I.1 La velocità

- ⌘ Il movimento meccanico
- ⌘ Sistemi di riferimento e traiettoria
- ⌘ Il moto rettilineo
- ⌘ Il moto uniforme
- ⌘ Il moto vario
- ⌘ La velocità media
- ⌘ Velocità istantanea e media
- ⌘ I punti speciali che caratterizzano il diagramma orario
- ⌘ Dalla velocità allo spostamento
- ⌘ Applicazioni su velocità e spostamento nei moti rettilinei

la fisica è nata dallo studio del movimento e dalle leggi di funzionamento delle macchine viste inizialmente come *inganni* della natura

1.1 Il movimento

1.1.1 Perché la fisica parte da qui?

L'insegnamento della fisica ai livelli successivi a quello elementare segue solitamente una struttura di tipo sistematico che inizia con lo studio del movimento.

Tale *tradizione* si basa sul fatto che la fisica, nel senso moderno del termine (cioè dopo la rivoluzione scientifica del XVII secolo), si è strutturata a partire *dalla comprensione del concetto di movimento*. Alla comprensione delle caratteristiche essenziali del movimento si è accompagnata la *nascita della meccanica*, cioè di quella parte della fisica in cui il movimento viene studiato contestualmente alle cause che lo determinano.

La meccanica si è strutturata e il suo impianto è stato poi imitato dalla restante fisica si è sviluppata cercando di ripetere quello schema persino quando ci si trovava di fronte a fenomeni e leggi profondamente diversi (è il caso dell'elettromagnetismo).

Nella cultura occidentale tale schema si è trasferito all'insegnamento e, per questa ragione, i corsi di fisica iniziano con lo studio del movimento e non dell'equilibrio anche se la comprensione del movimento costituisce certamente uno scoglio non banale da digerire a causa sia della sottigliezza concettuale della nozione di movimento, sia della complessità logica e matematica che la soluzione dei problemi del movimento richiede.

Il movimento ci circonda: tutti i corpi, dalle stelle, ai pianeti fino alle più piccole particelle come gli atomi ed i loro componenti, sono in uno stato di continuo movimento e questa esperienza è così primaria nell'uomo che siamo tentati di *non definire cosa si intenda con movimento*. Se ci pensiamo un po' su ci renderemo conto che il movimento corrisponde allo *spostamento di un corpo rispetto ad un altro*; il movimento è cioè sempre un *fenomeno relativo a qualcosa*; per ragioni di tradizione lo chiameremo *movimento meccanico.*

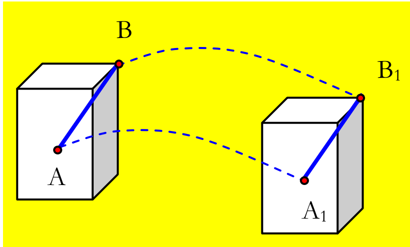
Meccanica, meccanismo, macchina hanno una *origine comune* e rinviano, nel teatro greco, agli artifici scenici che venivano usati per *ingannare la natura*, facendo comparire in maniera inaspettata e innaturale il dio chiamato a risolvere situazioni intricate: si tratta del *deus ex machina* dei latini che viene ancora utilizzato in italiano per indicare appunto un intervento risolutore ed inaspettato.

Le operazioni di gran parte dei corpi macroscopici e delle macchine nonché tutti i tipi di trasferimento di beni si basano sul movimento meccanico. Inoltre esso fa da base ai fenomeni più complessi di tipo non meccanico. Per esempio, i fenomeni termici sono basati sul movimento caotico delle molecole; la radiazione luminosa ha a che fare con il moto di elettroni negli atomi; le reazioni nucleari sono correlate con il movimento e con la interazione di particelle elementari.

1.1.2 MOVIMENTO TRASLATORIO E ROTATORIO

Per descrivere il moto di un corpo macroscopico (cioè dotato di estensione non trascurabile) è necessario descrivere quello di tutti i punti che lo compongono.

Un primo tipo di moto (quello più semplice) è il *moto traslatorio*. In esso tutti i punti del corpo si muovono allo stesso modo il che significa che un segmento che unisce due punti qualsiasi del corpo si sposta parallelamente a se stesso. Inoltre, come ci si rende conto facilmente, il segmento che unisce un punto del corpo ad un dato istante con lo stesso punto riferito ad un istante successivo ha la stessa direzione, verso e lunghezza per qualsiasi punto del corpo.



nel **moto traslatorio** tutti i punti di corpo si muovono allo stesso modo; i segmenti si spostano rimanendo paralleli a se stessi

Visto che tutti i punti di un corpo in moto traslatorio si muovono allo stesso modo per descrivere il moto traslatorio di un corpo è sufficiente specificare il moto di uno qualsiasi dei punti del corpo considerato. Nota bene: in generale, le traiettorie compiute dai punti di un corpo che trasla, non sono delle rette, anche se verrebbe spontaneo il pensarlo.

Una seconda semplice forma di movimento è il *moto rotatorio* in cui tutti i punti del corpo descrivono circonferenze che giacciono in piani paralleli. I centri di tali circonferenze si trovano su una identica retta chiamata asse di rotazione.

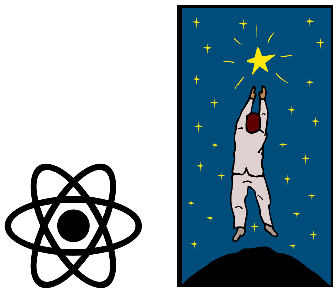
nel **moto rotatorio** tutti i punti si muovono su circonferenze

In generale i moti reali non sono né traslatori né rotatori, ma come vedremo utilizzando opportuni artifici possono essere ricondotti ad una combinazione di queste due forme semplici.

1.1.3 IL PUNTO MATERIALE

Nell'affrontare molti problemi di meccanica si è rivelata efficace la scelta di trascurare le dimensioni del corpo e trattarlo come se fosse un *punto materiale*, particella, o punto massa.

Un *punto materiale* è un corpo le cui dimensioni possano essere trascurate nel particolare problema che si sta affrontando. Naturalmente si tratta di una astrazione; in natura non esistono punti materiali, ma l'utilizzo di questo concetto consente di semplificare la trattazione di molti problemi di meccanica.



punto materiale

un atomo può non essere un punto e può invece esserlo una stella; dipende dalle esigenze di studio, cioè dal contesto in cui si opera

In effetti se un passeggero è interessato a sapere il tempo di percorrenza della linea aerea sulla tratta Milano–Roma non gli interessa sapere come si muovono le diverse parti dell'aereo. Ma le dimensioni e la forma dell'aerea non possono essere trascurate per studiare il decollo, l'atterraggio o la resistenza dell'aria.

Allo stesso modo possiamo considerare la terra o i pianeti come punti materiali se stiamo studiando il loro moto intorno al sole. Ma se ci stiamo occupando della spiegazione della alternanza tra dì e notte o del ciclo delle stagioni nel corso dell'anno, allora non possiamo più trattare la terra come un punto massa e dobbiamo prendere in considerazione la sua forma, la rotazione intorno al suo asse, la inclinazione di tale asse rispetto al piano dell'orbita e molti altri fattori.

"I've discovered what I believe to be the elementary basic particle: a small stone."

Dunque, a seconda del tipo di problema, si può trattare un corpo come un punto materiale, oppure no.

1.2 Sistemi di riferimento e Traiettorie

1.2.1 Lo spazio è omogeneo e isotropo

Quando studiamo fenomeni che avvengono nei pressi della superficie terrestre ci rendiamo immediatamente conto che le diverse direzioni dello spazio non sono tra loro equivalenti. Un corpo lasciato cadere dalle mani lo fa sempre verticalmente (approssimativamente in direzione del centro delle terra); la superficie libera di un liquido si dispone solitamente in un piano orizzontale; per far salire un corpo bisogna impartirgli una velocità iniziale verticale, mentre per farlo cadere non ce n'è bisogno. Sembra proprio di vivere in un mondo pieno di *direzioni privilegiate*.

La mancanza di equivalenza tra le diverse direzioni è dovuta al fatto che la terra attira gli altri corpi. Ma a grandi distanze dalla terra, dagli altri pianeti e dalle stelle, cioè nello *spazio libero dalla presenza di grandi masse*, noi troveremo invece che *tutte le direzioni sono equivalenti*. Diciamo allora che *lo spazio libero è isotropo*[1], cioè che non esistono direzioni privilegiate.

lo spazio
lo spazio vuoto di materia è omogeneo (cioè le sue proprietà non dipendono da dove vengono esaminate) e isotropo (cioè non presenta direzioni privilegiate).

Allo stesso modo *tutti i punti dello spazio sono equivalenti* se non ci sono corpi grandi, come stelle o pianeti nelle vicinanze. Di conseguenza noi diremo che lo *spazio libero è uniforme*, cioè non esistono punti dotati di proprietà particolari.

Le due proprietà dello spazio appena enunciate ci sembrano del tutto ovvie, ma non è così, o per lo meno così non è stato per lungo tempo. La *scienza moderna* nasce attraverso una *rottura culturale*, sofferta e in certi momenti tragica, con i punti di vista che mettevano la terra al centro dell'universo, assegnavano condizione di naturalità ad alcune direzioni privilegiate (*i corpi pesanti tendono verso il basso e i corpi leggeri tendono verso l'alto*) e ponevano l'uomo (o il dio) come condizione di esistenza della natura.

Abbiamo imparato dalla esperienza di questi ultimi tre o quattro secoli che *conoscere*, e in particolare *conoscere l'universo*, vuol dire abbandonare ogni pretesa geocentrica e allontanare la scienza da ogni forma di antropocentrismo.

Il tempo è uniforme

Anche il tempo è uniforme. Ciò significa che qualunque evento, che occorre nelle stesse condizioni, ma in differenti istanti, si svolge esattamente nello stesso modo. Se una sferetta cade oggi da una altezza di 6 m e impiega 1.1 s, essa deve avere impiegato lo stesso tempo per cadere nello stesso laboratorio anche un mese fa o un anno fa, e dovrà impiegare lo stesso tempo anche tra mille anni.

il tempo
è uniforme: cioè l'andamento dei fenomeni, in condizioni identiche, non dipende dal momento in cui essi hanno luogo

Siamo proprio sicuri che sia così? *In realtà non lo sappiamo* e uno dei problemi aperti quando si discute della validità delle leggi fisiche su grande scala è proprio questo. Nel nostro corso di fisica noi incontreremo delle leggi e delle costanti universali; supporremo che esse valgano incondizionatamente e che le costanti siano tali anche se sappiamo che, al riguardo, esistono problemi aperti di cui si occupano attivamente i cosmologi.

---

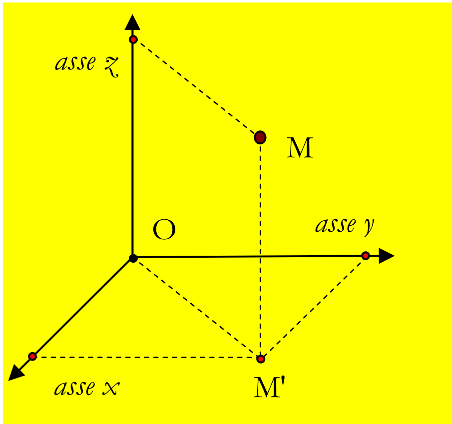
[1] gr. tropo-, -tropos, connesso col v. trépein '(ri)voltare', di orig. indeuropea. Da Zingarelli 2000

I sistemi di riferimento e la loro infinità

Come vedremo, dalla uniformità del tempo e dalla uniformità ed isotropia dello spazio, derivano un buon numero di conseguenze importanti. La fisica del XX e XXI secolo procede, nella conoscenza delle caratteristiche dell'infinitamente piccolo e dell'infinitamente grande, applicando *principi generali di simmetria* che sono l'esatto contrario delle idee di particolarità e contingenza. Tra questi principi si ritrovano omogeneità e isotropia.

Possiamo osservare sin d'ora che poiché lo spazio è uniforme (tutti i punti sono equivalenti) ed isotropo (tutte le direzioni sono equivalenti), è impossibile (o forse è meglio dire privo di significato) determinare la *posizione assoluta* di un punto materiale nello spazio.

Però è possibile determinare la posizione di un corpo rispetto ad un altro. Per esempio, la posizione di un lampadario in una stanza è completamente determinata dalla sua distanza dal pavimento e dalle due pareti mutuamente perpendicolari. Tre numeri, del tipo indicato, determinano anche la posizione di un qualsiasi oggetto interno o esterno alla stanza.



sistema di riferimento cartesiano per la descrizione di posizione e movimento

Si chiama *sistema di riferimento* un corpo esteso o un gruppo di corpi rispetto al quale si determinano le posizioni di tutti gli altri corpi esaminati. Non ha senso porsi la questione se il riferimento debba essere fisso, visto che qualsiasi movimento è relativo a qualcosa. *Dire che il riferimento è fisso e che un corpo si muove rispetto ad esso equivale a dire che tale corpo è fisso e il riferimento si muove rispetto ad esso* visto che ogni corpo può essere pensto come un riferimento.

In linea di principio si può utilizzare come sistema di riferimento qualsiasi corpo, ma *non tutti i sistemi di riferimento risultano essere egualmente convenienti.*

Per esempio, il moto di una automobile risulta descritto in maniera più semplice da un sistema di riferimento fisso alla terra che non da uno connesso al sole o alla luna. D'altra parte il moto dei pianeti risulta più conveniente se viene visto da un sistema di riferimento connesso al sole e non alla terra o ad altri pianeti perché così le leggi del moto planetario risultano più semplici. Più avanti discuteremo i criteri di scelta per i sistemi di riferimento.

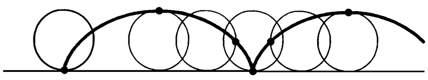
Normalmente un *sistema di riferimento* è associato a tre rette perpendicolari, *gli assi delle coordinate.* La posizione di un punto è specificata da tre coordinate che forniscono le lunghezze dei segmenti che vanno dalla origine del sistema di riferimento alle proiezioni del punto sugli assi (si veda la figura qui a lato). Quando si opera su un sistema a due soli assi il primo di essi è chiamato asse delle ascisse e il secondo asse delle ordinate.

1.2.2 La traiettoria

La linea descritta da un punto materiale in moto rispetto ad un dato sistema di riferimento è detta *percorso* o *traiettoria.* Se accendiamo una pila a torcia e poi la facciamo oscillare in una stanza buia potremo osservare la traiettoria descritta dalla estremità luminosa.

la traiettoria dipende dal sistema di riferimento

La forma della traiettoria dipende dalla scelta del sistema di riferimento. Consideriamo, per esempio, un corpo lasciato cadere liberamente all'interno di un vagone ferroviario in moto rispetto alla terra. Rispetto al vagone la traiettoria del corpo risulta essere una linea retta; rispetto alla terra risulta essere una curva (una parabola se la resistenza dell'aria è trascurabile).

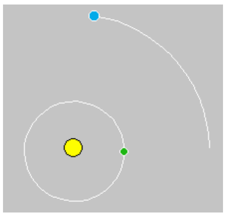


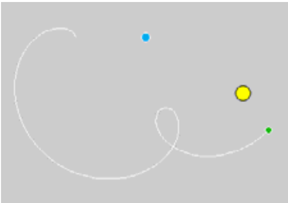
cicloide: la traiettoria descritta da un punto di una ruota che rotola senza strisciare su un piano

Analogamente se si considera il moto di un generico punto dell'elica di un aereo si avrà una traiettoria circolare quando il riferimento è connesso all'aereo e una traiettoria elicoidale se il riferimento è invece preso rispetto alla terra.

Dunque *ha senso parlare di traiettoria solo in senso relativo*. Non ha senso parlare della forma di una traiettoria in generale, ma bisogna sempre farlo rispetto ad un riferimento (*sistema di coordinate*).

Consideriamo il rotolamento di una ruota ed occupiamoci della traiettoria di un punto posto sulla circonferenza. Ci verrebbe spontaneo di dire che la traiettoria sia di tipo circolare (e sarebbe così se il sistema di riferimento fosse fisso con il centro della ruota) invece la traiettoria ha la forma descritta nella figura qui a lato e prede il nome di *cicloide*.





Le traiettorie di Mercurio (verde) viste dal Sole e viste dalla Terra appaiono molto diverse

Ancora, se osserviamo dal Sole (in giallo) il moto di Mercurio (verde) e della Terra (azzurro) osserveremo delle orbite ellittiche che corrispondono quasi a delle circonferenze. Le due orbite sono riferite ad una intera rivoluzione di Mercurio.

Se invece ci mettiamo nel sistema di riferimento terrestre *vedremo* Mercurio che ruota intorno al Sole (il quale a sua volta ruota intorno alla Terra) e il risultato sarà una strana orbita che presenta dei cappi.

1.3 Il moto rettilineo

1.3.1 L'EQUAZIONE DEL MOTO

Il nostro studio del moto inizia con il *moto rettilineo*, quello durante il quale, il punto materiale si muove in linea retta. Perché si comincia dal moto rettilineo? La risposta più immediata è che si tratta del moto più semplice, ma la ovvietà della risposta nasconde una seconda ragione più profonda che scopriremo nei prossimi capitoli: *qualsiasi moto non rettilineo può sempre essere analizzato come una sovrapposizione di moti rettilinei.*

l'importanza del **moto rettilineo**: è il più semplice e inoltre tutti i moti non rettilinei possono essere descritti mediante composizione di moti rettilinei

Consideriamo dunque un punto materiale che si muova di moto rettilineo in un dato sistema di riferimento. Per comodità di descrizione converrà scegliere il sistema di riferimento in modo che uno dei suoi assi, per esempio l'asse *x,* coincida con la traiettoria della particella.

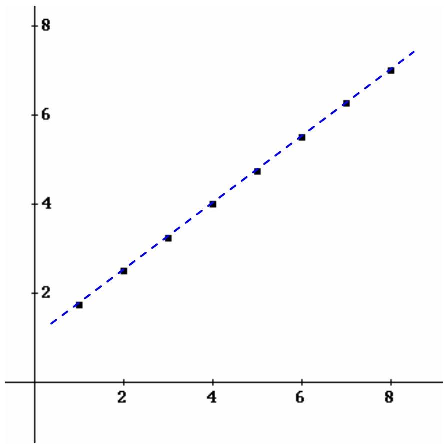
In questo caso, ad ogni istante si potrà associare la particella con una coordinata e ciò significa che la coordinata della particella è una funzione del tempo. Si scrive $x = f(t)$. L'espressione analitica di tale funzione si chiama *equazione del moto* della particella o anche legge oraria.

1.3.2 LA INTERPOLAZIONE DEI DATI SPERIMENTALI

Per determinare sperimentalmente la equazione del moto è necessario che l'asse delle coordinate venga munito di una scala in modo da associare la posizione ad un numero.

Consideriamo, per esempio, il moto di un passeggero sulla scala mobile all'interno di una stazione della metropolitana. La determinazione della posizione del passeggero e degli istanti a cui le diverse posizioni si riferiscono potrà avvenire nelle maniere più diverse: si può eseguire una successione di fotografie ad intervalli regolari, si può munire il passeggero di un marcatore di posizione che, ad eguali intervalli di tempo lascia una traccia sul muro che corre di fianco alla scala e così via. In ogni caso al termine dell'esperimento ideale disporremo di una serie di dati del tipo indicato in tabella.

Istante di tempo t, s	1	2	3	4	5	6	7	8
Coordinata x, m	1.75	2.50	3.25	4.00	4.75	5.50	6.25	7.00



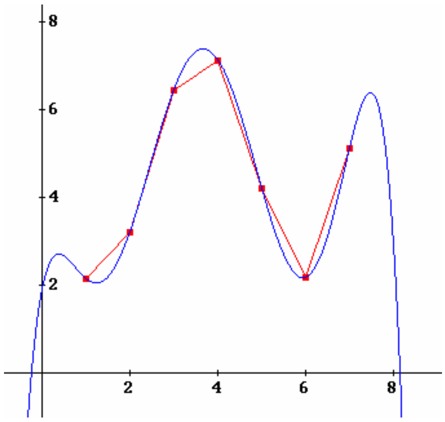
Questo esperimento non ci dà informazioni accettabili sulla posizione del nostro punto materiale negli istanti intermedi. Se però rappresentiamo i punti della tabella in un diagramma con in ordinata la posizione ed in ascissa il tempo scopriremo che i dati sperimentali stanno approssimativamente su di una retta. Non solo, con strumenti elementari di geometria analitica, saremo anche in grado di determinarne l'equazione che, in questo caso risulta essere: $x = 1 + 0.75\ t$.

La determinazione della *equazione del moto* da un insieme di dati sperimentali è tutt'altro che banale. Infatti:

- se si tiene presente che i punti della fisica sono sempre dotati di dimensioni, anche nel caso delle linee rette, le linee che si possono far passare per l'insieme dato di punti sono sempre infinite

- a priori le funzioni matematiche che possono interpolare l'insieme di punti dati sono infinite e si pone un problema di scelta; come sempre nella scienza si opta per il criterio della maggiore semplicità che, tradotto in linguaggio matematico vuol dire puntare a funzioni il più possibile semplici con riferimento al grado o alle caratteristiche della funzione.

La matematica ci mette a disposizione numerosi strumenti per esprimere attraverso una legge analitica un insieme di dati sperimentali. Questi metodi si basano sui seguenti principi:



interpolazione

dati n punti esiste sempre un polinomio di grado minore o eguale a n – 1 in grado di eseguire una interpolazione esatta (*exact fit*)

- se la *tipologia di funzione* è nota a priori e si tratta solo di determinare i coefficienti numerici basta tener conto che per n punti del piano passa una sola curva polinomiale di grado n–1; i coefficienti vengono determinati risolvendo un sistema di primo grado di n equazioni in n incognite. Si parla in questo caso di *exact fit*.

  Nella figura qui a lato è stato rappresentato il seguente insieme di dati sperimentali (indicati con dei quadrati rossi).

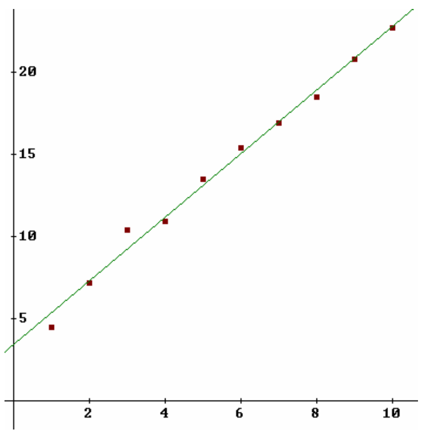
  (1, 2.15); (2, 3.22); (3, 6.45); (4, 7.13); (5, 4.21); (6, 2.18); (7, 5.12)

  Attraverso un programma di calcolo matematico (*derive* o *excel*, per esempio) si è risaliti alla equazione:

  $$x = -\frac{87}{8000}t^6 + \frac{5857}{24000}t^5 - \frac{3177}{1600}t^4 + \frac{33671}{4800}t^3 - \frac{20117}{2000}x^2 + \frac{30277}{6000}t + \frac{19}{10}$$

  la cui rappresentazione è stata data in blu e, come si vede, la curva si adatta perfettamente ai dati.

- *se la legge non è nota* o se il numero di coppie di dati è piuttosto alto conviene tracciare un diagramma approssimativo, sulla base di esso avanzare una ipotesi sulla forma della legge ed utilizzare il *metodo dei minimi quadratici*; questo metodo consiste nel non pretendere che la curva passi per i dati sperimentali ma nell'imporre invece che la funzione che esprime lo scarto tra valore sperimentale e valore matematico assuma il valore minimo. Nella applicazione del metodo dei minimi quadrati bisogna sempre fissare il tipo di approssimazione che si desidera utilizzare (lineare, parabolica, esponenziale, etc). Si parla in questo caso di *best fit* e si dice che si è eseguita una regressione sui dati.



regressione lineare

esempio di *best fit* basato su regressione lineare con il metodo dei minimi quadratici; nella regressione non si pretende il passaggio per i punti ma si cerca una funzione ottimale

L'argomento non viene qui ulteriormente sviluppato ma può costituire una ottima esercitazione all'uso di Excel o anche più semplicemente delle calcolatrici scientifiche che possiedono ormai un ottimo corredo di funzioni statistiche.

Esercizio: Ci limitiamo a fornire un esempio; sono date 10 coppie di dati che, come si vede dalla loro rappresentazione sono approssimabili abbastanza bene con un retta.

(1.0,4.5); (2.0,7.2); (3.0,10.4); (4.0,10.9); (5.0,13.5); (6.0,15.4); (7.0,16.9); (8.0,18.5); (9.0,20.8); (10.0,22.7)

A questo punto con le funzioni statistiche della macchina calcolatrice si calcolano il coefficiente angolare e il termine noto (pendenza e intercetta) e si ottiene:

$x = 1.936\ t + 3.433$

Il diagramma della retta è stato disegnato in verde insieme ai dati sperimentali per evidenziare anche gli scarti.

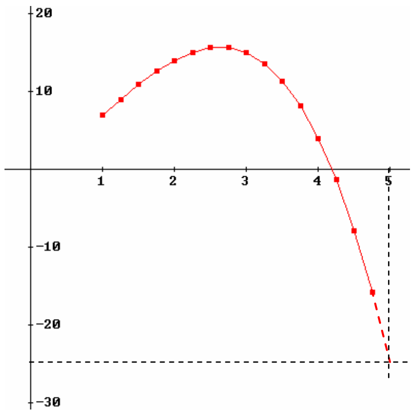
Facendo l'ipotesi aggiuntiva che il carattere del moto non cambi nel corso dell'esperimento dalla conoscenza della legge matematica potremo calcolare la posizione della particella anche in qualunque altro istante intermedio e diremo che abbiamo eseguito una *interpolazione*.

Osserviamo ancora che quanto più sono ravvicinati gli istanti misurati tanto più saremo certi che la nostra equazione del moto si avvicini alla realtà. Dunque, *in ogni indagine sperimentale sul moto di un corpo la massa di informazioni disponibili gioca un ruolo essenziale*. Quante più misure abbiamo e quanto più esse risultano ravvicinate, tanto meglio potremo determinare le equazioni del moto.

1.3.3 LA ESTRAPOLAZIONE: PREVEDIAMO IL FUTURO

L'ipotesi che il carattere del moto non cambi nel corso dell'esperimento *viene posta a priori e non può essere verificata in assenza di altre misure*. Supponiamo che lo sperimentatore, che si trova su un gradino della scala mobile, al termine del decimo secondo decida di accelerare la propria salita camminando sui gradini. Evidentemente il carattere del moto risulterà mutato in maniera essenziale e non avremmo alcuna ragione per poter continuare ad usare l'equazione del moto dopo il decimo secondo.

L'equazione del moto determinata sperimentalmente può essere usata solo per gli intervalli di tempo interni alla durata dell'esperimento. L'*estrapolazione*, cioè l'applicazione della equazione ad intervalli di tempo esterni a quello considerato, viene ammessa solo dopo che ulteriori indagini abbiano permesso di affermare che le caratteristiche del moto non siano cambiate. Per eseguirla si cerca di prolungare l'andamento della curva come nell'esempio qui a lato da cui si evince che per t = 5.0 s si dovrebbe avere x = –25 m.



estrapolazione

un esempio: si prolunga la linea interpolante in maniera di rispettarne l'andamento

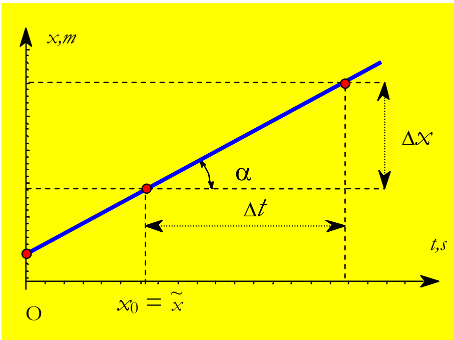
1.4 Il moto uniforme

1.4.1 COSA SI INTENDE CON UNIFORMITÀ ?

Si chiama *moto uniforme* quello per il quale la coordinata è una funzione lineare del tempo (cioè il diagramma *x,t* è costituito da una retta):

$$x = v\,t + \tilde{x} \qquad \text{(I.1.1)}$$

dove v e $\tilde{x}$ sono delle costanti il cui significato sarà chiarito tra breve. Tutti i *moti* non uniformi sono detti *variabili.*



il moto uniforme ha come legge oraria la retta

L'equazione del moto può essere resa più leggibile disegnando il relativo *diagramma* cioè disegnando un sistema di assi cartesiani in un piano con il tempo t sull'asse delle ascisse e la coordinata della particella (indicata con x) sull'asse delle ordinate.

Dopo aver rappresentato i punti corrispondenti alle diverse posizioni nel tempo è possibile tracciare una linea che interpoli i valori trovati; si ottiene così il *diagramma del moto.* Poiché nel moto uniforme la coordinata è una funzione lineare del tempo, il grafico risultante sarà una retta.

1.4.2 POSIZIONE INIZIALE ED ISTANTE INIZIALE

l'istante iniziale non è l'inizio del moto ma corrisponde al momento in cui inizia la osservazione

Ponendo $t = 0$ nella equazione del moto noi otteniamo che x_0 (cioè la coordinata al tempo 0) vale $\tilde{x}$. Essa è chiamata *posizione iniziale* o coordinata iniziale, e rappresenta la distanza tra il punto materiale in movimento e l'origine delle coordinate misurata all'istante iniziale.

Bisogna prestare molta attenzione al significato del termine *istante iniziale*. Esso non corrisponde necessariamente all'inizio del moto ma a quello in cui si fa partire il cronometro, cioè *all'inizio dell'esperimento per lo studio del moto considerato*.

Per altro l'istante in cui il movimento ha inizio, spesso non è di alcun interesse oppure non può essere determinato. Per esempio, un astronomo che studi il moto di un meteorite, lo scopre quando questi, incontrando gli strati più densi della atmosfera si riscalda ed emette luce. Questo per lui è l'istante iniziale e non corrisponde all'inizio del moto. Lo stesso vale per il moto dei corpi celesti (pianeti e comete), il percorso della radiazione cosmica attraverso gli apparti sperimentali di misura, il percorso di un aereo o di un razzo intercettato da una apparecchiatura radar, etc.

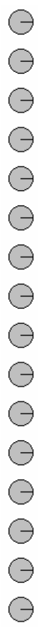


immagine stroboscopica, cioè ripresa ad eguali intervalli di tempo, di un moto rettilineo uniforme; si osserva che i punti in moto si trovano a distanze uguali

Se si osserva il diagramma o l'equazione (I.1.1) ci si potrà chiedere quale sia il ruolo della costante v o cosa siano le grandezze indicate con Δx e Δt. Daremo una risposta a queste domande nel prossimo paragrafo studiando il moto in generale.

1.5 Il moto vario

1.5.1 COSA VUOL DIRE MOTO VARIO ?

La definizione viene data in negativo: *chiamiamo vario qualsiasi moto che non sia uniforme*. È del tutto evidente che i moti vari sono la stragrande maggioranza; al loro interno si presentano poi dei moti che studieremo con particolare attenzione e che, pur non essendo uniformi, presentano una *qualche forma di regolarità*. Inizieremo lo studio del moto vario proprio analizzando qualche esempio di moto vario con qualche caratteristica di regolarità.

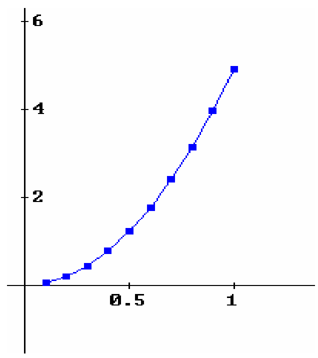
moto vario = moto non uniforme

1.5.2 IL MOTO DI CADUTA E QUELLO DI RISALITA

Esercizio: Consideriamo ora due esempi di moto vario: un corpo che cade da una certa altezza ed uno lanciato verticalmente verso l'alto.

Lasciamo cadere una sferetta sufficientemente pesante e orientiamo l'asse x verso il basso dopo aver posto l'origine del sistema di riferimento nel punto da cui lasciamo cadere la sferetta. Tabulando i risultati otterremo una tabella come la seguente:

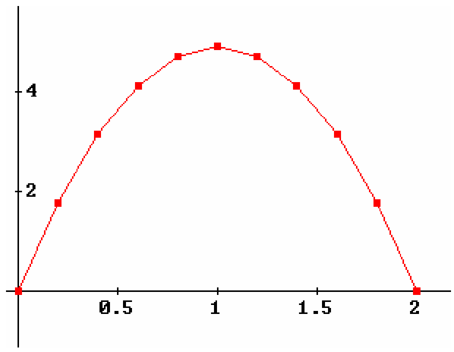
t, s	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
x, m	0.049	0.196	0.431	0.784	1.22	1.76	2.40	3.14	3.97	4.90



Dopo aver tracciato il grafico di questo moto vediamo che non si tratta di una linea retta, ma di un arco di parabola e che l'equazione del moto ha, approssimativamente, la forma $x = 4.9\ t^2$.

Esercizio: Se usiamo lo stesso metodo per analizzare il moto di un corpo lanciato verticalmente verso l'alto con l'asse x orientato verso l'alto e con l'origine nel punto di partenza, otterremo la tabella seguente:

t, s	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
x, m	0.00	1.74	3.14	4.12	4.70	4.90	4.70	4.12	3.14	1.74	0.00



Anche questo è un moto rettilineo vario. L'equazione del moto ha, approssimativamente, la forma $x = 9.8\ t - 4.9\ t^2$. Il diagramma del moto è ancora una parabola.

Come si è visto si è scelto una volta di orientare l'asse x verso il basso e la volta successiva lo si è orientato verso l'alto. Anche l'origine del sistema di riferimento è stata fissata in maniera arbitraria avendo di mira la scelta consentisse la descrizione più semplice. Si fa sempre così: *il sistema di riferimento va fissato in maniera di rendere più semplice possibile la descrizione del moto.*

1.5.3 DIAGRAMMA ORARIO E TRAIETTORIA

Ora che abbiamo disegnato i primi diagrammi è opportuno sottolineare molto bene la differenza fondamentale tra *traiettoria e diagramma del moto* o legge oraria:

- *la traiettoria* è la curva percorsa dalla particella vista dal sistema di riferimento che si sta utilizzando e nei due esempi precedenti essa era una retta
- *il diagramma del moto* è la curva passante attraverso i punti rappresentativi del sistema coordinata spaziale – coordinata temporale e nei due esempi precedenti essa era costituita da rami di parabola.

La traiettoria ci informa esclusivamente sul percorso del punto materiale, il diagramma orario ci informa invece del modo in cui il punto materiale percorre la traiettoria ed è in grado di caratterizzare il moto in termini di velocità e di accelerazione, come vedremo nei prossimi paragrafi e capitoli.

1.6 La velocità media

1.6.1 SPOSTAMENTO E SPAZIO PERCORSO

Consideriamo il moto di un punto materiale che viaggi nella direzione di uno degli assi coordinati.

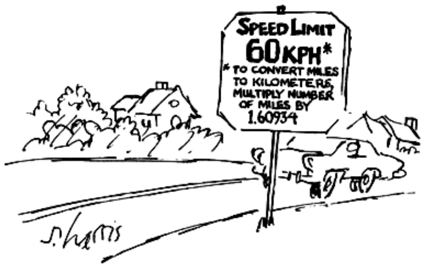
non confondere spostamento e spazio percorso; il primo è la distanza tra posizione iniziale e finale; il secondo misura il percorso assunto sempre positivo misurato lungo la traiettioria

Si chiama *spostamento* della particella *relativo all'intervallo di tempo* $\Delta t = t_2 - t_1$ la quantità $\Delta x = x_2 - x_1$.

Osserviamo che se la particella viaggia sempre nello stesso verso lo spostamento corrisponde alla distanza percorsa: $\Delta s = |\Delta x|$. Se invece la particella viaggia per un po' in un verso, si ferma e poi inizia a viaggiare in verso contrario (come nel caso di un corpo oscillante o in quello di un corpo lanciato verticalmente verso l'alto) lo spazio percorso equivale alla somma dei moduli degli spostamenti in ciascuno dei versi: $\Delta s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + ...$

Come esempio possiamo ancora riferirci al caso di un corpo lanciato verticalmente verso l'alto. Consideriamo i due istanti $t_1 = 0.8$ s e $t_2 = 1.4$ s. Ad essi, in base alla tabella precedente, corrispondono le coordinate $x_1 = 4.70$ m e $x_2 = 4.12$ m. Di conseguenza lo *spostamento* risulta:

$\Delta x = x_2 - x_1 = 4.12 - 4.70 = -0.58$ m



Il segno meno indica che lo spostamento avviene in verso contrario a quello del sistema di riferimento. Lo spazio percorso è notevolmente maggiore dello spostamento perché il corpo in moto raggiunge la sua quota massima $x_{max} = 4.90$ m all'istante $t = 1.0$ s e poi inizia a cadere. Pertanto,

$\Delta s = |x_{max} - x_1| + |x_2 - x_{max}| = |4.90 - 4.70| + |4.12 - 4.90| = 0.20 + 0.78 = 0.98$ m

Quando il punto ritorna al punto di partenza lo spostamento è addirittura nullo.

DALLO SPOSTAMENTO ALLA VELOCITÀ MEDIA

Si chiama *velocità media* di un moto relativamente ad un dato intervallo di tempo la grandezza fisica pari al rapporto tra lo spostamento e l'intervallo di tempo corrispondente, e si scrive:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \qquad (I.1.2)$$

velocità media
rapporto tra spostamento e intervallo temporale

In base alla definizione, la velocità media può essere sia positiva sia negativa ed essa presenta valori elevati in valore assoluto quando lo spostamento è grande in relazione all'intervallo di tempo cui lo si riferisce.

L'equazione dimensionale della *velocità* è:

$$[v] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} = L\,T^{-1} \qquad (I.1.3)$$

Nel Sistema Internazionale di unità di misura, abbreviato con SI, l'unità di spostamento è il metro (m) e quella di tempo è il secondo (s) e pertanto l'unità di velocità è m/s.

Oltre al m/s si utilizzano nella pratica altre unità come il km/h:

$$1 \text{ km/h} = \frac{10^3}{3'600} \text{ m/s} = \frac{1}{3.6} \text{ m/s} = 0.273 \text{ m/s}$$

$$1\ \mathrm{m/s} = 3.6\ \mathrm{km/h}$$

Anche se la *velocità* è una grandezza a cui siamo abituati sin da piccoli la sua elaborazione come grandezza fisica ha posto diversi problemi. Ne citiamo due:

- *non è ovvio che la velocità debba essere indagata rispetto al tempo*. Galilei inizia i suoi studi sul moto di caduta dei corpi cercando un legame tra velocità e spazio percorso;
- mentre noi siamo ormai abituati a dividere e moltiplicare grandezze non omogenee, la teoria delle grandezze utilizzata agli albori della fisica è quella di Euclide ed essa prevede di dare un senso solo a rapporti di grandezze omogenee. Mentre per noi ha senso dividere uno spazio per un tempo, per gli eredi della cultura greca si può al più stabilire una eguaglianza tra rapporti di grandezze omogenee tra loro (dire per esempio, che una velocità è doppia di un altra se è doppio lo spazio percorso); si opera sempre con numeri puri. Nasce allora la domanda: quando dirò che la velocità è raddoppiata; quando è raddoppiato lo spazio percorso o quando considero un tempo dimezzato?

Galilei dopo un cammino faticoso arriverà ad elaborare i moderni concetti di velocità e di accelerazione, anche se in forma matematicamente diversa dalla nostra. Riuscirà cioè a capire che il moto diviene indagabile se la natura viene interrogata con quei concetti di spostamento, velocità ed accelerazione che utilizziamo ancora oggi.

DA COSA DIPENDE LA VELOCITÀ MEDIA ?

Esercizio: Nel moto vario la velocità media dipende dalla scelta del particolare intervallo di tempo considerato. Nel caso precedente della caduta libera nell'intervallo di tempo tra $t_1 = 0.1$ s e $t_2 = 0.2$ s si ha:

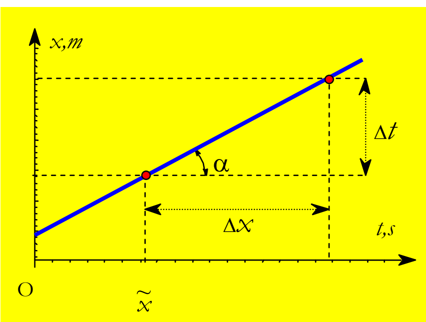
$$<v> = \frac{0.196 - 0.049}{0.2 - 0.1} = \frac{0.147}{0.1} = 1.5\ \mathrm{m/s}$$

Nell'intervallo di tempo tra $t_1 = 0.7$ s e $t_2 = 0.8$ s si ha:

$$<v> = \frac{3.14 - 2.40}{0.8 - 0.7} = \frac{0.74}{0.1} = 7.4\ \mathrm{m/s}$$

e in quello tra $t_1 = 0.7$ s e $t_2 = 1$ s si ha:

$$<v> = \frac{4.90 - 2.40}{1.0 - 0.7} = \frac{2.50}{0.3} = 8.3\ \mathrm{m/s}$$



velocità media

la inclinazione della retta rimane costante in tutto il moto uniforme

In generale, la velocità media cambia al variare dell'istante iniziale t_1 e cambia ancora, quando si sceglie un intervallo temporale di ampiezza diversa.

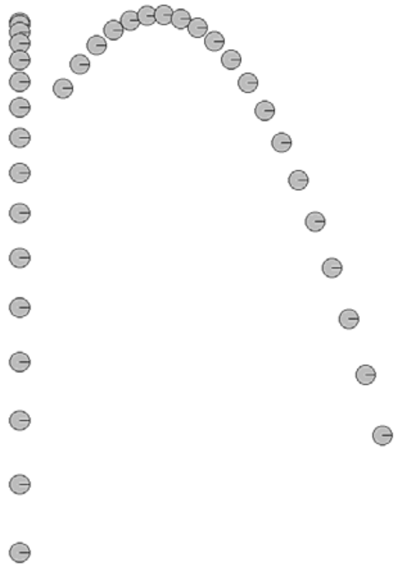
La velocità media ha un valore costante, indipendente dalla scelta del particolare intervallo di tempo, solo *nel moto uniforme.*

In questo caso, $x_1 = v\,t_1 + \tilde{x}$, $x_2 = v\,t_2 + \tilde{x}$ e la velocità media vale:

$$<v> = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{v\,t_2 + \tilde{x} - v\,t_1 - \tilde{x}}{t_2 - t_1} = v$$

Dunque il coefficiente angolare della retta che descrive il diagramma orario del moto uniforme corrisponde alla velocità media. Poiché v è costante ne consegue che, nel moto uniforme, la velocità media è costante.

Nelle applicazioni pratiche si definisce, a volte, la velocità media come rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato. La velocità media così definita non va confusa con la velocità intesa come grandezza fisica: la prima, nel caso di un percorso di andata e ritorno in cui si compiono 200 km in 2 h è di 100 km/h; la seconda è invece nulla perché lo spostamento, in caso di andata e ritorno è uguale a zero. Queste considerazioni saranno riprese quando studieremo il moto a 3 dimensioni utilizzando i vettori.



Esempi di moti non uniformi; come si nota l'intervallo spaziale, a parità di intervallo temporale, cambia nel tempo

Nelle *immagini stroboscopiche* si può avere una visione simultanea della traiettoria (che si ottiene interpolando i punti rappresentati) e della legge oraria perché gli spostamenti tra un istante e il successivo sono rappresentati dalla distanza tra due punti contigui.

Poiché gli intervalli di tempo tra immagini successive sono sempre gli stessi, la distanza tra due punti contigui rappresenta anche la velocità media e se gli intervalli di tempo sono piccoli può essere identificata con la velocità istantanea.

Pertanto le variazioni di velocità saranno proporzionali alle differenze di lunghezza tra segmenti consecutivi.

Esercizio: Qui a lato sono state rappresentate le immagini stroboscopiche di un oggetto lasciato cadere a partire dalla quiete (traiettoria rettilinea e moto vario) e quella di un oggetto lanciato verso l'alto e in avanti (traiettoria parabolica e moto vario).

Le due immagini possono essere utilmente utilizzate per svolgere calcoli che consentano di costruire legge oraria e velocità media a diversi intervalli.

Si consiglia, in particolare, di calcolare la velocità media nei diversi intervalli e di rappresentarla in diagramma; si scoprirà una interessante proprietà.

1.7 Velocità istantanea e media

1.7.1 DALLA VELOCITÀ MEDIA A QUELLA ISTANTANEA

A volte non siamo interessati alla velocità relativamente ad un dato intervallo di tempo, ma vorremmo conoscere la velocità del moto ad un dato istante, o *velocità istantanea.*

Per esempio, quando un corpo urta un ostacolo, la forza con cui il corpo agisce sull'ostacolo dipende dalla velocità al momento dell'urto e non dalla velocità media; la traiettoria e la gittata di un proiettile dipendono dalla sua velocità istantanea iniziale, etc.

La velocità istantanea di un punto materiale può essere determinata come segue. Indichiamo con x la coordinata relativa all'istante t. All'istante $t_1 = t + \Delta t$ la coordinata sarà $x_1 = x + \Delta x$ dove Δx indica lo spostamento. Allora la velocità media relativa all'intervallo di tempo tra t e $t + \Delta t$ sarà per definizione:

$$<v> = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{(I.1.4)}$$

Δ variazione di una grandezza
δ variazione elementare di una grandezza

In generale, maggiore è il valore di Δt e maggiore risulta lo scostamento della velocità media dal valore istantaneo. Al contrario, minore è l'intervallo di tempo Δt e tanto meno la velocità media differirà dal valore istantaneo che ci apprestiamo a trovare.

Possiamo così definire la *velocità istantanea* come il *valore limite cui si avvicina la velocità media quando l'intervallo di tempo diventa infinitamente piccolo.* Per economia di scrittura, d'ora in poi indicheremo le variazioni infinitesime con la delta minuscola e scriveremo pertanto

la velocità istantanea è la velocità media relativa ad intervalli infinitesimi

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} <v> = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\delta x}{\delta t} \text{ [2]} \qquad \text{(I.1.5)}$$

A dispetto di quanto ci viene da una concezione statica della matematica, in base alla quale il rapporto *0/0* è indeterminato, la quantità $\frac{\delta x}{\delta t}$, pur essendo costituita da grandezze che diventano infinitamente piccole, ha perfettamente senso nella misura in cui tale rapporto presenti una qualche forma di regolarità man mano che i due termini al numeratore e denominatore diventano via via prossimi a zero. Vedremo nei prossimi paragrafi come tale questione venga risolta interpretando geometricamente la velocità.

1.7.2 LA VELOCITÀ ISTANTANEA DEL MOTO UNIFORME

la velocità istantanea e quella media coincidono sempre solo nel moto uniforme

Poiché la velocità media del moto uniforme è costante e il valore limite di una grandezza costante è la costante stessa, *la velocità istantanea di un punto materiale che si muove di moto uniforme è costante* e dunque il moto uniforme può essere definito come il moto con velocità istantanea costante. Detto altrimenti si può affermare che il *moto uniforme è quel moto nel quale la velocità media e quella istantanea sono coincidenti.*

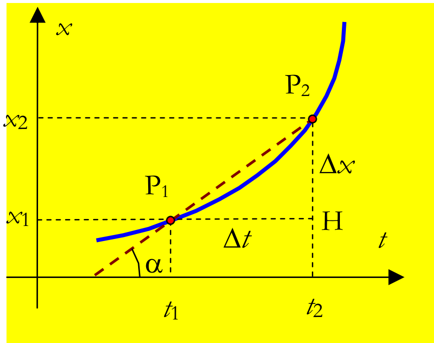
---

[2] In analisi matematica un tale valore limite è chiamato una *derivata* e, di conseguenza, si può dire che la velocità istantanea è la derivata della coordinata rispetto al tempo.

1.7.3 IL SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA VELOCITÀ MEDIA

Consideriamo un generico moto rettilineo e siano P_1 e P_2 due punti particolari rappresentativi del moto come in Figura.

Nei paragrafi precedenti abbiamo definito la velocità media come $<v> = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Se si considera la retta P_1P_2 tale rapporto rappresenta il coefficiente angolare o pendenza della retta. La pendenza è una quantità, tipica di una retta, che ne rappresenta la inclinazione rispetto ad un asse; essa è legata all'angolo ma non è l'angolo.



La velocità media può essere sempre interpretata come inclinazione della retta secante al diagramma orario

Per esempio pendenza = 1 (o del 100%) vuol dire angolo di 45° se sui due assi si usa la stessa scala, ma se sull'asse verticale la scala è doppia otterremo un angolo di oltre 60° e così via.

Ma poiché:

$\Delta x = h \times \overline{\mathrm{HP}_2}$, dove h rappresenta il fattore di scala dell'asse x,

$\Delta t = k \times \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{H}}$, dove k rappresenta il fattore di scala dell'asse t,

$$\frac{\overline{\mathrm{HP}_2}}{\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{H}}} = \tan\alpha,$$

si ha che:

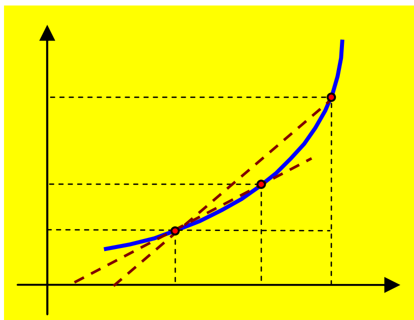
$$<v> = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{h\ \overline{\mathrm{HP}_2}}{k\ \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{H}}} = \frac{h}{k} \times \tan\alpha \qquad \text{(I.1.6)}$$

Dunque la *velocità media* (inclinazione della retta secante), a meno di una costante che dipende dalla scala scelta per rappresentare il diagramma, è la tangente trigonometrica del tratto di secante che unisce i due punti considerati.

Pertanto, quando si ha di fronte un diagramma, è possibile farsi una idea immediata dei valori di velocità media relativi a due punti qualsiasi, osservando semplicemente la inclinazione della retta che li unisce.

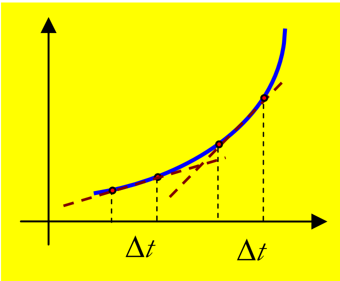
Per la *determinazione numerica* è invece opportuno tracciare la retta secante ed eseguire su di essa il calcolo del rapporto. Per calcolarlo non è indispensabile riferirsi ai valori definiti da P_1 e P_2 ma ci si può riferire (usando un criterio di comodità) a qualsiasi altra coppia di punti presenti sulla retta. Per esempio si può scegliere un intervallo Δt comodo da leggere oppure comodo da calcolare nel rapporto (per esempio $\Delta t = 1$) e misurare sul diagramma il corrispondente valore di Δx.

1.7.4 DA COSA DIPENDE LA VELOCITÀ MEDIA ?

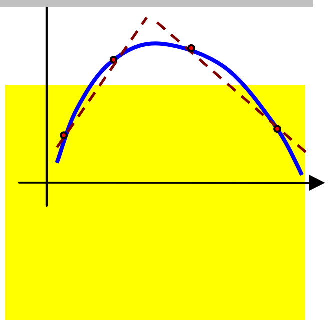

la velocità media dipende dall'istante finale

Chiarito cosa si intenda con velocità media e come la si possa visualizzare ci chiediamo quali sono le grandezze da cui la *velocità media* dipende. Per rispondere alla domanda utilizzeremo i diagrammi perché essi consentono una migliore comprensione dei concetti.

- Fissato un istante iniziale t_1 la velocità media *dipende dall'intervallo di tempo considerato*: infatti al variare di Δt cambia la inclinazione della retta secante anche se non cambia t_1.



la velocità media dipende dai due istanti per uno stesso intervallo temporale Δt



se <v> > 0 la curva è crescente, i Δx sono positivi mentre gli angoli con l'asse t sono acuti

se <v> < 0 la curva è decrescente, i Δx sono negativi mentre gli angoli con l'asse t sono ottusi

- Fissato l'intervallo di tempo, al variare dell'istante iniziale cambia, in generale, la velocità media che *dipende, pertanto, dall'istante iniziale considerato*. Si vede che intervalli temporali identici producono, in generale, inclinazioni diverse quando vengono riferiti a zone diverse della curva.
- La velocità media *può essere sia positiva, sia negativa* perché, preso un $\Delta t > 0$ può essere tanto $\Delta x > 0$ quanto $\Delta x < 0$. Il primo caso corrisponde a spostamenti nel verso del sistema di riferimento, mentre il secondo a spostamenti in verso contrario.

1.7.5 La velocità media dall'inizio del moto

Concludiamo il paragrafo mettendo in guardia contro un abuso terminologico abbastanza diffuso, quello di pensare che la velocità media si riferisca sempre all'intervallo che va dall'inizio alla fine del moto e sia dunque definita, assumendo $t_1 = 0$ e indicando il generico istante t_2 con t come $\dfrac{x - x_0}{t}$.

Quella così indicata è una delle possibili velocità medie, *la velocità media dall'inizio del moto* e, come si osserva dall'ultima delle figure, anche per essa sono possibili infiniti valori a seconda di dove si pone il punto finale.

Ribadiamolo una ennesima volta: un determinato moto non ha *una* velocità media. Le velocità medie sono infinite una per ciascuno degli infiniti intervalli di tempo possibili.

Cosa significa velocità istantanea?

La *velocità istantanea* nasconde nella definizione una *trappola*. Se uno pensa alla velocità riferita ad un singolo istante, sarà costretto a pensare a due intervalli spaziali e temporali entrambi nulli, e in quel caso il rapporto $\dfrac{0}{0}$, dice la matematica, è indeterminato.

Se invece si assume un intervallo piccolo, ma finito, si è costretti ad ammettere che, quella che si trova, non è la velocità istantanea, ma la velocità media relativa ad un intervallo di tempo collocato intorno all'istante t considerato.

Questa obiezione è tutt'altro che banale e la *genesi difficoltosa* dei concetti cinematici è dovuta proprio a queste argomentazioni. Si pensi per esempio alla diffidenza della cultura greca verso gli *infinitesimi,* grandezze diverse da zero ma più piccole di qualsiasi grandezza costante considerata.

Dalla trappola si esce in due modi:

- *dal punto di vista fisico,* osservando che, poiché qualsiasi grandezza fisica ha senso solo in riferimento a misure, la dizione Δt *tende a zero*, per un fisico significa solo che si prende un intervallo finito il più piccolo possibile (cioè entro valori che comunque consentano la effettuazione di misurazioni).
- *dal punto di vista matematico*, senza bisogno di possedere conoscenze di analisi matematica, osservando che si può dare un significato geometrico alla velocità istantanea in termini di inclinazione della retta tangente.

velocità istantanea

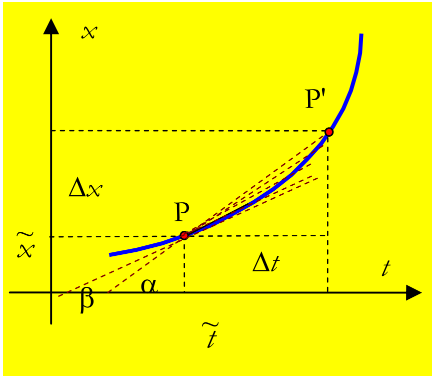
velocità media per intervalli piccoli

inclinazione della retta tangente al diagramma orario

LA VELOCITÀ ISTANTANEA E L'INCLINAZIONE DELLA RETTA TANGENTE

A livello grafico, *la retta tangente ad una curva è proprio definita come la posizione limite della retta secante nel caso in cui i due punti che la definiscono vengano ravvicinati sino a farli coincidere*. In effetti è proprio questa la metodologia con cui, per tentativi, tracciamo la retta tangente ad una curva in un punto: portiamo il righello vicino alla curva e poi, per tentativi, lo muoviamo finché i due punti di intersezione del righello con la linea vengono a coincidere.

Ricordiamo poi che il calcolo della inclinazione di una retta, una volta che la retta è identificata, è indipendente dal particolare triangolino che si usa per calcolare il rapporto dei cateti; infatti l'inclinazione è una proprietà solo della retta (sulla quale vengono definiti infiniti triangoli simili).



Per dare *significato alla velocità istantanea* consideriamo allora la Figura che definisce la velocità media e soffermiamoci su un particolare istante $\tilde{t}$. Quando l'intervallo Δt rimpicciolisce, il punto P' si muove lungo la curva verso il punto P, la retta secante $r_{PP'}$ si avvicina sempre più alla retta tangente sino ad identificarsi con essa. Abbiamo così trovato l'elemento di regolarità che ci consente di sfuggire alla trappola dello $\frac{0}{0}$.

Poiché la velocità media (rapporto degli intervalli) è la inclinazione della secante e poiché la secante diventa la retta tangente, potremo affermare che *la velocità istantanea è l'inclinazione della retta tangente.*

Possiamo dunque generalizzare la equazione (I.1.6) e scrivere:

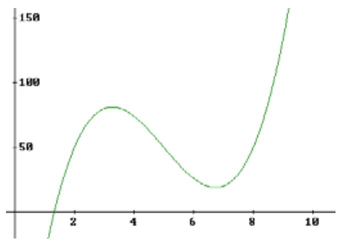
$$v = \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{h}{k} \times \tan \beta \qquad \text{(I.1.7)}$$

COME PROCEDERE OPERATIVAMENTE ?

- *Se è stato assegnato il diagramma* del moto, per calcolare la *velocità istantanea*, si disegna con precisione la retta tangente nel punto desiderato e poi se ne misura la corrispondente inclinazione come rapporto tra due valori di Δx e Δt misurati lungo la retta tangente. L'errore che si commette deriva principalmente dalla maggiore o minore accuratezza con cui si traccia la retta tangente.

  Bisogna inoltre prestare attenzione ai diversi fattori di scala coinvolti non basta cioè misurare in cm le lunghezze dei diversi segmenti ma tali lunghezze vanno poi tradotte in m e in s.

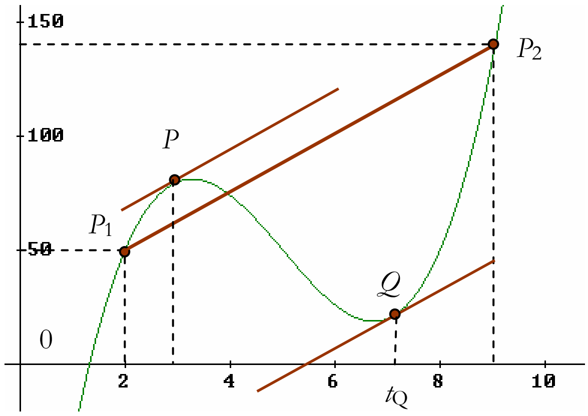
- *Se non è stato assegnato il diagramma*, ma si conosce la legge oraria mediante tabella, bisogna calcolare il rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ per due istanti molto prossimi a quello considerato. Quella che si trova, in questo modo è il valore della velocità media per un intervallino intorno all'istante considerato. La stima così ottenuta è più o meno plausibile a seconda della dimensione dell'intervallo. In caso di dubbi è bene disegnare, con i punti disponibili un tratto di diagramma per farsi comunque una idea del reale andamento del moto. Dal tracciamento del *diagramma presunto* si potrebbe scoprire che la retta tangente ha una inclinazione decisamente diversa dalla secante che viene calcolata operando sui dati della tabella.



1.7.6 UN ESEMPIO DI CALCOLO

Esercizio: Il diagramma rappresenta la legge oraria di un moto rettilineo vario. Calcolare la velocità media <v> relativa all'intervallo t_1 = 2.0 s e t_2 = 9.0 s. Quindi determinare graficamente i due punti P e Q per i quali v_P = v_Q = <v> e determinare dalla lettura del diagramma l'istante t_Q ($t_Q > t_P$). E' richiesto il calcolo dei fattori di scala lungo l'asse x e lungo l'asse t.

Viene riportato il diagramma ingrandito e separato dal testo per di evidenziare i diversi passaggi: a) Individuare i punti P_1 e P_2 in modo di poterne calcolare le ordinate x_1 e x_2. Il fattore di scala lungo l'asse x si trova calcolando la misura in cm di un valore corrispondente ad una misura nota. Ho lavorato a video con ingrandimento del 200% e ho ottenuto i seguenti valori: 9.3 cm = 150 m. Ovvero 1 cm = 16.13 m. Quello lungo l'asse t è 10 s = 14.5 cm. Ovvero 1 cm = 0.690 s. Dal diagramma si ha x_1 = 50 m e x_2 = 8.7·16.13 = 140 m b) tracciare la retta secante per i due punti e le due rette tangenti con la stessa inclinazione c) Calcolo di <v> = $\frac{140-50}{9-2}$ = 12.9 m/s d) Lettura di t_Q = 10.3·0.690 = 7.1 s



Nota: I valori trovati in cm operando su carta possono essere diversi, così come i fattori di scala ma i risultati finali devono essere corretti entro la seconda cifra significativa. Il diagramma utilizzato per l'esercizio è stato prodotto mediante una funzione e, per via matematica si potevano calcolare i risultati esatti. Così facendo si ottiene x_2 = 134 m, <v> = 12 m/s, t_1 = 2.92 s e t_2 = 7.08 s.

1.8 I punti speciali che caratterizzano il diagramma orario

1.8.1 UNA VISIONE DI INSIEME

Alla luce del significato che è stato assegnato alla velocità istantanea è possibile individuare in un diagramma orario alcuni *punti significativi* che aiutano a percepire le caratteristiche del moto.

Tali punti sono, oltre a quello *iniziale e finale, i punti di intersezione con gli assi, i punti di massimo e minimo e i punti di flesso* (cioè i punti in corrispondenza dei quali la curva cambia concavità). [3]

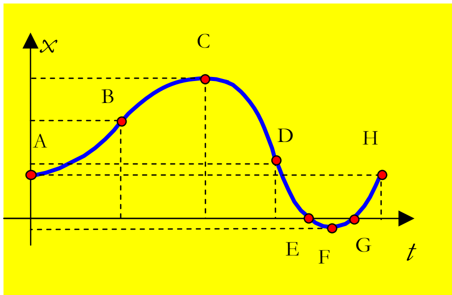
la velocità istantanea si annulla nei punti a tangente orizzontale è massima o minima nei flessi

- ***I punti di massimo e minimo relativo*** sono caratterizzati dal fatto di possedere tangente orizzontale e pertanto sono punti di velocità istantanea nulla. [4]
- ***I punti di flesso*** sono caratterizzati dal fatto che, quando vengono raggiunti, la velocità cambia andamento: se stava aumentando comincia a diminuire, se stava diminuendo comincia ad aumentare.

Si stia inoltre attenti a non confondere la velocità con la posizione e a credere che esista una connessione tra esse. Un corpo può avere velocità positiva e posizione negativa e viceversa. Può avere ascissa grande e velocità piccola e viceversa.

1.8.2 LA LETTURA DI UN DIAGRAMMA

Esaminiamo ora, dettagliatamente le varie zone e punti del *diagramma orario* qui a lato supponendo che esso rappresenti il moto di un punto materiale lungo una retta orizzontale e che il sistema di riferimento sia orientato da sinistra verso destra.



- *punto A*: è il punto di partenza (posizione al tempo $t = 0$). Si osservi che $v_A > 0$ (la retta tangente forma un angolo acuto).
- *tratto AB*: il corpo si sposta verso destra e la sua velocità aumenta (la inclinazione della retta tangente aumenta).
- *punto B*: la velocità raggiunge il suo valore massimo (inclinazione massima della retta tangente). Siamo in un punto di flesso della curva.
- *tratto BC*: il corpo continua a spostarsi verso destra, ma la sua velocità diminuisce (la retta tangente risulta sempre meno inclinata).
- *punto C*: la velocità si annulla e il corpo raggiunge la sua massima dislocazione verso destra (siamo in un punto di massimo della curva e la tangente è orizzontale).
- *tratto CD*: il corpo incomincia a tornare indietro; la sua velocità diventa negativa, dapprima lentamente, poi sempre più rapidamente. La retta tangente forma angoli ottusi con l'asse dei tempi.

---

[3] Ricordiamo che una curva presenta la stessa concavità in una zona se, in quella zona, la retta tangente rimane sempre dalla stessa parte (sopra o sotto) rispetto alla curva. Nei punti di flesso la retta tangente attraversa la curva.

[4] Attenzione a non pensare che in corrispondenza di tali punti il corpo rimanga in quiete. Sta cambiando velocità e, solo in quell'istante, la velocità è zero.

- *punto D*: viene raggiunta la velocità minima (massima negativa) che è anche, in valore assoluto, la velocità più grande raggiunta durante l'intero moto. Il corpo si trova ancora a destra del punto di partenza.
- *tratto DF*: durante questo tratto il corpo ripassa per il punto di partenza, lo supera, supera anche l'origine del riferimento (punto E) mentre la sua velocità, che rimane negativa, aumenta (va cioè verso lo zero).
- *punto F*: è il punto di velocità nulla che corrisponde alla massima dislocazione verso sinistra. La coordinata spaziale del punto F è negativa.
- *tratto FH*: la velocità ritorna positiva e continua ad aumentare sino in H. Il corpo attraversa in G l'origine del sistema di riferimento.
- *punto H*: fine della osservazione (non necessariamente del movimento); in effetti la velocità in H è positiva e piuttosto grande.

Si consiglia, per verificare di avere capito di rispondere alle seguenti domande:

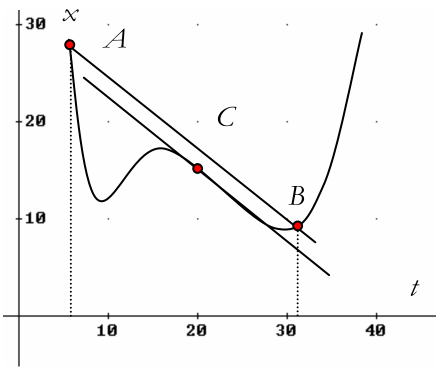
◊ individuare sul diagramma l'istante nel quale la velocità istantanea è identica alla velocità media del tratto BD

◊ determinare due intervalli diversi nei quali si abbia la stessa velocità media

◊ indicare l'istante in cui il punto materiale ripassa per il punto B.

Esercizio: Determinare sul diagramma qui a lato due istanti t_A e t_B per i quali si abbia $\langle v_{AB} \rangle = v_C$. E' richiesto qualche riga di commento oltre che la lettura dal diagramma dei valori corrispondenti ai due istanti determinati. Le grandezze sono espresse in unità del S.I.

☹



Si traccia la retta tangente per C con la massima precisione possibile e quindi si traccia una secante parallela alla tangente; ciò consente di individuare i due punti A e B da cui si risale a quanto richiesto.

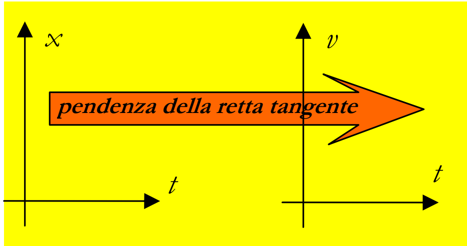
Dalla lettura delle ascisse si ha: $t_A \approx 6.5$ s e $t_B \approx 31$ s. La determinazione su carta va fatta con il righello cosa che mi è impossibile fare a video.

☺

1.9 Dalla velocità allo spostamento

1.9.1 SI PUÒ TROVARE LO SPOSTAMENTO NOTA LA VELOCITÀ ?

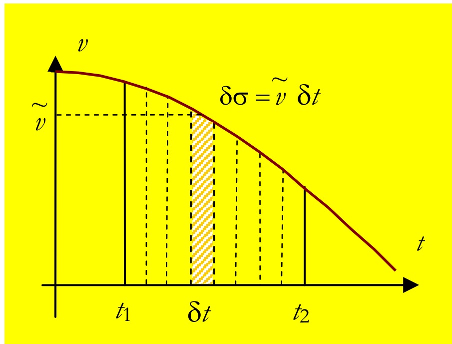
Abbiamo già visto che, misurando la pendenza del diagramma posizione tempo, si determina il diagramma velocità tempo. Abbiamo dunque un metodo generale che ci consente, nota la legge oraria di determinare il diagramma velocità tempo.



Cosa si può dire del viceversa? È possibile, dato il *diagramma* velocità tempo, passare al diagramma posizione tempo?

La risposta è affermativa e per farlo si ricorre al calcolo dell'area sottesa dal diagramma.

Sia dunque noto il *diagramma* velocità tempo come in Figura. Osserviamo preliminarmente che, presi due istanti qualsiasi t_1 e t_2 caratterizzati da una distanza temporale finita ed indicati con x_1 e x_2 i corrispondenti valori di posizione, la loro differenza $x_2 - x_1$ (lo spostamento) può essere pensata come somma di tutti gli spostamenti elementari δx che hanno luogo per effetto della velocità e che si ottengono dividendo l'intervallo Δt in tanti intervallini elementari di ampiezza δt.



area = spostamento

Scriveremo pertanto:

$$x_2 - x_1 = \Delta x = \sum \delta x \qquad \text{(I.1.8)}$$

Ma, per ciascuno di quegli intervallini si può scrivere, in base alla definizione di velocità istantanea che

$$\delta x = \tilde{v}\ \delta t \qquad \text{(I.4.6)}$$ [5]

e in base alla figura che l'area elementare

$$\delta\sigma = \tilde{v}\ \delta t \qquad \text{(I.4.7)}$$ [6]

Dalle tre relazioni appena scritte e dal fatto che l'area sottesa dal diagramma $\sigma = \sum \delta\sigma$ si può concludere che:

$$x_2 - x_1 = \Delta x = \sum \delta x = \sum \delta\sigma = \sigma \qquad \text{(I.4.8)}$$

Dunque: *se siamo in grado di calcolare l'area sottesa dal diagramma tra due istanti qualsiasi resta automaticamente determinata la variazione di velocità tra gli stessi istanti.*

In particolare, se si assume come istante iniziale t_1 il tempo $t = 0$ e come istante finale t_2 il generico istante t si avrà che:

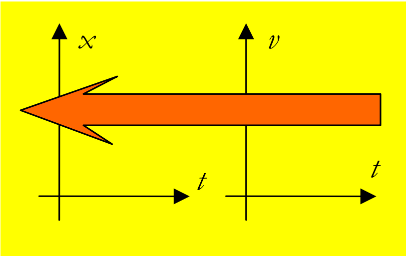
$$x = x_0 + \sigma \qquad \text{(I.4.9)}$$

Per calcolare la posizione ad un istante qualsiasi basta aggiungere alla posizione iniziale il valore dell'area del diagramma velocità tempo.

---

[5] La quantità $\tilde{v}$ rappresenta un valore medio di v all'interno dell'intervallino e non la velocità istantanea che cambia istante per istante. Ma se δt è molto piccolo si può con buona approssimazione supporre che v sia costante nell'intervallino. Ciò equivale ad approssimare il diagramma con un istogramma, cioè con una specie di moto a scatti che approssima tanto meglio il moto reale quanto più sono piccoli gli intervallini δt.

[6] Si presti attenzione al fatto che le aree di cui stiamo parlando non sono aree in senso geometrico, bensì prodotti di grandezze fisiche tra loro diverse che, attraverso il prodotto generano, una nuova grandezza fisica. Inoltre poichè si moltiplicano numeri con segno le aree così trovate possono risultare negative.



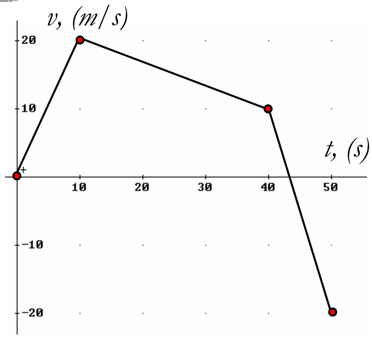
Si osservi che la situazione descritta a inizio paragrafo non è esattamente simmetrica a quella attuale. Mentre si può sempre eseguire il processo da sinistra a destra, quello da destra a sinistra richiede la conoscenza delle condizioni iniziali del moto.

Ovvero: se conosco il diagramma velocità tempo riesco a determinare lo spostamento, ma per sapere dove sono devo anche conoscere da dove sono partito.

1.10 Applicazioni su velocità e spostamento nei moti rettilinei

1.10.1 Determinazione dello spazio percorso

Esercizio: Determinare la velocità media del moto rappresentato qui a lato; nel caso se ne ravvisi la necessità completare il diagramma con lettere che migliorino la leggibilità dei propri calcoli. Le grandezze sono espresse in unità del S.I.



☹

Per calcolare la velocità media occorre determinare lo spazio percorso (area con segno individuata dalla spezzata). Si osservi che l'ultimo ramo della spezzata ha coefficiente angolare $\frac{-20-10}{50-40} = -3$ m/s^2 e pertanto esso interseca l'asse dei tempi nel punto di ascissa 40 + 10/3 s (bastano considerazioni geometriche e la definizione di coefficiente angolare per arrivarci).

L'area (somma un triangolo, un trapezio, un triangolo e un triangolo di area negativa) vale pertanto $\Delta x = \frac{1}{2}[10\cdot 20 + (20 + 10)\cdot 30 + 10/3\cdot 10 - 20/3\cdot 20] = 500$ m

La velocità media è pari a $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{500}{50} = 10$ m/s

Note: faccio osservare che l'area che serve a determinare lo spazio percorso è quella sottesa dal diagramma e che si tratta di una quantità con segno (le zone sotto l'asse dei tempi che corrispondono a velocità negative producono spazi percorsi negativi).

☺

1.10.2 Analisi di due moti uniformi con caratteristiche diverse

Esercizio: Due moti rettilinei uniformi hanno le seguenti caratteristiche $x_{0,1} = 150$ m e $v_1 = -12$ m/s; $x_{3,2} = 15$ m e $v_2 = 7$ m/s (con il simbolo $x_{3,2}$ si intende la posizione del II punto all'istante $t = 3$ s e si intende precisare che il moto inizia al tempo $t = 3$ s). Dopo aver tracciato un diagramma qualitativo dei due moti scriverne le leggi orarie e utilizzarle per determinare la posizione e l'istante in cui i due punti materiali si incontrano.

☹

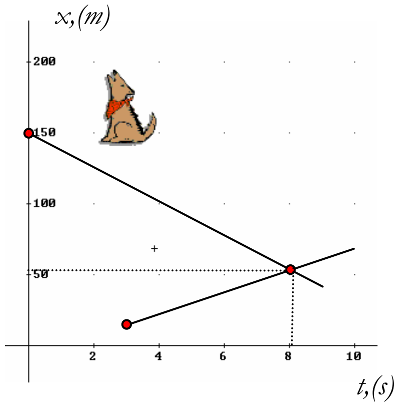
Il primo moto corrisponde ad una retta passante per (150,0) e di coefficiente angolare –12 la cui equazione è x = 150 – 12 t

Il secondo moto corrisponde ad una retta passante per il punto (3,15) e di coefficiente angolare 7 la cui equazione è: x – 15 = 7(t – 3)

Si tracciano le rette dei due moti osservando che il secondo parte dall'istante t = 3 s.

Basta ora risolvere il sistema delle due equazioni per trovare il punto di incontro che risulta essere t = 156/19 e x = 978/19 che espresso nelle coordinate fisiche con 3 cifre significative porta a t = 8.21 s e x = 51.5 m.

☺



1.10.3 Determinazione della velocità

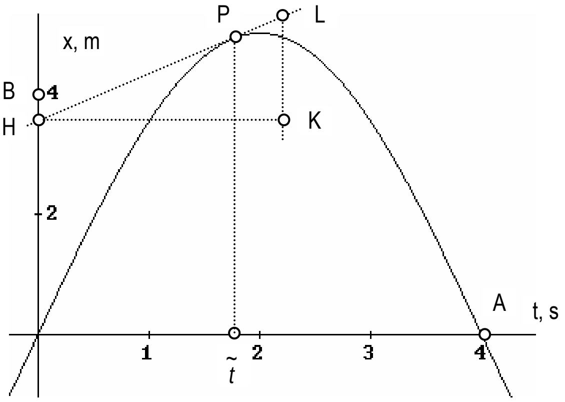
Esercizio: Data la legge oraria indicata in figura calcolare la velocità istantanea relative al tempo $\tilde{t} = 1.7$ s. Poiché sono richieste misure di segmenti e il calcolo del fattore di scala completare con lettere a propria scelta il diagramma.

☹

Iniziamo con la determinazione dei fattori di scala (è conveniente considerare segmenti lunghi per diminuire l'errore relativo). Se indichiamo con A e B i punti corrispondenti a 4 s e 4 m avremo che:

$\overline{OA}$ = 4 s = 6.9 cm $\Rightarrow$ 1 cm = 4/6.9 = 0.580 s

$\overline{OB}$ = 4 m =3.7 cm $\Rightarrow$ 1 cm = 4/3.7 = 1.08 m

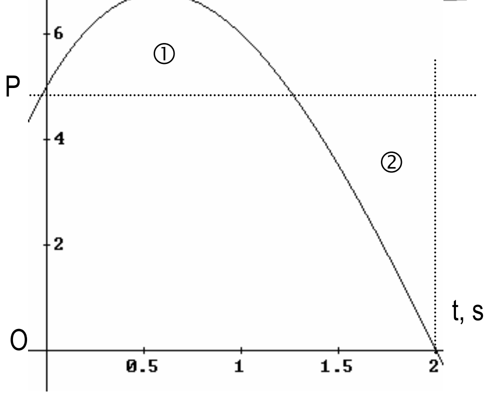


Naturalmente si possono trovare i rapporti di scala inversi.
Possiamo ora determinare le coordinate del punto in cui si dovrà calcolare v. Supponiamo che sia $\tilde{t}$ = 1.7 s = 1.7 / 0.580 = 2.93 cm. I valori riportati sono stati ottenuti su carta e dunque potrebbero risultare leggermente diversi sul file.
Ciò ci consente di trovare il punto P in cui dovremo calcolare v. Dal diagramma si ha x_P = 4.5 cm = 4·1.08 = 4.86 m (il valore trovato è proprio quello generato dalla funzione che ho utilizzato).
Dopo aver tracciato la retta tangente determiniamone la inclinazione in m/s. Allo scopo consideriamo i punti H, K, L (con il criterio che determinino lunghezze comode) da misurare.
Si ha allora: $\overline{HK}$ = 4 cm = 4·0.580 = 2.32 s

$\overline{KL}$ = 2.2 cm = 2.2·1.08 = 2.38 m

$v = \frac{\overline{KL}}{\overline{HK}} = \frac{2.38}{2.32}$ = 1.03 m/s (il valore trovato differisce in maniera abbastanza significativa dal valore calcolabile con strumenti di analisi matematica che è pari a 0.92 m/s (errore relativo intorno al 10%)). In effetti basta un piccolo errore nel tracciamento della tangente per avere grandi variazioni, soprattutto se si è in vicinanza della orizzontale e della verticale.
☺

1.10.4 DETERMINAZIONE DI <V> DAL DIAGRAMMA VELOCITÀ TEMPO



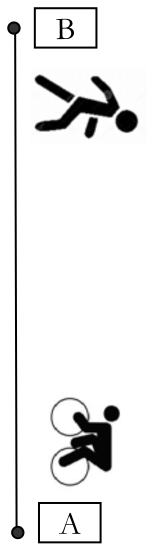
Esercizio: Dato il diagramma velocità tempo rappresentato in figura trovare in maniera qualitativa, ma con la massima accuratezza, il valore della velocità media nell'intervallo da 0 a 2 s spiegando sul foglio il metodo utilizzato e indicando sulla figura il valore di velocità media corrispondente

☹

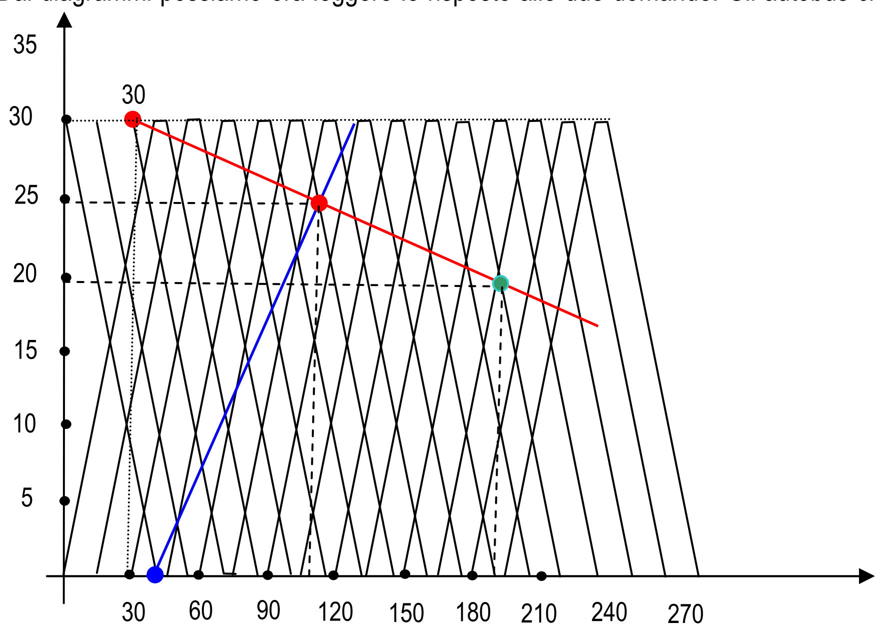
Si tratta di tracciare una retta orizzontale che determini un rettangolo con la stessa area e, allo scopo basta muovere il righello finché l'area ① risulta uguale all'area ②. Se lo si desidera è possibile procedere ad un calcolo approssimato dell'area ma allora non si fa più una determinazione qualitativa.
La determinazione qualitativa ci porta alla retta tratteggiata che corrisponde ad un valore di velocità media $\overline{OP}$ leggermente inferiore a 5m/s. In effetti il valore calcolato in forma esatta con strumenti di analisi matematica risulta pari a 4.833 m/s.
☺

1.10.5 PEDONI, CICLISTI E AUTOBUS CHE SI MUOVONO SU UNO STESSO PERCORSO [7]

Esercizio: Due cittadine A e B distano tra loro di 30 km. Un podista parte da B verso A al tempo zero corrispondente alle 6:30. Alle 6:40 un ciclista, che viaggia alla velocità di 18 km/h parte da A verso B. Il pedone, dopo che ha camminato per 6 km incontra il ciclista.
Determinare l'istante in cui si incontrano e la velocità del pedone.
Nelle due città funziona un servizio di autobus che inizia alle 6:00. Gli autobus viaggiano a 45 km/h e ne parte uno ogni 15 minuti da entrambi i capolinea. Determinare dove si trovava il pedone quando incontra il dodicesimo autobus e il numero di autobus che sorpassano il ciclista.
Risolvere il problema tracciando degli opportuni diagrammi.
☹



Fissiamo un riferimento da A verso B. In quel caso la legge oraria del pedone che viaggia da B verso A è:
$x = v_p t + 30$ con v_p negativo.
La legge oraria del ciclista è invece, tenuto conto che: viaggia nel verso del riferimento, che parte da A con 10' di ritardo e che i tempi andranno espressi in ore:
$x = 18\,(t-1/6) = -3 + 18\,t$
I due si incontrano per $x = 30-6 = 24$
$24 = -3 + 18\,t \Leftrightarrow t = 27/18 = 1.5$ h e cioè alle 6:30 + 1:30 = 8:00
La velocità del pedone è: $6/1.5 = 4$ km/h
Ora abbiamo tutte le informazioni per tracciare i diagrammi orari degli autobus, del pedone e del ciclista e da essi potremo rispondere alle altre domande.
Osserviamo intanto che gli autobus per fare i 30 km impiegano $30/45 = 2/3$ h cioè 40' e pertanto per rispettare le partenze ogni quarto d'ora faranno in ciascuno dei due capolinea una sosta di 5'. Preso il tempo 0 alle ore 6:00 sono stati disegnati i diagrammi del moto degli autobus. Quindi è stato tracciato in rosso il diagramma del pedone e in blu quello del ciclista rispettando le pendenze delle rette imposte dalle velocità che sono note.
Dai diagrammi possiamo ora leggere le risposte alle due domande. Gli autobus che



[7] I prossimi esercizi, per quanto riguarda il solo testo, sono ripresi da una raccolta di problemi russi *Problems in Elementary Physics* ed. MIR B.Bukhovtsev. V. Krivchenkov, G. Myakishev, V. Shalnov. Li propongo perché costituiscono un utile occasione di riflessione sui diagrammi orari oltre che un avvicinamento all'uso della trigonometria nella risoluzione dei problemi di fisica.

sorpassano il ciclista sono 4; quelli che sorpassano il pedone sono 5. Il pedone incontra il 12° autobus nel punto indicato dal pallino verde dopo che ha percorso all'incirca 10 km.

Ora che sono stati disegnati i diagrammi è anche possibile risolvere analiticamente il problema. Si tratta di mettere a sistema l'equazione oraria del pedone x = e quella del 12° autobus.

L'autobus in questione alla partenza ha coordinate (180',30km) o anche (3h,30km) e la sua velocità è – 45 km/h pertanto l'equazione oraria (tenuto conto che la velocità è la pendenza) è

$x - 30 = -45\,(t-3) \Leftrightarrow x = -45t + 165$

L'equazione del pedone le cui coordinate di partenza sono (30km,30') e cioè (30km,1/2 h) è invece $(x - 30) = -4(t - ½) \Leftrightarrow x = -4t + 32$

Si ha dunque $-45t + 165 = -4t + 32 \Leftrightarrow 41t = 133$ da cui t = 3,24 e x= 19 km con una percorrenza del pedone di circa 11 km.

☺

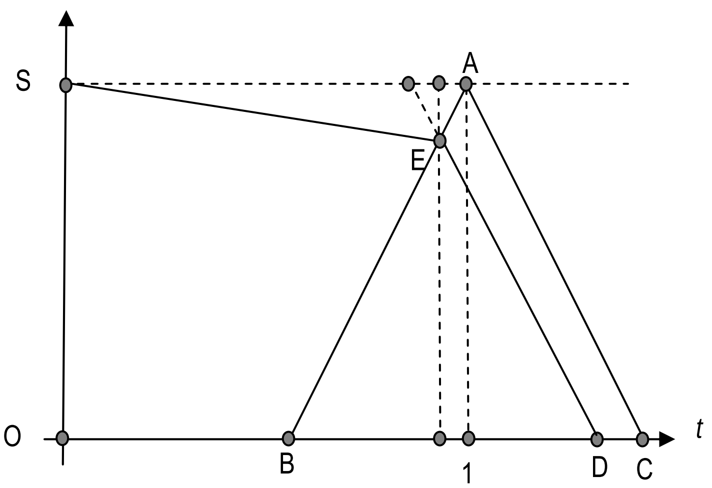
1.10.6 Coordinamento di movimenti diversi

Esercizio: Un ingegnere che lavora in un impianto fuori città viene portato all'impianto da una automobile aziendale che arriva alla stazione ferroviaria quando arriva il treno che lo trasporta. Un giorno l'ingegnere $prende il treno precedente e arriva alla stazione con un'ora di anticipo. Decide di incamminarsi e, così facendo, arriva all'impianto 10 minuti prima del solito. Per quanto tempo ha camminato l'ingegnere prima di essere raggiunto dall'auto? Fornire una soluzione grafica.

☹

A prima vista si ha l'impressione che manchino dei dati, ma grazie alla soluzione grafica vedremo che non è così.

Consideriamo il solito diagramma orario e indichiamo con S la posizione della stazione e mettiamo in O la posizione dell'impianto.



Consideriamo, sull'asse dei tempi il punto di ascissa 1 ora e dopo aver individuato il punto A che corrisponde al normale arrivo alla stazione della automobile aziendale tracciamo arbitrariamente (rispettando il criterio di simmetria che equivale a rappresentare l'uguaglianza di velocità all'andata e al ritorno) la spezzata BAC che rappresenta il normale percorso dell'auto (B è l'istante di partenza e C quello di arrivo.

Dal punto C arretriamo di 10' e individuiamo D che rappresenta l'arrivo in auto dell'ingegnere dopo che ha camminato.

Tracciamo la parallela DF a CA per individuare il percorso reale dell'auto che non ha avuto bisogno di arrivare alla stazione e dalla intersezione con BA (l'auto era partita alla solita ora) individuiamo il punto E in cui l'auto ha incontrato l'ingegnere.

SE rappresenta il moto pedonale dell'ingegnere.

FA = DC = 10' e poiché si tratta di triangoli isosceli GA = 5'. Ne consegue che l'auto ha incontrato l'ingegnere 5' prima del solito e dunque l'ingegnere che era partito un'ora prima ha camminato per 55'.

☺

1.10.7 Movimenti uniformi lungo direzioni diverse

Esercizio: Un autobus si trova nel punto A di una autostrada e viaggia alla velocità v_a = 20 m/s. Un pedone si trova nel punto B alla distanza $\overline{AB}$ = 500 m e $\overline{BH}$ = 30 m dalla autostrada. Il pedone può correre alla velocità massima $v_p = 5$ m/s. Determinare entro quale margine può variare l'angolo α tra BA e la traiettoria BC seguita dal pedone affinché egli arrivi al ciglio stradale prima dell'autobus.

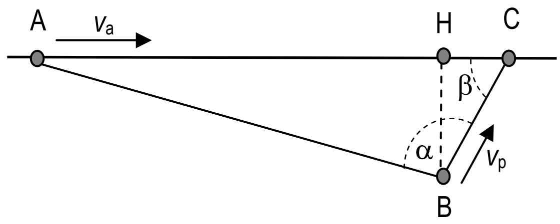
Discutere quindi le condizioni numeriche di solubilità del problema e determinare in particolare la velocità minima che può avere il pedone per incontrare l'autobus. [8]

☹

Incominciamo costruendo una figura e indichiamo con β l'angolo formato tra la autostrada e la direzione del pedone. Ipotizziamo inizialmente che il pedone vada verso destra (in modo di guadagnare tempo).

Indichiamo con t_p il tempo impiegato dal pedone a percorrere il tratto BC e con t_a quello per l'autobus lungo AC.

La condizione per cui si abbia un incontro è che sia $t_a \geq t_p$.



Poiché la soluzione del problema richiede di determinare una relazione sull'angolo α applichiamo il terema dei seni al triangolo ABC; sarà dunque:

AC/sinα = AB/sinβ

A sua volta l'angolo β è legato al percorso BC; infatti sin β = HB/BC.

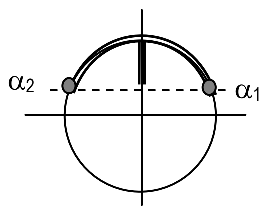
I due percorsi AC e BC si legano ai tempi di percorrenza tramite le velocità:

$AC = v_a t_a$ e $BC = v_p t_p$

Abbiamo dunque:

$$\frac{v_a t_a}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\frac{HB}{v_p t_p}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{v_a}{v_p}\frac{HB}{AB}\frac{t_a}{t_p}$$

Ma poiché deve essere $t_a \geq t_p \Leftrightarrow \frac{t_a}{t_p} \geq 1$ dovrà essere:



$$\sin\alpha \geq \frac{v_a}{v_p}\frac{HB}{AB} = \frac{20}{5}\frac{30}{500} = 0.24$$

Il valore α_1 ai trova dalla calcolatrice invertendo la funzione seno e si ottiene 13.89

Mentre α_2 è il suo supplementare 166.11.

Dunque si hanno soluzioni per $13.89° \leq \alpha \leq 166.11°$

Se $\frac{v_a}{v_p}\frac{HB}{AB} > 1$ cioè se $\frac{v_a}{v_p} > \frac{AB}{HB}$ ovvero se l'autobus è troppo veloce rispetto al pedone o se il pedone è troppo distante dall'autostrada il problema non ammette soluzione.

Se poi $\frac{v_a}{v_p} = \frac{AB}{HB}$ si una sola soluzione con coincidenza dei tempi per $\alpha = 90°$

La velocità minima del pedone si ha quando sin α è massimo e si torna alla condizione della soluzione unica e cioè $v_p = v_a \frac{HB}{AB}$ e nel nostro caso dovrebbe essere

$$v_p = 20\,\frac{3}{50} = 1.2 \text{ m/s.}$$

---

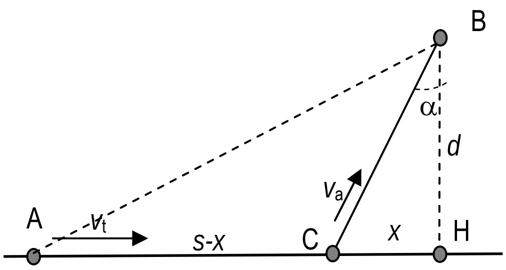
[8] Per risolvere questo esercizio occorrono alcune conoscenze basilari di trigonometria e, in particolare:

1) Il teorema dei seni (di semplicissima dimostrazione riferendosi alla altezza) secondo cui in un triangolo qualsiasi i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti
2) La capacità di risolvere graficamente una semplice disequazione sulla funzione seno.

☺

1.10.8 MOVIMENTI UNIFORMI LUNGO PERCORSI CON VELOCITÀ DIVERSE E LIBERA SCELTA DEL PERCORSO: SOLUZIONE OTTIMALE

Esercizio: Un nuotatore si trova lungo la riva nel punto A e deve raggiungere il punto B che si trova in acqua. La velocità in acqua è v_a minore di quella sulla terraferma v_t. Per questa ragione in generale la traiettoria rettilinea non è la migliore e bisognerà muoversi lungo una spezzata cercando un compromesso tra il tratto lungo la terraferma in cui si va più spediti e l'inevitabile allungamento del percorso che si determina.



Siano note oltre alle due velocità le due distanze: s =AH di A dalla perpendicolare di B alla riva e d = BH da B alla riva.

Viene richiesto di trovare la distanza CH = x che corrisponde alla traiettoria che ottimizza il tempo di percorrenza.

Trovare inoltre sin α che, come si vedrà, ammette una soluzione molto semplice.

☹

Sul piano della impostazione l'eserrcizio è piuttosto semplice; la difficoltà sta nel determinare il tempo ottimale con metodi matematici di natura elementare. Se nelle scuole superiori invece di affrontare tanti problemi geometrici di II grado fine ase stessi si affrontassero questioni come quella proposta ne guadagnerebbe certamente la consapevolezza degli studenti rispetto a tecniche algebriche che vengono vissute come inutili e ripetitive.

$$t_{ACB} = t_{AC} + t_{CB} = \frac{s-x}{v_t} + \frac{\sqrt{x^2+d^2}}{v_a} = \frac{(s-x)v_a+\sqrt{x^2+d^2}\,v_t}{v_t\, v_s} = \frac{v_t\sqrt{x^2+d^2}-v_a x+v_a s}{v_t\, v_s}$$

La quantità trovata sarà minima, visto che il denominatore è costante, quando lo è la parte variabile del numeratore: $y = \sqrt{x^2+d^2}\,v_t - v_a x$

Si tratta di una espressione irrazionale in x che può essere agevolmente razionalizzata:

$y + v_a x = v_t\sqrt{x^2+d^2} \Leftrightarrow y^2 + v_a^2 x^2 + 2 y v_a x = v_t^2(x^2+d^2)$

si tratta di una equazione di II grado in x della quale sappiamo discutere l'esistenza di soluzioni:

$(v_a^2 - v_t^2) + x(2 y v_a) + (y^2 - v_t^2 d^2) = 0$

Dovrà essere:

$\Delta/4 = (y v_a)^2 - (v_a^2 - v_t^2)(y^2 - v_t^2 d^2) = v_t^2 y^2 - v_t^4 d^2 + v_a^2 v_t^2 d^2 = v_t^2(y^2 - v_t^2 d^2 + v_a^2 d^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow y^2 - v_t^2 d^2 + v_a^2 d^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \geq (v_t^2 - v_a^2)d^2$

Dunque trattandosi di quantità positive il valore minimo di y è

$y_{min} = \sqrt{v_t^2 - v_a^2}\, d$ e a questo valore corrisponde in x la soluzione doppia della equazione di II grado con $\Delta/4 = 0$

$$x = -\frac{y\, v_a}{v_a^2 - v_t^2} = \frac{y\, v_a}{v_t^2 - v_a^2} = \frac{\sqrt{v_t^2 - v_a^2}\, d\, v_a}{v_t^2 - v_a^2} = \frac{d\, v_a}{\sqrt{v_t^2 - v_a^2}} = \frac{d}{\sqrt{\frac{v_t^2}{v_a^2} - 1}} = \frac{d}{\sqrt{\beta^2 - 1}}$$

dove si è posto $\beta = \frac{v_t}{v_a}$

Se $s \leq \dfrac{d}{\sqrt{\beta^2 - 1}}$ allora conviene svolgere la traiettoria rettilinea, in caso contrario il valore trovato (che abbiamo volutamente espresso evidenziando il rapporto delle due velocità) è quello ottimale.

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}}$$

$$d^2 + x^2 = d^2\left(1+ \frac{1}{\beta^2-1} \right) = d^2 \frac{\beta^2}{\beta^2-1}$$

e dunque $\sin \alpha = \dfrac{d}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \dfrac{\sqrt{\beta^2-1}}{d\beta} = \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{v_a}{v_t}$

Chi conosce già un po' di questioni di ottica geometrica osserverà qualcosa che ha a che fare con le leggi della rifrazione.

☺

1.11 Indice analitico

0/0: in fisica non è indeterminato - 15

best fit: metodo dei minimi quadratici - 7

cicloide - 5

conoscere: abbandonare l'antropocentrismo - 3

diagramma: da velocità tempo a posizione tempo - 22; metodo dell'area - 22

diagramma orario: lettura - 20; punti significativi; massimi, minimi,flessi - 20

direzioni privilegiate - 3

equazione del moto: determinazione dai dati sperimentali - 6; legge oraria; definizione - 6

Esercizio: calcolo della velocità istantanea - 24; calcolo della velocità media noto il diagramma della velocità - 25; combinazione di moti e discussione di diagrammi orari - 26; come cambia la velocità media - 13; da svolgere su ricerca di regolarità - 14; determinazione della velocità media dal diagramma di quella istantanea - 24; esempio di best fit lineare - 7; moti simultanei - 24; moti uniformi simultanei, utilizzo di diagrammi - 26; moto di caduta - 10; moto di risalita e caduta - 10; moto uniforme lungo direzioni diverse; percorso ottimale con tecniche di II grado - 29; trigonometria; percorso ottimale - 27; operare sui diagrammi - 19, 21; sembra che manchino dei dati; potere della rappresentazione grafica - 27

estrapolazione - 8

exact fit: determinazione della legge oraria - 7

Galilei: fonda le grandezze cinematiche - 13

immagini stroboscopiche - 14

interpolazione - 8

istante iniziale: definizione; inizio della osservazione - 9

meccanica: nascita; modello teorico - 1

Meccanica: deus ex machina - 1; meccanismo; macchina - 1

moti: variabili - 9

moto: rotatorio - 2; traslatorio - 2

moto rettilineo: definizione e importanza - 6

moto uniforme: definizione; costanti del moto - 9

moto vario: definizione - 10

movimento: carattere relativo - 1

posizione assoluta: non ha senso - 4

posizione iniziale: coordinata iniziale - 9

principi generali di simmetria: omgeneità, isotropia - 4

punto materiale: punto massa; astrazione - 2

scienza moderna: rottura culturale - 3

sistema di riferimento: assi e coordinate - 4; definizione; reciprocità - 4

sistemi di riferimento: criteri di scelta - 4 *spazio libero*: direzioni equivalenti; isotropia - 3; uniformità - 3

spostamento: definizione - 12; non è lo spazio percorso - 12

tempo: uniformità - 3

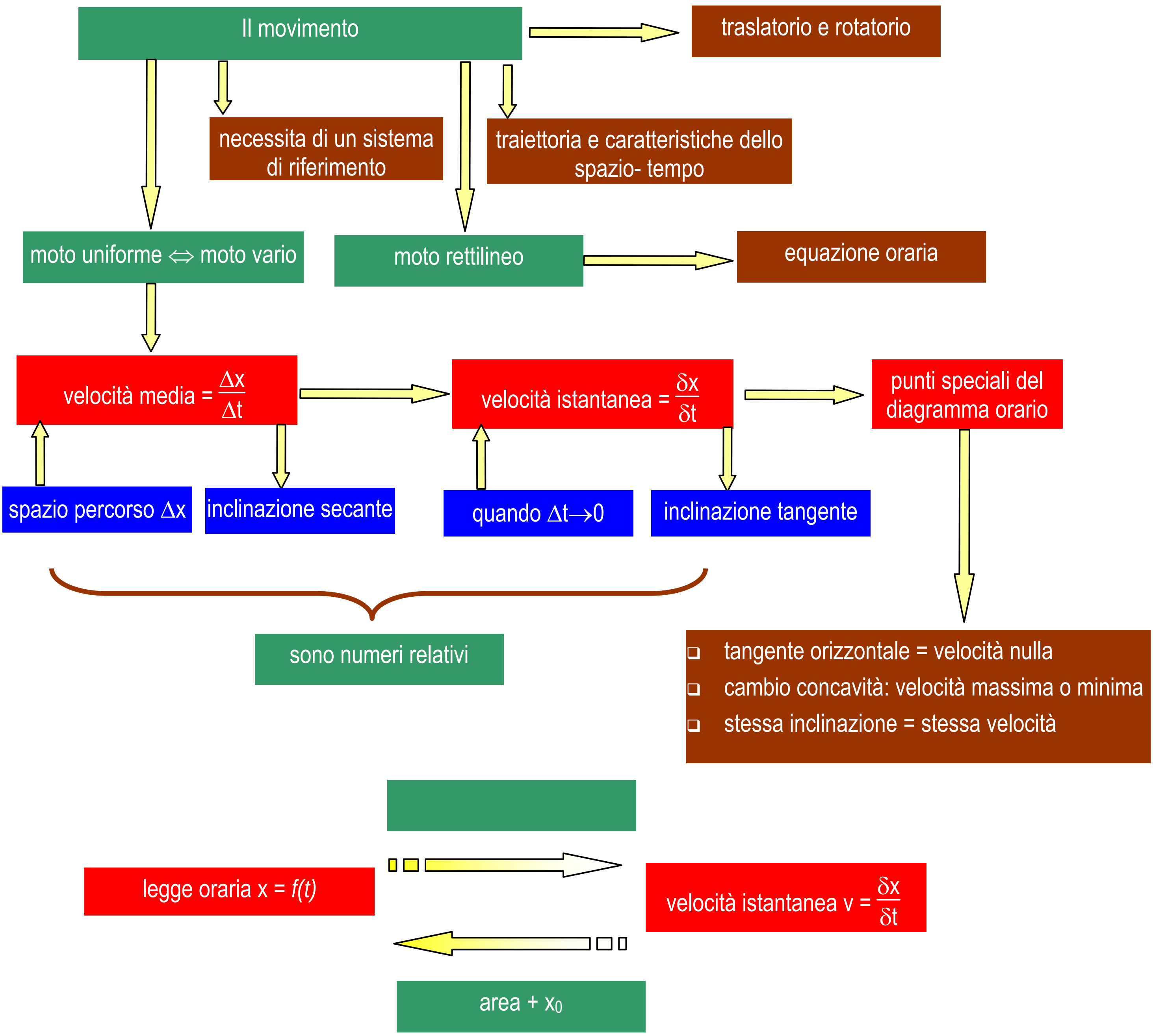
traiettoria: definizione - 4; legame con il sistema di riferimento - 4

traiettoria e diagramma del moto: distinzione - 10

velocità: equazione dimensionale - 12; problematiche concettuali - 13

velocità istantanea: definizione - 15; fisica e matematica - 17; moto uniforme - 15; notazioni simboliche - 15; significato geometrico; inclinazione della retta tangente - 18; tecniche di calcolo - 18

velocità media: costante solo nel moto uniforme - 13; da cosa dipende - 16; dall'inizio del moto - 17; definizione - 12; determinazione numerica - 16; significato geometrico; inclinazione della secante - 16


Il movimento
traslatorio e rotatorio
necessita di un sistema di riferimento
traiettoria e caratteristiche dello spazio- tempo
moto uniforme ⇔ moto vario
moto rettilineo
equazione oraria
velocità media = $\frac{\Delta x}{\Delta t}$
velocità istantanea = $\frac{\delta x}{\delta t}$
punti speciali del diagramma orario
spazio percorso Δx
inclinazione secante
quando $\Delta t \rightarrow 0$
inclinazione tangente
sono numeri relativi
tangente orizzontale = velocità nulla
cambio concavità: velocità massima o minima
stessa inclinazione = stessa velocità
legge oraria x = *f(t)*
velocità istantanea v = $\frac{\delta x}{\delta t}$
area + x_0