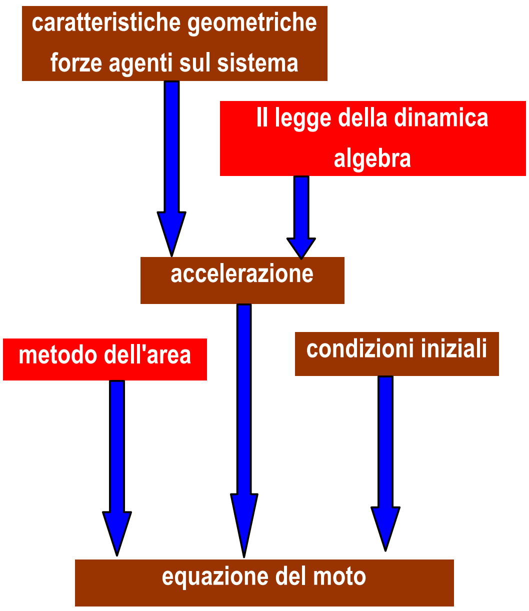
# I.8. Applicazioni della dinamica allo studio del movimento






## 8.1 Il problema fondamentale della dinamica

Molti problemi presi dall'astronomia, dalla meccanica, dalla balistica o da altri campi della scienza possono essere formulati così: dato un corpo assimilabile ad un punto materiale, (per esempio, un pianeta, un proiettile, un razzo, etc.) e la forza che agisce su di esso, se ne trovi l'equazione del moto, si scrivano cioè le sue coordinate spaziali in funzione del tempo.

Questo è il *problema fondamentale della dinamica* che corrisponde a *determinare le equazioni del moto di un punto materiale quando siano note le forze che agiscono su di essa.*

Come abbiamo già ripetutamente affermato si incomincia con l'applicare la II legge della dinamica e si trova la accelerazione della particella. Quindi, usando le leggi della cinematica (metodo dell'area), si determinano la espressione per la velocità e per le coordinate spaziali.

Nella soluzione generale di questo problema possono comparire difficoltà matematiche notevoli quando il sistema è costituito da molti corpi che interagiscono, ma con metodi basati sull'utilizzo dei computer si possono sempre determinare le soluzioni approssimate di casi particolari a condizione che si sappiano fornire le leggi con cui le forze cambiano nel tempo e nello spazio. Tali soluzioni sono di natura approssimata, ma il grado di precisione può essere portato ad un valore predeterminato qualsiasi.

Oggi che il calcolatore è divenuto uno strumento diffuso ed estremamente potente si possono affrontare problemi complessi, che non solo risultano di semplice soluzione, ma è addirittura possibile simularne la evoluzione attraverso le potenzialità grafiche dei moderni Personal Computer che riescono ad eseguire così rapidamente le operazioni da simulare il movimento dei sistemi considerati mentre il calcolatore esegue via via i calcoli necessari.

La necessità di conoscere le condizioni iniziali del moto deriva dal fatto che quando si applica il metodo dell'area al diagramma accelerazione tempo si determina non la velocità ma la differenza di velocità rispetto ad un istante dato. Lo stesso problema si pone nel passare dal diagramma velocità tempo al diagramma posizione tempo. L'area corrisponde allo spazio percorso, ma se si vuole conoscere la posizione nel tempo bisogna conoscere anche la posizione ad un istante prefissato.

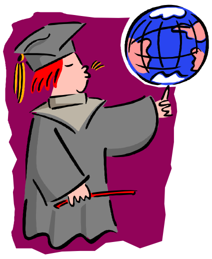
Si potrebbe pensare, astrattamente, che il problema della determinazione delle condizioni iniziali con un grado di precisione qualsiasi sia sempre risolubile, ma come vedremo nel corso di questo capitolo e dei successivi, la situazione non è così rosea. Abbiamo scoperto come prevedere il futuro, ma spesso non siamo in grado di farlo.

# 8.2 Il moto di un punto materiale soggetto alla sola forza di gravità

## 8.2.1 LE CONDIZIONI DI SEMPLIFICAZIONE NECESSARIE A COGLIERE GLI ASPETTI ESSENZIALI

Per studiare la caduta dei gravi sulla terra operiamo diverse semplificazioni:

il senso fisico: saper analizzare il contesto e saper trascurare ciò che non è essenziale

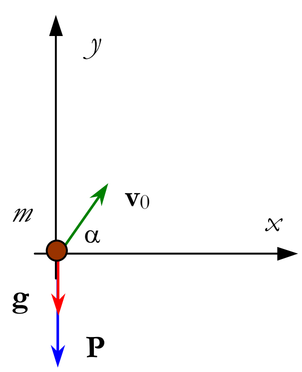


- supponiamo di eliminare l'azione di altri corpi in grado di sovrapporsi alla gravità;
- supponiamo che un punto materiale sia soggetto esclusivamente all'azione della forza di gravità. Sulla terra ciò si verifica quando un corpo cade nel vuoto, ma anche quando la caduta avviene in aria con velocità inferiori a qualche metro al secondo perché in tale caso si può trascurare l'effetto della resistenza dell'aria (si veda il capitolo dedicato all'attrito);
- supponiamo di trascurare la rotazione terrestre intorno al proprio asse e ipotizziamo dunque che la terra sia un sistema di riferimento inerziale;
- supponiamo che il vettore accelerazione di gravità sia costante in direzione ed intensità. Ciò equivale a studiare *fenomeni di tipo locale,* cioè fenomeni nei quali, a causa delle ristrette dimensioni spaziali non intervengano il carattere sferico della superficie terrestre che fa cambiare la direzione di **g** e per i quali nel corso della caduta anche $g$ non cambi (ciò come vedremo si realizza quando gli spazi di caduta sono molto minori delle dimensioni del raggio terrestre). Quando si lascia cadere questa ipotesi, come vedremo nel capitolo dedicato alla gravitazione si ottengono tipi di moto più complessi di quelli che studieremo in questo paragrafo.

## 8.2.2 SI FISSA IL SISTEMA DI RIFERIMENTO ED ECCO LE EQUAZIONI

Il moto di caduta libera nella ipotesi che il vettore **g** sia costante in direzione e intensità si studia molto semplicemente perché il moto risultante è sicuramente piano e avviene nel piano definito dal vettore **g** e dal vettore velocità iniziale $\mathbf{v}_0$. In effetti in direzione ortogonale a tale piano non si hanno né componenti della accelerazione né componenti della velocità iniziale e pertanto non si possono avere componenti del vettore velocità anche negli istanti successivi.

Per questa ragione conviene fissare un riferimento $xOy$ in tale piano e analizzare il moto rispetto a tale riferimento. Non si perde di generalità se si fa coincidere la posizione iniziale con l'origine del sistema e per altro, se si lasciasse cadere questa ipotesi non si farebbe altro che introdurre qualche costante additiva nelle equazioni del moto.




Otterremo così una situazione del tipo descritto in figura:

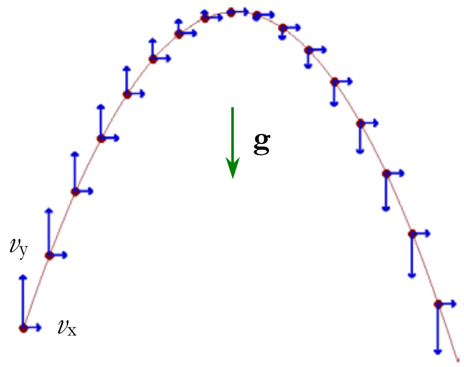
$$\mathbf{F} = \mathbf{P} = m\,\mathbf{g} \qquad \text{(I.8.1)}$$

o anche, considerando le componenti,

$$F_x = 0 \qquad F_y = -\,mg \qquad \text{(I.8.2)}$$

E dunque le proiezioni della accelerazione valgono:

$$a_x = 0 \qquad a_y = -\,g \qquad \text{(I.8.3)}$$




osservare la velocità orizzontale costante e quella verticale che segue le leggi del m.u.a.

Lungo l'asse $x$ il punto materiale si muove di moto uniforme con velocità $v_x = v_{0x}$ = costante = $v_0 \cos \alpha$.

Pertanto:

$$v_x = v_{0x} = \text{costante} \qquad x = v_{0x}\, t \tag{I.8.4}$$

Lungo l'asse $y$ si ha un moto uniformemente accelerato con accelerazione $a_y = -g$ e con velocità iniziale $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$.

Pertanto:

$$v_y = v_{0y} + a_y\, t = v_{0y} - gt \qquad y = v_{0y}\, t - \frac{g\, t^2}{2} \tag{I.8.5}$$

Volendo introdurre anche una posizione iniziale generica $(x_0, y_0)$ si avrebbe:

$$x = x_0 + v_{0x}\, t \qquad y = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{g\, t^2}{2} \tag{I.8.6}$$

### 8.2.3 LA TRAIETTORIA È SEMPRE UNA PARABOLA

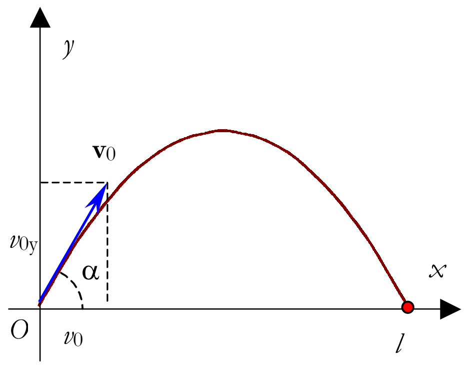
Per determinare la traiettoria è sufficiente eliminare il tempo dalle (I.8.6). Eseguiremo il calcolo nel caso di posizione iniziale coincidente con l'origine:

dalla (I.8.4) si ricava il tempo $t = \dfrac{x}{v_0 \cos \alpha}$

e lo si sostituisce nella (I.8.5) $y = v_0 \sin \alpha \dfrac{x}{v_0 \cos \alpha} - \dfrac{g\, x^2}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha}$

$$y = \tan\alpha\; x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2 \tag{I.8.7}$$

L'equazione così determinata è di II grado nella variabile $x$ ed i suoi parametri ci dicono che si tratta di una parabola ad asse verticale dotata di concavità verso il basso (segno negativo nel coefficiente del termine di II grado) e passante per l'origine (mancanza del termine noto). [1]




la gittata è proporzionale al prodotto delle due componenti della velocità iniziale

### 8.2.4 IL CALCOLO DELLA GITTATA

Per trovare lo spostamento orizzontale $l$ (*gittata*) basta porre nella equazione (I.8.7) $y = 0$. Si ottiene una equazione di II grado mancante del termine noto le cui soluzioni sono $x = 0$ che corrisponde al punto di partenza e $x = l$ con:

$$l = \frac{2 v_0^2 \tan \alpha \cos^2\alpha}{g} = \frac{2 v_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{2\, v_{0z}\, v_{0x}}{g} \tag{I.8.8}$$

La equazione appena trovata ci mostra che, nel determinare la gittata di un oggetto che si muove per effetto del suo peso, intervengono due fattori:

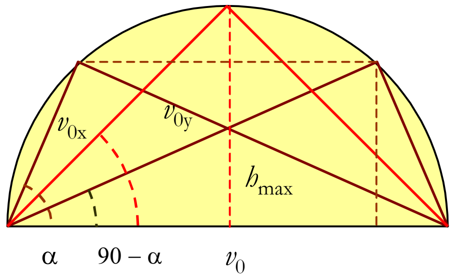
$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha \qquad v_{0x} = v_0 \cos \alpha$

Il primo termine è la velocità iniziale lungo la verticale la quale determina, a parità di condizioni, il *tempo di volo* cioè l'intervallo temporale durante il quale il proiettile rimane in aria; il secondo termine è la velocità

[1] L'equazione della generica parabola ad asse verticale in un sistema $xOz$ ha la forma $z = m\, x^2 + nx + p$. Il segno di $m$ fornisce la concavità, l'ascissa del vertice è nel punto $x = -\, n\, /\, (2m)$ mentre il valore $p$ ci dà la ordinata nel punto di ascissa nulla.

lungo la orizzontale che, fissato il tempo, determina lo spazio orizzontale percorso. La gittata risulta determinata dal prodotto di entrambi.

Galilei fu il primo a dare una dimostrazione del fatto che la gittata massima si realizza quando l'angolo di lancio è di 45°. Di questa proprietà, così come del fatto che una data gittata può sempre essere realizzata con due angoli tra loro complementari si può dare una interessante giustificazione di carattere geometrico che non richiede la conoscenza delle equazioni goniometriche.



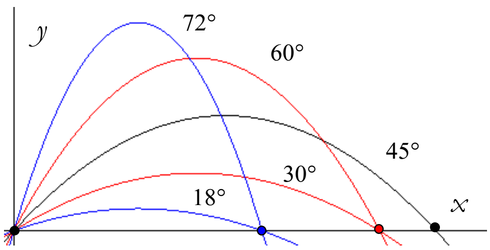
un *ragionamento fisico sottile* dovuto a Galilei: saper usare la matematica elementare; ragionando sul tringolo inscritto in una semicirconferenza si dimostra che la gittata è massima a 45° e che angoli complementari determinano la stessa gittata

### 8.2.5 La gittata è massima a 45° e una data gittata si può realizzare con due angoli diversi, ma complementari

Supponiamo che sia dunque fissata la spinta iniziale fornita al nostro punto materiale (forza di lancio di un atleta o quantità di polvere da sparo della cartuccia); ciò equivale a fissare il valore di $v_0$ mentre potrà variare l'angolo di lancio rispetto alla orizzontale.

Poiché $v_0$ è fissato e le due componenti $v_{0x}$ e $v_{0y}$ che sommandosi danno luogo a $\mathbf{v}_0$ sono tra loro ortogonali possiamo operare con una semicirconferenza di diametro $v_0$: i due cateti di un generico triangolo rettangolo inscritto nella semicirconferenza saranno i valori $v_{0x}$ e $v_{0y}$ e l'angolo α tra $v_{0x}$ e $v_0$ sarà l'angolo di lancio. La gittata è proporzionale al prodotto $v_{0y}\, v_{0x}$ cioè all'area del triangolo.

- Ma tale area, oltre che come prodotto dei due cateti, può anche essere calcolata come prodotto tra l'ipotenusa e l'altezza e, in quel caso, essendo la ipotenusa costante, essa è massima quando si forma il triangolo isoscele, cioè quando $v_{0y} = v_{0x}$ e $\alpha = 45°$. Dunque resta dimostrato che la gittata massima si ha per $\alpha = 45°$ e vale, tenendo conto del fatto che $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $L_{max} = \frac{V^2}{g}$

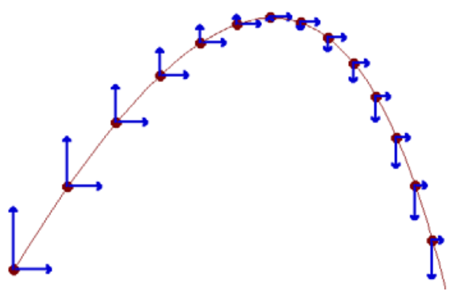


gittate per una stessa $v_0$ con diversi angoli di gittata complementari tra loro

- Se fissare la gittata significa fissare l'area, osserviamo che una stessa area può essere determinata da due triangoli in cui $v_{0y}$ e $v_{0x}$ si scambiano tra loro e l'angolo α diventa 90 – α. Resta pertanto dimostrato che una stessa gittata si realizza per due tipi di lancio: uno con velocità orizzontale elevata, ma basso tempo di volo e uno con velocità orizzontale più ridotta ma alto tempo di volo.

Dopo aver visto cosa accade nella ipotesi semplificatoria che agisca la sola forza peso vediamo cosa accade al moto parabolico quando non si possono più trascurare gli effetti di resistenza dell'aria.

Agisce in quel caso una forza dipendente dalla velocità e che si oppone al movimento e quello qui a lato è il risultato. Si vede subito che si ha una progressiva attenuazione della componente orizzontale su cui agisce solo la decelerazione dovuta alla presenza dell'aria. Ne risulta una pseudoparabola non simmetrica.


l'effetto di rallentamento dovuto alla resistenza dell'aria che spegne il moto orizzontale

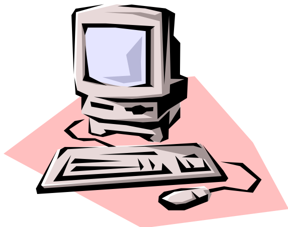
Lo studente è invitato a ricavare le equazioni del moto per i seguenti casi particolari:

- Un corpo viene lanciato orizzontalmente con velocità iniziale $v_0$ a partire da un punto che si trova ad una altezza $h$. Trovare l'equazione del moto, la traiettoria e la gittata.

- Un corpo è lanciato con un angolo di lancio $\alpha$ e una velocità iniziale $v_0$ a partire da un punto di quota $h$. Determinare il tempo di volo $t_v$ e la gittata.

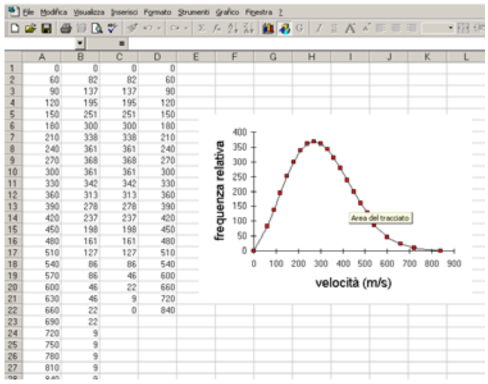
# 8.3 La soluzione approssimata del problema fondamentale della dinamica

## 8.3.1 IL FOGLIO ELETTRONICO: COME OPERARE QUANDO LA FORZA È VARIABILE



Nel paragrafo precedente non ci sono state difficoltà nel determinare l'equazione del moto perché la forza applicata era costante. Se tale forza è variabile si richiede l'uso di strumenti matematici di tipo superiore (analisi matematica) per trovare la legge generale del moto. Ma, con metodi approssimati di tipo numerico, si può sempre trovare, per assegnate condizioni iniziali, la soluzione di quel caso particolare attraverso operazioni concettualmente abbastanza elementari, anche se piuttosto noiose, e che pertanto è opportuno eseguire con il PC.

Il calcolo si basa sulla approssimazione del moto reale attraverso tanti moti uniformemente accelerati di accelerazione via via diversa e consiste nella applicazione iterativa del metodo dell'area per ciascuna delle componenti della accelerazione lungo i tre assi.




I calcoli possono essere eseguiti con un particolare *ambiente informatico* detto *foglio elettronico* che è stato progettato proprio per eseguire operazioni elementari in maniera ripetuta anche in presenza di grandi masse di dati e che ha la proprietà di ricalcolare continuamente queste serie di operazioni in modo di mantenere costantemente aggiornata la situazione quando si cambia uno qualsiasi dei valori di partenza.

Molti diagrammi presenti in questo testo sono stati prodotti utilizzando un foglio elettronico e facendo poi disegnare al foglio elettronico stesso i risultati dei suoi calcoli.

## 8.3.2 I CALCOLI DA FAR ESEGUIRE AL FOGLIO ELETTRONICO

Prendiamo in considerazione un caso qualsiasi di movimento ed esaminiamo ciò che accade lungo un asse particolare. Il moto nello spazio risulterà dalla composizione dei movimenti lungo le 3 dimensioni.

In base alla definizione, la accelerazione media durante un generico intervallo di tempo $\delta t = t_n - t_{n-1}$ è determinata dalla relazione

$$<a_n> = \frac{v_n - v_{n-1}}{\delta t}$$

ma, se l'intervallo di tempo è sufficientemente piccolo, in modo che la variazione di velocità durante l'intervallo $\delta t$ possa essere considerata di tipo lineare, la accelerazione media può essere identificata con la accelerazione istantanea determinabile attraverso la II legge della dinamica, e potremo scrivere:

**le equazioni della soluzione approssimata del moto note le forze e le condizioni iniziali**

$$v_n \approx v_{n-1} + a_n\,\delta t$$

D'altra parte, sempre in base alla definizione, la velocità media vale:

$$<v_n> = \frac{x_n - x_{n-1}}{\delta t}$$

e quindi:

$$x_n = x_{n-1} + <v_n>\,\delta t$$

dove la velocità media vale:

$$<v_n> \approx \frac{v_n + v_{n-1}}{2}$$

A questo punto abbiamo tutto quello che serve per determinare numericamente la equazione del moto.

Supponiamo infatti di conoscere, ad un istante iniziale, la forza $F_0$, le coordinate $x_0$ e la velocità $v_0$ di una particella. Possiamo calcolare la accelerazione istantanea usando la II legge della dinamica e quindi, usando la equazione appena descritte, possiamo calcolare la velocità dopo $\delta t$ secondi

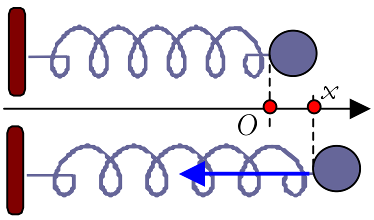
$$v_1 \approx v_0 + a_1\,\delta t \qquad <v_1> \approx \frac{v_1 + v_0}{2}$$

e le coordinate.

$$x_1 = x_0 + <v_1>\,\delta t$$

Supponendo che le velocità e le coordinate così determinate siano i nuovi valori iniziali, e facendo uso delle stesse equazioni, compiamo un altro passo relativo ad un successivo intervallo di tempo e troviamo dei nuovi valori delle coordinate e delle velocità, e così via, passo dopo passo. Dopo un numero finito di tali passi si trovano le coordinate e la velocità relativa all'istante richiesto.

### 8.3.3 UN ESEMPIO CONCRETO: IL MOVIMENTO DETERMINATO DALLA FORZA ELASTICA




$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{el} + \mathbf{F}_{sm}$

Supponiamo di avere un corpo di massa $m$ sul quale agisca un forza elastica lungo l'asse $x$ e che a tale forza si sovrapponga un effetto di smorzamento proporzionale alla velocità secondo la relazione $F = -k\,x - h\,v$ dove $x$ rappresenta lo spostamento della molla rispetto alla posizione $x = 0$ (molla non sollecitata), $k$ rappresenta la costante elastica della molla, e $h$ la costante che moltiplicata per la velocità ci fornisce la forza di smorzamento.

Per la II legge della dinamica nelle diverse posizioni la nostra molla risulta soggetta ad una accelerazione $a = -\frac{k}{m}x - \frac{h}{m}x$ dove il segno meno, ci ricorda che le forze elastiche hanno un effetto di richiamo.

Inseriamo i dati nel foglio elettronico scegliendo, per esempio:

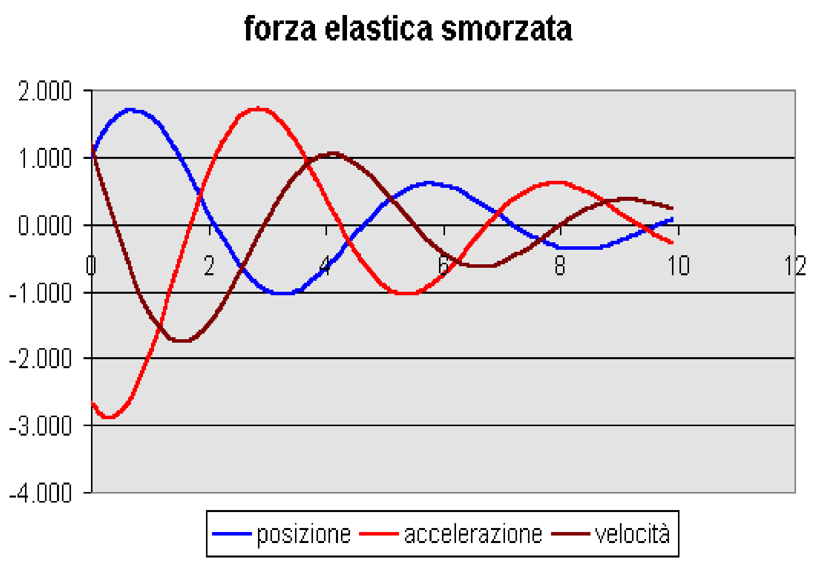
k/m = 1.467 m/s$^2$ h/m = 0.6 m/s$^2$ $v_0$ = 2.000 m/s $x_0$ = 1.000 m δt = 0.3 s

e quindi eseguiamo i calcoli descritti al punto precedente inserendoli come formule nelle diverse caselle di una stessa riga. Copiamo le formule di una riga verso il basso ed otterremo una tabella come quella rappresentata qui sotto.

Appena si modifica uno dei valori iniziali la tabella viene istantaneamente ricalcolata e il corrispondente diagramma nel quale vengono rappresentati gli andamenti nel tempo della posizione, della accelerazione e della velocità, si aggiornano istantaneamente.

Come si vede dai diagrammi il fenomeno che ne risulta è di tipo oscillatorio smorzato. Il vantaggio derivante dall'operare con il foglio elettronico consiste nella possibilità di osservare immediatamente come cambia il fenomeno al cambiare dei parametri in gioco. Per questa ragione, nella figura abbiamo riportato i diagrammi relativi a valori diversi dei coefficienti elastici e di smorzamento relativi a dati di uno stesso foglio.

| δt | –k/m | –h/m | v | <v> |
|---|---|---|---|---|
| 0.3 | -1.467 | -0.6 | | |
| t | x | a | 2.000 | |
| 0 | 1.000 | -2.667 | 1.200 | 1.600 |
| 0.3 | 1.480 | -2.891 | 0.333 | 0.766 |
| 0.6 | 1.710 | -2.708 | -0.480 | -0.074 |
| 0.9 | 1.688 | -2.188 | -1.136 | -0.808 |
| 1.2 | 1.445 | -1.439 | -1.568 | -1.352 |
| 1.5 | 1.040 | -0.585 | -1.743 | -1.656 |
| 1.8 | 0.543 | 0.249 | -1.668 | -1.706 |
| 2.1 | 0.031 | 0.955 | -1.382 | -1.525 |
| 2.4 | -0.426 | 1.454 | -0.946 | -1.164 |
| 2.7 | -0.775 | 1.705 | -0.434 | -0.690 |
| 3 | -0.982 | 1.702 | 0.076 | -0.179 |
| 3.3 | -1.036 | 1.474 | 0.518 | 0.297 |
| 3.6 | -0.947 | 1.078 | 0.842 | 0.680 |
| 3.9 | -0.743 | 0.584 | 1.017 | 0.930 |
| 4.2 | -0.464 | 0.070 | 1.038 | 1.028 |
| 4.5 | -0.156 | -0.395 | 0.920 | 0.979 |
| 4.8 | 0.138 | -0.755 | 0.693 | 0.807 |
| 5.1 | 0.380 | -0.974 | 0.401 | 0.547 |
| 5.4 | 0.544 | -1.039 | 0.090 | 0.245 |
| 5.7 | 0.618 | -0.960 | -0.199 | -0.055 |
| 6 | 0.602 | -0.763 | -0.428 | -0.313 |
| 6.3 | 0.508 | -0.488 | -0.574 | -0.501 |
| 6.6 | 0.357 | -0.180 | -0.628 | -0.601 |
| 6.9 | 0.177 | 0.117 | -0.593 | -0.611 |
| 7.2 | -0.006 | 0.365 | -0.484 | -0.538 |
| 7.5 | -0.167 | 0.536 | -0.323 | -0.403 |
| 7.8 | -0.288 | 0.617 | -0.138 | -0.230 |
| 8.1 | -0.358 | 0.607 | 0.044 | -0.047 |
| 8.4 | -0.372 | 0.518 | 0.200 | 0.122 |
| 8.7 | -0.335 | 0.371 | 0.311 | 0.256 |
| 9 | -0.258 | 0.192 | 0.369 | 0.340 |
| 9.3 | -0.156 | 0.008 | 0.371 | 0.370 |
| 9.6 | -0.045 | -0.157 | 0.324 | 0.348 |
| 9.9 | 0.059 | -0.281 | 0.240 | 0.282 |



## 8.4 Le quantità che determinano l'equazione del moto

### 8.4.1 BASTA CONOSCERE LE FORZE E LE CONDIZIONI INIZIALI

Nel problema affrontato nel paragrafo precedente abbiamo visto che per determinare il moto di una particella sono necessarie le seguenti informazioni:

- la forza che agisce sulla particella, e che deve essere nota o in funzione del tempo o in funzione della posizione
- le condizioni iniziali, e cioè le coordinate e la velocità ad un istante di tempo assegnato.

Le Verrier e sir W. Herschel: due astronomi protagonisti dei successi della meccanica newtoniana

Quando sono note queste quantità possiamo sempre determinare il moto della particella e cioè esprimerne le coordinate in funzione del tempo.

Così se è nota la forza di interazione tra il sole e i pianeti e sono note anche le posizioni e le velocità dei pianeti ad un certo istante (le condizioni iniziali) potremo determinare il loro moto relativo a molti secoli fa e prevederne la posizione per molti secoli a venire. Le eclissi solari e lunari, così come la condizione di opposizione Marte-Terra e altri fenomeni celesti possono venire previsti in questo modo.

Altrettanto, se conosciamo la velocità e la posizione di una navicella spaziale all'istante in cui vengono spenti i razzi e le forze che agiscono su di essa durante la fase di rientro (forza di gravità e forze legate al potere frenante degli strati dell'atmosfera), potremo calcolarne la traiettoria, la posizione in ogni istante e il punto di atterraggio.

### 8.4.2 E SE LE PREVISIONI NON FUNZIONANO? LA STORIA DELLA SCOPERTA DI NETTUNO E DI PLUTONE

Quando i valori previsti non coincidono con quelli reali vuol dire che, o sono state calcolate male le condizioni iniziali, oppure la forza è stata descritta in maniera sbagliata. Di solito è possibile prevedere il grado di errore tra la previsione teorica e il dato osservativo.

Si scopre Urano ed emergono anomalie tra previsione meccanica e dato osservativo

esiste un altro pianeta ?
la fisica ci dice dove puntare il telescopio

La storia della scoperta di Nettuno e Plutone si presta bene ad illustrare questo fatto.

Nel 1781 l'astronomo inglese Sir William Herschel (1738-1822) progettò e costruì quello che, per i tempi, era un enorme telescopio e scoprì il settimo pianeta del sistema solare che fu chiamato Urano. Sulla base della interazione tra Urano e il Sole e di quelle tra Urano e gli altri pianeti noti sino ad allora (Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove, Saturno) fu determinata la legge del moto e la traiettoria di Urano.

Ma la traiettoria calcolata si dimostrò errata: Urano si muoveva lungo un percorso leggermente diverso. Poiché le condizioni iniziali erano state determinate correttamente, la sola ipotesi ragionevole era quella di supporre che non si fossero prese in esame tutte le forze agenti su Urano.

L'astronomo francese Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811-1877) e quello inglese J. C. Adams (1819-1892), suggerirono, indipendentemente l'uno dall'altro, che dovesse esistere un altro pianeta collocato oltre Urano e che nessuno aveva ancora osservato. Dalla differenza tra il dato teorico e quello osservativo essi furono in grado di calcolare la legge del moto del pianeta sconosciuto e di predirne la posizione nel cielo ad un istante fissato. Questi dati furono brillantemente confermati dalle osservazioni.

Nel 1846 l'astronomo tedesco J. G. Galle (1812-1910) puntò il telescopio nel punto previsto del cielo ed effettivamente scoprì l'esistenza di un nuovo pianeta che fu chiamato Nettuno.

All'inizio del XX secolo l'astronomo americano P. Lowell (1855-1916) sulla base di più precise osservazioni giunse alla conclusione che la differenza tra il cammino teorico e quello reale di Urano, nonché altre caratteristiche del suo moto non potevano essere completamente spiegate dalla presenza di Nettuno, e che oltre Nettuno doveva esserci un altro pianeta, il nono.

così tra 800 e 900 si prevede l'esistenza di nuovi pianeti, la fisica ci dice dove vercarli e si trovano Nettuno e Plutone

Nel 1935, dopo la morte di Lowell, nell'osservatorio da lui fondato, un altro astronomo americano C. B. Tombaugh scoprì tale pianeta e lo chiamò Plutone.

Usando come esempi alcuni problemi di meccanica newtoniana, *abbiamo visto che la forza applicata e le condizioni iniziali determinano completamente il moto di una particella*.

### 8.4.3 IL DETERMINISMO MECCANICISTA

La possibilità teorica di determinare con precisione teoricamente infinita la evoluzione di un sistema fisico fu percepita, per tutto il 700 e per buona parte dell'800 come il più grande trionfo della mente umana. Il modello newtoniano di comprensione e di spiegazione del sistema solare e i successivi sviluppi che, nel corso del 700, portarono alla nascita di una nuova scienza paradigmaticamente chiamata *meccanica razionale* sembravano dare alla scienza ed alla filosofia la conferma della completa conoscibilità e prevedibilità dell'universo da parte della mente umana.


C'è di più; nella seconda metà del 700 gli scienziati illuministi francesi riuscirono a condensare la conoscenza fisica attraverso alcuni principi che sembrano indicare la presenza nel mondo naturale di una sorta di principio di ragione cui obbedisce la stessa natura. Ci riferiamo ai cosiddetti *principi variazionali* delle leggi che consentono di affermare la esistenza di particolari grandezze fisiche tali che le equazioni del moto o di evoluzione di un sistema vengono dedotte dall'imporre che queste grandezze subiscano variazioni minime.

la meccanica razionale e la razionalità della natura così si è fatta strada la *dea ragione*

Nella mente degli scienziati dell'epoca si fa strada la convinzione che non solo l'universo sia completamente conoscibile attraverso la ragione, ma che sia addirittura *geneticamente conforme* ad un *principio di ragione*. Si scopre, per esempio, che la luce propagandosi nello spazio segue le traiettorie temporalmente più brevi e così: quando attraversa un mezzo omogeneo viaggia in linea retta mentre, quando cambia mezzo di propagazione, cambiando la sua velocità, piega la sua traiettoria in modo che la traiettoria risultante sia quella che corrisponde al minor tempo di propagazione. [2]

Riportiamo qui di seguito come esemplificazione di questo spirito determinista di tipo meccanicistico un famoso brano di Pierre Simon Laplace (1749-1827) astronomo, matematico e fisico francese. Il brano, pa-

[2] Su questi punti si consiglia la lettura della *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti editore, del padre della epistemologia italiana, Ludovico Geymonat. Si veda il vol. III ed in particolare il cap. VII: *L'esigenza di sistematicità nella matematica e nella meccanica*.

radossalmente, è parte della prefazione ad un trattato dedicato al calcolo della probabilità, cioè proprio di quella parte della matematica che, applicata ai sistemi complessi, porterà in fisica proprio alla prima demolizione del determinismo di tipo meccanicista.


Pierre Simon Laplace e la nascita del meccanicismo inteso come possibilità offerta dalla scienza meccanica di determinare lo stato passato e futuro dell'universo

*Dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell'universo come l'effetto del suo stato anteriore e come la causa del suo stato futuro. Un'Intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze da cui è animata la natura e la situazione rispettiva degli essere che la compongono, se per di più fosse abbastanza profonda per sottomettere questi dati all'analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero; nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi. Lo spirito umano offre, nella perfezione che ha saputo dare all'astronomia, un pallido esempio di quest'Intelligenza. Le sue scoperte in meccanica e in geometria, unite a quelle della gravitazione universale, l'hanno messo in grado di abbracciare nelle stesse espressioni analitiche gli stati passati e quelli futuri del sistema del mondo.* [3]

La risposta negativa alla suggestiva ipotesi di Laplace verrà dall'interno della stessa matematica con la scoperta che quando il sistema fisico da analizzare si fa complesso basta una piccola indeterminazione nella conoscenza delle condizioni iniziali del moto per determinare una gamma di infinite possibili evoluzioni completamente diverse dei sistemi considerati.

Un secondo elemento di crisi verrà dalla scoperta, nei primi decenni del 900, che la stessa conoscenza delle condizioni iniziali è soggetta a vincoli di natura teorica. Cioè la indeterminazione sulla posizione e sulla velocità iniziale di una particella non è mai riducibile a zero per ragioni interne alla teoria e non per limiti delle nostre capacità sperimentali.

### 8.4.4 Una lettura di astronomia sul trionfo del meccanicismo

Riportiamo dal testo di J. P. Verdet *Storia dell'astronomia* (ed. Longanesi) la storia della scoperta di Plutone corredata da qualche elemento di natura quantitativa per dare un'idea del processo reale della scoperta scientifica.


Quando dicevo che Laplace ebbe dei prestigiosi continuatori, mi riferivo al Laplace specialista di meccanica celeste; il Laplace cosmologo avrebbe invece dovuto attendere una generazione prima che tornasse in vita la sua teoria della formazione del sistema solare. Il formalismo della meccanica celeste divenne per il momento il modello per tutti gli ambiti del sapere che sognavano di acquisire lo status di scienza esatta, e l'astronomia imboccò la via regia apertale da Newton; il suo trionfo sarebbe stato sancito dalla scoperta di Nettuno a opera di Urbain-Jean-Joseph Le Verrier.

Il pianeta Urano, come abbiamo visto, era stato scoperto nel 1781. Ci si accorse allora che già altri l'avevano osservato, considerandolo una stella fissa, molto tempo prima che Herschel si accorgesse che si trattava di un astro errante. Fu un colpo di fortuna. Nel 1820 si disponeva già, oltre che di quarantenni di osservazioni, di una ventina di passaggi al meridiano del pianeta registrati, fra il 1690 e il 1771, da Flamsteed, Bradley, Meyer e Le Monnier. Nel 1821 l'ex assistente di Laplace, Alexis Bouvard, si dedicò a ricalcolare le tavole dei moti di Giove e di Saturno, e a calcolare quelle del nuovo venuto nel mondo dei pianeti. Urano resisteva: lo scarto fra le tavole e le osservazioni raggiungeva un minuto e mezzo; era uno scarto inaccettabile, a più di due secoli dai dubbi di Kepler sul moto di Marte causati dalla piccola discordanza di due minuti fra teoria e osservazione, tanto più che, nel caso di Urano, lo scarto andava aumentando: nel 1845 raggiunse per l'appunto i due minuti. A partire dal

[3] Opere di Pierre Simon Laplace, Utet, pag. 243.

1835, Airy, Arago, Bessel, John Herschel (figlio di William), e poi Eugène Bouvard (il nipote di Alexis) discussero il problema e formularono l'ipotesi che questi scarti potessero essere causati da perturbazioni dovute a un pianeta transuranico. Solo nell'estate 1845, però, Arago convinse Le Verrier a dedicarsi alla ricerca del perturbatore. Già il 10 dicembre 1845 Le Verrier fu in grado di presentare *all'Académie des Sciences un Premier mémoire sur la théorie d'Uranus*. Esso fu seguito, il 1° giugno 1846, da una seconda memoria: *Recherches sur les mouvements d'Uranus*. Infine, il 31 agosto, fu presentato l'ultimo testo, quello decisivo: *Sur la planete qui produit les anomalies observées dans le mou-vement d'Uranus. Détermination de sa masse, de san orbite et de sa position actuelle*. Ora si doveva trovare il pianeta perturbatore. Sia che gli astronomi francesi fossero stati scettici, e quindi riluttanti, sia che Le Verrier avesse scelto di rivolgersi a un osservatorio che sapeva in possesso di buone carte della regione del cielo in cui il nuovo pianeta doveva trovarsi, quella della costellazione del Capricorno, il 18 settembre Le Verrier scrisse a Johann Galle, astronomo all'osservatorio di Berlino. La lettera arrivò il 23 settembre, e quella sera stessa Galle e il suo assistente, Heinrich D'Arrest, puntarono il telescopio a rifrazione di 23 centimetri di apertura verso la regione indicata, ma non videro alcun astro con un diametro apparente. Fu allora D'Arrest a suggerire di confrontare la regione com'era quella sera con la carta della stessa regione eseguita prima del 1845, data di pubblicazione dell'atlante stellare di Cari Bremiker: a 52 minuti dalla posizione indicata da Le Verrier si trovava una stella che qualche anno prima non c'era.


È noto che Le Verrier aveva avuto, senza saperlo, un concorrente sfortunato. Già nel 1843, e quindi due anni prima che Le Verrier cominciasse i suoi calcoli, John Couch Adams, giovane fellow di ventidue anni dell'università di Cambridge, si era dedicato allo stesso lavoro. Egli aveva fatto le stesse ipotesi di Le Verrier, ossia che il pianeta sconosciuto si trovasse nel piano dell'eclittica, poiché le anomalie in latitudine di Urano erano trascurabili, e che, conformemente all'estrapolazione dalla regola di Titius-Bode, esso dovesse trovarsi a una distanza dal Sole doppia rispetto a quella di Urano. Già dal settembre 1845 Adams fu in grado di indicare la posizione del pianeta perturbatore in ciclo. Come avrebbe fatto l'anno dopo Le Verrier, Adams scrisse a un osservatore in grado di confermare la sua scoperta teorica: James Challis, astronomo a Greenwich. Poi, non ottenendo nulla da Challis, Adams si rivolse direttamente a George Airy, allora direttore dell'osservatorio, il quale gli rispose ma per chiedergli una precisazione che John Adams giudicò così futile da non ritenerla degna di risposta. Ed ecco come un giovane astronomo estremamente brillante si fece soffiare una scoperta gloriosa da uno specialista maturo di meccanica celeste.

A proposito della scoperta di Nettuno, c'è una controversia più interessante di quella fra i fautori dei due astronomi: essa riguarda la fortuna di cui beneficiò Le Verrier. Questi, come Adams, aveva fatto l'ipotesi che il pianeta da cercare fosse a una distanza doppia di quella di Urano, ossia a una distanza di 38 unità astronomiche. Ora, Nettuno si trova in realtà a sole 30,11 unità astronomiche dal Sole. D'altra parte, Le Verrier aveva attribuito al pianeta sconosciuto una massa 32 volte maggiore di quella della Terra. Ora, alla fine dell'anno 1846, William Lassell scoprì un satellite di Nettuno, Tritone, cosa che permise di pesare Nettuno: la massa del pianeta risultò essere solo 17 volte maggiore di quella della Terra. Si trova così che l'errore nella stima della distanza, compiuto tanto da Adams quanto da Le Verrier, è compensato dall'errore nella stima della massa, compensazione a cui contribuisce anche la sopravvalutazione dell'eccentricità dell'orbita .

Comunque si vogliano giudicare queste sottigliezze, la scoperta di un nuovo pianeta per mezzo del calcolo segnò il trionfo della meccanica newtoniana. Non era tuttavia lontano il tempo in cui la via regia sarebbe sboccata in un vicolo cieco. Ma questa è un'altra storia: quella che, all'inizio del nostro secolo, avrebbe condotto al crollo dei concetti di spazio e tempo assoluti su cui si fondava da tre secoli la meccanica celeste. Tutta la fisica ne risentirà, uscendo però dalla crisi ancora più rafforzata.

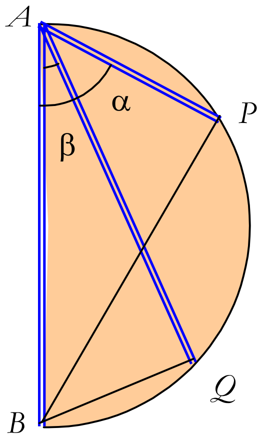
## 8.5 Applicazioni

Concludiamo questo capitolo trattando alcuni problemi connessi al moto di caduta dei corpi particolarmente significativi dal punto di vista contenutistico.

### 8.5.1 UNA CURIOSA SCOPERTA DI GALILEI

Se, a partire da fermo, si fanno scivolare dei corpi lungo piani inclinati di diversa inclinazione i corpi stessi percorrono, nello stesso tempo spazi che corrispondono alle corde di una opportuna circonferenza che ha come diametro lo spazio percorso in quel tempo lungo la verticale.

☹




Consideriamo dunque il piano AP dotato di inclinazione α rispetto alla verticale e confrontiamo il moto di un corpo che scivoli su di esso con il moto di un corpo che scivoli lungo AQ. Ci proponiamo di dimostrare che i due tempi sono gli stessi e ciò significherà che un qualsiasi corpo che scivola lungo una qualsiasi corda del tipo AP impiega sempre lo stesso tempo. Basterà dimostrare che il tempo $t_c$ impiegato a percorrere AP non dipende dall'angolo α.

Lungo il piano AP agisce una accelerazione $g_t$ (accelerazione tangenziale) pari a $g \cos \alpha$. Pertanto, in base alle leggi del m.u.a. $\Delta x = \frac{1}{2} g_t t_c^2$ o anche,

$\overline{AP} = \frac{1}{2} g \cos \alpha \, t_c^2$.

Ma, per ragioni geometriche $\overline{AP} = \overline{AB} \cos \alpha$ e pertanto:

$$\overline{AB} \cos \alpha = \frac{1}{2} g \cos \alpha \, t_c^2 \qquad \text{(I.8.16)}$$

Semplificando per cos α si ha $\overline{AB} = \frac{1}{2} g \, t_c^2$.

Ma $\overline{AB}$ è la percorrenza verticale e $g$ la corrispondente accelerazione, pertanto possiamo concludere che, lungo una qualsiasi inclinazione, un corpo impiega a percorrere la corda lo stesso tempo che impiegherebbe a percorrere il diametro cadendo lungo la verticale.

Ciò significa che se si producono delle scanalature nella figura e si lasciano cadere da A delle sfere esse arrivano in P, Q e B contemporaneamente.

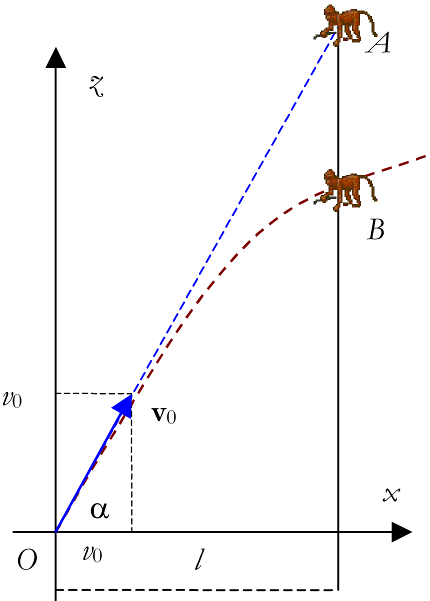
☺

### 8.5.2 LA SCIMMIA E IL CACCIATORE

Un cacciatore punta il fucile su una scimmia che sta su di un albero. Quando spara, la scimmia vede il lampo e si lascia cadere dall'albero. Dimostrare che la scimmia verrà sicuramente colpita dal proiettile.

☹

In base all'enunciato la scimmia va incontro alla morte grazie alla scelta di lasciarsi cadere dall'albero. Tutti sappiamo che se si punta un oggetto in linea retta il proiettile non arriverà mai nel punto dove stava l'oggetto a causa della traiettoria parabolica seguita. Solo quando $v_0$ è molto grande la traiettoria, che rimane pur sempre una parabola, può essere assimilata, nel suo primo tratto, ad una porzione di retta. La cosa interessante dell'enunciato è che il tempo che impiega un corpo in caduta libera ad andare da $A$ a $B$ è esattamente lo stesso che impiega il proiettile a percorrere il tratto di parabola $OB$.




Osserviamo in via preliminare che sono noti il punto $A$ (per esempio che siano dati $l$ e $\alpha$) e la velocità $v_0$. Il punto $B$ è il punto di intersezione tra la retta di equazione $x = l$ e la parabola della equazione (I.8.10):

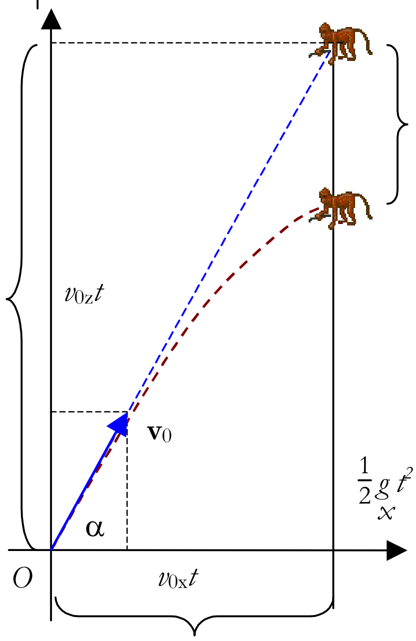
$z = x \tan\alpha - \dfrac{g\,x^2}{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha}$ e pertanto

$$z_B = l\tan\alpha - \frac{g\,l^2}{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha} \qquad \text{(I.8.17)}$$

Il proiettile per arrivare in $B$ impiega un tempo $t_B = \dfrac{l}{v_{0x}} = \dfrac{l}{v_0\cos\alpha}$

Nel frattempo la scimmia, che si è lasciata cadere, si muove di moto uniformemente accelerato con legge oraria:

$$z = z_A - \frac{1}{2}g\,t^2 = \ l\tan\alpha - \frac{1}{2}g\,t^2 \qquad \text{(I.8.18)}$$



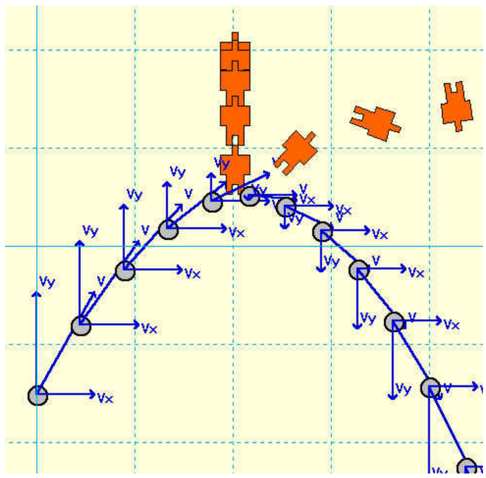

Al tempo $t = t_B$ la scimmia si trova in $z = l\tan\alpha - \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{l}{v_0\cos\alpha}\right)^2 = z_B$

cioè nello stesso punto in cui si trova il proiettile allo stesso istante e pertanto viene colpita. [4]

Se la velocità iniziale del proiettile è elevata la traiettoria è quasi rettilinea e la scimmia viene colpita quasi in A. Se la velocità del proiettile è più bassa l'impatto avverrà dopo un percorso AB più lungo, ma avverrà in ogni caso.

Il risultato trovato si presta ad una interessante considerazione relativa alla interpretazione della legge del m.u.a. lungo la verticale espressa da:

$z = v_{0z}t - \dfrac{1}{2}g\,t^2$.

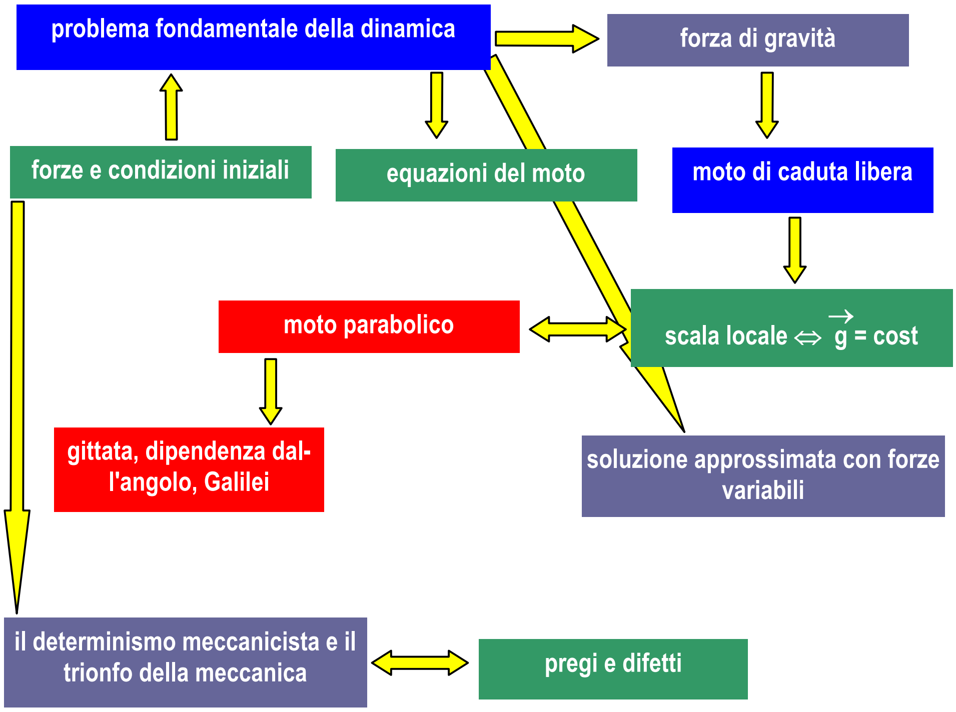



Al trascorrere del tempo il proiettile si sposta lungo l'orizzontale di $v_{0x}\,t$. La quantità $v_{0z}\,t$ rappresenta lo spostamento verticale che si avrebbe in assenza della accelerazione di gravità. A questo spostamento verticale si sottrae il contributo $\dfrac{1}{2}g\,t^2$ dovuto al carattere accelerato del moto e così si ottiene la traiettoria parabolica rappresentata in figura.

La scimmia parte da un punto situato lungo la linea di mira e nel tempo $t$ percorre proprio quello spazio $\dfrac{1}{2}g\,t^2$ pari a quanto il proiettile si è distaccato dalla linea di mira. L'incontro *mortale* diventa inevitabile.

☺

4 Dal che si deduce che *le leggi della fisica nuocciono agli animali*


problema fondamentale della dinamica
forza di gravità
forze e condizioni iniziali
equazioni del moto
moto di caduta libera
moto parabolico
scala locale ⇔ $\vec{g}$ = cost
gittata, dipendenza dal-l'angolo, Galilei
soluzione approssimata con forze variabili
il determinismo meccanicista e il trionfo della meccanica
pregi e difetti