I.3. I vettori: quando i numeri non bastano

3.1 Gli scalari: quando i numeri bastano

Trattando delle grandezze fisiche nella appendice dedicata alle problematiche di matematica non abbiamo affrontato una questione che, invece, nei sistemi complessi si pone sempre e che fa parte integrante della definizione di ogni grandezza fisica, la questione della somma delle grandezze fisiche.

Anche senza aver già svolto un corso di fisica, nessuno si sognerebbe di affermare che unendo ½ litro di acqua a 30° con ½ litro d'acqua a 50° si ottiene 1 litro d'acqua a 80°.

Sappiamo analogamente che se ci spostiamo di 1 km verso nord e poi di 1 km verso est lo spostamento complessivo non è di 2 km verso nord est ma inferiore. D'altra parte se lascio trascorrere ½ ora di tempo e poi un'altra ½ ora il tempo trascorso è di un'ora.

Abbiamo visto il caso di 3 grandezze fisiche che, quando vengono sommate fisicamente, producono tre *algebre* di tipo diverso. Due di esse (la temperatura e il tempo, che pure si sommano con leggi diverse) sono degli *scalari*. Lo spostamento invece è un *vettore*.

Ci occuperemo in questo capitolo di *dare un significato a queste due parole* e analizzeremo inoltre le nostre prime grandezze vettoriali: il vettore posizione, il vettore spostamento e il vettore velocità.

3.1.1 COSA SONO GLI SCALARI

lo scalare si associa ad un numero

Una grandezza fisica si dice di tipo *scalare* se è definita come una quantità che in qualunque sistema di riferimento corrisponde ad un ben definito numero che dipende dal sistema di unità di misura prescelto. Nello scrivere uno scalare bisogna sempre indicare il suo valore numerico accompagnato dalla unità di misura.

Per esempio $l = 3.25\times10^3$ m

Il valore numerico, o grandezza, di uno *scalare è inversamente proporzionale alla unità di misura* infatti se indichiamo con X una certa grandezza espressa in due diverse unità $[A]$ e $[A']$ avremo:

$X = a\,[A] = a'\,[A']$

o anche

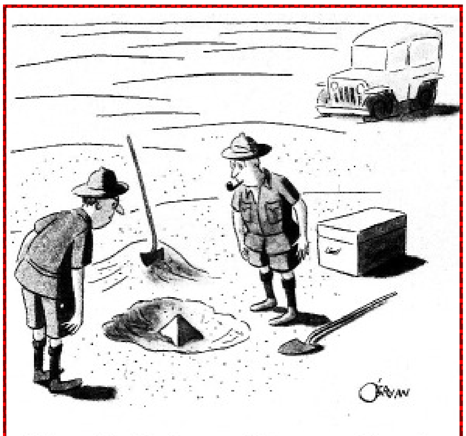
$$\frac{a}{a'} = \frac{[A']}{[A]} \qquad \text{(I.3.1)}$$

3.1.2 SCALARI ED UNITÀ DI MISURA

L'equazione (I.3.1) ci consente di trovare la tecnica generale per passare da una misura espressa in un sistema al corrispondente valore espresso in un altro, infatti:

$$a' = a\,\frac{[A]}{[A']}$$

Per esempio, sapendo che 1km/h / 1m/s = 3.6, potremo scrivere v = 2.59 m/s = 2.59×3.6 = 9.32 km/h



"This could be the discovery of the century. Depending, of course, on how far down it goes."

Sono grandezze scalari il tempo, la lunghezza, l'area, il volume, la temperatura, la massa, il lavoro e l'energia.

La somma e il prodotto di grandezze scalari sono ancora uno scalare e, in generale, ogni operazione algebrica riguardante grandezze scalari produce ancora uno scalare.

Bisogna infine osservare che quando una *espressione algebrica di grandezze scalari fa da argomento a funzioni non algebriche* (trascendenti) allora tale argomento deve essere un numero puro. Per esempio se la grandezza x è espressa in metri $[x]$ = m allora la espressione $y = a^{kx}$ ha significato solo se $[k] = \mathrm{m}^{-1}$. Analogamente l'espressione $x = A \cos \omega t$ ha senso solo se $[\omega] = \mathrm{s}^{-1}$.

3.2 I vettori: 1 + 1 fa da 0 a 2

3.2.1 NON CONFONDERE LA SOMMA FISICA CON LA SOMMA MATEMATICA

In fisica *sommare significa sovrapporre, far agire insieme, costituire un unico sistema*… Si deve prendere atto in base all'esperienza della esistenza di grandezze (misurabili) che quando vengono sovrapposte non producono un effetto risultante pari alla somma numerica delle misure.

A ⊕ B
somma fisica come sovrapposizione

All'interno di questo gruppo di grandezze ne esiste una gran numero caratterizzato dal fatto di sommarsi con una delle possibili regole con cui si possono sommare i segmenti: quella che consiste nello spostarli senza mutare la loro direzione in modo di metterli uno dopo l'altro. Nell'ambito del corso, quando vorremo indicare la *somma fisica* di due grandezze A e B delle quali non ci è nota ancora la modalità con cui tale somma viene eseguita scriveremo genericamente A ⊕ B

3.2.2 LA DEFINIZIONE DI VETTORE

Poiché esistono numerose grandezze che si sovrappongono sempre usando la stessa *regola di sovrapposizione* si definisce un nuovo ente matematico assegnandogli esattamente le proprietà caratteristiche di quella classe di grandezze.

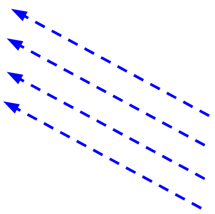
La definizione di vettore si basa sulla costruzione di una nuova algebra diversa da quella dei numeri (che viene utilizzata per le grandezze scalari) nella quale vengono definite le operazioni che coinvolgono questa nuova entità.

il vettore come classe di equivalenza di segmenti orientati $\vec{a} = [AB]$

Alla base di tutto sta la definizione di *vettore come insieme di tutti i segmenti orientati dotati della stessa lunghezza, direzione e verso.* Per questa ragione si dice che *i vettori si possono trasportare nello spazio rimanendo paralleli a se stessi.*

Quando poi si passa dalla matematica alla fisica si scopre che esistono vettori che si possono tranquillamente spostare (vettori non applicati) e vettori che invece non si possono trasportare (vettori applicati). A decidere se un vettore possa o non possa essere trasportato è l'esperienza, come vedremo nel seguito.

direzione e verso



- Dunque un *vettore* è una grandezza che in ogni sistema di riferimento corrisponde ad una *classe di equivalenza di segmenti orientati.*

  Due segmenti orientati si dicono equivalenti se sono dotati della stessa lunghezza, della stessa direzione e dello stesso verso. Ne consegue che i vettori sono caratterizzati da una *intensità* (detta anche modulo o valore assoluto), *direzione* e *verso.* Alcune grandezze vettoriali presentano anche una retta di applicazione e/o un punto di applicazione del proprio estremo.

- Avere dato una rappresentazione del vettore non è però sufficiente a definirlo; *fanno parte integrante della definizione anche le operazioni tra vettori.* In altri termini saremo autorizzati ad affermare che una certa grandezza fisica definita operativamente è un vettore se tale grandezza, oltre che essere dotata di una direzione verso e intensità, si comporta nella sovrapposizione fisica rispettando le regole di calcolo del *calcolo vettoriale* che ci apprestiamo a fornire.

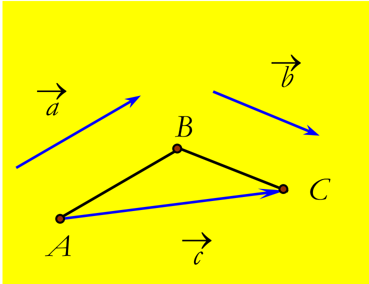
I *vettori* sono solitamente rappresentati, quando si scrive a mano, attraverso lettere minuscole con una freccia sopra di esse ($\vec{a}$, $\vec{b}$, …). In caratteri a stampa si usano invece le lettere minuscole in grassetto (***a***, ***b***, …). La intensità o modulo del vettore $\vec{a}$ sarà indicata, senza uso del grassetto, con *a*. Per rappresentare la classe di equivalenza dei segmenti equivalenti ad *AB* e che definiscono il vettore $\vec{a}$ scriveremo $\vec{a} = [AB]$.

3.2.3 LA SOMMA E LA DIFFERENZA VETTORIALE

Consideriamo due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ed indichiamo con AB e BC due segmenti orientati consecutivi che li rappresentano. Si chiama *vettore somma* $\vec{c}$ e si scrive:

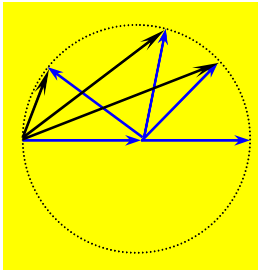
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \text{(I.3.1)}$$

il vettore rappresentato dal segmento orientato AC, cioè il vettore che ha come segmento rappresentativo un vettore che va dalla origine del primo all'estremo del secondo dopo che i due segmenti sono stati resi consecutivi (vedi Figura).



la **somma vettoriale** corrisponde a mettere i segmenti uno dietro l'altro (**metodo punta coda**)

Ecco spiegata la ragione del titolo del paragrafo. Due vettori di lunghezza unitaria producono, quando hanno la stessa direzione e lo stesso verso, un vettore di lunghezza 2 mentre ne producono uno di lunghezza nulla quando hanno verso contrario. Ci sono poi tutte le infinite situazioni intermedie che si verificano quando le direzioni sono diverse (vedi figura).



1 + 1 fa da 0 a 2 a seconda della direzione degli addendi

Si dimostra in maniera molto semplice attraverso considerazioni di geometria elementare che la *somma vettoriale* così definita gode della proprietà *commutativa e associativa.*

La operazione di *sottrazione vettoriale* è definita come operazione inversa della addizione, pertanto diremo:

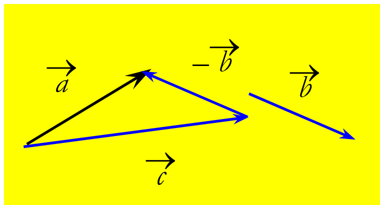
$$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \text{(I.3.2)}$$

La operazione in termini di segmenti orientati può essere interpretata ancora sulla Figura che definisce la somma e da essa si osserva una prima interessante proprietà di cui godono i vettori: per eseguire la sottrazione $\vec{c} - \vec{b}$ è sufficiente addizionare a $\vec{c}$ il segmento che rappresenta $\vec{b}$ con il verso cambiato.

sottrazione vettoriale

è definita come operazione inversa della addizione:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$$



3.2.4 L'OPPOSTO DI UN VETTORE

Si chiama *opposto* di un vettore $\vec{a}$ e lo si indica con $-\vec{a}$ un vettore che addizionato al primo produca il vettore di lunghezza nulla.

È evidente, vista la definizione di addizione attraverso i segmenti consecutivi che l'opposto di un vettore ha come segmento rappresentativo lo stesso segmento ma con il verso cambiato; si scrive pertanto:

$$\vec{a} = [AB] \quad \Leftrightarrow \quad -\vec{a} = [BA] \qquad \text{(I.3.3)}$$

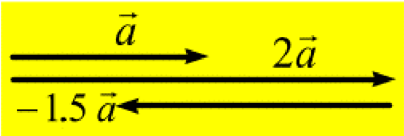
Se teniamo presente quanto osservato circa il modo di esecuzione della differenza vettoriale come sequenza tra il primo segmento e il secondo con il verso cambiato, avremo una regola semplicissima per la esecuzione della sottrazione: *il vettore differenza si ottiene attraverso la somma con l'opposto*

la differenza può essere calcolata come somma con l'opposto $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b} = \vec{c} + (-\vec{b})$

$$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b} = \vec{c} + (-\vec{b}) \qquad (I.3.4)$$

3.2.5 UN PRODOTTO ETEROGENEO: SCALARE PER VETTORE

In molte operazioni di fisica capita di dover eseguire moltiplicazioni e divisioni tra un vettore e uno scalare. Ce ne renderemo conto nel momento in cui dovremo definire la velocità e ci troveremo alle prese con una divisione tra un vettore (lo spostamento) e uno scalare (l'intervallo di tempo). Pertanto precorriamo i tempi dando la seguente definizione.



moltiplicazione di un vettore per un numero

prodotto dei moduli, stessa direzione, verso dipendente dal segno

Dato il vettore $\vec{a}$ e il numero reale α si chiama *prodotto tra il numero e il vettore* un vettore $\vec{b}$ così definito: la direzione è la stessa, il verso è lo stesso se $\alpha > 0$ mentre è opposto in caso contrario, il modulo è pari al prodotto dei moduli, cioè $b = |\alpha|\, a$

Ovviamente, il caso della divisione viene risolto osservando che dividere per α è la stessa cosa che moltiplicare per il numero $1/\alpha$.

È possibile definire altri due tipi di prodotto coinvolgenti il vettore noti come *prodotto scalare* (gli operandi sono 2 vettori e il risultato è uno scalare) e il *prodotto vettoriale* (gli operandi sono 2 vettori e il risultato è un vettore).

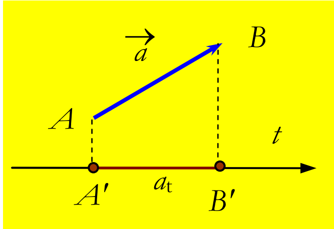
In chiave operativa se ne tratterà quando si incontreranno le grandezze fisiche che hanno reso opportuno dare le corrispondenti definizioni matematiche mentre alla fine di questo capitolo si dedica un paragrafo alle definizioni ed alle principali proprietà.

3.3 Le componenti di un vettore

3.3.1 LA PROIEZIONE DI UN VETTORE SU UNA RETTA ORIENTATA

Consideriamo una retta orientata e munita di un sistema di unità di misura ed un segmento orientato complanare ad essa come in Figura.

Le proiezioni del segmento sulla retta definiscono un nuovo segmento la cui lunghezza può essere rappresentata da un numero positivo o negativo a seconda che il segmento proiezione abbia o no lo stesso verso della retta.



la componente lungo una retta orientata

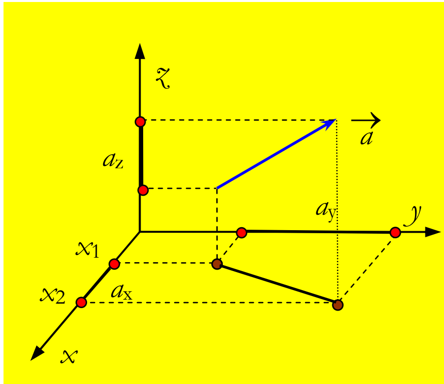
è la misura con segno della proiezione $a_t = \overline{A'B'}$

Sia $\vec{a}$ = [AB]; indichiamo con *t* la retta orientata e con A' e B' le proiezioni. Si indica solitamente con a_t la lunghezza con segno del segmento A'B' e la si chiama *componente del vettore* $\vec{a}$ lungo la retta orientata *t*.

Si ricordi che $a_t > 0 \Leftrightarrow$ *A'B'* ha lo stesso verso di *t*.

3.3.2 LE COMPONENTI DI UN VETTORE RISPETTO AD UN SISTEMA DI RIFERIMENTO

Nello spazio vale una corrispondenza biunivoca tra vettori e terne di numeri reali. Tale corrispondenza si stabilisce facendo osservare che dato un vettore ad esso corrispondono univocamente 3 numeri (le misure delle componenti) e viceversa dati 3 numeri ad essi si può far corrispondere univocamente un vettore (basta disegnare i tre corrispondenti segmenti lungo gli assi e poi attraverso le parallele costruire il vettore). [1]



le componenti nello spazio

un vettore può essere espresso come terna ordinata di numeri reali

In generale, un vettore può sempre essere proiettato sui 3 assi di un generico sistema di riferimento come in Figura. A questo scopo basta proiettare, per esempio sull'asse *z* e determinare quindi a_z. Successivamente si proietta il vettore $\vec{a}$ nel piano *xy* e si riesegue la stessa operazione per gli assi *x* e *y*.

Le proiezioni del vettore $\vec{a}$ saranno indicate con a_x, a_y e a_z e il suffisso indicherà il nome dell'asse su cui è stata eseguita la proiezione.

Si ribadisce che il simbolo corretto è a_x e non x_a come capita di leggere nelle verifiche di apprendimento di qualche studente particolarmente disordinato.

Se si riflette un attimo si scoprirà che, oltre che non utilizzata, la scrittura x_a è poco sensata linguisticamente perché dovrebbe esprimere una proprietà dell'asse *x* relativa al vettore $\vec{a}$ e non del vettore rispetto all'asse.

Se si indicano (x_1, y_1, z_1) le coordinate dell'origine del segmento e con (x_2, y_2, z_2) quelle dell'estremo si vede facilmente che:

$$a_x = x_2 - x_1 \qquad a_y = y_2 - y_1 \qquad a_z = z_2 - z_1 \tag{I.3.5}$$

Per indicare simbolicamente il fatto che un vettore ha certe *componenti* scriveremo:

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} \tag{I.3.6}$$

[1] La corrispondenza è biunivoca con i vettori e non con i segmenti orientati; infatti 3 numeri definiscono infiniti segmenti tra loro equipollenti che però corrispondono ad un unico vettore.

Nelle applicazioni che seguiranno, per non appesantire inutilmente i disegni, ci riferiremo a vettori che giacciono in un piano e utilizzeremo pertanto sistemi di riferimento con due soli assi coordinati. Così facendo non si ha alcuna perdita di generalità perché nel passare dal piano allo spazio basta scrivere, invece di 2, le 3 componenti.

3.3.3 IL MODULO DI UN VETTORE ESPRESSO ATTRAVERSO LE COMPONENTI

il modulo o lunghezza del vettore si calcola con il teorema di Pitagora

Il *modulo* di un vettore, o *intensità*, è uno scalare pari alla lunghezza del segmento rappresentativo del vettore. Lo si indica con $|\vec{a}|$ o più semplicemente con *a*. Se si applica il teorema di Pitagora si ottiene:

$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \qquad \text{(I.3.7)}$$

3.4 Le operazioni tra vettori attraverso le componenti

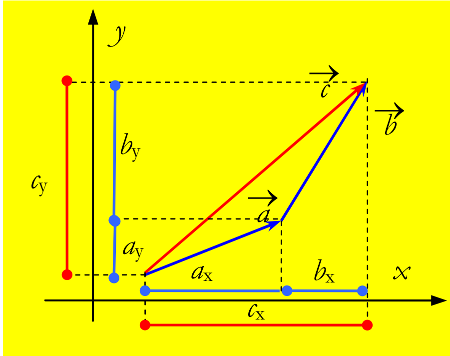
3.4.1 Basta la somma algebrica delle componenti

Poiché le componenti si ottengono proiettando e poiché la proiezione di una somma di segmenti è pari alla somma algebrica delle proiezioni si ottiene una importantissima proprietà dei vettori:

tutte le operazioni su vettori si possono ridurre alle corrispondenti operazioni algebriche sulle componenti (che sono dei numeri).

Si tratta di un risultato importantissimo per la enorme semplificazione nei calcoli che ciò comporta. Basta operare con le componenti e ricostruire il vettore finale solo alla fine

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \\ c_z = a_z + b_z \end{cases} \qquad \text{(I.3.8)}$$

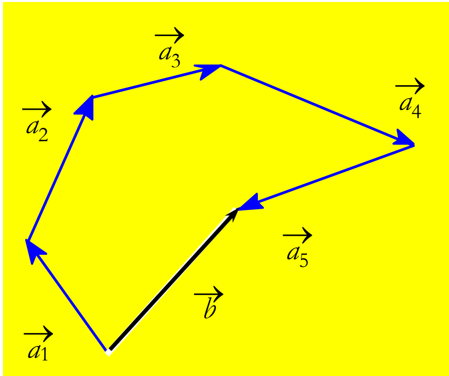


la **somma vettoriale** corrisponde alla somma algebrica delle componenti

Si presti attenzione al fatto che le somme tra le componenti sono somme algebriche, possono cioè riguardare somme di numeri discordi.

Dal fatto che le operazioni si possono eseguire sulle componenti abbiamo una ennesima dimostrazione del fatto che la somma vettoriale gode della proprietà commutativa e associativa.

La addizione ripetuta può essere eseguita graficamente attraverso il *metodo poligonale di addizione dei vettori*: per addizionare due o più vettori, per esempio $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ e $\vec{a}_5$ basta collocare il punto iniziale del secondo vettore in corrispondenza di quello finale del primo, e così via. Alla fine si costruisce un nuovo vettore che vada dall'inizio del primo alla fine dell'ultimo. Questo ultimo lato del poligono è il vettore risultante corrispondente alla somma cercata.

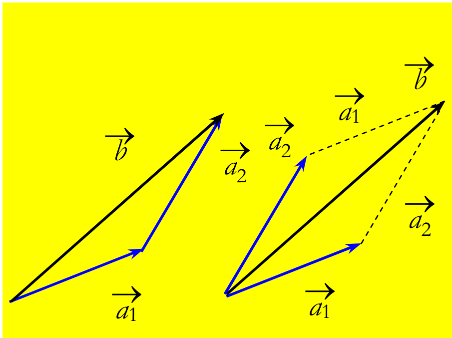


la **somma ripetuta** si esegue agevolmente e rapidamente con la poligonale

Così: $\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5$

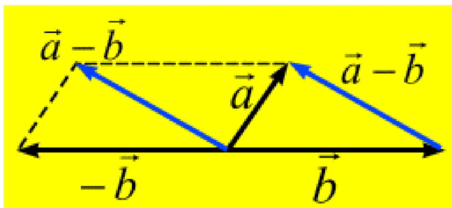
3.4.2 Triangoli e parallelogrammi

La somma di due vettori può anche essere ottenuta con il *metodo del parallelogramma* basato sulla costruzione del parallelogramma definito dai due addendi con la diagonale a fare da vettore somma. Ma per sommare più di due vettori risulta più pratica la costruzione basata sul metodo della poligonale.



il **parallelogramma** può sostituire il metodo punta-coda ma conviene solo con 2 vettori

Poiché la *differenza* di due vettori è definita come quel vettore che addizionato al sottraendo dà il minuendo, cioè come la operazione inversa della addizione la sua costruzione grafica si può ottenere, molto semplicemente, facendo coincidere i punti iniziali del minuendo $\vec{b}$ e del sottraendo $\vec{a}$. Il vettore $\vec{c}$ che va dalla fine del sottraendo alla fine del minuendo è il vettore differenza richiesto.



il **vettore differenza** corrisponde al terzo lato del triangolo quando si disegnano i due vettori con l'origine in comune

Per le proiezioni dei vettori:

$$c_x = b_x - a_x \qquad c_y = b_y - a_y \qquad c_z = b_z - a_z \qquad \text{(I.3.9)}$$

3.4.3 Numeri moltiplicati per vettori

In base al teorema di Talete i segmenti individuati su due trasversali da un fascio di rette parallele (quelle che servono a costruire le proiezioni) nel prodotto per un numero basta moltiplicare le componenti

sono proporzionali; pertanto la relazione che vale sui vettori vale anche sulle componenti e si ha che:

$$\vec{b} = \alpha\,\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b_x = \alpha\, a_x \\ b_y = \alpha\, a_y \\ b_z = \alpha\, a_z \end{cases} \qquad \text{(I.3.10)}$$

principio di composizione dei movimenti

i movimenti nello spazio possono essere studiati come sovrapposizione di tre moti rettilinei lungo gli assi del sistema di riferimento

3.4.4 Ritorniamo alla Fisica

Al termine della definizione delle operazioni tra i vettori osserviamo che tali definizioni sono state date in maniera di descrivere esattamente il movimento. Si pensi, per esempio alla nozione di spostamento: se vado da A a B e poi da B a C, mi sono spostato da A a C.

La ragione per cui sono state date le definizioni in quel modo è però ancora più sottile: *grazie al fatto che gli spostamenti si sommano fisicamente con legge vettoriale e al fatto che le componenti di un vettore sono le sue proiezioni lungo gli assi del sistema di riferimento, un generico movimento nello spazio può essere studiato come sovrapposizione di tre movimenti rettilinei lungo gli assi* del sistema di riferimento e pertanto le leggi già trovate per il moto rettilineo, come leggi scalari, possono essere usate per studiare il movimento in generale.

Questo è uno dei grandi risultati ottenuti da Galilei nell'ambito dello studio del movimento dei proiettili condotto nei *Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze.*

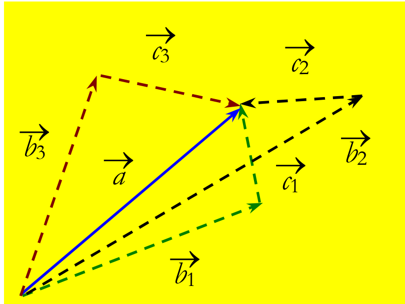
Per questa ragione lo studio del moto è iniziato da quelli rettilinei: essi non solo *sono i più semplici*, ma sono anche *rappresentativi del caso generale* perché il moto curvilineo nello spazio può sempre essere studiato come sovrapposizione di opportuni moti rettilinei.

3.5 Scomposizione di un vettore

3.5.1 PERCHÉ CONVIENE SCOMPORRE I VETTORI

Esaminando problemi sul moto capita sovente di esaminare il moto stesso secondo direzioni particolari perché lungo tali direzioni l'analisi risulta più semplice.

La stessa cosa accade con le forze per le quali può risultare più favorevole un riferimento diverso da quello naturale. Per esempio, se un corpo si muove lungo un piano inclinato, invece di ragionare sulla orizzontale e la verticale può essere più utile farlo lungo il piano inclinato e lungo la perpendicolare al piano stesso.

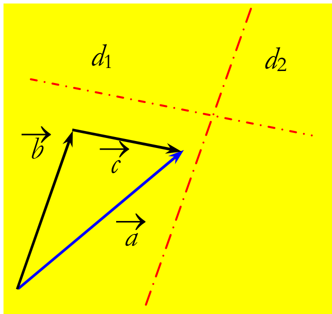


un vettore si può scomporre in infiniti modi e ciò determina la possibilità di strategie diverse di soluzione di uno stesso problema

3.5.2 COME EFFETTUARE LA SCOMPOSIZIONE

Scomporre un vettore $\vec{a}$ in due componenti significa trovare due vettori, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ tali che $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. Si osservi che, in base al metodo poligonale, i tre vettori formano un triangolo.

Così come è stato formulato, senza fissare delle direzioni privilegiate, il problema presenta infinite soluzioni perché su di un segmento di lunghezza a assegnato si possono costruire infiniti triangoli (gli altri due cateti del triangolo sono i vettori cercati). Se però si fissano le due direzioni dei vettori componenti il problema ammette una sola soluzione.

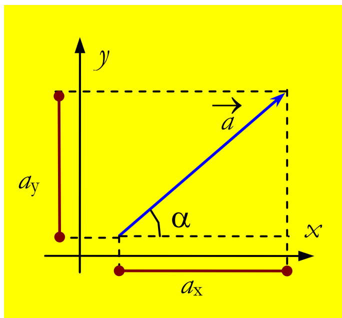


scomposizione lungo due direzioni

si tracciano le parallele passanti per gli estremi del vettore

Si tracciano per l'origine e l'estremo del vettore assegnato due linee rette parallele alle direzioni assegnate. Si considera poi il triangolo così ottenuto e su di esso si costruiscono due vettori: il primo parte dall'origine di $\vec{a}$ e termina nel punto di incontro delle due parallele; il secondo parte da tale punto e termina nell'estremo di $\vec{a}$. I due vettori trovati hanno le direzioni assegnate e, inoltre, per costruzione, è $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

3.5.3 LA RELAZIONE TRA LE COMPONENTI, IL MODULO E L'ANGOLO



determinazione analitica delle componenti

il seno quando l'angolo è opposto, il coseno quando è adiacente alla componente

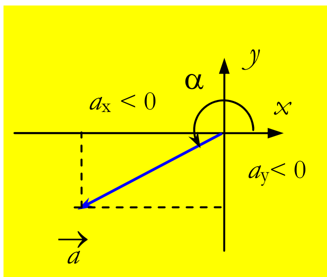
Fino ad ora abbiamo imparato a determinare le componenti di un vettore per via grafica eseguendo delle proiezioni su una o più rette. Esiste però un metodo, basato sull'utilizzo delle funzioni goniometriche studiate nel capitolo 0, che consente di determinare le componenti quando sono noti il modulo e l'angolo e viceversa.

In effetti, le due componenti di un vettore $\vec{a}$ dato che formi un angolo α con l'asse delle x valgono rispettivamente:

$$a_x = a \cos \alpha \qquad a_y = a \text{ sen } \alpha \qquad \text{(I.3.11)}$$

Poiché però l'angolo considerato può essere indifferentemente compreso tra 0° e 360° e ai vari casi corrispondono componenti sia positive sia negative le funzioni goniometriche seno, coseno e tangente che avevamo riferito ai soli angoli acuti dei triangoli rettangoli vengono generalizzate utilizzando le relazioni (I.3.11) per tener conto di questo aspetto (vedi figura) e la situazione, nei quattro quadranti risulta la seguente:

Quadrante	I	II	III	IV
Seno	+	+	–	–
Coseno	+	–	–	+



il segno delle componenti di un vettore è strettamente legato ai quadranti

In altri termini le relazioni (I.3.11) diventano sia lo strumento di calcolo delle *componenti di un vettore*, sia la definizione delle funzioni seno e coseno. L'angolo α, visto che i vettori possono tranquillamente essere traslati parallelamente a se stessi, può indifferentemente essere considerato l'angolo formato tra l'asse x e la retta di applicazione o, nel caso di vettore traslato nell'origine, l'angolo formato tra l'asse x e il vettore.

Per comodità di memorizzazione riportiamo sinteticamente le relazioni che legano il vettore alle sue componenti.

$$\sin\alpha = \frac{a_y}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{a_x}{a} \qquad \tan\alpha = \frac{a_y}{a_x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

3.5.4 ESERCIZI SVOLTI DI CALCOLO VETTORIALE

Esercizio: Determinazione del vettore somma

Sono assegnati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ con le seguenti caratteristiche: $|\vec{a}| = 6.4$; α° = 45°; $|\vec{b}| = 6.9$; β° = –74°. Calcolare il modulo e l'angolo del vettore $\vec{c}$ somma (risultati con almeno 4 cifre decimali)

☹

$a_x = a \cos\alpha = 6.4 \cos 45° = 4.5255 \quad a_y = a \sin\alpha = 4.5255$

analogamente

$b_x = b \cos\beta = 6.9 \cos -74° = 1.9019 \quad b_y = b \sin\beta = -6.6327$

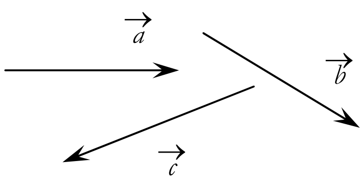
$c_x = a_x + b_x = 6.4274 \quad c_y = a_y + b_y = -2.1072$

$$|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = 6.7640 \quad \gamma° = \tan^{-1}\frac{c_y}{c_x} = -18.1518°$$

Nella determinazione dell'angolo formato da un vettore bisogna tener presente che la macchina calcolatrice fornisce sempre nella inversione della tangente un angolo compreso tra –90° e +90°. Ma un vettore può essere collocato anche nel II e III quadrante.

Pertanto, dopo aver determinato γ con la calcolatrice bisogna, sulla base dei singoli segni delle componenti, verificare se la soluzione da prendere non corrisponda a γ + 180° che presenta lo stesso valore della tangente ma risulta rispettoso anche dei singoli segni delle componenti.

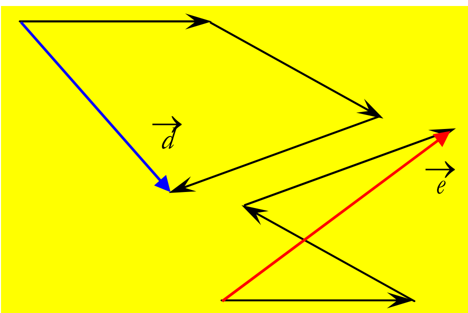
☺



Tracciamento dei vettori corrispondenti ad una data operazione

Esercizio: Dati i vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ come in figura rappresentare nel modo più semplice, i vettori: $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ e $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

☹



Per quanto riguarda il vettore $\vec{d}$ si riportano i segmenti orientati consecutivamente (metodo punta-coda) e si ottiene quanto riportato in blu.

Per quanto riguarda il vettore $\vec{e}$ si utilizza ancora il metodo punta-coda ma riportando i vettori opposti di $\vec{b}$ e $\vec{c}$ in modo di calcolare la differenza come somma con l'opposto. Si ottiene così il vettore $\vec{e}$ riportato in rosso.

☺

Determinazione a priori delle caratteristiche di un vettore

Esercizio: Sono dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ diversi tra loro con la condizione $a = b$. Cosa si può dire dei vettori $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ (la proprietà riguarda le direzioni relative)? Quando accade che $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$?

☹

In base alla definizione $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ sono le diagonali di un parallelogramma di lati $\vec{a}$ e $\vec{b}$; la condizione $a = b$ implica che il parallelogramma sia un rombo e le due diagonali sono pertanto perpendicolari. Quando accade che $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ vuol dire che le diagonali sono uguali e il rombo diviene un quadrato; ciò si verifica se i due vettori sono tra loro perpendicolari

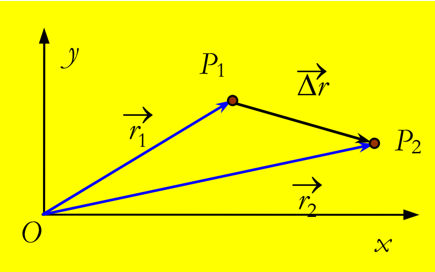
☺

3.6 I vettori e la descrizione del movimento

3.6.1 LA DESCRIZIONE DEL MOTO A PIÙ DIMENSIONI

Nei capitoli precedenti, dopo aver introdotto alcune considerazioni iniziali sul moto traslatorio e su quello rotatorio ci siamo dedicati allo studio del moto rettilineo. La ragione è stata duplice:

- il moto rettilineo è più semplice da studiare
- il moto curvilineo può essere analizzato come composizione di moti rettilinei



vettore posizione e vettore spostamento

Consideriamo ora il moto di un punto materiale nel piano[2]. La posizione del punto nel sistema di riferimento avviene attraverso un vettore detto *vettore posizione* che parte dalla origine del sistema di riferimento e termina nel punto.

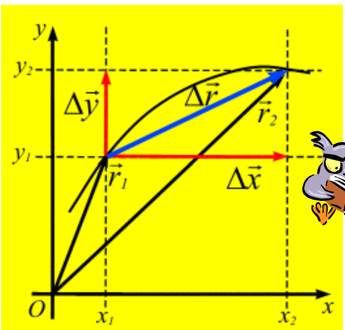
I *vettori posizione* si indicano solitamente con $\vec{r}$ e, nel caso rappresentato in figura avremo,

$$\vec{r} = OP \qquad \text{(I.3.12)}$$

Se il punto materiale si sposta e passa da P_1 a P_2 cambierà anche il vettore posizione. Il vettore che corrisponde alla differenza dei vettori posizione $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ corrispondenti agli istanti t_1 e t_2 viene chiamato *vettore spostamento* e come tutte le differenze della fisica sarà indicato attraverso la lettera Δ.

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = P_1P_2 \qquad \text{(I.3.13)}$$

Nota Bene:



- Con la definizione che è stata data la componente del vettore spostamento corrisponde esattamente allo *spostamento* del moto rettilineo, così come la componente del vettore posizione corrisponde alla coordinata spaziale (o posizione) sulla retta.
- Lo *spostamento* non va confuso con lo spazio percorso lungo la traiettoria; in effetti gli spostamenti sono dei segmenti mentre gli spazi percorsi lungo la traiettoria sono, in generale, degli archi di curva. I due concetti si identificano solo nel caso in cui il moto sia rettilineo e avvenga nello stesso verso.
- Accettiamo per ora, con considerazioni puramente geometriche, il carattere vettoriale degli spostamenti, ma ricordiamo che tale carattere sarà pienamente sancito solo dopo aver osservato come si compongono fisicamente gli spostamenti e aver verificato che la sovrapposizione fisica corrisponde ad una sovrapposizione vettoriale.

3.6.2 IL VETTORE VELOCITÀ MEDIA

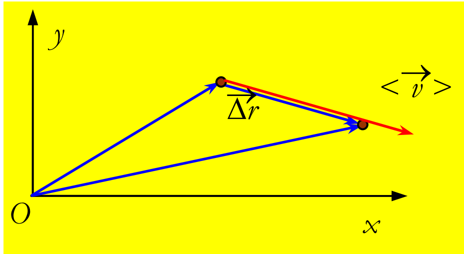
La definizione del *vettore velocità media* procede, per generalizzazione, da quella del vettore spostamento.

---

[2] Come si è già chiarito la restrizione al piano non pone problemi perché si passa da 2 a 3 dimensioni solo aggiungendo una componente in più ai vettori.

Si chiama *vettore velocità media* il vettore definito tramite il rapporto tra il vettore spostamento e l'intervallo di tempo cui tale vettore si riferisce. Si scrive:

$$<\vec{v}> = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1} \qquad \text{(I.3.14)}$$



vettori spostamento e velocità media hanno la stessa direzione e lo stesso verso

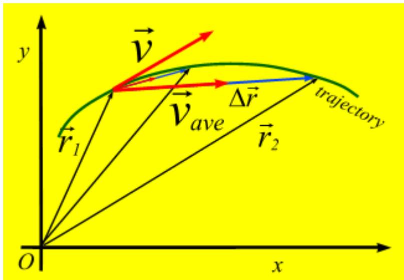
Come sappiamo la divisione del vettore $\overrightarrow{\Delta r}$ per lo scalare Δt determina un nuovo vettore con la stessa direzione e verso di $\overrightarrow{\Delta r}$. Di conseguenza la velocità ha la stessa direzione e verso dello spostamento.

Anche per il vettore velocità media valgono le osservazioni fatte per il vettore spostamento a proposito dei legami con il moto rettilineo e del carattere vettoriale di questa nuova grandezza.

3.6.3 IL VETTORE VELOCITÀ ISTANTANEA

Proseguendo sulla strada delle generalizzazioni parleremo di *vettore velocità istantanea* calcolando la velocità media relativamente ad intervalli di tempo piccoli a piacere al punto da poter essere considerata istantanea.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\delta r}}{\delta t} \qquad \text{(I.3.15)}$$



la velocità istantanea in senso vettoriale è definita con le stesse modalità di quella scalare ed è sempre tangente alla traiettoria

Ci si può chiedere la ragione per la quale si sia data una definizione di natura vettoriale dello spostamento e della velocità. La ragione di questa scelta risiede nel fatto che le grandezze così definite rispettano il *principio di sovrapposizione*.

Ciò significa che quando si attua la sovrapposizione fisica di due velocità la velocità risultante risulta essere proprio la somma vettoriale. In altri termini: non si è inventato il calcolo vettoriale e poi si sono definite le grandezze fisiche in base ad esso. Si è visto invece che una corretta fisica richiedeva l'utilizzo di un tale strumento di calcolo e si sono adeguate ad esso le definizioni. Questa questione sarà ulteriormente ripresa nei prossimi paragrafi.

3.6.4 LA VELOCITÀ ISTANTANEA È DIRETTA COME LA TRAIETTORIA

Abbiamo già osservato che, indipendentemente dalla forma della traiettoria il vettore velocità media presenta la direzione ed il verso del vettore spostamento cioè, a meno di un fattore di scala, è rappresentato dal segmento di retta secante costruito lungo due punti della traiettoria. Quando $\Delta t \to 0$ la direzione della corda si avvicina a quella della tangente e al limite il vettore spostamento infinitesimo e il vettore velocità istantanea assumono la direzione della retta tangente alla traiettoria.

In conclusione, *il vettore velocità istantanea di una particella che si muova lungo una traiettoria curvilinea ha la direzione della retta tangente alla traiettoria stessa.*

Nel caso del moto curvilineo più semplice, quello *circolare*, poiché la tangente ad una circonferenza è sempre perpendicolare al raggio, potremo già concludere che il vettore velocità è sempre perpendicolare al vettore posizione.

Si faccia attenzione a non confondere la *tangente* alla traiettoria, che ci dà la direzione della velocità istantanea, con la tangente al diagramma orario che, attraverso la sua inclinazione ci informa del valore di velocità.

3.6.5 Le componenti del vettore velocità

Le proiezioni del vettore spostamento sono:

$$\Delta r_x = x_2 - x_1 = \Delta x$$
$$\Delta r_y = y_2 - y_1 = \Delta y \qquad \text{(I.3.16)}$$
$$\Delta r_z = z_2 - z_1 = \Delta z$$

e le corrispondenti proiezioni del vettore velocità istantanea sono

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\delta x}{\delta t}$$

$$v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\delta y}{\delta t} \qquad \text{(I.3.17)}$$

$$v_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\delta z}{\delta t}$$

Il modulo v del vettore velocità istantanea viene chiamata *rapidità* e vale

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad \text{(I.3.18)}$$

in lingua inglese si usano due parole diverse per indicare la velocità in senso scalare e la velocità in senso vettoriale: **speed** e **velocity**; da noi si potrebbe parlare di rapidità e velocità

Mentre in lingua inglese si dispone di due termini distinti per indicare il vettore velocità (*velocity*) e il modulo della stessa (*speed*) in italiano si tende ad utilizzare il termine velocità in entrambi i sensi. Episodicamente si utilizza il termine *rapidità* per indicare la *speed*. Solitamente, dal contesto, si evince se ci si sta riferendo al vettore o al suo modulo.

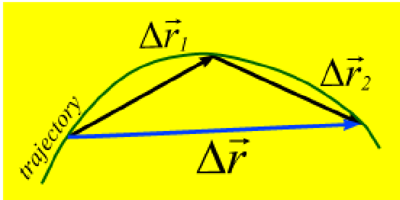
3.7 La composizione vettoriale delle velocità

3.7.1 GLI SPOSTAMENTI SI COMPONGONO VETTORIALMENTE

Come abbiamo già ripetutamente sottolineato, dietro la definizione vettoriale delle grandezze cinematiche sta una legge fisica: *gli spostamenti si compongono con legge vettoriale.*

gli spostamenti si compongono fisicamente con le leggi del calcolo vettoriale

Ciò vuol dire che se un punto materiale subisce uno spostamento $\overrightarrow{\Delta r_1}$ *e, contemporaneamente, è soggetto anche ad un altro spostamento* $\overrightarrow{\Delta r_2}$ *lo spostamento risultante è proprio* $\overrightarrow{\Delta r_1} + \overrightarrow{\Delta r_2}$.



Una situazione del genere si verifica, per esempio, quando si ha a che fare con due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto ad un altro. In quel caso $\overrightarrow{\Delta r_1}$ può rappresentare lo spostamento di un corpo rispetto ad un sistema di riferimento mentre $\overrightarrow{\Delta r_2}$ è lo spostamento del primo sistema di riferimento rispetto ad un secondo sistema. Si osserva che, un tale caso lo spostamento del corpo rispetto al secondo sistema è $\overrightarrow{\Delta r_1} + \overrightarrow{\Delta r_2}$.

3.7.2 E QUINDI ANCHE LE VELOCITÀ FANNO LA STESSA COSA

Le stesse considerazioni si applicano alle velocità, che sono definite dividendo il vettore spostamento per uno scalare.

Michel Chasles 1793 – 1880: le relazioni del calcolo vettoriale possono essere scritte senza bisogno di riferirsi ad una figura perché operano su grandezze con segno (le componenti)

Poiché nelle applicazioni pratiche capita molto spesso di essere assaliti da dubbi sul segno da utilizzare forniamo ora una regola pratica per la scrittura corretta delle relazioni. Tale regola trova un fondamento in una proprietà matematica connessa al calcolo vettoriale e che si trova perfettamente rispecchiata anche dalle componenti. In matematica essa è nota come *identità di Chasles.*

Presa una successione di punti, P_1, P_2, …, P_n collocati a piacere nel piano si ha sempre:

$$[P_1P_2] + [P_2P_3] + \ldots + [P_{n-1}P_n] = [P_1P_n] \quad \text{(I.3.19)}$$

ed equivalentemente:

$$\Delta x_{12} + \Delta x_{23} + \ldots + \Delta x_{n-1,n} = \Delta x_{1n} \quad \text{(I.3.20)}$$

Consideriamo due sistemi di riferimento in moto traslatorio tra loro con una velocità relativa $\overrightarrow{v_{OO'}}$ (che rappresenta il movimento della origine O' rispetto alla origine O). Supponiamo che un punto materiale P si muova nel riferimento O con velocità $\vec{v}$. Esso visto da O' avrà una velocità $\vec{v}$ diversa. Come si scrive il legame tra le due?

Poiché:

$$\overrightarrow{r_P} = [OP] = [OO'] + [O'P] = \overrightarrow{r_{O'}} + \overrightarrow{r_P} \quad \text{(I.3.21)}$$

la relazione si conserva quando si passa agli spostamenti e si conserva ancora quando si passa alle velocità producendo:

composizione vettoriale delle velocità

per non sbagliare usare sempre un doppio indice e usare l'identità di Chasles

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_{OO'}} + \vec{v} \quad \text{(I.3.22)}$$

La velocità di P rispetto ad O è data dalla somma della velocità di O' rispetto ad O con la velocità di P rispetto ad O'.

Se ho tre indici qualsiasi 1, 2, 3 il legame nella *composizione* è sempre del tipo:

$$\overrightarrow{1\,3} = \overrightarrow{1\,2} + \overrightarrow{2\,3} \qquad \text{(I.3.23)}$$

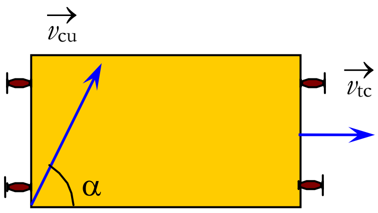
Se una barca si muove con velocità $\vec{v}_{cb}$ rispetto alla corrente e la corrente si muove con velocità $\vec{v}_{rc}$ rispetto alla riva, la velocità della barca rispetto alla riva $\vec{v}_{rb}$ è legata alle altre dalla relazione:

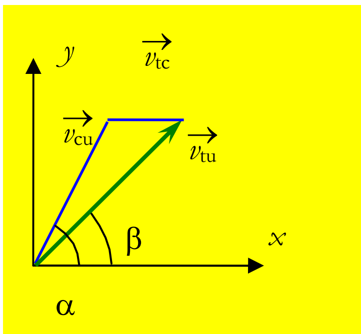
$$\vec{v}_{rb} = \vec{v}_{rc} + \vec{v}_{cb} \qquad \text{(I.3.24)}$$

3.7.3 UN ESEMPIO DI COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ

Esercizio: Supponiamo che un uomo si muova con velocità $\vec{v}_{cu}$ su un carro ferroviario e che la direzione della velocità formi un angolo α con la direzione in cui si muove il carro con velocità $\vec{v}_{tc}$ rispetto alla terra. Vogliamo determinare la velocità $\vec{v}_{tu}$ con cui l'uomo si muove rispetto a terra.

☹





In base alla (I.3.24) la relazione tra le velocità date è:

$$\vec{v}_{tu} = \vec{v}_{tc} + \vec{v}_{cu}$$

La figura riporta la composizione vettoriale e ci fa vedere con chiarezza che dovremo determinare il modulo della velocità $\vec{v}_{tu}$ e l'angolo β che il vettore forma con l'asse x.

Il problema si risolve determinando in primo luogo le proiezioni del vettore $\vec{v}_{cu}$:

$$v_{cux} = v_{cu} \cos \alpha \qquad v_{cuy} = v_{cu} \sin \alpha$$

e quindi quelle del vettore $\vec{v}_{tc}$

$$v_{tcx} = v_{tc} \qquad v_{tcy} = 0$$

Di conseguenza:

$$v_{tux} = v_{cux} + v_{tcx} = v_{cu} \cos \alpha + v_{tc} \qquad v_{tuy} = v_{cuy} + v_{tcy} = v_{cu} \sin \alpha$$

Il modulo della velocità con cui l'uomo si muove rispetto a terra vale:

$$v_{tu} = \sqrt{v_{tux}^2 + v_{tuy}^2} = \sqrt{v_{cu}^2 \cos^2\alpha + v_{tc}^2 + 2\, v_{tc}\, v_{cu} \cos \alpha + v_{cu}^2 \sin^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{v_{cu}^2 + v_{tc}^2 + 2\, v_{cu} v_{tc} \cos \alpha}$$

e la sua direzione è determinata da:

$$\sin \beta = \frac{v_{tuy}}{v_{tu}} = \frac{v_{cu} \sin \alpha}{\sqrt{v_{cu}^2 + v_{tc}^2 + 2\, v_{cu} v_{tc} \cos \alpha}}$$

☺

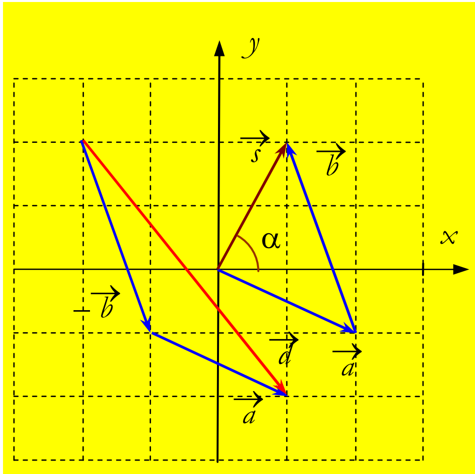
Il problema che è stato presentato costituisce oltre che un esempio di applicazione delle relazioni trovate *un modello di come si applichino le relazioni del calcolo vettoriale* quando si debba procedere ad una determinazione analitica delle grandezze in gioco.

3.8 Esercizi svolti di calcolo vettoriale

3.8.1 SOMMA E DIFFERENZA TRAMITE LE COMPONENTI

Esercizio: Dati i vettori $\vec{a} \equiv \{2,-1\}$ e $\vec{b} \equiv \{-1,3\}$ determinare graficamente ed analiticamente il vettore somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ e il vettore differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

☹



La costruzione è stata eseguita tracciando il vettore $\vec{a}$ a partire dall'origine e quindi riportando, dopo di esso, il vettore $\vec{b}$ (ci si sposta a sinistra di 1 e si sale di 3).

Per tracciare il vettore $\vec{d}$ si è usato il fatto che $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Si è pertanto ottenuto un vettore di componenti 3 e –4 che è stato disegnato a partire da una origine qualsiasi scelta con l'unico criterio di rimanere all'interno della griglia già predisposta (ricordiamo che i vettori sono caratterizzati da direzione, verso e modulo, mentre il punto di applicazione, in generale, è arbitrario).

Per quanto riguarda la determinazione analitica si ha:

$s_x = a_x + b_x = 2 - 1 = 1 \qquad s_y = a_y + b_y = -1 + 3 = 2$

$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\tan\alpha = \dfrac{s_y}{s_x} = 2 \qquad \alpha = \tan^{-1} 2 \approx 63.43°$

☺

3.8.2 SOMMA E DIFFERENZA TRAMITE MODULO E ANGOLO

Esercizio: Dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ con le seguenti caratteristiche $a = 3$, $\alpha = 34°$, $b = 4$, $\beta = 265°$ determinare analiticamente le componenti dei due vettori e quindi calcolare il vettore differenza $\vec{b} - \vec{a}$.

☹

Applicando le equazioni (I.3.11) ai vettori dati si ha:

$a_x = a\cos\alpha = 3\cdot\cos 34° = 2.48 \qquad a_y = a \text{ sen } \alpha = 1.68$

$b_x = b\cos\beta = -0.35 \qquad b_y = b \text{ sen } \beta = -3.98$

Pertanto, posto $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ si ha:

$d_x = b_x - a_x = -2.83 \qquad d_y = b_y - a_y = -5.66$

☺

3.8.3 STUDIO DI UN MOTO NEL PIANO

Esercizio: Un moto è composto dalla composizione di due moti che avvengono con le seguenti leggi:

$x = 12.0 + 3.20\,t - 7.12\,t^2 \qquad y = -2.00 - 4.61\,t + 3.12\,t^2$

Determinare il vettore posizione $\vec{r}$ ai tempi $t_0 = 0.00$ s e $t_1 = 2.35$ s. Quindi calcolare il vettore spostamento $\vec{\Delta r} = \vec{r_1} - \vec{r_0}$

☹

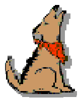
Per determinare i due vettori posizione basta sostituire i valori di tempo assegnati nelle rispettive leggi orarie. Così facendo si trovano le componenti. Si calcola poi il vettore spostamento attraverso la differenza delle componenti.

$x_0 = 12.0 \qquad y_0 = –2.00$

$x_1 = 12.0 + 3.20 \cdot 2.35 – 7.12 \cdot 2.35^2 = –19.8$

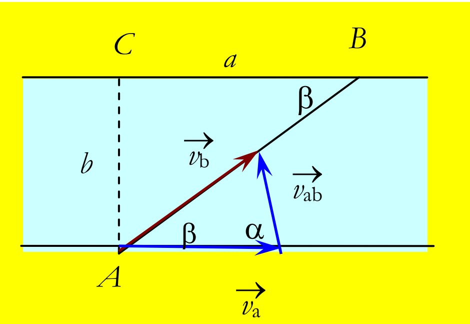
$y_1 = –2.00 – 4.61 \cdot 2.35 + 3.12 \cdot 2.35^2 = 4.40$

$\Delta r_x = x_1 – x_0 = –31.8 \quad \Delta r_y = y_1 – y_0 = 6.40$



☺

3.8.4 Studio generale di un moto composto



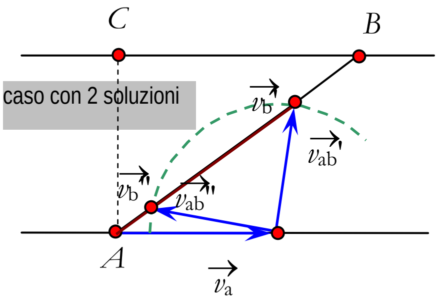
la composizione delle velocità

Esercizio: Una persona deve passare da un punto A ad un punto B di un fiume la cui velocità rispetto alle rive è $\vec{v}_a$ utilizzando una barca in grado di sviluppare una velocità massima rispetto alle acque $\vec{v}_{ab}$. Discutere la relazione tra tale velocità e il tempo di percorrenza. Si conoscono AC = b e BC = a (C indica la proiezione di A sull'altra sponda).

☹

Osserviamo in via preliminare che dovrà essere, in base alla legge di composizione delle velocità:

$\vec{v}_b = \vec{v}_a + \vec{v}_{ab}$



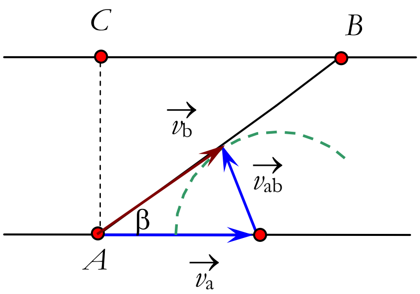
caso con 2 soluzioni

e ciò ci porta a costruire la figura da cui si osserva che la barca dovrà muoversi in una direzione incognita caratterizzata dall'angolo α tale da formare il triangolo in figura.

Osserviamo ancora che l'angolo β è invece completamente determinato dalla conoscenza di *a* e *b* e in effetti si ha:

$$\tan \beta = \frac{b}{a} \qquad \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Il problema presentato, dal punto di vista grafico, si presta ad una interessante interpretazione presentata in Figura: se sono fissati il vettore $\boldsymbol{v}_a$ (cioè la velocità della corrente) e la direzione del vettore $\boldsymbol{v}_b$ (cioè la direzione AB) a seconda del fatto che v_{ab} sia maggiore o minore di v_a la circonferenza di raggio v_{ab} interseca il segmento AB in uno, due, o anche nessun punto (quando v_{ab} è troppo grande).



la soluzione limite $v_{ab} = v_a \sin \beta$

- Se $v_{ab} > v_a$ il problema ammette una sola soluzione con angolo $\alpha > 90°$
- Se $v_a \sin \beta < v_{ab} < v_a$ il problema ammette due soluzioni una con angolo α acuto e l'altra con angolo ottuso.
- Se $v_{ab} = v_a \sin \beta$ il problema ammette la soluzione con il minor valore di velocità della barca rispetto all'acqua.

Osserviamo inoltre che, quando sono possibili due soluzioni, esse corrispondono a due direzioni di puntamento da parte della barca nel verso della corrente ed in verso contrario.

Ancora, a fronte del fatto che si determinano dei vettori $\boldsymbol{v}_b$ di differente lunghezza, si hanno, conseguentemente, dei tempi di percorrenza più o meno lunghi in maniera proporzionale visto che il percorso AB è sempre lo stesso.

Passiamo ora ad analizzare analiticamente il problema.

Se indichiamo con Δt il tempo di percorrenza e scomponiamo il moto nelle due componenti lungo AC e CB avremo:

$AC = b = v_{ab} \sin\alpha\, \Delta t$ ①

$CB = a = (v_a - v_{ab} \cos\alpha)\, \Delta t$ ②.

(La relazione vale anche per α ottuso perché in tal caso $\cos\alpha < 0$)

Da queste due relazioni possiamo ricavare $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ in funzione di Δt e, sfruttando la relazione tra seno e coseno determinare le condizioni cui deve soggiacere Δt perché il problema ammetta soluzione.

Dalla ① si ha che $\sin\alpha = \dfrac{b}{v_{ab}\Delta t}$ e dalla ② $\cos\alpha = \dfrac{1}{v_{ab}}\left(v_a - \dfrac{a}{\Delta t}\right)$ e di qui poiché $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$(v_a^2 - v_{ab}^2)\Delta t^2 - 2\, a\, v_a \Delta t + (a^2 + b^2) = 0$ ③

La equazione ③, essendo di II grado, ammette soluzioni reali quando il discriminante dell'equazione è ≥ 0.

$$\frac{\Delta}{4} = (a\, v_a)^2 - (a^2 + b^2)(v_a^2 - v_{ab}^2) = (a^2 + b^2)\, v_{ab}^2 - b^2\, v_a^2 \geq 0$$

Ma ciò equivale a richiedere, risolvendo la disequazione, che sia:

$$\frac{v_{ab}}{v_a} \geq \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\beta \quad ④$$

Si tratta della stessa condizione già ritrovata per via grafica.

Questa condizione è sicuramente verificata quando la velocità della barca rispetto all'acqua è maggiore della velocità della corrente (come avviene di solito) perché in tal caso il rapporto è maggiore di 1.

In questo caso si hanno le due soluzioni:

$$\Delta t = \frac{a v_a \pm \sqrt{\dfrac{\Delta}{4}}}{(v_a^2 - v_{ab}^2)} \quad ⑤$$

Poiché il denominatore della ⑤ è quasi sempre negativo si ha, normalmente una sola soluzione accettabile caratterizzata da un $\Delta t > 0$ e precisamente $\Delta t = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\Delta}{4}} - a v_a}{(v_{ab}^2 - v_a^2)}$ ⑥

Se però il denominatore è positivo può accadere che si trovino due soluzioni, entrambe accettabili, come nel seguente esempio numerico:

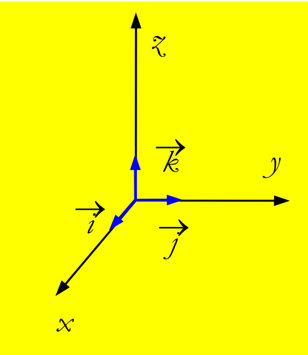
Sia AC = 1 km, CB = 3 km, v_a = 2 km/h e $v_{ab} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ km/h. Sostituendo nella ③ si ottiene: $\dfrac{7}{2}\Delta t^2 - 12\,\Delta t + 10 = 0 \Leftrightarrow \Delta t = \begin{cases} \dfrac{10}{7}\text{ h} \\ 2\text{ h} \end{cases}$

☺

3.9 Algebra dei vettori

3.9.1 I VERSORI

Quando si utilizzano i vettori è comodo introdurre tre particolari vettori (detti *versori*) caratterizzati dalla proprietà di rappresentare i 3 assi cartesiani tramite dei vettori unitari (di modulo 1) e con la direzione e il verso dei rispettivi assi.



la rappresentazione degli assi tramite versori

$\vec{i} = \{1,0,0\}$ $\vec{j} = \{0,1,0\}$ $\vec{k} = \{0,0,1\}$

I tre versori sono indicati rispettivamente con $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ e hanno come componenti:

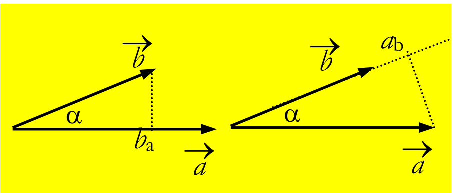
$$\vec{i} = \{1,0,0\} \quad \vec{j} = \{0,1,0\} \quad \vec{k} = \{0,0,1\} \qquad \text{(I.3.25)}$$

Se si utilizzano i versori un qualunque vettore $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ può sempre essere scritto come somma di tre vettori diretti come i versori e proporzionali alle componenti nella forma:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \qquad \text{(I.3.26)}$$

Questa modalità di rappresentazione è particolarmente utile nel calcolo (come vedremo nei prossimi paragrafi) perché consente di tradurre tutte le proprietà del calcolo in proprietà delle componenti del vettore. Nel seguito ci riferiremo prevalentemente al caso di vettori nel piano e quindi restringeremo, se possibile, le considerazioni al solo piano *xy*.

3.9.2 LA DEFINIZIONE DI PRODOTTO SCALARE



prodotto scalare

valuta tramite il prodotto la composizione tra un vettore e la proiezione dell'altro

Dati due vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e indicato con α l'angolo formato tra essi si chiama *prodotto scalare* (*dot product* [3]) il numero *c* così definito:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b \cos \alpha \qquad \text{(I.3.27)}$$

Poiché moltiplicare per il coseno equivale a trovare la componente di un vettore lungo la retta rispetto a cui viene misurato l'angolo potremo anche scrivere che:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_b\, b = a\, b_a \qquad \text{(I.3.28)}$$

Il prodotto scalare, in fisica, fa da base alla definizione del Lavoro che, a sua volta sta alla base della definizione di energia e dunque ha una importanza notevole.

3.9.3 LE PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE

- proprietà commutativa $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

  in effetti scambiando i due vettori si passa dall'angolo α all'angolo –α che ha lo stesso coseno

- ortogonalità $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90°$

- parallelismo $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm\, a\, b$

[3] I due prodotti del calcolo vettoriale sono detti *dot product* e *cross product* dai simboli · e × usati per rappresentarli. Per una tradizione consolidata e che crea confusione nella tradizione accademica italiana (e solo in quella) si usano i simboli × e ∧. In questo testo ci atterremo sempre alla convenzione internazionale.

- prodotto per se stesso $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$
- segno $\vec{a}\cdot\vec{b} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \in [-90°,90°]$

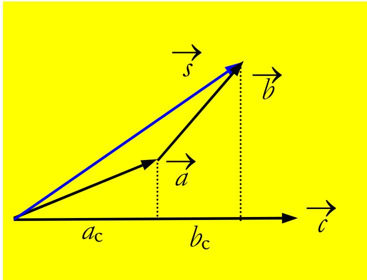
  $\vec{a}\cdot\vec{b} \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \in [90°,270°]$
- moltiplicazione per uno scalare k

  associativa $k(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (k\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\,\vec{b})$
- versori

  $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0 \qquad \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = 1$ (I.3.29)
- distributiva

  $\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{c}\cdot\vec{a}) + (\vec{c}\cdot\vec{b})$ (I.3.30)

  La dimostrazione di questa proprietà si basa sulla (I.3.26) e sul fatto che nella somma vettoriale si sommano algebricamente le componenti e la lasciamo e per esercizio al lettore che utilizzerà l'immagine qui a lato.



- *prodotto scalare* tramite le componenti

  $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ (I.3.31)

  basta osservare che, indicati con α e β gli angoli formati dai due vettori con l'asse x, l'angolo tra essi è $\beta - \alpha$

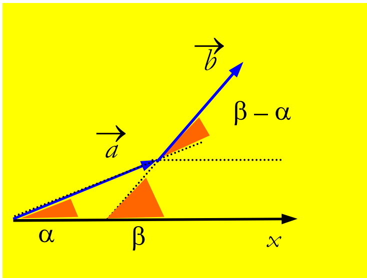
  $\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos(\beta-\alpha) = a\,b\,(\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha) = a_x b_x + a_y b_y$

  La dimostrazione si può svolgere elegantemente anche sfruttando le proprietà dei versori e ciò equivale a dimostrare indirettamente anche la formula del coseno della differenza (lasciamo la dimostrazione come esercizio).

  Si osservi che la proprietà appena dimostrata (e che vale anche quando si opera a 3 dimensioni) permette di *determinare l'angolo tra due vettori* quando sono note le componenti e questo, in particolare a 3 dimensioni, risulta un metodo rapido ed elegante per determinare gli angoli.

prodotto scalare tramite le componenti

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + + a_z b_z$



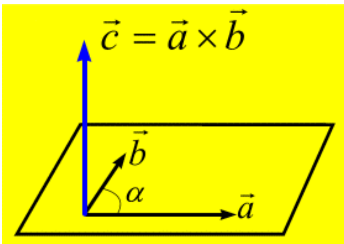
3.9.4 La definizione di Prodotto Vettoriale

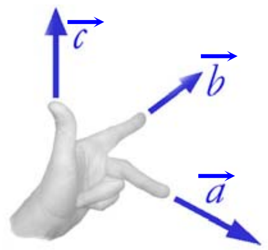
Il *prodotto vettoriale* ha una definizione piuttosto inconsueta e che deriva dalla esistenza in fisica di particolari leggi che, scritte tramite il prodotto vettoriale, risultano espresse in maniera compatta ed elegante.

Le grandezze fisiche coinvolte nel prodotto vettoriale sono il momento delle forze, il momento angolare e la forza magnetica. Ciò che caratterizza tutte queste grandezze è di *essere ortogonali a due altri vettori e di avere una intensità che dipende dai moduli dei due vettori e dal seno dell'angolo compreso* (cioè dalla componente di uno di essi in direzione ortogonale all'altro).

La *definizione di prodotto vettoriale* è la seguente:

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{c} \text{ è } \perp \text{ al piano } \vec{a}\ \vec{b} \\ c = a\,b\,|\sin\alpha| \\ \text{verso di } \vec{c} \text{ vite che avanza da } \vec{a} \text{ verso } \vec{b} \end{cases} \quad \text{(I.3.32)}$$





Di solito ci si confonde nella determinazione del verso. Si tenga presente, in proposito che una regola analoga è quella fornita dalle dita della mano sinistra che fanno da modello ad una terna cartesiana antioraria:

$\vec{a}$ medio (asse *x*)

$\vec{b}$ indice (asse *y*)

$\vec{c}$ pollice (asse *z*)

N.B. L'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ rispetto a cui effettuare la rotazione antioraria è sempre quello convesso (compreso tra 0 e π) ed è questo che consente di definire in maniera univoca il verso di $\vec{c}$.

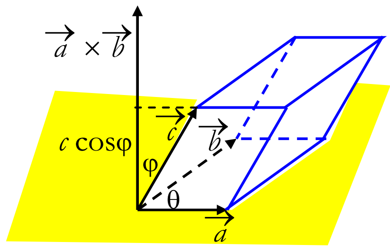
Il *modulo del prodotto vettoriale* rappresenta sempre l'area del parallelogrammo di lati $\vec{a}$ e $\vec{b}$; pertanto esso è nullo quando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli ed è massimo quando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono ⊥.

3.9.5 LE PROPRIETÀ DEL PRODOTTO VETTORIALE

Il *prodotto vettoriale* presenta le seguenti proprietà:

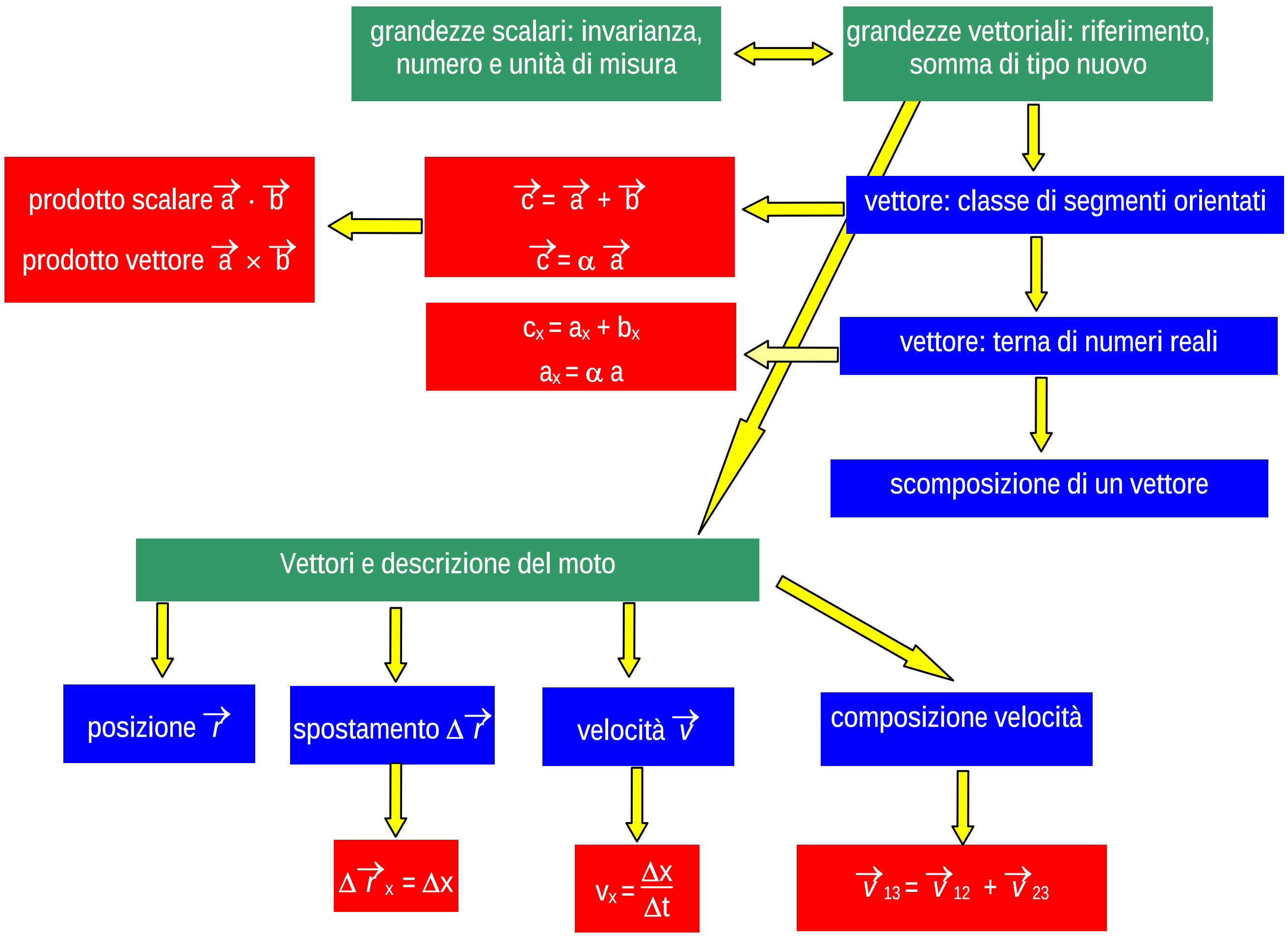
- anticommutativa $\vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}$ (I.3.33)
  deriva dal fatto che scambiando i vettori si passa dall'angolo α all'angolo – α e pertanto il prodotto vettoriale cambia verso
- associativa con gli scalari $m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b}$ (I.3.34)
  applicare la definizione e distinguere $m > 0$ e $m < 0$.
- distributiva $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$ (I.3.35)
  dimostrazione lunga e noiosa; da questa proprietà e dalla precedente si deduce che si possono sviluppare i calcoli algebrici con le tecniche del calcolo vettoriale (tenendo presente però la anticommutatività)
- versori $\vec{i} \times \vec{j} = 1$ $\vec{i} \times \vec{i} = 0$
  dalla definizione
- rappresentazione mediante i versori $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ (I.3.36)
  questa proprietà si dimostra tramite le proprietà formali del prodotto vettore dopo aver rappresentato i due operandi tramite i versori e le rispettive componenti.
  Si ricorda che il *determinante del III ordine* rappresentato significa
  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}\,(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}\,(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}\,(a_x b_y - a_y b_x)$ (I.3.37)
- il *prodotto misto*
  $$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad \text{(I.3.38)}$$
  basta tener conto della proprietà del prodotto scalare come somma dei prodotti delle componenti.

Il prodotto misto come si vede nella figura qui a lato si presta ad una interessante interpretazione: poiché il modulo del prodotto vettore è l'area del parallelogramma e la quantità $c \cos \varphi$ che compare nel prodotto scalare è l'altezza del parallelepipedo formato dai tre vettori il prodotto misto rappresenta sempre il volume del parallelepipedo.



Ne consegue che quando il prodotto misto si annulla (volume nullo) i 3 vettori giacciono in uno stesso piano e questa rappresenta una comoda condizione sufficiente per verificare la complanarietà di 3 vettori qualsiasi.

3.10 Indice analitico


grandezze scalari: invarianza, numero e unità di misura
grandezze vettoriali: riferimento, somma di tipo nuovo
prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$
prodotto vettore $\vec{a} \times \vec{b}$
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
$\vec{c} = \alpha\ \vec{a}$
vettore: classe di segmenti orientati
$c_x = a_x + b_x$
$a_x = \alpha\ a$
vettore: terna di numeri reali
scomposizione di un vettore
Vettori e descrizione del moto
posizione $\vec{r}$
spostamento $\Delta\vec{r}$
velocità $\vec{v}$
composizione velocità
$\Delta\vec{r}_x = \Delta x$
$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
$\vec{v}_{13} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{23}$