ma d'altra parte $\vec{a} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$ e $\vec{b} = \cos\beta\,\vec{i} + \sin\beta\,\vec{j}$ e per il prodotto scalare valgono le proprietà distributive; inoltre $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ mentre $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

Allora: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\alpha\,\cos\beta\,\vec{i} \cdot \vec{i} + \cos\alpha\,\sin\beta\,\vec{i} \cdot \vec{j} + \sin\alpha\,\cos\beta\,\vec{j} \cdot \vec{i} + \sin\alpha\,\sin\beta\,\vec{j} \cdot \vec{j} = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta$

☺

0.13. Quesiti di fine capitolo

I seguenti quesiti sono estratti da compiti in classe svolti nelle classi prime del PNI Liceo Scientifico. Si tratta di alunni che hanno poi seguito per 5 anni un corso di fisica di 3 ore settimanali e che svolgevano con me anche l'insegnamento di matematica.

1. I campioni per le unità di misura devono avere 4 caratteristiche: descrivile in 4 righe [18]
2. Cosa sono le unità fondamentali e in cosa differiscono da quelle derivate? (3 righe) [19]
3. Come si può determinare la densità di un solido irregolare? [20]
4. Come si può stabilire se un corpo è omogeneo? [21]
5. Si hanno 2 fenomeni diversi; quando il primo accade 3 volte il secondo accade 5 volte. Quante volte deve accadere il primo se il secondo accade 15 volte affinché i due fenomeni si possano considerare periodici e regolari tra loro? Spiegare la risposta [22]
6. Due orologi atomici differiscono per non più di 1 s ogni 10^6 anni. Di quanto differiscono in 1 anno; e in un giorno? Spiegare la risposta. [23]
7. La Luna ha un raggio medio r = 1.738×10^6 m e una massa m = 0.735×10^{23} kg. Ricordando che il volume della sfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ calcolare il volume V e la densità δ della Luna. [24]
8. Il magnesio presenta i seguenti isotopi con la massa atomica e le abbondanze relative indicate qui a lato. Si chiede di calcolare la massa atomica del magnesio eseguendo una media ponderata: [25]

   Mg_{24} |23.98505|78.8%

   Mg_{25} | 24.98584 | 10.1%

   Mg_{26} | 25.98260 | 11.1%
9. Una velocità media viene calcolata utilizzando i seguenti dati:

---

[18] devono essere confrontabili con la grandezza da misurare (né troppo grandi né troppo piccole); devono essere riproducibili; devono essere inalterabili nel tempo; devono essere uguali per tutti

[19] Sono le unità per le quali il campione viene definito direttamente; le grandezze derivate sono definite attraverso le fondamentali

[20] Si misura il volume attraverso un cilindro graduato riempito di un liquido in cui si immerge il corpo; si misura la massa con una bilancia; si fa il rapporto tra massa e volume

[21] Bisogna eseguire il rapporto massa/volume per porzioni diverse ed osservare se tale rapporto rimane costante.

[22] Due fenomeni sono periodici e regolari se conservano la frequenza con cui accadono. Basta fare una proporzione 3:5 = x:15 da cui x = 9

[23] In un anno differiscono di 10^{-6} s. Per avere la differenza in un giorno bisogna dividere per 365 e si ottiene 2.74×10^{-9} s

[24] $V=\frac{4}{3}\pi r^3 = = \frac{4}{3}\pi \times(1.738\times10^6)^3 m^3 = 2.199\times10^{19}\ m^3$ $\delta = \frac{m}{V} = \frac{0.735\times10^{23}}{2.199\times10^{19}} = 3.34\times10^3$ kg/m^3

[25] Se indichiamo con μ la massa atomica media si ha:

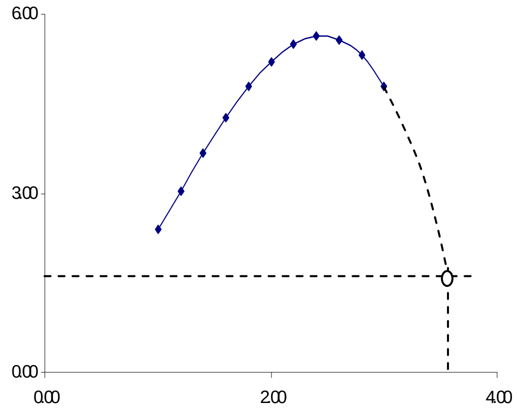
$$\mu = \frac{23.98505\times78.8+24.98584\times10.1+ 25.98260\times11.1}{100.0} = 24.30786$$

$\Delta x = 1.14$m $\Delta t = 7.25$s $\varepsilon_{\Delta x} = 0.25$m $\varepsilon_{\Delta t} = 0.46$s. Calcola la velocità $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, l'errore relativo e quello assoluto su v esprimendo l'errore assoluto finale con due cifre significative. [26]

10. Senza calcolare gli errori ma rispettando il numero di cifre significative calcola la massa del corpo di cui ti sono state fornite a parte il volume V in m³ e la densità δ in kg/dm³: $V = 33.3$ m³ $\delta = 3.95$ kg/dm³ [27]
11. Su un asse che rappresenta il tempo sono segnati due punti A e B. Di ciascuno di essi ti vengono fornite a parte la misura in cm di OA, di OB e il valore in secondi di OA. Calcola il valore in secondi di OB.
    $\overline{OA}_{cm} = 1.34$ cm $\overline{OB}_{cm} = 4.13$ cm $\overline{OA}_{s} = 206$ s [28]
12. Considera la tabella che ti è stata fornita con i risultati di una misura della posizione di un punto mobile nel tempo. Traccia il diagramma usando la scala più opportuna. Determina inoltre per estrapolazione la posizione al tempo t pari al 120% dell'istante finale.

t, s	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00
x, m	2.40	3.04	3.67	4.26	4.78	5.20	5.49	5.63	5.57	5.31	4.80

Sull'asse delle ascisse si va da 1 a 3 mentre sulle ordinate da 2.40 a 4.80. Conviene scegliere una scala che sulle ascisse dia 1 s = 2 cm (il diagramma risulta largo 6 cm e i valori in s si ottengono moltiplicando per 2 quelli in cm; facile). Sull'asse delle ordinate può andar bene 1 cm = 1 m
A questo punto si disegnano gli assi, si riportano non più di 2 o 3 valori su di essi e si disegnano i punti (vedi tecnica in classe). Si interpola (linea tra i punti) e poi si estrapola sino al 120% (1.2) di 3.00 cioè sino a 3.60 s. Per farlo si prolunga la linea rispettandone l'andamento e si legge il valore che, nel nostro caso risulta un po' più grande di 1.5 m.
Per questo esercizio è essenziale provarci su un foglio o alla lavagna per acquisire la necessaria manualità e velocità.



13. Secondo te che differenza c'è tra un fenomeno naturale e un esperimento di fisica? (2 righe) [29]

---

[26] $\varepsilon_{r\Delta x} = \frac{0.25}{1.14} = 0.22$ $\varepsilon_{r\Delta t} = \frac{0.46}{7.25} = 0.06 \varepsilon_{rv} = \varepsilon_{r\Delta x} + \varepsilon_{r\Delta t} = 0.28$

$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1.14}{7.25} = 0.1572$ m/s (meglio eccedere con le cifre finché non è noto l'errore)

$\varepsilon_v = v \cdot \varepsilon_{rv} = 0.1572 \cdot 0.28 = 0.045$ m/s. Pertanto, tenendo conto della richiesta di scrivere l'errore con 2 cifre si scrive: $v = (0.157 \pm 0.045)$ m/s

[27] Nelle misurazioni indirette in numero di cifre significative non può essere superiore a quello della misura meno precisa. Nel nostro caso scriveremo pertanto il risultato con 3 cifre significative. Bisogna inoltre tener presente che la densità va espressa nelle unità usate per il volume o viceversa. $\delta = 3.95$ kg/dm³ $= 3.95\times10^3$ kg/m³.

Poiché $\delta = \frac{m}{V}$ si ha $m = \delta V = 3.95\times10^3 \cdot 33.3 = 1.32\times10^5$ kg

[28] Si ha $\overline{OB}_{s} = \overline{OB}_{cm} \frac{206}{1.34} \frac{s}{cm} = 4.13 \text{ cm} \cdot \frac{206}{1.34} \frac{s}{cm} = 635$ s

[29] L'esperimento di fisica è una riproduzione in laboratorio di un fenomeno naturale eseguita introducendo semplificazioni per distinguere meglio ciò che è rilevante da ciò che è secondario.

14. Cosa si intende con *grandezza fisica*? (1 riga) [30]
15. Perché il campione con cui si realizzano le unità di misura deve essere invariabile e facilmente riproducibile? (2 righe) [31]
16. Che differenza c'è tra portata e sensibilità di uno strumento? (2 righe) [32]
17. Indica nella riga sotto le seguenti misure di lunghezza (espresse in modo orribile per un fisico) il corrispondente ordine di grandezza [33]

0.0000000238	0.0000742	245'000'000	7200000000
10^{-8}	10^{-4}	10^{8}	10^{10}

18. In questi giorni è caduta molta pioggia e il pluviometro della scuola ha registrato la caduta di 35 mm di pioggia in 24 ore. Rispondi alle seguenti domande:
    a) Quanto vale la precipitazione media *p* in mm/h ?
       p = 35/24 = 1.46 mm/h
    b) Perché è sbagliato affermare che in 12 ore sono caduti 17.5 mm di pioggia?
       perché la pioggia non cade in modo uniforme nel corso delle 24 ore
    c) Se avessimo raccolto la pioggia caduta su un telo di superficie S = 2.58 m^2 che volume V di acqua avremmo raccolto (esprimi il risultato in dm^3).
       $V = S \cdot h = 2.58 \cdot 10^2\ \text{dm}^2 \cdot 17.5 \cdot 10^{-2}\ \text{dm} = 45.1\ \text{dm}^3$
    d) Se avessimo collocato tale acqua in un cilindro graduato di diametro interno $d = 5.24 \cdot 10^{-1}$ m che livello *h* avremmo raggiunto?
       Il volume del cilindro è dato da S · h dove $S = \pi r^2$ e pertanto $V = \pi r^2 h$. Se vogliamo trovare h sarà (ricordando che il raggio è metà del diametro r = 2.62 dm): $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{45.1}{3.14 \cdot 2.62^2} = 2.09$ dm
19. Che differenza c'è tra un campione materiale e un campione naturale. Perché i campioni naturali hanno sostituito quelli materiali nella definizione delle grandezze fondamentali? [34]
20. Dai la definizione di cifre significative di una grandezza fisica e spiega perché se aumenta il numero di cifre significative diminuisce l'incertezza. [35]

---

[30] Qualunque grandezza per la quale si sia stabilito come la si misura e quale sia la unità.

[31] Invariabile per garantire uniformità di comportamento nello spazio e nel tempo, riproducibile per garantirne la diffusione

[32] La portata è la grandezza massima misurabile da un dato strumento; la sensibilità è la grandezza minima che lo strumento apprezza e che incide sulle cifre significative della misura

[33] Bisogna cercare la potenza del 10 più vicina al numero considerato. Per esempio $0.0000742 = 7.42 \cdot 10^{-5} \approx 10^{-4}$

[34] Il campione naturale è più stabile, più riproducibile e non deteriorabile. Per questa ragione i campioni naturali hanno sostituito, quando era possibile, quelli materiali. Nella definizione dei campioni naturali avrete notato che compare sempre un numero elevato di cifre significative e ciò sta ad indicare la nostra capacità di usare una strumentazione molto sensibile nel processo di definizione (orologi atomici, interferometri per la misura di *c*).

[35] Le cifre significative sono tutte quelle presenti partendo dalla prima a sinistra diversa da zero fino a quella influenzata dalla incertezza. Poiché se si aumenta di uno il nu-

21. Dai un esempio di errore accidentale e di errore sistematico. [36]
22. Se una velocità è misurata come rapporto tra spazio e tempo come si calcola il suo errore relativo se sono noti quelli sullo spazio e sul tempo? [37]
23. Riempi la seguente tabella sui prefissi del sistema internazionale

nome	micro	mega	Giga	pico	etto	nano
fattore	10^{-6}	10^{6}	10^{9}	10^{-12}	10^{2}	10^{-9}
simbolo	μ	M	G	p	h	n

24. Il metro è definito come lo spazio percorso dalla luce nel vuoto nel tempo pari a 1/299'792'458 s. Scrivi la velocità della luce *c* in m/s con 4 cifre significative. [38]
25. L'anno luce è definito come lo spazio percorso dalla luce nel tempo t_a = 1 anno solare medio. Sapendo che t_a = 365.256 giorni e che la velocità della luce è stata fornita con 9 cifre significative nell'esercizio precedente trovare a quanti metri corrisponde 1 anno luce. Scrivere il risultato con il corretto numero di cifre (ricordando che le ore, i minuti e i secondi sono espressi da numeri interi e dunque non sono soggetti ad errore). [39]
26. Attraverso il calcolo dell'errore relativo percentuale (che va espresso con non più di 2 cifre significative) stabilisci quale delle due seguenti misure è più precisa: l_1 = 1.3245±0.0003 m e l_2 = 2.3466±0.0006 m [40]
27. Fai un esempio di grandezze inversamente proporzionali (senza dimenticare di specificare cosa resta costante). [41]

---

mero di cifre significative vuol dire che l'errore influenza una cifra decimale più a destra, quando il numero di cifre aumenta di una unità l'incertezza assoluta diminuisce di un ordine di grandezza.

[36] Gli errori accidentali sono indipendenti dalla volontà dello sperimentatore e incontrollabili (si possono ridurre aumentando la sensibilità degli strumenti). Quelli sistematici sono invece dovuti a caratteristiche proprie degli strumenti o del metodo di misura e incidono sempre allo stesso modo. Errore accidentale: misura di una lunghezza con trasporto del righello. Errore sistematico: errore nella lettura di uno strumento non azzerato bene. Segnalo che l'errore di parallasse è, a seconda dei contesti, sia sistematico sia accidentale.

[37] $\varepsilon_{rv} = \varepsilon_{rs} + \varepsilon_{rt}$ cioè gli errori relativi si sommano. Dopo che si è trovato così l'errore relativo si trova quello assoluto della grandezza misurata indirettamente usando la definizione e quindi $\varepsilon_v = \varepsilon_{rv} \langle v \rangle$

[38] Pertanto, in base alla definizione del metro, risulta *c* = 299'792'458 m/s che, approssimata alla quarta cifra significativa si scrive $c = 2.998 \cdot 10^8$ m/s.

[39] Poiché s = v · t con v = 2.99'792'458·10^8 m/s e t = 365.256 · 24 · 60 · 60 s si ha 1 a.l. = 2.99'792'458·10^8 ·365.256 ·24 · 60 · 60 = 9.46089·10^{15} m Il risultato è stato scritto con 6 cifre significative pari al numero di cifre significative della grandezza meno precisa usata nel calcolo.

[40] Si calcolano i due errori relativi la misura più precisa sarà quella con errore relativo minore. Pertanto, essendo: $\varepsilon_{r1} = \frac{0.0003}{1.3245} \approx 0.00023$ mentre $\varepsilon_{r2} = \frac{0.0006}{2.3466} \approx 0.00026$ la prima misura è più precisa della seconda.

[41] Le misure dei lati di un rettangolo di data area, oppure il volume e la densità di corpi diversi dotati di una stessa massa

28. Supponiamo che y sia proporzionale al quadrato di x. Come si potrebbe fare per verificare con un diagramma rettilineo tale relazione? [42]

29. La densità del mercurio vale $\delta = 1.355 \cdot 10^{-11}$ g/(μm)^3. Trasformala in kg/(mm)^3 [43]

30. Il protone ha dimensioni di circa $1.2 \cdot 10^{-13}$ cm e una massa di circa $1.7 \cdot 10^{-27}$ kg. Supponendo che abbia una forma cubica sapresti calcolarne la densità in kg/dm^3? Scrive due righe di commento al risultato trovato che tengano conto delle densità medie della materia che conosci. [44]

31. Le unità *pinco* e *pallino* misurano una stessa grandezza fisica che normalmente si misura in *pongo*. Sapendo che 1 pinco = $2.348 \cdot 10^{12}$ pongo e che 1 pallino $3.547 \cdot 10^{16}$ pongo trovare il legame tra tra pinco e pallino, cioè 1 pinco = ____ pallino [45]

32. Sono stati determinati i seguenti dati sperimentali tra le grandezze x e y. I valori di y sono stati consegnati a parte e vanno trascritti qui sotto. Dopo averle riportate in diagramma scegliendo per y la scala più opportuna, fai una ipotesi sul legame tra esse e quindi verifica l'ipotesi sui dati determinando la costante di proporzionalità.

Riporto la correzione per i tre tipi di esercizi forniti a tre diversi studenti

x	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
y	0.03	0.13	0.50	1.13	2.00	3.13	4.50	6.13	8.00
y	2.13	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
y	2.00	1.00	0.50	0.33	0.25	0.20	0.17	0.14	0.13

Traccio i punti in un sistema d'assi dopo aver fissato una scala opportuna (i diagrammi sono stati generati con Excel e quindi importati in word)

La prima serie in marrone rappresenta una relazione quadratica dunque deve essere $y / x^2 = k$.

In effetti riportando i valori di x^2 si ha che:

y	X	x^2	x^2
0.03	0.25	0.0625	0.48
0.13	0.50	0.25	0.52
0.50	1.00	1.00	0.50
1.13	1.50	2.25	0.50

e così via.

Con buona approssimazione si può assumere per k il valore 0.5

La seconda serie in violetto sembra indicare una relazione di tipo lineare e dovrà pertanto essere:

$\Delta y / \Delta x = k$

---

[42] Basterebbe rappresentare sull'asse delle ascisse (orizzontale) la quantità x^2. Così facendo il diagramma dovrebbe essere rappresentato da una retta passante per l'origine

[43] $\delta = 1.355 \cdot 10^{-11}$ g/(μm)^3 = $1.355 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-3}$ kg / $(10^{-3}$ mm$)^3$ = $1.355 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{9}$ kg/mm^3 = $1.355 \cdot 10^{-5}$ kg/mm^3

[44] Calcolo $V = l^3 = (1.2 \cdot 10^{-13})^3$ cm^3 = $1.73 \cdot 10^{-39}$ cm^3 = $1.73 \cdot 10^{-42}$ dm^3 Calcolo $\delta = m/V = \frac{1.7 \cdot 10^{-27}}{1.73 \cdot 10^{-42}} = 0.98 \cdot 10^{15}$ kg/dm^3 la materia nucleare ha una densità di un milione di miliardi più grande di quella dell'acqua.

[45] 1 pinco = $2.348 \cdot 10^{12}$ pongo = $2.348 \cdot 10^{12}$ pongo $\cdot \frac{1}{3.547 \cdot 10^{16}}$ pallino /pongo = $6.62 \cdot 10^{-5}$ pallino

In effetti se eseguiamo le differenze tra il primo valore e il successivo si ha:

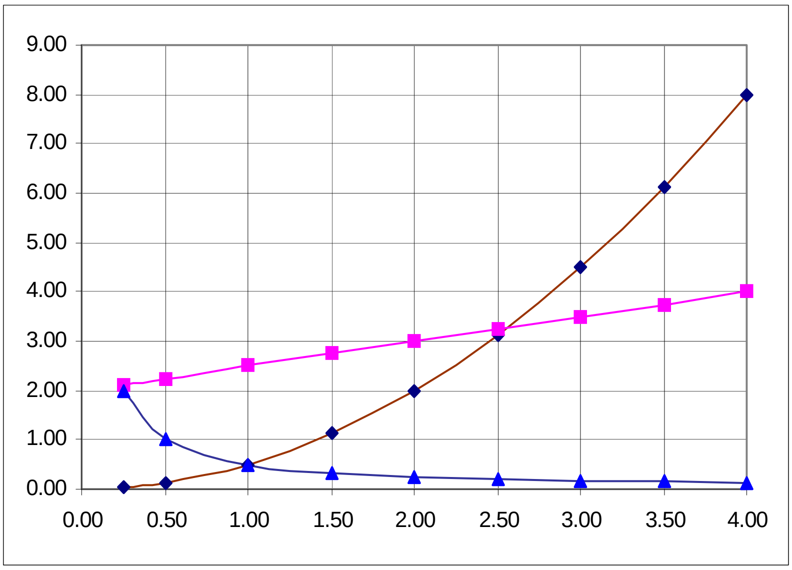
x	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
y	2.13	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
Δx		0.25	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
Δy		0.12	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
Δy/Δx		0.48	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50

e dunque anche in questo caso k = 0.5

La terza serie in blu sembra indicare una condizione di proporzionalità inversa e in effetti:

x	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
y	2.00	1.00	0.50	0.33	0.25	0.20	0.17	0.14	0.13
xy	0.50	0.50	0.50	0.495	0.50	0.50	0.51	0.49	0.52

e dunque anche in questo caso k = 0.5



33.

1. Leggi il testo che ti viene proposto e poi rispondi alle domande che seguono.

   Qual è la precisione estrema ?

   Fin dove si può spingere la precisione di una misurazione? Che cosa occorre per determinare il valore *esatto* di una certa grandezza? Supponiamo di costruire sempre meglio un'apparecchiatura, finché non è *perfetta.* Possiamo allora ottenere un valore *esatto* di quella grandezza? Una prima risposta a questa domanda è: «No, perché in realtà non possiamo mai costruire uno strumento perfetto». Poniamo quindi la domanda: «Trascuriamo il fatto che non possiamo mai costruire uno strumento perfetto e *immaginiamo* di avere uno strumento ideale siffatto. Possiamo allora, in linea di principio, eseguire una misurazione esatta?». Si tratta di un quesito affatto diverso da quello posto all'inizio. Il primo quesito era di natura pratica e aveva una risposta immediata ed evidente. Il secondo si riferisce a un *esperimento concettuale,* un artificio usato spesso dai fisici per studiare problemi che non possono essere affrontati direttamente a causa della inadeguatezza degli apparecchi esistenti.

   La tecnica dell'esperimento concettuale permette di porre quesiti fondamentali — quesiti che non si possono più evitare con la scusa della cattiva qualità degli strumenti disponibili. In tal caso, l'esperimento concettuale con uno strumento perfetto richiede che si risponda al quesito fondamentale: «*Esiste* in realtà un valore esatto di una grandezza fisica?». Questa domanda ci porta a considerare cose la cui piccolezza è difficile da valutare in base all'esperienza quotidiana. Tuttavia, il quesito può essere risolto nell'ambito della *teoria quantlstica,* la teoria che dev'essere applicata a tutti i problemi che sorgono nel dominio delle cose estremamente piccole. Essa afferma in particolare che non esistono grandezze fisiche *esatte.* Inoltre, secondo la teoria quantlstica, è privo di significato indagare sul valore esatto di una grandezza fisica perché tutte le misurazioni sono soggette a indeterminazioni: non solo indeterminazioni associate a difetti degli apparecchi, ma indeterminazioni fondamentali dovute alla natura delle cose. Perciò, è impossibile ideare un esperimento che, se eseguito, permetta di determinare le dimensioni esatte di un atomo, perché un atomo non ha dimensioni esatte ! Di conseguenza, una misurazione esatta (per esempio) della lunghezza di un'asta non può essere eseguita mai, perché tutte le cose materiali sono composte di atomi.

a) Perché non ha senso parlare di *valore esatto* di una grandezza fisica?
b) Cosa si intende con *esperimento concettuale*? Secondo te *esperimento mentale* può essere considerato un sinonimo di *esperimento concettuale*?
c) Per quale ragione non si può esprimere la lunghezza di un tavolo in maniera esatta?

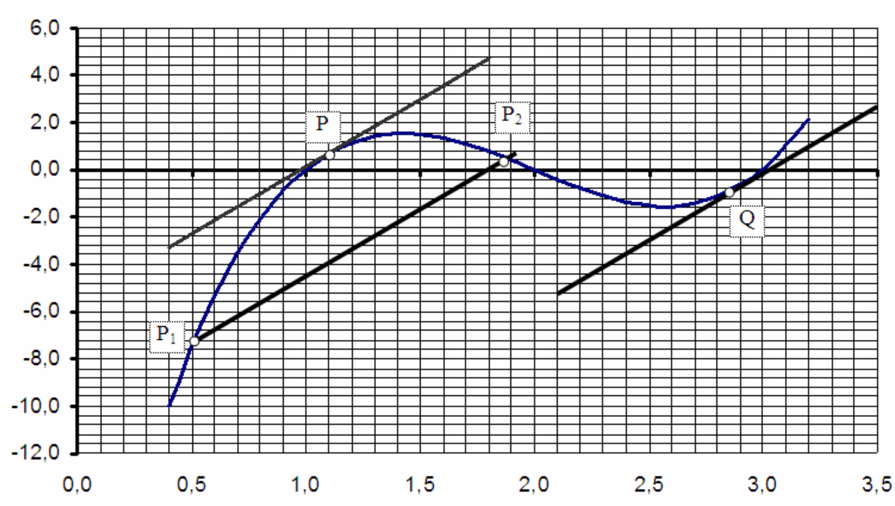
34. La legge che esprime la forza di attrazione universale che tiene insieme l'universo è proporzionale al prodotto delle masse dei corpi celesti e inversamento proporzionale al quadrato della distanza tra essi. Si indichi con F tale forza
    a) se la massa di due corpi triplica la forza tra essi diventa …
    b) se la distanza tra essi si dimezza la forza diventa …
    c) se la massa di uno solo diventa nove volte più grande, affinché la forza non cambi, la distanza deve diventare …
35. Perché è meglio, dal punto di vista fisico assumere come definizione del secondo il multiplo dell'intervallo che intercorre tra le oscillazioni della luce emesso da un particolare atomo invece che un sottomultiplo del giorno solare? Discuti la questione sul retro del foglio (3 o 4 righe).
36. Secondo la legge di gravitazione universale due masse puntiformi m_1 e m_2 poste a distanza r si attirano con una forza diretta lungo la congiungente e pari a $F = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}$. Ricordando che la forza ha le dimensioni di una massa per una accelerazione trova le dimensioni della costante universale G .[46]
37. Come mai per dare la definizione dell'unità di tempo si preferisce usare un fenomeno microscopico e non un bell'orologio meccanico o al quarzo? *Si chiama secondo l'intervallo di tempo corrispondente a 9'192'631'770 vibrazioni dell'atomo di Cesio 133 misurate attraverso un orologio atomico.* [47]
38. Quando un corpo si muove ad alta velocità in un fluido compare una forza d'attrito F che dipende esclusivamente dalla superficie S

[46] $[G] = \frac{[F\,r^2]}{M^2} = \frac{M\,L\,T^{-2}\,L^2}{M^2} = L^3\,T^{-2}\,M^{-1}$

[47] Il problema è quello della regolarità cioè la ricerca di un fenomeno per il quale si conservi l'accordo al trascorrere del tempo. Ciò si verifica per tempi più lunghi utilizzando le vibrazioni atomiche (gli atomi sono gli oggetti più identici di cui disponiamo).

del corpo, dalla velocità v del corpo e dalla densità δ del fluido cioè $F = C\ S^{\alpha} v^{\beta} \delta^{\gamma}$ dove C è una costante adimensionale. Ricordando che la forza è dimensionalmente una massa per accelerazione trovare i coefficienti α, β e γ [48]

39. E' dato il diagramma in figura; calcola nel punto P indicato la inclinazione della retta tangente e quindi determina (segnandolo sul disegno) un intervallo per il quale la retta secante ha la stessa inclinazione della tangente e un altro punto in cui la tangente ha la stessa inclinazione. Riporta sul tuo foglio in maniera comprensibile i conti che hai fatto e le procedure seguite usa invece il disegno fornito per la parte grafica.



Dopo aver disegnato con grande cura la tangente (in genere è stata inclinata troppo) si calcola la sua pendenza m. $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8.0}{1.4} = 5.7$

Si traccia una parallela alla tangente in una zona comoda del diagramma e si trovano i due punti P_1 e P_2 con $x_1 = 0.50$ e $x_2 = 1.85$

Infine si traccia una tangente parallela a quella trovata e si trova il punto Q con $x_Q = 2.85$

Questo esercizio fa da base al calcolo di velocità istantanee e velocità medie in cinematica e dunque si tratta di una competenza da acquisire.

40. In cosa consiste il *metodo ipotetico deduttivo* o *metodo sperimentale* o, per dirla con Galilei, delle *sensate esperienze*? [49]
41. Supponiamo che x indichi una grandezza fisica. Cosa *significano le scritture* a) [x] e b) $x = (\langle x \rangle \pm \varepsilon_x)\ \upsilon$ dove υ è l'unità di misura? [50]

---

[48] Si applica il principio di omogeneità delle grandezze e si tiene conto delle dimensioni di S, di δ e di v.

Così facendo si ha: $MLT^{-2} = L^{2\alpha} (LT^{-1})^{\beta} (ML^{-3})^{\gamma} = M^{\gamma} L^{2\alpha+\beta-3\gamma} T^{-\beta}$.

Basta eguagliare gli esponenti e si ottiene γ = 1, β = 2 e 2α+β–3γ = 1 da cui α = 1. Dunque la relazione è $F = C\ S\ v^2\ \delta$

[49] Si osserva la realtà, la si schematizza ipotizzando che solo alcuni elementi siano rilevanti (ipotesi), si costruisce una teoria da cui si deducono previsioni su fenomeni osservabili, si verifica in laboratorio la teoria realizzando esperimenti basati sulle ipotesi e si osserva se i risultati si accordano con le previsioni, in caso negativo si modificano le ipotesi.

[50] [x] significa dimensioni di x cioè la dipendenza della grandezza x dalle grandezze fondamentali; la misura di x è data dal suo valor medio (misura multipla) più o meno la incertezza o semidispersione il tutto misurato nella unità υ

42. Sai spiegare perché l'errore relativo diventa 1/10 del precedente *ogni volta che si aggiunge una cifra significativa* ad una misura? [51]
43. La densità di un gas in condizioni normali è circa 1/1000 della densità dei liquidi. Cosa si può *dedurre da questa informazione* sulle caratteristiche di un gas e di un liquido (entrambi fatti di molecole). [52]
44. Gli elementi costitutivi di una mole di una data sostanza *dipendono dal suo stato di aggregazione*? [53]
45. Quale *costante universale* della fisica serve per *avere il valore della unità di massa atomica*? (spiegare) [54]
46. Cos'è l'*Ångström* (Å) e perché i fisici lo usano anche se non si tratta di una unità del Sistema Internazionale? [55]
47. Cos'è un *errore sistematico* e in cosa differisce da un *errore casuale*? [56]
48. *Cosa vuol dire* che in orologio atomico al Cesio ha una *precisione di 1s ogni 30'000 anni* visto che noi definiamo il secondo attraverso gli orologi al Cesio? [57]
49. Il simbolo [x] relativo alla grandezza x viene usato con *due significati* ben identificabili dal contesto. *Quali sono* questi due significati? [58]
50. Una legge fisica che correla le grandezze fisiche x, y, S, m ha sempre la forma $z = K\, x^{\alpha}\, y^{\beta}\, S^{\gamma}\, m^{\delta}$ dove α, β, γ, δ sono degli esponenti interi o frazionari e K è una costante. a) *K è dimensionale o adimensionale*, b) *il suo valore da cosa dipende*? [59]
51. Cosa *hanno in comune* una mole di acqua e una mole di ammoniaca? [60]

---

[51] Quando si aggiunge una cifra significativa la incertezza assoluta si riduce ad un decimo della precedente perché l'errore si sposta di una cifra decimale a destra. Visto che il valor medio non muta in maniera apprezzabile l'errore relativo (rapporto) si riduce a 1/10.

[52] Se la stessa massa occupa un volume 1000 volte più grande vuol dire che nel caso del gas il volume a disposizione di una molecola è 1000 volte più grande e dunque la distanza media tra le molecole è $\sqrt[3]{1000} = 10$ volte più grande

[53] No: una mole di qualsiasi sostanza contiene sempre lo stesso numero di molecole (numero di Avogadro) indipendentemente dallo stato di aggregazione. Al mutare dello stato di aggregazione le stesse molecole interagiscono diversamente ed occupano uno spazio diverso ma rimangono le stesse.

[54] 1 amu è 1/12 della massa di un atomo di C_{12}. Poiché una mole di C_{12} corrisponde a 12 g e contiene $\mathcal{N}_A$ atomi, il numero di Avogadro $\mathcal{N}_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ atomi/mole consente di trovare l'unità di massa atomica in grammi (il suo inverso).

[55] E' l'unità di misura con cui i fisici misurano le dimensioni su scala atomica $1Å = 10^{-10}$ m. *Ångström* è uno spettroscopista dell'800 che misuro per primo lunghezze d'onda con precisioni dell'ordine di 10^{-10} m

[56] Cos'è un *errore sistematico* e in cosa differisce da un *errore casuale*?

[57] Che due orologi al Cesio hanno un disaccordo di non più di 1 s in 30'000 anni cioè hanno un livello di regolarità molto elevato come si vede dalla definizione di s (numero di cifre significative).

[58] Normalmente significa dimensioni della grandezza x; lo si usa anche per indicare la unità di misura quando non c'è rischio di confusione. Esempio $[v] = LT^{-1}$ ma anche $[v] = m/s$

[59] a) può essere sia dimensionale (per esempio nella legge di gravitazione universale) sia adimensionale b) dipende dal sistema di unità di misura scelto e, quando è dimensionale, dalle caratteristiche del fenomeno

[60] La quantità di sostanza; contengono lo stesso numero di molecole (numero di Avogadro)

52. Se di una molecola conosci la formula (esempio acqua H_2O) *come fai a trovare la sua massa in kg* (puoi farlo in due modi e a me ne basta uno) [61]
53. Il campo magnetico B è una grandezza fisica con la seguente definizione dimensionale $[B] = \frac{[F]}{L \cdot I}$ mentre [F] = M [a] e [a] = LT^{-2}. Trova le dimensioni del campo magnetico. [62]
54. Sapendo che vale la legge $A = \frac{\sqrt{B} \cdot C}{D^2}$ dove A, B, C, D sono delle grandezze fisiche completare la seguente tabella di proporzionalità con i dati mancanti. [63]

A	8A	A	2A	2A
B	2B	B	B	B
C	$\sqrt{2}$ C	4C	2C	½ C
D	½ D	2D	D	½ D

55. 1 Newton = 1 N = 1 kg m/s² Inventiamo ora una nuova unità di forza 1 Pippo = 1P = 1μg pm /ns². Trova 1 N a quanti P corrisponde [64]
56. La nostra aula ha all'incirca le seguenti dimensioni h = 3.50 m, a = 6.20 m e b = 4.90 m. Si sa che il peso molecolare medio dell'aria è all'incirca m_m = 29.0 g/mole mentre la sua densità δ = 1.293 kg/m³
    a) quanto vale il volume della stanza? [65]
    b) Trova la massa d'aria presente nella stanza in kg e in g
    c) Trova la quantità d'aria (moli) nella stanza
    d) Trova il numero di molecole d'aria presenti nella stanza

[61] Sommi le masse atomiche tenendo presente la eventuale molteplicità di atomi e ottieni la massa molecolare in amu; prendi una mole di quella sostanza (peso molecolare in grammi) e dividi per il numero di Avogadro e ottieni la massa in g.

[62] $[B] = \frac{[F]}{L \cdot I} = M\,L\,T^{-2}\,L^{-1}I^{-1} = M\,T^{-2}\,I^{-1}$

[63] bisogna tener conto della proporzionalità diretta e inversa presente nella legge che è stata fornita. A è proporzionale direttamente a $\sqrt{B}$ e a C mentre lo è inversamente a D^2. Dunque $A' = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{½^{\,2}} A = 2 \cdot 4\ A = 8\ A$ e così via.

[64] $1\ N = 10^9\ \mu g\ 10^{12}\ pm / (10^9\ ns)^2 = 10^3\ \mu g\ pm / ns^2 = 10^3\ P$

[65] $V = h \cdot a \cdot b = 3.50 \cdot 6.20 \cdot 4.90 = 106.33 = 106\ m^3$

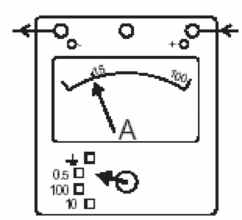
$m = \delta \cdot V = 1.293 \cdot 106 = 1.37 \cdot 10^2\ Kg = 1.37 \cdot 10^5\ g$

$n = m/m_m = 1.37 \cdot 10^5 / 29.0 = 4.74 \cdot 10^3$ moli

$N = n \cdot \mathcal{N}_A = 4.74 \cdot 10^3 \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 2.85 \cdot 10^{27}$ molecole

0.14. Quesiti dalle Olimpiadi della Fisica

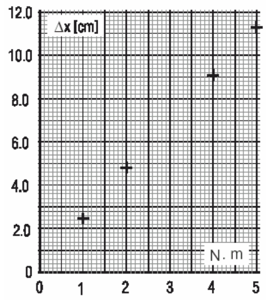
In qualche caso occorrerà documentarsi sulla definizione di alcune grandezze fisiche



1. Un amperometro può essere usato con diverse portate. In una misura con la portata di 0.5 A l'indice risulta deviato di 15 divisioni. Quale delle seguenti portate ci darà la misura più precisa? …(Juniores 1995) [66]

   A …1000 mA B …750 mA C …500 mA

   D …100 mA E …10 mA



2. In una esperienza di laboratorio si è misurato l'allungamento di un elastico in funzione del numero di masse, tutte uguali tra loro, appese all'elastico. Si è ottenuta la seguente tabella:

Δx (cm)	0	2.5	4.8	9.1	11.3
N° di masse	0	1	2	4	5

   con la quale si è costruito il grafico riportato in figura. Analizzando il grafico, quanto vale, approssimativamente, l'allungamento dell'elastico quando vi sono appese tre masse? …(Juniores 1995) [67]

   A …6.5 cm B …7.0 cm C …7.5 cm

   D …8.0 cm E …8.5 cm

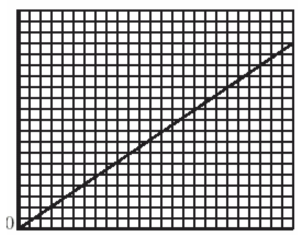
3. In una esperienza di laboratorio si sono prese diverse misure di due grandezze, A e B. I valori trovati sono riportati nella seguente tabella: …(Juniores 1995) [68]

A	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
B	0	15	65	135	235	375	550

   Dall'analisi dei dati della tabella si può concludere che una possibile curva che approssima i dati sperimentali è:

   A …$B = 60A$ B …$B = 75A$ C …$B = 7.0/A$

   D … $B = 60A^2$ E … $B= 75A^2$



4. Il grafico a lato potrebbe rappresentare una delle seguenti relazioni fra grandezze tranne una. Quale ritieni di dover scartare? …(Juniores 1996) [69]

   A …La relazione fra l'allungamento di un filo di acciaio e la massa attaccata ad un suo estremo che lo allunga.

---

[66] Se la portata è di 0.5A e lo strumento indica 15 divisioni su 100 sta misurando la corrente di $0.5 \cdot 0.15 = 0.075$ A = 75 mA; conviene pertanto scegliere la portata più prossima a tale valore e cioè 100 mA. Il motivo per cui conviene scegliere la portata minima tra quelle utilizzabili è legato al fatto che, a parità di errore assoluto, si diminuisce quello relativo perché cresce il numero di divisioni che vengono rilevate.

[67] I punti sperimentali indicano un andamento di tipo lineare e in quel caso, dal diagramma, si legge un valore compreso tra 6.5 e 7.0 ma più vicino a 7.0.

[68] Possiamo escludere la C perché la relazione è di tipo crescente. Escludiamo anche la A e la B perché per uguali variazioni di A le variazioni di B sono diverse. Rimangono le relazioni quadratiche: basta calcolare qualche rapporto B/A per verificare che tale rapporto si avvicina a 60.

[69] Le relazione dovrebbe essere di tipo quadratico. Negli altri casi si ha invece sempre proporzionalità diretta e dunque un andamento descritto da una retta passante per l'origine.

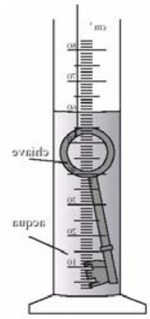
B …La relazione fra la corrente che circola in un filo metallico a temperatura costante e la tensione applicata ai capi del filo.

C …La relazione fra lo spazio percorso da un oggetto in caduta libera ed il tempo di caduta.

D …La relazione fra la pressione esercitata da un liquido sul fondo di un bidone e l'altezza del liquido contenuto nel bidone.

E …La relazione fra l'aumento di temperatura dell'acqua contenuta in un thermos e il calore trasferito all'acqua da un riscaldatore.

5. Uno studente usa un cilindro graduato per misurare il volume di una chiave di cui si conosce la massa: 160 g. A lato è raffigurato il cilindro contenente la chiave in cui sono stati versati 40 cm³ d'acqua. Quale è la stima migliore della densità del materiale di cui è fatta la chiave? …(Juniores 1996) [70]



A …0.13 g/cm³ B …0.25 g/cm³

C …2.7 g/cm³ D …4.0 g/cm³ E …8.0 g/cm³

6. Una lastra di vetro trasmette l'87% della luce che lo colpisce. Se un fascio di luce attraversa successivamente cinque lastre identiche a quella, l'intensità della luce emergente alla fine sarà una parte di quella incidente inizialmente, pari a…(Juniores 1997) [71]

A …65% B …50% C …35% D …25%

E …5%

7. A seconda della sua velocità un'automobile ha bisogno di più o meno spazio per fermarsi. Nella tabella sono riportati gli spazi d'arresto corrispondenti a diverse velocità di un'automobile.

velocità (km/h)	60	100	140	180
spazio d'arresto (m)	14	39	76	126

La relazione tra la velocità v e lo spazio d'arresto s può, in base ai dati, essere rappresentata da una formula. Scegli quella che si adatta di più fra le seguenti, dove k indica un valore che rimane costante al variare di v e di s. …(Juniores 1997) [72]

A … $v = k/s^2$ B … $v = \frac{k}{\sqrt{s}}$ C … $v = k\,s$

D … $v = k\sqrt{s}$ E … $v = k\,s^2$

[70] Se il volume è di 20 cm³ (visibile dalla indicazione del livello e dalla massa originaria d'acqua) e la massa è di 160 g ne segue una densità di 160/20 = 8 g/cm³

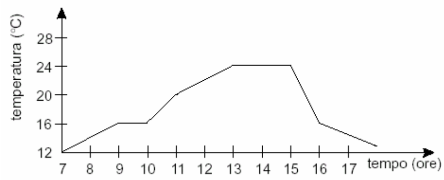
[71] L'87% è pari a 0.87 del valore iniziale e dunque dopo 5 attraversamenti la intensità risulta $0.87^5 \approx 0.498$

[72] Scartiamo subito le prime risposte che corrispondono a proporzionalità inverse (A e B) in quanto non plausibili (al crescere della velocità lo spazio di frenata deve crescere), scartiamo la C perché basta fare un rapporto tra due coppie di dati per vedere che non è costante. Scartiamo la E perché al crescere dello spazio di frenata la velocità cresce ma in maniera meno che proporzionale. Rimane la D e in effetti dire che $v = k\sqrt{s}$ equivale ad affermare che s è proporzionale al quadrato della velocità e ciò è quanto descritto dai dati: $14/60^2 = 0.0039$ $39/100^2 = 0.0039$ e così via.

8. In una relazione di laboratorio si trova scritto: "*d* = 12,25mm *con errore percentuale pari allo* 0,5%". L'incertezza di questa misura vale: …(Juniores 1997) [73]

   A …0,5mm B …0,01mm C …0,04mm

   D …0,06mm E …0,005mm



9. Il grafico riporta nell'asse delle ordinate la temperatura di una stanza e nell'asse delle ascisse il tempo. Quanto vale la temperatura della stanza quando sono le ore 14? …(Juniores 1997)

   A …12°C B …16°C C …20°C

   D …24°CE …28°C

10. Considerando il precedente grafico, la stanza si è riscaldata più rapidamente…(Juniores 1997) [74]

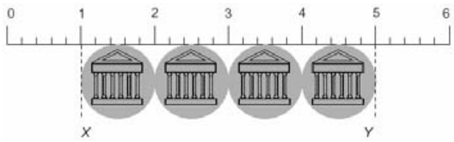
    A …dalle ore 9.00 alle ore 10.00.

    B …dalle ore 10.00 alle ore 11.00.

    C …dalle ore 11.00 alle ore 13.00.

    D …dalle ore 10.00 alle ore 13.00.

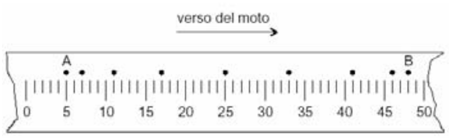
    E …dalle ore 15.00 alle ore 16.00.



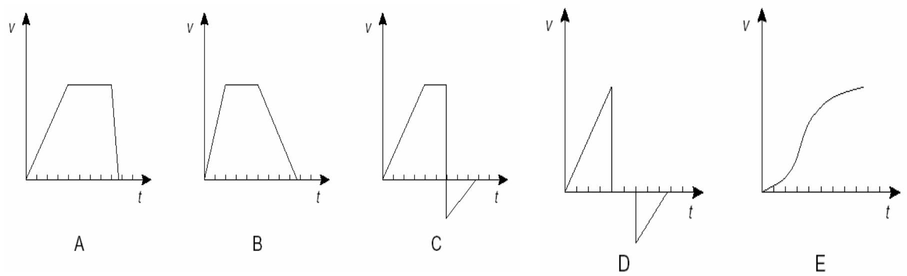
11. Uno studente vuole misurare il diametro di una moneta. Per farlo usa una riga millimetrata per misurare quattro monete uguali messe una accanto all'altra, come nella seguente figura. Lo studente ha stimato che gli estremi X e Y si trovano, sulla riga, nelle seguenti posizioni: X = (1,0±0,2)cm Y = (5,0±0,2)cm. Qual è, tra le seguenti, la misura del diametro di una moneta con l'incertezza della misura? …(Juniores 1997) [75]

    A…(1,0±0,05)cm. B…(1,0±0,1)cm. C…(1,0±0,2)cm.

    D…(1, 0 ± 0,4) cm. E…(1,0±0,8)cm.



12. In figura sono rappresentate le posizioni successive assunte da un oggetto in moto rettilineo che parte da fermo dal punto A e si ferma definitivamente nel punto B. Le posizioni sono rilevate ad intervalli di tempo uguali. Quale tra i seguenti grafici meglio rappresenta l'andamento nel tempo della velocità dell'oggetto? …(Juniores 1997) [76] A B C D E



---

[73] L'errore relativo percentuale è dato dal rapporto tra l'errore assoluto e la grandezza misurata moltiplicato per cento. Pertanto $\varepsilon = \varepsilon_{r\%} \cdot x / 100 = 0.06$ mm

[74] La velocità di riscaldamento è la inclinazione (rapporto) dei tratti di retta che uniscono due punti.

[75] La misura Y – X è affetta da un errore di 0.4 cm (gli errori assoluti si sommano) ma essi vengono poi ripartiti egualmente tra le 4 monete

13. Per determinare la capacità di un recipiente di forma cubica si sono seguiti due procedimenti. Nel primo caso sono stati misurati gli spigoli interni del recipiente trovando per tutti il valore l = (0.200 ± 0.002) m, poi è stato calcolato il volume del cubo V = l^3.

    Nel secondo caso il recipiente è stato pesato prima vuoto e poi colmo d'acqua trovando che la massa d'acqua è m = (8.000 ± 0.008) kg. Conoscendo la densità dell'acqua con una precisione del 0.2%, d = 1.000 g/cm³, si è calcolato il volume, $V = m/d$.

    La precisione della misura del volume è…(Juniores 1998) [77]

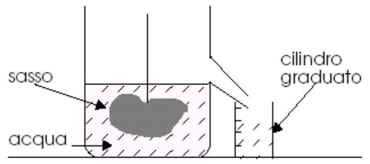
    A …migliore nel primo caso perché l'incertezza assoluta delle misure di l è più piccola di quella della misura della massa.

    B …migliore nel secondo caso perché l'incertezza relativa delle misure è più piccola.

    C …uguale nei due casi perché il volume è lo stesso.

    D …non confrontabile perché si sono seguiti procedimenti diversi.

14. In figura viene schematizzato un metodo per misurare il volume di un sasso. Quale dei seguenti accorgimenti NON è necessario al fine di ottenere un risultato accurato? …(Juniores 1998)



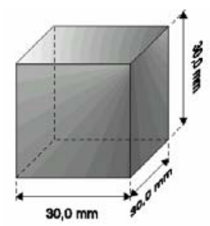
    A …Assicurarsi, prima di immergere il sasso, che l'acqua arrivi giusto al livello del beccuccio di sfiato, senza traboccare.

    B …Immergere il sasso completamente nell'acqua.

    C …Appoggiare il sasso sul fondo del recipiente con l'acqua.

    D …Attendere che l'acqua abbia finito di scorrere dal beccuccio di sfiato nel cilindro graduato.

15. Le lunghezze di tre spigoli di un cubo sono state misurate usando un calibro. Il calibro usato permette letture con un'incertezza di ±0.1 mm. Quale dei seguenti valori indica meglio l'incertezza con cui può essere calcolato il volume del cubo? …(Juniores 1999) [78]



A …$\frac{1}{27}$ % B …$\frac{3}{10}$ % C …$\frac{1}{3}$ % D …1 %

16. Una studentessa ha effettuato delle misure variando la distanza fra una sorgente radioattiva e lo strumento rivelatore: i valori misurati, depurati degli effetti della radiazione di fondo, sono riportati nella seguente tabella:

Distanza tra la sorgente ed il rivelatore:

d (cm)	10	20	30	40	50

Frequenza degli impulsi:

ν(l/s)	127	31	14	8	5

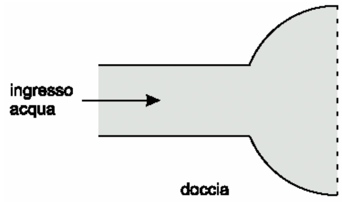
[76] La velocità dapprima cresce (per 3 intervalli) poi rimane costante (per 3 intervalli) e infine va a 0 in 2 intervalli (questa ultima osservazione consente di scegliere tra A e B)

[77] Nel primo caso l'errore relativo è triplo di quello su l ed è del 3%. Nel secondo caso l'errore è la somma dei due errori relativi 0.1% + 0.2 % = 0.3 % e dunque la precisione nel secondo caso è 10 volte più alta.

[78] L'errore relativo percentuale è 3 · 0.1/30 ·100 = 1%

Da questi dati si può affermare che la frequenza degli impulsi è proporzionale a…(Juniores 1999) [79]

A …d^2 B …$\frac{1}{d^2}$ C …$\sqrt{d}$ D …$\frac{1}{d}$



17. In figura viene schematizzato l'attacco di una doccia. Nel tubo passano 2.0×10^{-3} m³ d'acqua al secondo e l'attacco della doccia ha 100 fori, ciascuno con una superficie di 2.0×10^{-6} m². La velocità media con cui l'acqua esce dai fori della doccia è, approssimativamente…(Juniores 2000) . [80]

A … 0.1 m/s B … 5 m/s C … 7 m/s
D … 10 m/s

18. Un sasso di massa 12 g e densità 3g/cm³ viene accuratamente immerso in 25 cm³ di acqua contenuta in un cilindro graduato. Qual è la nuova lettura sul cilindro graduato? …(Juniores 2001) [81]

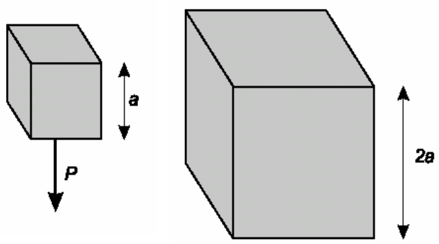
A …21 cm³ B …28cm³ C …29cm³
D …37cm³

19. Un oggetto solido si trova in equilibrio appeso ad un filo. Quale sua proprietà NON può essere variata esercitando su di esso una forza? …(Juniores 2001)

A …Lunghezza B …Massa C …Forma
D …Velocità

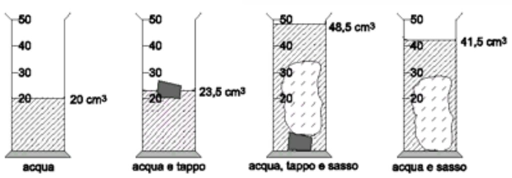
20. Quale riga di questa tabella corrisponde alla corretta descrizione di forza, massa e accelerazione come quantità scalari o vettoriali? …(Juniores 2002)

	Forza	Massa	Accelerazione
A …	Scalare	Scalare	Scalare
B …	Scalare	Vettore	Scalare
C …	Vettore	Scalare	Vettore
D …	Vettore	Vettore	Vettore



21. In figura sono rappresentati due cubi: il più piccolo ha peso P e spigolo metà di quello del cubo più grande. Se i cubi sono fatti del medesimo materiale, il peso del cubo più grande è…(Juniores 2002)

A … 2P B …4P C …8P D …16P



22. Per determinare il volume di un tappo di sughero mediante un cilindro graduato si sono eseguite le quattro misure schematizzate qui sotto. Qual è allora il volume del tappo? …(Juniores 2002) [82]

A …3.5cm³ B …7.0cm³ C …18.0cm³ D …21.5cm³

---

[79] la proporzionalità è sicuramente inversa (la frequenza decresce al crescere della distanza) e ciò consente di escludere A e C. Se si costruisce una tabella con ν d² si osserva che questa quantità è grosso modo costante e dunque si ha una proporzionalità inversa di tipo quadratico

[80] La superficie disponibile è 2.0×10^{-4} m² e dividendo la portata (m³/s) per la sezione m² si ottengono i m/s (2.0×10^{-3} /2.0×10^{-4} = 10 m/s)

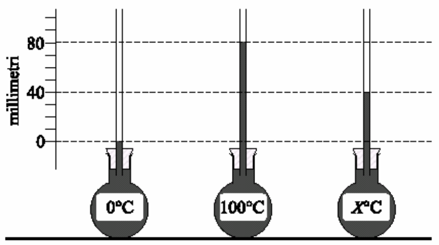
[81] Il volume è 12/3 = 4 cm³ e dunque la lettura sul cilindro dà 25 + 4 = 29 cm³

[82] Il volume del sasso è 41.5 – 20 = 21.5 cm³. IL volume del sasso e del sughero è 48.5 – 20 = 28.5 cm³ e dunque il sughero ha un volume di 7.0 cm³

23. Un termometro immerso in acqua e ghiaccio indica una temperatura di 1°C. Lo stesso termometro posto nel vapore immediatamente al di sopra di un recipiente con acqua in ebollizione indica 101°C. Se si usano le letture di questo termometro per misurare la differenza di temperatura fra l'acqua in ebollizione ed il ghiaccio fondente di quanti gradi risulta sbagliato il risultato? …(Juniores 2002) [83]

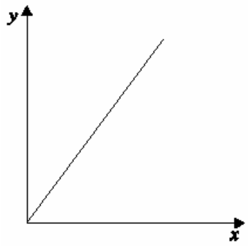
A 2°C in meno. B 1°C in meno. C zero.
D 1°C in più.

24. Un'ampolla di vetro è riempita con un liquido colorato e chiusa con un tappo. Attraverso il tappo viene inserito un tubo sottilissimo che pesca nel liquido. In figura si vede il livello della colonna di liquido quando l'ampolla si trova, rispettivamente, a 0°C, a 100°C e ad una temperatura incognita X. Il liquido si espande in modo proporzionale alla variazione della temperatura. Quanto vale la temperatura X?…(Juniores 2003)



A …40°C B …50°C C …60°C D …80°C

25. Osserva la forma del grafico nella figura sottostante. Una sola delle seguenti relazioni non è rappresentata dal grafico. Quale? …(Juniores 2003) [84]



A …L'allungamento elastico di una molla al variare della forza che la deforma.

B …La distanza percorsa da un masso in caduta libera verticale al variare del tempo di caduta.

C …La pressione idrostatica in un punto all'interno di un liquido al variare della profondità del punto.

D …La variazione di temperatura di una determinata massa d'acqua al variare della quantità di calore fornito quando le perdite di calore sono trascurabili.

26. A quale dei seguenti ordini di grandezza si avvicina di più lo spessore di un foglio di questo questionario? …(Juniores 2004)

A …10^{-4} m B …10^{-2} m C …10^{0} m D …10^{2} m

27. L'espressione finale di un calcolo è $\left(9.0\cdot 10^{9}\frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\right)\left(\frac{360\cdot 10^{-6}\text{C}}{5.0\text{m}}\right)$.

Qual è l'unità di misura corretta nella risposta? …(I livello 1995) [85]

A … Ampere B … Joule C … Ohm
D … Volt E … Watt

28. Un pendolo è costituito da un corpo sospeso al soffitto di una stanza. Se p è il periodo di oscillazione del pendolo e q la sua altezza rispetto al pavimento la dipendenza di p da q può essere rappresentata da una retta disegnando il grafico di…(I livello 1995)

A …p in funzione di q

B …p in funzione di $1/q$

C …$1/p$ in funzione di $1/q$

[83] Il termometro è affetto da un errore assoluto sistematico di + 1 grado e tale errore si elide nella differenza perché è sempre positivo.

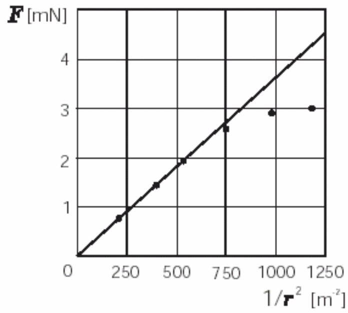
[84] In quel caso la relazione è di tipo quadratico

[85] N·m/C = J/C = V

D …p^2 in funzione di q

E …log p in funzione di q

29. In un esperimento è stata misurata la forza F (sfere cariche, sospese a fili isolanti, per diversi tra i centri delle sfere. I valori di F sono stati r in funzione di $(1/)r^2$. Nel tracciare la retta che misure fatte sembra che siano stati ignorati d seguenti affermazioni possono spiegare corrett 1) E' più difficile misurare con precisione le fo più difficile misurare con precisione le distan piccole distanze le cariche potrebbero no uniformemente sulle sfere. …(I livello 1995) [86]



A …Tutte e tre B … Solo la 1 e la 2 C … Solo la 2 e la 3
D … Solo la 1 E … Solo la 3

30. Nella tabella seguente sono riportati i valori della velocità di propagazione, in m/s delle onde nell'acqua, misurati per diverse lunghezze d'onda e per diversi valori della profondità. Quali delle seguenti affermazioni possono essere sostenute in base all'analisi dei dati? 1) Per lunghezze d'onda di 10^{-1} m o più piccole la velocità di propagazione è indipendente dalla profondità qualunque essa sia. 2) Per lunghezze d'onda di 100 m la velocità di propagazione delle onde cresce al crescere della profondità. 3) Per lunghezze d'onda di 1 m o più la velocità di propagazione delle onde varia al variare della lunghezza d'onda e ciò specialmente a più grandi profondità. …(I livello 1995)

Profondità (in metri)	Lunghezza d'onda (in metri)					
	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2
10^{-1}	0.67	0.25	0.40	0.93	0.99	0.99
1	0.67	0.25	0.40	1.25	2.95	3.13
10	0.67	0.25	0.40	1.25	3.95	9.33
10^2	0.67	0.25	0.40	1.25	3.95	12.5

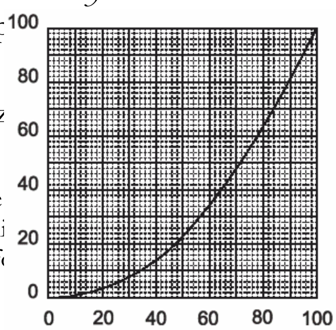
A … Solamente la prima
B … Solamente la seconda
C …Solamente la prima e la terza
D … Solamente la seconda e la terza
E La prima, la seconda e la terza

31. In situazioni opportune la potenza è data da: 1) corrente × differenza di potenziale 2) energia trasformata : tempo 3) forza × velocità…(I livello 1995)

A …Tutte e tre B … Solo la 1 e la 2 C … Solo la 2 e la 3
D … Solo la 1 E … Solo la 3

32. In figura è rappresentata la relazione fra una grandezza y e un'altra grandezza x. Quale delle seguenti relazioni è esp …(I livello 1996)

A … y è proporzionale a x B … y è proporz



[86] a piccole distanze (lato destro del diagramma) si leggono forze sto perché probabilmente le cariche (di segno opposto) si sono di si) negli estremi lontani delle sfere e hanno dunque determinato f

C … y è proporzionale a x^2 D … y è proporzionale a $1/x$

E … y è proporzionale a x^3

33. Quale delle seguenti misure elettriche presenta il minore errore percentuale? …(I livello 1997)

A …(34 ±2)mA B … (0.63 ±0.01)A C … (1.52 ±0.02)V

D … (241 ±1)V E … (18.0 ±0.5)mV

34. Indichiamo con x e y rispettivamente l'energia cinetica e la velocità di un corpo. Quale delle seguenti relazioni esprime correttamente la relazione fra x e y ? …(I livello 1997) [87]

A … $y = k\,x$ B … $y = k\,x^2$ C … $y = k/x$

D … $y = k/x^2$ E … $y = k\sqrt{x}$

35. Quale delle seguenti affermazioni sulla potenza sono corrette?

1) watt è un'unità di misura della potenza

2) $\frac{\text{coulomb}}{\text{secondo}} \times \frac{\text{joule}}{\text{coulomb}}$ è un'unità di misura della potenza

3) $\frac{\text{coulomb}}{\text{secondo}} \times \frac{\text{coulomb}}{\text{secondo}} \times \frac{\text{volt}}{\text{ampere}}$ è un'unità di misura della potenza…

(I livello 1997)

A …Solo la prima B …Solo la seconda C …Solo la terza

D …Solo la prima e la seconda E …Tutte e tre

36. Quale delle seguenti unità di misura può essere usata per esprimere il prodotto fra la pressione di un gas e la variazione del suo volume? …(I livello 1998)

A …newton B …newton × secondo

C …newton × metro D …newton/metro quadro

E …watt

37. Su intervalli di temperatura non troppo grandi la forza elettromotrice fornita da una termocoppia è una funzione lineare della differenza di temperatura fra le due giunzioni. Si sono misurate le forze elettromotrici date da una termocoppia ponendo la giunzione calda a tre diverse temperature e mantenendo la sua giunzione fredda a temperatura costante, trovando i dati riportati in tabella. Quanto vale T ? …(I livello 1998) [88]

Temperatura	F.e.m.
63 °C	2 mV
T	5 mV
126 °C	9 mV

A …84°C B …90°c C …91°C

D …98°CE …99°C

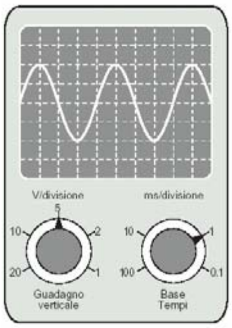
38. Quale, fra le seguenti unità ha la stessa dimensione del "farad"? …(I livello 1998)

A …Ω^{-1} s B …Ω s^{-1} C … Ω s

D … Ω s^2 E … Ω^2 s

[87] se l'energia cinetica è proporzionale al quadrato della velocità la velocità è proporzionale alla radice dell'energia cinetica

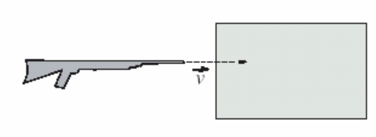
[88] Indicata con x la temperatura della sorgente fredda si ha (63 – x)/2 = (126 – x)/9 = (T – x)/5 e basta ora risolvere il sistema. Si trova x = 45° e T = 90 °



39. In figura si mostra un segnale sinusoidale evidenziato sullo schermo di un oscilloscopio; si vede anche la disposizione delle manopole. In quale riga della tabella seguente sono riportati i valori corretti della tensione di picco e della frequenza del segnale? …

(I livello 1999) [89]

	tensione di picco (V)	frequenza di segnale (Hz)
A …	10	100
B …	10	250
C …	20	250
D …	10	500
E …	20	1’000



40. Il dispositivo in figura viene usato per misurare la velocità v del proiettile sparato da un fucile. La velocità viene calcolata misurando la massa finale m_1 del blocco che funge da bersaglio, la massa m del proiettile e la velocità v_1 del bersaglio dopo l’impatto. La relazione usata è $v = m_1v_1/m$. In un simile esperimento si sono trovati i seguenti risultati: Massa del bersaglio dopo l’impatto m_1 = (2.00 ± 0.02) kg. Massa del proiettile m = (10.0 ±0.5) g. Velocità del bersaglio dopo l’impatto v_1 = (0.5 ±0.01) m/s. Quale dei seguenti valori esprime una stima dell’incertezza nella misura della velocità del proiettile? …(I livello 1999) [90]

A …1% B …2% C …3%
D …8% E …15%

41. Un treno viaggia dalla stazione A alla stazione D transitando per le stazioni intermedie B e C. Le distanze misurate fra le varie stazioni risultano: da A a B 648 km; da B a C 64.8 km; da C a D 6.48km. Tra i seguenti, il modo più ragionevole di esprimere la distanza coperta dal treno è di … (I livello 2000) [91]

A …718km B … 719km C … 719.2km
D … 719.3km *E* … 719.28km

42. Un oggetto si muove con velocità prossima a 0.3 m/s. Si vuole misurare tale velocità con un'accuratezza dell'ordine dell'1 % usando una *distanza campione* (cioè una distanza il cui valore è noto con errore di misura trascurabile) di 3 mm. II cronometro da usare per la misura dovrà avere almeno la sensibilità di … (I livello 2000) [92]

A 1s B 0.1 s C 0.01s
D 0.001s E 0.0001 s

43. L’unità di misura “volt” è equivalente a: …(I livello 2001)

A … farad/coulomb B … ampere/ohm C … joule/ampere
D … joule/ohm E … joule/coulomb

[89] Il periodo risulta di 4 ms

[90] gli errori relativi percentuali si sommano e valgono rispettivamente 1, 5, 2

[91] Il primo dato è espresso con precisione al km e pertanto si ha 648 + 65 + 6 = 719 km

[92] Il tempo da misurare è di 1/100 s e la precisione della misura deve essere dell’1% e cioè di 1/10'000 di s.

44. Quale delle seguenti espressioni potrebbe esprimere correttamente, a meno di costanti numeriche, la velocità delle onde nell'oceano, se si indica con g l'accelerazione di gravità, con ρ la densità dell'acqua di mare, con h la profondità dell'oceano e con λ la lunghezza d'onda … (I livello 2001) [93]

A … $\sqrt{g\lambda}$ B … $\sqrt{\frac{g}{h}}$ C … $\sqrt{\frac{g\lambda}{h}}$

D … $\sqrt{\rho g h}$ E … $\sqrt{\frac{g}{\rho}}$

45. Quale delle seguenti terne di grandezze fisiche contiene due grandezze vettoriali e una sola grandezza scalare? … (I livello 2001)

A … Tempo, lavoro e forza

B … Accelerazione, massa e quantità di moto

C … Velocità, forza e quantità di moto

D … Accelerazione, velocità e momento della quantità di moto

E … Densità, energia cinetica e quantità di moto

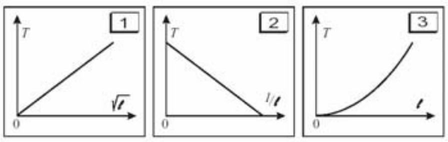
46. Si scelga quale, tra le seguenti coppie, comprende una grandezza vettoriale e una grandezza scalare … (I livello 2002)

A Spostamento e accelerazione B Forza ed energia cinetica

C Potenza e massa D Lavoro ed energia potenziale

E Velocità e quantità di moto

47. Il periodo di un pendolo semplice è dato da $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ dove T è il periodo del pendolo, l è la lunghezza del pendolo, g è l'accelerazione di gravità. Si vuol sapere quale o quali fra i grafici seguenti potrebbero essere corretti … (I livello 2002)



A Tutti e tre B solo 1 e 2

C solo 2 e 3 D solo 1 E solo 3

48. Un micrometro, il cui errore di lettura è di ± 0.01 mm dà i seguenti risultati quando viene usato per misurare il diametro d di un filo a sezione costante.

1.02 mm 1.02 mm 1.01 mm 1.02 mm 1.02 mm

Togliendo il filo e chiudendo le ganasce del micrometro, sulla scala dello strumento si legge – 0.02 mm. Quale dei seguenti valori esprime, con la precisione appropriata, la misura di d in millimetri? … (I livello 2002)

A 1.0 B 1.00 C 1.02 D 1.038 E 1.04

49. Se p è la quantità di moto di un corpo di massa m, l'espressione p^2/m ha le dimensioni fisiche di … (I livello 2002)

A …un'accelerazione B … un'energia C … una forza

D …una potenza E …una velocità

50. Il momento d'inerzia ha come dimensioni … (I livello 2003)

[93] moltiplicando una accelerazione per una lunghezza si ottiene una velocità al quadrato

A [M][L][T] B $[M][L]^2[T]^{-2}$
C $[M][L]^{-1}[T]^{-2}$ D $[M][L]^2$
E $[M][L]^2[T]^{-1}$

51. Il volume di un'aula scolastica, espresso in m^3, è dell'ordine di …(I livello 2004) [94]
A 10^{-2} B 10^{-1} C 10^1 D 10^2
E 10^4

52. Quale delle seguenti combinazioni di unità di misura fondamentali può essere utilizzata nel Sistema Internazionale (SI) per esprimere il peso di un oggetto? …(I livello 2004) [95]
A chilogrammo
B chilogrammo·metro
C chilogrammo/secondo
D chilogrammo·metro/secondo
E chilogrammo·metro / secondo^2

53. Pierino ha in casa un acquario pieno d'acqua che ha dimensioni uguali a 40 cm, 50 cm e 80 cm. Il contenitore ha una massa di 10 kg e si vuole spostarlo senza togliere l'acqua. La massa complessiva da spostare è circa…(I livello 2005) [96]
A 10.2 kg B 11.6 kg C 26 kg
D 170 kg E 330 kg

54. Un calcolo ha fornito un risultato le cui unità di misura sono J N W^{-1} kg^{-1}. Quali unità si ottengono semplificando l'espressione trovata? …(I livello 2005) [97]
A s B m C kg D m^2 E ms^{-1}

55. Di seguito sono indicate le equazioni dimensionali e le corrispondenti unità di misura di alcune grandezze. In un solo caso l'accoppiamento è quello giusto: quale? …(I livello 2006)

A $\frac{[\text{massa}][\text{lunghezza}]}{[\text{tempo}]}$ e watt
D $\frac{[\text{massa}][\text{lunghezza}]}{[\text{tempo}]^3}$ e joule
B $\frac{[\text{massa}][\text{lunghezza}]^2}{[\text{tempo}]}$ e watt
E $\frac{[\text{massa}][\text{lunghezza}]^2}{[\text{tempo}]^3}$ e joule
C $\frac{[\text{massa}][\text{lunghezza}]^2}{[\text{tempo}]^2}$ e joule

A B C D E

56. L'ordine di grandezza del volume di una persona adulta di statura e massa normali è…(I livello 2006) [98]
A …0.01 m^3 B …0.1 m^3 C …1 m^3
D …10m^3 E …100m^3

57. Sia g l'accelerazione di gravita sulla superficie di un pianeta di raggio R e sia E_c la minima energia cinetica che un proiettile di massa m

---

[94] $5·6·3 \approx 100\ m^3$

A $E_c = \sqrt{gR}$ B $E_c = mgR$ C $E_c = \frac{mg}{R}$ D $E_c = m\sqrt{\frac{g}{R}}$ E $E_c = gR$

[97] [J N W^{-1} kg^{-1}] = J kg m s^{-2} (J s^{-1})$^{-1}$ kg^{-1} = m

[98] senza fare molti conti basta riflettere sul fatto che abbiamo la densità dell'acqua e dunque ad una massa di 10^2 kg (ordine di grandezza) corrisponde un volume di 0.1 m^3

deve avere sulla superficie del pianeta in modo da poter sfuggire alla sua attrazione gravitazionale. Quale delle seguenti formule per l'energia cinetica E_c è dimensionalmente corretta?…(I livello 2007)

A B C D E

58. La massa di un libro di fisica è dell'ordine di…(I livello 2007)

A …10^3 kg B …10^2kg C …10^1kg
D …10^0kg E …10^{-2} kg

59. Auguri a tutti i partecipanti delle Olimpiadi della Fisica e in particolare a quanti festeggiano il compleanno!!!. Qual è, tra i seguenti, l'ordine di grandezza che esprime più correttamente il numero di volte che il loro cuore ha battuto dal momento della nascita?…(I livello 2008) [99]

A …10^5 B …10^7 C …10^9
D …10^{11} E …10^{13}

60. In un esperimento sono state registrate queste misure con le rispettive incertezze:

Aumento di temperatura	10 °C ± 1°C
Corrente nel bollitore	5.0 A ± 0.2 A
Tensione applicata al bollitore	12.0 V ± 0.5 V
Tempo	100 s ± 2 s
Massa del liquido	1.000 kg ± 0.005 kg

La misura con la maggiore incertezza percentuale è quella relativa a…(I livello 2008)

A …l'aumento di temperatura B …la corrente nel bollitore
C …la tensione applicata al bollitore
D …il tempo E …la massa del liquido

[99] $70 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \approx 6.6 \cdot 10^8$ s

0.15. Indice analitico