I.9. L'attrito

la terminologia di base sull'attrito
interno, esterno; statico, dinamico; radente, volvente

9.1 Introduzione

Il termine *attrito* viene dal verbo latino *atterĕre* (sfregare) e anche in lingua inglese viene tradotto con *friction* altro termine di derivazione latina.

Si chiama *forza d'attrito* la forza che si esercita alla superficie di contatto tra due corpi e che ne impedisce il moto relativo. Essa è applicata alle superfici di contatto dei due corpi in verso contrario alle rispettive *velocità relative.*

È bene distinguere tra *attrito esterno* (che si presenta tra corpi solidi e asciutti) e attrito *interno* (in presenza di fluidi o corpi viscosi). La terminologia utilizzata vuole significare il fatto che nel caso di attrito esterno la interazione avviene alla superficie di separazione dei corpi coinvolti mentre nel caso di attrito interno almeno uno dei due corpi (il fluido) viene interessato dal fenomeno al suo interno.

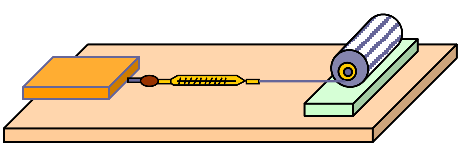
L'attrito esterno è dovuto alla interazione tra le superfici dei due corpi solidi in contatto. Se le superfici sono in quiete relativa si parla di *attrito statico*, se invece le due superfici sono in moto l'una relativamente all'altra parliamo di *attrito cinetico, o dinamico.*

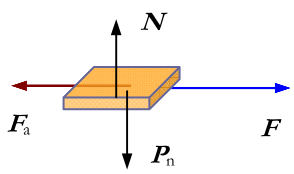
Nel caso in cui una delle due superfici rotoli sull'altra senza strisciare parleremo di *attrito volvente* mentre in caso di strisciamento parleremo di *attrito radente.*

L'*attrito interno* è dovuto alla l'interazione tra strati di liquido o gas in moto l'uno rispetto all'altro. A differenza di quanto avviene per l'attrito esterno, in questo caso non si ha distinzione tra attrito statico e dinamico perché questo attrito si presenta solo in condizioni dinamiche.

9.2 L'attrito radente

9.2.1 Aspetti sperimentali





attraverso la misura di forze di trazione si arriva alle leggi dell'attrito statico, alla variabilità della forza d'attrito e al concetto di moto incipiente

E' ben noto che quando si cerca di spingere un corpo appoggiato, fino ad un ben preciso valore della forza applicata, non si ha alcun tipo di movimento e che raggiunto tale valore il corpo si mette improvvisamente in moto, mentre per mantenerlo in movimento basta ora una forza inferiore.

Si può avere una esperienza diretta dei fenomeni connessi all'attrito, anche se non si dispone di un dinamometro utilizzando semplicemente un elastico come dispositivo di trazione o meglio ancora una molla grossolanamente tarata. Già con un dispositivo del genere si può sperimentare la variabilità della forza d'attrito, la sua dipendenza dallo stato delle superfici e la dipendenza dalla forza ortogonale alle superfici.

Quanto è stato appena descritto può essere tradotto in termini quantitativi con un *dispositivo sperimentale* simile a quello indicato in Figura. Un blocco di legno appoggiato su un piano liscio e orizzontale è attaccato ad un dinamometro tramite una fune attaccata al rotore di un motorino elettrico. Variando la velocità di rotazione del motore è possibile variare la forza di trazione all'interno dell'intervallo desiderato.

L'esperienza dimostra che, al di sotto di un valore minimo F_{min} il blocco non si muove. Al di sopra di tale valore il blocco si muove di moto uniforme o accelerato a seconda delle condizioni sperimentali. Ciò indica la presenza di una forza esercitata dal tavolo sul blocco e che si oppone a quella di trazione esercitata e misurata tramite il dinamometro.

$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_a = m\, \boldsymbol{a}$

Quando $a = 0$ il blocco è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme e pertanto $|\boldsymbol{F}| = |\boldsymbol{F}_a|$. Ne consegue che è possibile misurare la forza di attrito statico e quella di attrito dinamico dalla misura della forza di trazione corrispondente al tipo di moto considerato.

la forza d'attrito statico è una forza variabile da zero ad un valore massimo e si adegua alla necessità di mantenere la quiete

Ma la forza di attrito statico non è una forza di valore assegnato: a seconda del valore della forza di trazione il suo valore varia da zero a F_{in} cioè alla forza che determina la cosiddetta condizione di *moto incipiente.*

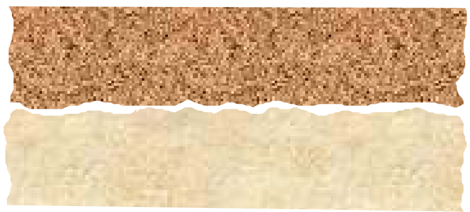
Possiamo dunque scrivere:

$$F_a \le F_a^{max} = F_{in} \qquad \text{(I.9.1)}$$

9.2.2 A COSA È DOVUTO L'ATTRITO RADENTE ?

La teoria dell'*attrito radente* non è stata ancora studiata a fondo ma il meccanismo che lo origina può essere spiegato approssimativamente così.

La superficie di un corpo solido, anche quando esso sia stato lisciato accuratamente, è tutt'altro che piana. Essa presenta sempre asperità, depressioni, rotture o altre irregolarità a livello microscopico. Spesso la superficie risulta ricoperta di ossidi, strati aderenti di gas e liquidi o presenta inclusioni di corpi estranei.



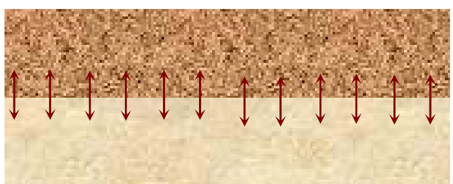
le microintrusioni nella zona di contatto tra due superfici in moto relativo spiegano l'attrito radente e molte delle sue caratteristiche

Quando le superfici dei due corpi entrano in contatto, le asperità tendono ad incastrarsi nelle corrispondenti depressioni e, se si utilizza un microscopio per osservare la situazione, essa viene ad assomigliare a quella rappresentata in Figura. Ovviamente la compenetrazione tra le superfici impedisce od ostacola il moto relativo dei due corpi.

L'incastrarsi delle microasperità e l'adesione parziale delle due superfici sono agevolate dalla componente normale F_n della forza che agisce sui due corpi.

Una forza di trazione inferiore alla *forza massima di attrito statico* produce prevalentemente deformazioni elastiche delle microasperità e dei punti di contatto in cui si esercitano le forze di coesione intermolecolari. La forza elastica che ne deriva è quella che chiamiamo forza di attrito statico.

Il coefficiente di attrito statico dipende dal grado di finitura delle due superfici; l'attrito di due superfici spianate e lisciate è solitamente inferiore di quello di superfici lavorate grossolanamente, ma ciò è vero solo entro alcuni limiti.



se le superfici sono molto lisce possono intervenire legami intermolecolari che, paradossalmente, determinano un aumento dell'attrito

L'esperienza mostra che per un numero elevato di materiali, *quando le superfici di contatto vengono accuratamente pulite e lisciate*, i due corpi aderiscono fortemente tra loro portando ad un *brusco aumento del coefficiente d'attrito.* Evidentemente la *causa dell'attrito* è duplice: quando le superfici sono lavorate grossolanamente interviene il fenomeno della compenetrazione tra le microasperità, mentre quando le due superfici sono lavorate finemente intervengono le forze di coesione intermolecolare. Per rendersene conto basta controllare il valore elevato del coefficiente d'attrito per il caso vetro su vetro.

La forza di attrito statico dipende anche dal tempo durante il quale le superfici rimangono in contatto. Contatti prolungati ed elevati valori delle forze normali possono provocare deformazioni di tipo plastico delle due superfici di contatto. Ciò aumenta la coesione delle due superfici e dunque fa aumentare il coefficiente d'attrito.

9.2.3 IL COEFFICIENTE D'ATTRITO STATICO

il coefficiente d'attrito statico

La spiegazione precedente è di origine qualitativa ed è insufficiente a calcolare il valore della forza d'attrito. Deriveremo pertanto la legge corrispondente ricorrendo ad un esperimento.

Supponiamo di modificare il valore della forza P_n (e della corrispondente reazione vincolare N) aggiungendo al blocco di legno dei pesi di valore diverso. Misurando la forza di trazione ogni volta scopriremo che *la forza di attrito statico massima è proporzionale alla forza normale.*

$$F_{in} = \mu_s N \qquad (I.9.2)$$

La quantità μ_s è chiamata *coefficiente d'attrito statico.*

Se cambiamo la estensione della superficie di contatto del blocco, per esempio appoggiandolo su un lato, troveremo che la forza di attrito statico, *in prima approssimazione, non dipende dall'area della superficie di appoggio.*

Sostanza	μ_s	μ_d
Acciaio su acciaio	0.75	0.48
Acciaio su acciaio con lubrificante	0.12	0.07
Alluminio su acciaio	0.61	0.47
Vetro su vetro	0.94	0.35
Ghiaccio su ghiaccio	0.1	0.02
Legno su legno	0.58	0.40
Gomma su calcestruzzo, asciutto	1.20	0.85
Gomma su calcestruzzo, bagnato	0,80	0.60
Legno sciolinato su neve	0.05	0.03

Tabella I.9.1

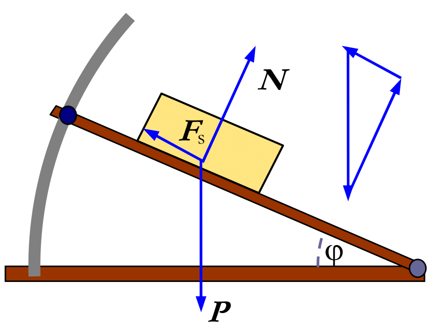
La tabella I.9.1 riporta alcuni valori tipici del *coefficiente d'attrito*. Per ragioni di comodità si sono riportati anche i coefficienti d'attrito dinamico per gli stessi materiali. Si tenga presente che si tratta di valori medi e che la loro determinazione non può che essere grossolana data l'alto numero di fattori che si trascurano nello stabilire la relazione (I.9.2).

Misure eseguite utilizzando diversi materiali con svariati gradi di finitura delle superfici consentono di affermare che il coefficiente di attrito statico ha un intervallo di variazione molto ampio, da qualche centesimo sino all'unità. Nel caso di interazione molecolare molto elevata esso può addirittura raggiungere valori compresi tra 2 e 3.

Si presti attenzione, nell'utilizzare la relazione (I.9.2) che essa consente di trovare la forza d'attrito massima, cioè quella corrispondente alla condizione di moto incipiente che non è detto che corrisponda alla forza d'attrito esistente nel contesto dato.

9.2.4 MISURA DEL COEFFICIENTE D'ATTRITO E CONDIZIONE DI MOTO INCIPIENTE

Il *coefficiente d'attrito* può essere agevolmente misurato utilizzando il dispositivo indicato in Figura. Se si inclina progressivamente il piano si osserverà che, in corrispondenza di un ben determinato angolo φ_0 il blocco si mette improvvisamente in movimento scivolando lungo il piano.



in un piano inclinato in condizione di moto incipiente si ha:

$\tan \varphi = \mu_s$

Sul blocco agiscono tre forze: la forza peso $\boldsymbol{P}$, la reazione vincolare N e la forza di attrito statico F_s. In assenza di accelerazione la risultante delle tre forze è uguale a 0 e ciò significa che esse formano un triangolo.

Poiché la forza di gravità è diretta lungo la verticale, la forza d'attrito è diretta come il piano e la reazione vincolare è perpendicolare al piano ne segue che il triangolo delle forze è rettangolo e il suo angolo al vertice è proprio φ.

Pertanto $F_s = N \tan \varphi_0$.

Ma poiché, in condizione di moto incipiente $F_s = \mu_s N$, si ha che:

$\tan \varphi = \mu_s$ (I.9.3)

9.2.5 ESEMPI

Esercizio: Un blocco di legno viene posto su un piano inclinato di legno con angolo di inclinazione α = 30°. Stabilire se il blocco scivola.

☹

Il coefficiente d'attrito statico μ_s in base alla tabella I.9.1 vale 0.58. L'angolo che ha tangente 0.58 vale 30.11° (sulla calcolatrice $\tan^{-1}$ 0.58 = 30.11°) e pertanto poiché non si è superato l'angolo di moto incipiente il blocco non scivola anche se ci troviamo molto prossimi alla condizione di moto incipiente.

☺

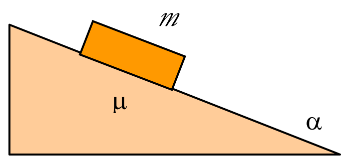
9.2.6

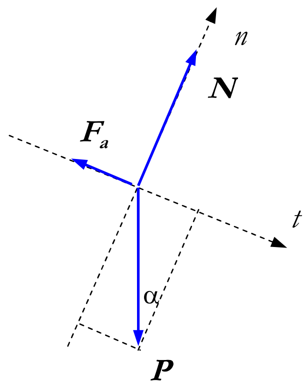
Esercizio:Un corpo di massa m = 5.00 kg appoggia su un piano di angolo α = 28.0° e il coefficiente di attrito statico μ_s = 0.60. Si determini la forza di attrito che agisce sul corpo e la forza di attrito massima.

☹

Se disegniamo le forze che agiscono sul corpo (peso, reazione vincolare del piano e forza d'attrito) avremo che:

- la componente del peso lungo il piano $P_t = mg \text{ sen } \alpha = 5.00 \times 9.81 \times \text{sen}(28.0) = 23.0$ N
- la componente del peso in direzione normale $P_n = mg \cos \alpha = 5.00 \times 9.81 \times \cos(28.0) = 43.3$ N
- poiché il corpo è appoggiato si ha che $N = P_n$
- la forza d'attrito massima vale $F_{a,max} = \mu_s N = 43.3 \times 0.600 = 26.0$ N





Poiché la forza d'attrito massima è più grande della componente tangenziale del peso il corpo non scivola e la forza d'attrito statico vale $F_a = F_t$ = 23.0 N

Per stabilire la presenza o meno di scivolamento sarebbe stato sufficiente operare come nell'esercizio precedente.

☺

9.2.7 ATTRITO RADENTE DINAMICO

Dopo che un corpo soggetto ad attrito statico si è messo in moto si osserva una brusca diminuzione della forza necessaria a mantenere il corpo in moto senza accelerare ulteriormente e ciò significa che *la forza d'attrito in condizioni dinamiche è inferiore alla forza d'attrito statico massima.*

Se analizziamo il comportamento della forza di attrito radente in condizioni sperimentali diverse, troveremo che essa dipende, come nel caso dell'attrito statico, dalla forza normale di compressione e dal grado di finitura delle due superfici. Essa non dipende dall'area di contatto e dipende solo molto debolmente dalla velocità relativa dei due corpi. Ciò ci consente di scrivere la seguente relazione per la forza di attrito dinamico F_d:

$F_d = \mu_d N$ (I.9.4)

dove μ_d indica il *coefficiente di attrito dinamico* i cui valori sono riportati in tabella I.9.1. da cui vediamo che le differenze sono dell'ordine del 30% in meno.

9.2.8 LE CAUSE DELL'ATTRITO RADENTE DINAMICO

Mentre l'attrito statico è principalmente dovuto alle deformazioni elastiche delle asperità superficiali dei due corpi a contatto, l'*attrito radente dinamico* è principalmente dovuto alle deformazioni plastiche di tali asperità e alla loro distruzione.

In effetti, in condizioni statiche, le diverse microintrusioni sono soggette a forze diverse ed hanno una diversa intensità. Quando viene applicata la forza di trazione alcune di queste microintrusioni vengono distrutte repentinamente. Pertanto la forza di trazione risulta applicata alle rimanenti che non riescono più a reggere il carico aumentato. Ciò determina un fenomeno a valanga di distruzione delle microintrusioni ed il corpo inizia a muoversi.

nell'attrito dinamico le microintrusioni si distruggono e ricreano continuamente e si ha una specie di micro saltellio dei due corpi; per questa ragione il coefficiente d'attrito statico è sempre maggiore di quello dinamico

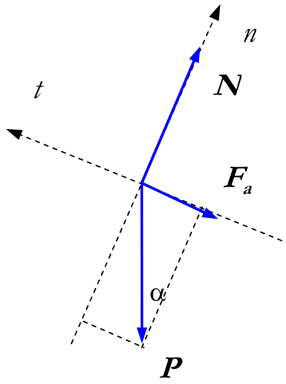
Quando inizia il moto relativo la forza d'attrito diminuisce perché la ridotta compenetrazione ed adesione tra le superfici favorisce l'azione di scorrimento reciproco e, dunque, il coefficiente di attrito dinamico μ_d risulta inferiore a quello di attrito statico μ_s.

Una analisi qualitativa dell'attrito radente rivela che esso determina un logorio e riscaldamento delle superfici a contatto. Il logorio ed il riscaldamento di parti meccaniche soggette ad attrito costituiscono certamente un elemento negativo e, a livello ingegneristico, si prendono accorgimenti in grado di ridurre l'attrito. Quello più usato è la *lubrificazione* cioè la interposizione tra le due superfici a contatto di un fluido in grado di ridurre l'attrito grazie all'azione di galleggiamento di una superficie sull'altra che il lubrificante determina. Si veda in proposito la brusca caduta dell'attrito di acciaio su acciaio quando è presente un lubrificante

9.2.9 ESEMPIO

Esercizio: Un corpo di massa m = 3.50 kg, dotato di velocità iniziale v_0 = 10.0 m/s scivola, in salita, lungo un piano inclinato con α = 30° dotato di coefficiente d'attrito statico μ_s = 0.40 e di coefficiente d'attrito dinamico μ_d = 0.30. Determinare la forza di attrito che agisce durante la salita, lo spazio che il corpo percorre prima di arrestarsi. Stabilire infine se, dopo essersi arrestato il corpo incomincerà a scendere o rimarrà bloccato dalla forza d'attrito statico.

☹



Se fissiamo un sistema d'assi *tn* nel verso del moto potremo affermare che il moto è di tipo uniformemente accelerato con accelerazione negativa a causa dell'effetto combinato della forza d'attrito dinamico e della componente tangenziale della forza peso.

$R_t = -(F_a + mg \sin\alpha)$

$N = mg \cos\alpha$

$F_a = \mu_d N = \mu_d mg \cos\alpha = 0.30\times3.50\times9.81 = 10$ N

Per determinare lo spazio percorso occorre conoscere la accelerazione e ciò richiede di determinare la risultante lungo la direzione del moto:

$R_t = -(\mu_d mg \cos\alpha + mg \sin\alpha) = -(\mu_d \cos\alpha + \sin\alpha)\, mg$

$a_t = \frac{R_t}{m} = -(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)\, g = -(0.30\times0.866 + 0.500)\times9.81 = -7.5$ m/s²

Per determinare lo spazio percorso possiamo utilizzare la relazione del m.u.a. $v^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta x$. Nel nostro caso $v = 0$, $v_0 = 10.0$ m/s e pertanto

$$\Delta x = -\frac{v_0^2}{2a} = 6.7 \text{ m}$$

Per stabilire se il corpo incomincerà a scendere basta confrontare l'angolo di inclinazione del piano con quello relativo al moto incipiente.

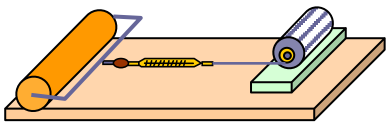
Poiché, in base alla (I.9.3) $\tan \varphi_0 = \mu_s$ si ha $\varphi_0 = \tan^{-1}(0.40) = 21.8°$ e possiamo concludere che il corpo si rimetterà in moto con un moto accelerato determinato dalla azione discorde della componente della forza peso e dalla forza d'attrito dinamico che lo frena.

☺

9.2.10 L'ATTRITO VOLVENTE

Se nell'esperimento iniziale il blocco di legno che striscia viene sostituito da un cilindro in grado di rotolare intorno al proprio asse otteniamo il dispositivo qui a lato.

Se l'asse del cilindro viene bloccato con delle viti in modo di impedirgli di ruotare e se il peso del cilindro è uguale a quello del blocco di legno le forze d'attrito non cambiano perché l'attrito è praticamente indipendente dall'area di contatto e si realizza la stessa situazione già studiata per l'attrito radente. Se però si allentano le viti, il cilindro incomincerà a rotolare lungo la tavola e contemporaneamente il dinamometro darà una indicazione molto bassa ad indicare che le forze d'attrito si sono ridotte notevolmente.



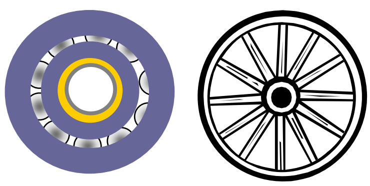
l'attrito volvente è molto minore di quello radente; così è stata scoperta la ruota

Dunque *le forze d'attrito volvente sono molto minori di quelle d'attrito radente*. La spiegazione di ciò sta nel fatto che in questo caso le microintrusioni si incastrano e si liberano per rotolamento come fanno gli ingranaggi.

Attraverso opportuni esperimenti si può dimostrare che le forze d'*attrito volvente* sono direttamente proporzionali alla forza in direzione normale e inversamente proporzionali al raggio di curvatura del cilindro o della ruota. Perciò:

$$F_r = k\frac{N}{r} \qquad \text{(I.9.5)}$$

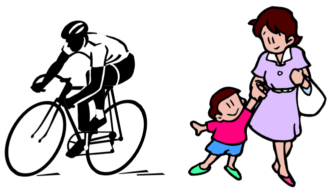
k è il *coefficiente d'attrito volvente* che dipende dalle caratteristiche delle superfici a contatto. Esso ha le dimensioni di una lunghezza e nel S.I. si misura in metri. L'equazione (I.9.5) è valida solo se il cilindro rotola senza strisciare cioè se i due punti a contatto sono istantaneamente fermi.



In molti casi si trasforma l'attrito radente in attrito volvente attraverso l'utilizzo di cuscinetti a sfere e/o a rulli nei quali le due superfici cilindriche che devono scorrere le une sulle altre sono separate da cilindretti o sfere che rotolano riducendo l'attrito.

9.3 Movimento dei corpi in presenza di attrito

9.3.1 QUANDO L'ATTRITO SERVE



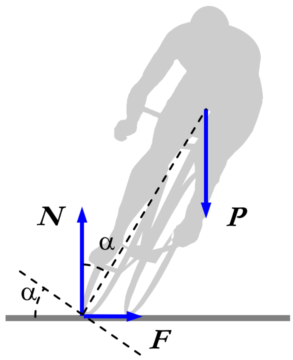
due esempi di fenomeni in cui senza l'attrito non esisterebbe il movimento

Finora abbiamo trattato con le forze d'attrito come con qualcosa che impedisce il moto dei corpi. Ma ciò non è sempre vero, *a volte l'attrito serve a muoversi*. Infatti è l'attrito statico che consente ad una persona o ad una automobile di muoversi lungo la superficie terrestre, ad un treno o ad un tram di muoversi lungo i binari.

Quando una persona cammina si sviluppa una forza d'attrito statico tra la suola delle sue scarpe e il terreno ed è questa forza che gli consente di camminare. Tutti conoscono bene le difficoltà che si incontrano nel camminare sul ghiaccio proprio perché in tale caso la forza d'attrito è molto piccola.

9.3.2 PERCHÉ CI SI PIEGA PER CURVARE ARMONICAMENTE ?

Consideriamo ora il ruolo svolto dalla *forza d'attrito* quando un ciclista o un motociclista fanno una curva. Sappiamo per esperienza che, in questo caso, è necessario piegarsi dalla parte giusta (verso l'interno) e che ciò fa automaticamente curvare la ruota anteriore come richiesto.



la coppia di ribaltamento determina la comparsa della forza di attrito *F* che fornisce l'accelerazione centripeta necessaria alla curva

Cerchiamo le forze che agiscono sul ciclista quando questi si piega a sinistra come in figura. In questo caso la forza peso e la reazione vincolare non agiscono più lungo la stessa retta di applicazione e queste forze tenderebbero a far ruotare il ciclista in senso orario in un piano verticale. Ma la rotazione, per avvenire, richiederebbe uno slittamento delle ruote; invece, poiché la rotazione incipiente determina una spinta laterale (di attrito statico) della ruota sul fondo stradale, la strada risponde con una forza di attrito che spinge la ruota e il ciclista verso l'interno. Compare dunque una forza di attrito F che agisce nella direzione e nel verso in cui il ciclista si piega.

Poiché la forza d'attrito è perpendicolare alla velocità essa determina una accelerazione normale $a_n = v^2/r$ relativa alla bicicletta ed al ciclista. Pertanto:

$$\frac{mv^2}{r} = F \le \mu mg \text{ da cui } \frac{v^2}{r} \le \mu g$$

una piega di Valentino Rossi e una di Albert Einstein: due stili di guida molto diversi ma accomunati dalla comprensione della utilità di piegare per fare le curve

L'*angolo di inclinazione* del ciclista rispetto alla verticale si determina dalla condizione che la risultante tra la reazione vincolare e la forza d'attrito sia diretta lungo l'asse di inclinazione del corpo in moto. Infatti in quel caso il momento delle forze rispetto al centro di massa è nullo e il corpo non ruota mentre la risultante delle forze corrisponde alla forza centripeta $\boldsymbol{F}$.

Pertanto si ha:

$$\tan\alpha = \frac{F}{N} = \frac{mv^2}{r\,mg} = \frac{v^2}{rg} \le \mu \qquad \text{(I.9.6)}$$

La relazione (I.9.6) è molto importante e ci dice:

- che, *fissato il raggio di curvatura r, esiste un ben preciso angolo di inclinazione per ogni valore di velocità* (in moto, più si va veloci e più bisogna piegare)

- che, comunque, *non si può piegare oltre un certo angolo determinato dal valore del coefficiente d'attrito.*

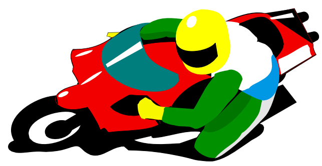
Dunque il ciclista non si può allontanare dalla verticale per un valore superiore ad un angolo $\alpha_{max} = \tan^{-1} \mu$.

Le piste di ciclismo presentano le *curve rialzate* per consentire al ciclista di girare ad alta velocità. La pista viene inclinata di un angolo α che soddisfa alla condizione: $\tan \alpha \approx \frac{v^2}{rg}$.

Quanto detto sino ad ora non significa che per fare una curva ci si debba comunque piegare, ma piuttosto che, *piegandosi, il movimento risulta più armonico. Se non ci si piega è il movimento del manubrio, che risulta più duro da manovrare, a disporre la ruota anteriore parzialmente di traverso e questo fatto determina la forza d'attrito necessaria a far ruotare tutto l'apparato*. Durante questa manovra è però molto facile produrre un movimento irregolare, a scatti, che può pregiudicare la stabilità del sistema. Pertanto, soprattutto in moto, è bene affrontare sempre le curve piegando verso l'interno della traiettoria.

Cosa accade se non si piega?

Se non si piega si è costretti ad una successione di movimenti a scatti molto pericolosi ad alta velocità



9.3.3 ESEMPIO

Esercizio: Assumendo per μ il valore 1.20 riportato in tabella (attrito statico tra ruota e fondo stradale asciutto) e, supponendo che il raggio di curvatura di una curva sia r = 45.5 m si determini la velocità massima a cui è possibile affrontare quella curva e si trovi l'angolo di inclinazione rispetto alla verticale a cui bisogna affrontarla.

Supponendo di voler affrontare una curva alla velocità di 180 hm/h con il coefficiente d'attrito dato quanto deve essere il raggio minimo di curvatura? Cosa si fa se il raggio di curvatura è maggiore di quello minimo?

☹

In base alla (I.9.6) si ha che $\alpha_{max} = \tan^{-1}(1.20) = 50.2°$ mentre la velocità massima è pari a:

$$v_{max} = \sqrt{g\, r\, \mu} = \sqrt{9.81 \times 45.5 \times 1.20} = 23.1 \text{ m/s} \approx 83 \text{ km/h}$$

$$r_{min} = \frac{v^2}{g\,\mu} = \frac{(180/3.6)^2}{9.81 \times 1.20}) = 212 \text{ m}$$

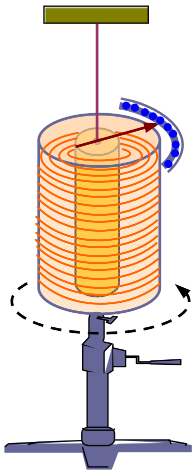
Se il raggio di curvatura è maggiore è possibile affrontare la curva ad una velocità più alta oppure piegare di meno.

☺

9.4 L'attrito interno

9.4.1 LA VISCOSITÀ: COS'È E COME SI MISURA

Durante il movimento di liquidi e gas si sviluppano forze di attrito interne dette *forze viscose*. L'esistenza di tali forze può esser evidenziata da un dispositivo sperimentale del tipo indicato in Figura.



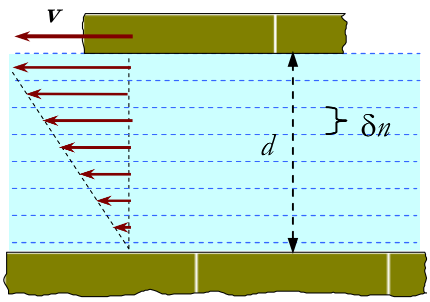
misura di effetti di resistenza viscosa

Un cilindro di metallo pesante è sospeso ad un filo sottile all'interno di un recipiente cilindrico riempito di un liquido, in modo che l'asse del recipiente e quello del filo coincidano. Se il recipiente viene fatto ruotare intorno al suo asse si osserva che il liquido si mette in rotazione e dopo un certo tempo anche il cilindro si stabilizza e risulta ruotato di un angolo definito.

Il liquido in rotazione agisce sul cilindro interno con una forza che viene controbilanciata dalla reazione elastica del filo di sospensione. Tale forza determinabile attraverso esperimenti ripetuti in condizioni diverse risulta dipendere dalla distanza tra la parete interna del recipiente ed il cilindro sospeso, dalla velocità di rotazione del recipiente, dal tipo di liquido utilizzato e dalla sua temperatura.

Siamo in presenza di un fenomeno di attrito interno che può essere spiegato come l'effetto della difficoltà che i diversi strati del fluido incontrano a scorrere gli uni sugli altri. Quando il fluido è a contatto con due superfici dotate di velocità diverse si viene a creare nel fluido stesso una sorta di laminazione che distribuisce la differenza di velocità tra i diversi strati.

Per determinare qualche elemento di natura quantitativa consideriamo uno strato di liquido compreso tra due superfici piane e supponiamo che il piano superiore si muova con una velocità v rispetto a quello inferiore in quiete.



modello di fluido newtoniano: si suppone che gli strati di fluido scorrano gli uni sugli altri con un gradiente di velocità costante

Supponiamo ancora di suddividere il liquido in strati paralleli posti a distanze elementari δn e ipotizziamo che si crei nel fluido una distribuzione di tipo lineare delle velocità. Tale distribuzione è descritta attraverso il *gradiente di velocità* [1] $\delta v / \delta n$, che indica la rapidità per unità di lunghezza con cui cambia la velocità in direzione perpendicolare al vettore velocità (e quindi anche agli strati di liquido).

In presenza di un gradiente di velocità si sviluppano forze di attrito interno tra i diversi strati a contatto di un liquido. Le forze sono dirette lungo i piani di contatto e tendono ad impedire lo scorrimento degli strati.

La forza di attrito interno f_{in} che si esercita su uno strato dipenderà ovviamente dalle dimensioni dello strato considerato ma anche dalla rapidità con cui avviene la variazione di velocità, cioè dal gradiente di velocità tra i diversi strati.

Si chiama *fluido newtoniano* un fluido per il quale *lo sforzo tangenziale* (forza per unità di superficie) delle forze di attrito interno, *è proporzionale al gradiente di velocità*. Cioè:

[1] Il termine *gradiente* viene utilizzato in fisica per rappresentare il modo con il quale una grandezza fisica cambia nello spazio. Si possono incontrare gradienti di temperatura, di pressione, di densità, di concentrazione, di livello di campo, …

$$\tau = \frac{f_{in}}{A} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta n} \qquad (I.9.7)$$

dove η è il *coefficiente di attrito interno* o *viscosità* del fluido, mentre f_{in} rappresenta la forza d'attrito interno e A la superficie tangenziale alla direzione di scorrimento su cui agisce f_{in}.

lo sforzo in un fluido newtoniano e la definizione di viscosità come coefficiente di proporzionalità tra sforzo tangenziale e gradiente di velocità

$$[\eta] = \frac{[F]}{[A]} \times \frac{L}{[v]} = Pa \cdot s$$

Il *Pascal* è l'unità di misura della pressione (forza diviso superficie). Il Pa·s è anche chiamato *Poiseuille* dal nome di uno degli scienziati che studiarono le leggi dell'attrito interno.

I fluidi newtoniani sono quelli caratterizzati da un valore costante di η e rientrano in questa categoria tutti i liquidi omogenei (acqua, olio, plasma sanguigno, glicerina,…). Non rientrano in questa categoria i miscugli nei quali la presenza di corpi eterogenei determina una variabilità di η nei diversi contesti. Un esempio di *liquido a viscosità variabile è il sangue*.

sostanza	η Pa·s	t (°C)
acqua	1.00×10^{-3}	20
alcool etilico	1.6×10^{-3}	20
benzene	0.65×10^{-3}	20
glicerina	0.83	20
latte	2.1×10^{-3}	20
olio d'oliva	0.08	20
olio minerale	0.1÷0.6	15
sangue	2.1×10^{-3}	37
CO_2	1.48×10^{-5}	20
aria	1.81×10^{-5}	20
metano	1.02×10^{-5}	20

Tabella I.9.2

La tabella I.9.2 evidenzia alcuni valori tipici di viscosità a temperatura ambiente. Si osserva immediatamente l'alto valore di viscosità delle sostanze oleose e, in particolare, della glicerina

Le forze di attrito interno si manifestano anche nei gas oltre che nei liquidi e ciò può essere evidenziato con l'apparato sperimentale già descritto riempito d'aria o di un altro gas e posto in rapida rotazione. La viscosità dei gas è molto più bassa di quella dei liquidi nell'ordine di due o tre ordini di grandezza.

Poiché le *forze di attrito viscoso sono molto minori di quelle dovute all'attrito radente si usa lubrificare* le parti in movimento per ridurre l'attrito di meccanismi e parti di macchinari.

La *lubrificazione* consiste nel porre uno strato di liquido viscoso, il lubrificante, nello spazio tra le parti che altrimenti striscerebbero in modo di tenerle separate. La lubrificazione consente di ridurre notevolmente le forze d'attrito così come il riscaldamento e il consumo delle parti soggette ad attrito.

Si tenga presente che la *viscosità* dei fluidi dipende fortemente dalla temperatura; aumenta per i gas e diminuisce per i liquidi al crescere di essa. Per questa ragione in tabella si è indicato, accanto al valore di η anche la temperatura a cui si riferisce.

l'olio lubrificante sfrutta la viscosità

Per esempio, la viscosità dell'acqua in milli Pa·s alle diverse temperature vale rispettivamente:

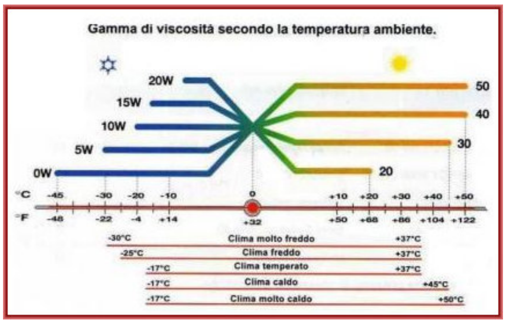
1.792 (0°C), 1.0050 (20°C), 0.6560 (40°C), 0.4688 (60 °C), 0.3565 (80°C), 0.2838 (100 °C).

Le viscosità degli oli lubrificanti utilizzati per le automobili vengono solitamente espressi in una scala fissata dalla *Society of Automative Engineers* (SAE) secondo la seguente tabella empirica di conversione riferita alla temperatura di 100 °C:

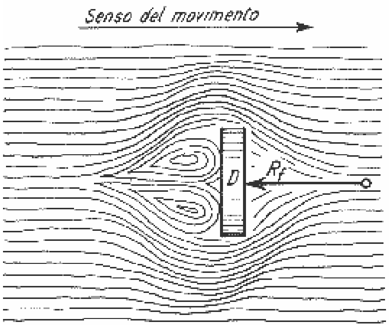
SAE20 ↔ 4.7÷7.9 mPa·s SAE30 ↔ 7.9÷10.6 mPa·s

SAE40 ↔ 10.6÷13.9 mPa·s SAE50 ↔ 13.9÷18.7 mPa·s

Quando la sigla SAE è seguita da W (che sta per winter) si intende viscosità riferita alla temperatura di -17.8 °C.



9.4.2 IL MOVIMENTO DEI CORPI IMMERSI IN UN FLUIDO



studio dei flussi alla galleria del vento con la evidenziazione delle linee di corrente

L'esperienza dimostra che i corpi in moto in un liquido o in un gas (cioè in un fluido) subiscono *effetti di resistenza da parte del mezzo*. Tale resistenza *dipende dalla forma e dalle dimensioni del corpo, dalla velocità relativa tra corpo e fluido e dalle proprietà del fluido*. Poiché ciò che conta è la velocità relativa descriveremo il caso in cui un corpo in quiete è immerso in un fluido in moto con velocità *v*.

Il *fluido in movimento è deformato dal corpo e gli gira intorno*. Gli strati di fluido adiacenti al corpo aderiscono ad esso e si viene a formare uno *strato di contorno*. Si tratta di uno strato in cui la *velocità varia rapidamente* da zero a quella del fluido non disturbato, si tratta cioè di una *zona con un elevato gradiente di velocità*.

Se lo strato di contorno si rompe o viene separato dal corpo, dietro di esso si formano dei *vortici*. La resistenza di un fluido dipende in larga misura da cosa accade nello strato di contorno e dal tipo di vortici che si formano. Una analisi dettagliata dei fenomeni al contorno ed un calcolo delle forze d'attrito è un compito molto arduo. Possiamo solo tentare di determinare l'ordine di grandezza di tali forze e i principali parametri da cui esse dipendono.

Iniziamo con l'osservare che la *forza d'attrito che agisce su un corpo immerso in un fluido* o *resistenza del mezzo* dipende da due componenti: una *resistenza da pressione* ed una *resistenza da attrito viscoso*.

i due tipi di attrito interno: la resistenza viscosa e quella da pressione

- La *prima è determinata dalla differenza di pressione tra la parte anteriore e posteriore* del corpo immerso nel fluido in moto è dovuta, cioè, al fatto che il corpo penetrando nel fluido lo comprime ed il fluido esercita una sorta di risposta a questa compressione forzata.
- La *seconda è determinata dalle forze di attrito interne dovute all'elevato gradiente di velocità nello strato di contorno* presso il corpo in moto (gli strati di fluido adiacenti al corpo hanno la velocità del corpo mentre gli strati più laterali rispetto al corpo sono in quiete).

Per determinare le *leggi quantitative* di questi effetti che sono, altrimenti, di difficile trattazione si possono utilizzare considerazioni di natura dimensionale che, per non appesantire la trattazione lasciamo come esercizio al lettore (usare le tecniche indicate al capitolo 0).

9.4.3 LA RESISTENZA DA PRESSIONE

la resistenza del mezzo da pressione dipende dalla superficie e dalla forma del corpo, dalla densità del fluido e dal quadrato di velocità; si tratta di un fenomeno importante a velocità elevata; se ne studiano gli effetti nelle gallerie del vento

La *resistenza* alla penetrazione di un corpo in un fluido che deriva dalla differenza di pressione tra la parte anteriore e quella posteriore del corpo dipende dalla densità ρ del fluido, dalla velocità *v* del flusso e dalla sezione trasversale perpendicolare al flusso *A* secondo la relazione:

$$R = C\,A\,\frac{\rho\, v^2}{2} \qquad \text{(I.9.8)}$$

dove *C* è un fattore adimensionale che dipende largamente dalla forma del corpo o, come si dice, dal suo *fattore di penetrazione*[2]. Così, mentre *C* varia da 1.1 a 1.2 per un disco circolare e da 0.4 a 0.2 per una sfera, nel caso di un corpo a goccia $C \approx 0.04$ cioè un decimo del valore della sfera e un centesimo di quello del disco.

---

[2] Letteralmente *profilo di flusso*

Ciò significa che, a parità di condizioni, cioè a parità di sezione trasversale e di velocità, un corpo sagomato a goccia presenta una forza d'attrito pari a un centesimo di quello di un corpo a superficie di penetrazione piatta (disco).

Quanto appena visto ci spiega perché la problematica delle sagomature dei corpi soggetti ad alte velocità sia oggetto di studi continui nella industria automobilistica ed aeronautica.

Si osservi che la *resistenza alla penetrazione* dipende dal quadrato della velocità e diventa pertanto un fattore rilevante nel caso di corpi progettati per muoversi a velocità elevate.

La teoria fisico-matematica di questi fenomeni è estremamente complessa e le ricerche utilizzano un *mix* di elementi di tipo teorico (modelli matematici elaborati al calcolatore) ed elementi di natura sperimentale (il vecchio metodo del filo di lana appeso al modello collocato nella galleria del vento).

il profilo influisce in maniera molto grande quando si opera ad alta velocità perché decide se ci si muoverà in regime laminare (filetti che scorrono) o turbolento (vortici con forte resistenza del mezzo)

9.4.4 LA RESISTENZA VISCOSA

La *forza di attrito viscoso* dipende dalla viscosità del mezzo, dalla velocità relativa e da un elemento di tipo lineare del corpo:

$$f_{in} = D\,\eta\,v\,l$$

dove D è una costante adimensionale dipendente dalla forma del corpo considerato. Il fattore D viene solitamente determinato sperimentalmente e Sir George G. Stokes (1819-1903) trovò che, nel caso della sfera, si ha $D = 6\pi$ e che la dimensione caratteristica è il raggio r. Pertanto, nel caso della sfera, si ha:

$$f_{in} = 6\pi\,\eta\,v\,r \qquad \text{(I.9.9)}$$

la forza di Stokes corrisponde al modello più semplice di forza viscosa

$f_{in} = 6\pi\,\eta\,v\,r$

9.4.5 LA COMBINAZIONE DEI DUE EFFETTI

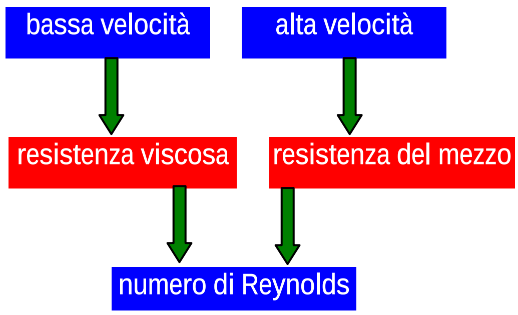
La forza di resistenza subita dal corpo in moto nel fluido è data da una *combinazione complicata dei due effetti di resistenza alla pressione e resistenza viscosa*. Ma, nel caso di *basse velocità*, la componente di attrito, che dipende dalla prima potenza della velocità, sarà preponderante rispetto alla resistenza alla pressione che dipende dal quadrato della velocità. Ad *alte velocità*, ovviamente, accadrà l'opposto.

Poiché i concetti di alta e bassa velocità, sono piuttosto generici, per stabilire in quale delle due situazioni ci si trovi si introduce un criterio di valutazione basato sul rapporto dei due effetti:

$$\frac{R}{f_{in}} = \frac{C}{2D}\,\frac{\rho\,v^2 A}{\eta\,v\,l}$$

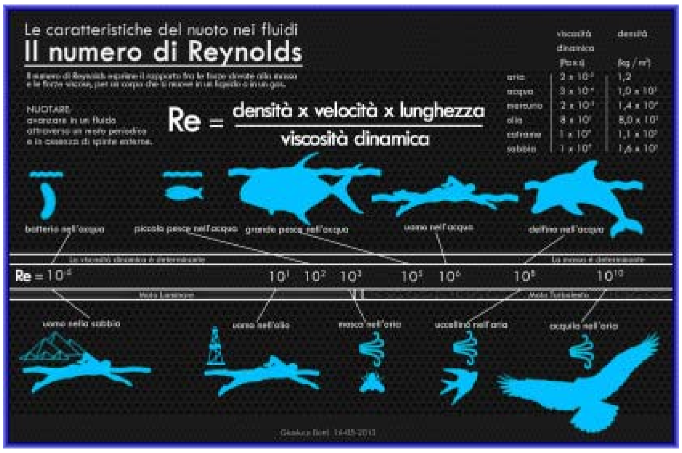
Trascurando i due fattori adimensionali C e D e tenendo conto che la superficie di impatto A è proporzionale al quadrato della dimensione caratteristica l si ottiene:

$$\frac{R}{f_{in}} = \frac{\rho\,v\,l}{\eta} = Re \qquad \text{(I.9.10)}$$



Il numero adimensionale Re viene detto *numero di Reynolds* e gioca un ruolo assolutamente fondamentale in aerodinamica ed in idrodinamica perché è il termine che determina il tipo di regime nel quale ci si trova ad operare.

Quindi, per movimenti lenti, quando Re < 1 si trascura la resistenza alla pressione e si tiene conto solo della viscosità e, al contrario, per grandi numeri di Reynolds si prende in considerazione solo la resistenza alla pressione e si trascura l'attrito interno.

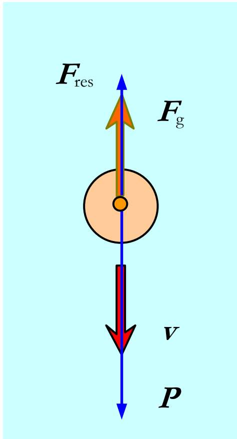


Osserviamo che il numero di Reynolds $\frac{\rho\, v\, l}{\eta}$ è proporzionale alle dimensioni lineari dell'oggetto, alla velocità e alla densità del mezzo ed inversamente proporzionale alla viscosità; aspettiamoci dunque di *trovare fenomeni connessi alla viscosità in presenza di mezzi viscosi con oggetti piccoli e di trovarci invece in presenza di resistenza da pressione per oggetti grandi che cadono in mezzi poco viscosi.*

9.5 La caduta dei corpi in un fluido

9.5.1 IL CONCETTO DI VELOCITÀ LIMITE

Nei capitoli precedenti si è già affrontata la caduta libera dei corpi, cioè il moto dei corpi soggetti alla sola forza di gravità. Abbiamo visto che si tratta di un moto uniformemente accelerato e ne abbiamo determinato l'equazione. Affronteremo ora lo stesso problema in presenza di una resistenza da parte del mezzo. Tali mezzi saranno indifferentemente dei liquidi o dei gas, cioè dei fluidi. Stabiliremo anche, sotto quali condizioni la resistenza dell'aria possa essere trascurata e trattare la caduta in aria come caduta libera.

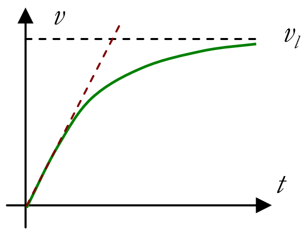


la velocità limite corrisponde al valore di velocità raggiunto il quale il corpo si muove di moto uniforme

Su di un *corpo in caduta in un fluido* sono applicate tre forze: la forza di gravità P, la forza di galleggiamento F_g [3] e la forza di resistenza del mezzo F_{res}. Applicando la II legge della dinamica si ha pertanto:

$ma = P - F_g - F_{res}$

L'unica forza variabile è quella di resistenza e il suo valore cresce rapidamente con la velocità, mentre la forza peso e la forza di galleggiamento sono costanti. Pertanto *mentre il corpo cade la sua velocità continua ad aumentare finché la risultante si annulla*. A questo punto la accelerazione si riduce a zero e da lì in poi il corpo cade con velocità costante. Dunque, quando un corpo cade in un fluido, solo la fase iniziale è caratterizzata da moto accelerato e, da un certo punto in poi, il corpo continua a cadere con una velocità costante detta *velocità limite.*



Il valore della velocità limite v_l può essere determinato imponendo la condizione $a = 0$

$P - F_g - F_{res} = 0$

Per eseguire il calcolo bisogna conoscere l'ordine di grandezza del numero di Reynolds, in modo di scegliere l'espressione appropriata per la resistenza del mezzo.

9.5.2 LA VELOCITÀ LIMITE QUANDO PREDOMINA LA VISCOSITÀ

Esercizio: Si consideri, per esempio, il caso di una sferetta d'acciaio ($\rho = 7.8\times10^3$ kg/m³) di raggio $r = 2$ mm in caduta nella glicerina. La viscosità della glicerina è di $\eta = 1.50$ Pa-s e la sua densità $\rho_l = 1.2\times10^3$ kg/m³.

A causa della elevata viscosità della glicerina possiamo essere quasi certi che la resistenza da pressione sarà trascurabile e assumiamo provvisoriamente questa ipotesi.

Come sappiamo la forza peso $P = m\,g = \frac{4}{3}\pi\, r^3 \rho\, g$ mentre la forza di galleggiamento, in base al *principio di Archimede*, è pari al peso del fluido spostato dal corpo $F_g = \frac{4}{3}\pi\, r^3 \rho_l g$.

Pertanto l'effetto del galleggiamento equivale ad una riduzione del peso da P a $\frac{4}{3}\pi\, r^3 \rho\, g - \frac{4}{3}\pi\, r^3 \rho_l\, g = \frac{4}{3}\pi\, r^3 g\,(\rho - \rho_l) = \frac{4}{3}\pi\, r^3 g\,\rho'$ dove ρ' rap-

---

[3] La *forza di galleggiamento*, nota dalla scuola media come *spinta di Archimede*, è pari al *peso di una quantità di fluido del volume del corpo ed è dovuta alla differenza di pressione esercitata dal fluido tra la parte superiore e quella inferiore del corpo*. Pertanto quando un corpo di volume V viene immerso in un liquido di densità ρ_0 la spinta di Archimede vale $\rho_0\, V\, g$

presenta la *densità ridotta* $\rho - \rho_l$. Nel nostro caso $\rho' = 7.8\times10^3 - 1.2\times10^3 = 6.6\times10^3$ kg/m^3.

Sostituendo nella equazione di equilibrio e ricavando v_l, si ottiene:

$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g - 6\pi\,\eta\, v_l\, r = 0$ da cui:

la velocità limite per la resistenza viscosa è proporzionale al quadrato della dimensione lineare e inversamente proporzionale alla viscosità

$$v_l = \frac{2r^2 g\,\rho'}{9\eta} \qquad \text{(I.9.11)}$$

Se si sostituiscono i valori numerici si ottiene:

$v_l = \frac{2\times 4\times 10^{-6}\times 9.8\times 6.6\times 10^3}{9\times 1.50} \approx 0.04$ m/s cioè una velocità di caduta molto bassa.

Incidentalmente si vede che la scelta fatta di utilizzare la formula di Stokes per il calcolo della resistenza del mezzo era giustificata perché nel nostro caso risulta:

$$Re = \frac{\rho_l\, v\, r}{\eta} = \frac{1.2\times10^3\times 2\times10^{-3}\times 0.04}{1.50} \approx 0.064 << 1$$

La equazione (I.9.11) merita qualche considerazione. Il *valore della velocità limite dipende, per velocità basse* nelle quali prevalga la resistenza viscosa, da tre fattori:

- la dimensione dell'oggetto con dipendenza quadratica
- la differenza tra densità dell'oggetto e densità del fluido che, nel caso di caduta di corpi solidi e liquidi in un gas corrisponde approssimativamente alla densità del corpo
- dalla viscosità del fluido (concetto che non va confuso con la densità, anche se nel linguaggio comune esiste una tendenza a confondere le due grandezze).


le nubi e la nebbia non galleggiano, come si pensa, ma cadono con velocità limite molto basse

Quando r è *molto piccolo* può accadere che anche la *velocità limite* sia molto piccola al punto da far apparire il *corpo sospeso nell'aria*: è questo il caso delle nubi e della nebbia le cui goccioline cadono ma con velocità così basse da essere pressoché inapprezzabili.

misura della viscosità

La relazione (I.9.11) viene correntemente utilizzata per determinare la viscosità dei liquidi. Si fanno cadere in un recipiente cilindrico contenente il liquido delle sferette di acciaio sufficientemente piccole in modo di dar luogo rapidamente alla velocità limite che viene poi misurata attraverso l'intervallo di tempo impiegato dalla sferetta a percorrere uno spazio fissato tra due riferimenti posti sul cilindro.

9.5.3 LA VELOCITÀ LIMITE QUANDO PREDOMINA LA RESISTENZA DA PRESSIONE

Esercizio: Nel caso di valori elevati del numero di Reynolds la resistenza del mezzo è principalmente dovuta alla *resistenza alla pressione* R. In questo caso, trascurando la forza di galleggiamento (perché nei gas $F_g << P$) la II legge della dinamica diventa:

$$m\,a = m\,g - C\,A\,\frac{\rho_0 v^2}{2}$$

dove ρ_0 indica la densità del gas.

Se un corpo pesante cade da una altezza non molto grande non raggiunge velocità elevate e, pertanto, si può trascurare la resistenza dell'aria perché si può dimostrare che, in queste condizioni, la resistenza dell'aria è molto minore della forza peso, e pertanto si osserva la caduta libera. Se però la caduta avviene da grande altezza la resistenza dell'aria non può più essere trascurata e, da un certo punto in poi, il corpo raggiunge la velocità limite v_l. Il suo valore può essere determinato agevolmente ponendo $a = 0$ nella equazione precedente e si ottiene:

$$v_l = \sqrt{\frac{2m\,g}{C\,A\,\rho_0}} \qquad \text{(I.9.12)}$$

Per esempio, le *gocce di pioggia* di forma sferica ($C = 0.4$) con un raggio $r \approx 1 \div 2$ mm cadono attraverso l'aria ($\rho_0 \approx 1$ kg/m^3) con una velocità finale che è indipendente dall'altezza della nube sulla superficie terrestre. Ricordando che la densità dell'acqua è di 10^3 kg/m^3 si ha:

$$v_l = \sqrt{\frac{2 \times 4\pi r^3 \rho g}{3C\,\pi r^2\,\rho_0}} = \sqrt{\frac{8r\rho g}{3C\rho_0}} = \sqrt{\frac{8 \times 10^{-3} \times 10^3 \times 9.8}{3 \times 0.4 \times 1}} \approx 8 \text{ m/s}$$

la velocità limite per la resistenza da pressione è inversamente proporzionale alla radice dell'area

L'analisi della equazione (I.9.12) spiega anche il principio di funzionamento del *paracadute*. Un aviatore, che cada da una altezza considerevole senza l'ausilio del paracadute, raggiunge una velocità limite di diverse decine di metri al secondo e pertanto, è inevitabile che, ad una tale velocità, si schianti al suolo.

La forza di resistenza aumenta notevolmente in presenza del paracadute. Infatti, in tal caso la sezione presentata all'aria è almeno un centinaio di volte superiore alla precedente e anche il fattore C risulta aumentato. Dunque il prodotto $C{\cdot}A$ aumenta di qualche centinaio di volte e la velocità limite scende a valori compresi tra 3 e 4 m/s. A queste velocità l'atterraggio non crea più problemi.

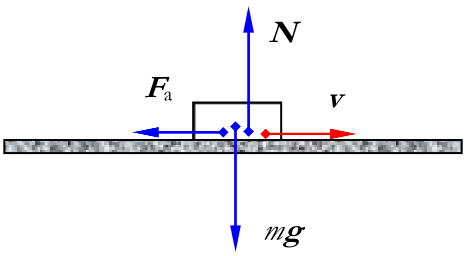
9.6 Problemi svolti sull'attrito radente

9.6.1 DETERMINAZIONE DEL COEFFICIENTE D'ATTRITO IN BASE ALLO SPAZIO PERCORSO

Esercizio: Durante una partita di hockey il disco viene lanciato con velocità v = 10 m/sec; percorre uno spazio Δx_1 = 30.0 m e urta contro la parete di delimitazione del campo. Dopo l'urto il disco percorre uno spazio Δx_2 = 40. m e poi si ferma. Supponendo che durante l'urto la velocità del disco venga invertita senza cambiare di intensità, si determini il coefficiente d'attrito dinamico μ tra il disco e il ghiaccio.

☹

Soluzione



Sul disco agiscono le forze rappresentate in figura e cioè la forza peso equilibrata dalla reazione vincolare del piano N e la forza d'attrito $F_a = \mu N$. Tale forza è sempre opposta alla velocità relativa del disco rispetto al ghiaccio e non dipende dalla velocità o dalla posizione ma solo dal peso e dal coefficiente d'attrito μ . Potremo dunque lavorare come se ci fosse un solo spostamento $\Delta x = \Delta x_1 + x_2 = 70$ m.

Dalle leggi del moto uniformemente accelerato abbiamo $0 - v^2 = 2\, a\, \Delta x$

$$\Rightarrow a = -\frac{v^2}{2\,\Delta x} = -\frac{10^2}{2\cdot 70} \cong -0.714 \text{ m/s}^2$$

Ma d'altra parte $R = -F_a = -\mu\, mg = m\, a \Rightarrow \mu = -\frac{a}{g} \approx 0.073$

☺

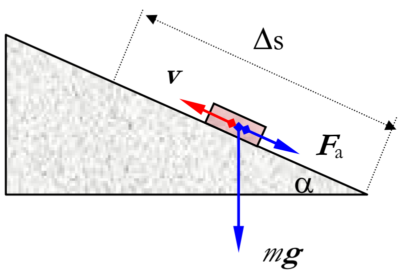
9.6.2 PROBLEMA DINAMICO IN PRESENZA DI ATTRITO

Esercizio: Un corpo di massa m dotato di velocità iniziale v_1 sale lungo un piano inclinato con coefficiente d'attrito μ, di inclinazione α, per uno spostamento Δ*s* in un tempo Δt_1 finché la sua velocità si annulla. A quel punto ricomincia a scendere.

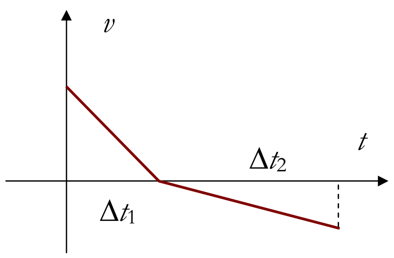
Determinare in forma simbolica il coefficiente d'attrito, la velocità v_1 il tempo di discesa Δt_2 e la velocità finale v_2. Quindi trovare i valori di tali grandezze supponendo che sia α = 40.0°, Δs = 30.0 m e Δt_1 = 3.00 s.

☹

Soluzione



Durante la fase di salita si presenta la configurazione indicata in figura con: $ma = -mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha$ da cui $a_s = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ e il segno negativo indica che la accelerazione ha verso contrario alla velocità. Durante la fase di discesa, poiché si inverte il verso della forza d'attrito, si ha una accelerazione $a_d = -g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.



Se rappresentiamo il movimento in un diagramma v = f(t) avremo due tratti di retta con inclinazione a_s e a_d e tali che le aree dei due triangoli (pari a Δ*s*) sono uguali. Il corpo si muove di m.u.a. e pertanto:

$\Delta s = \frac{1}{2} v_1 \Delta t_1$ (area) mentre $0 = v_1 + a_s \Delta t_1$.

Unendo le due equazioni ed eliminando v_1 abbiamo che:

$$\frac{2\,\Delta s}{\Delta t_1} = -a_s \Delta t_{1\,s} \Leftrightarrow \frac{2\,\Delta s}{\Delta t_1{}^2} = -a_s = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\mu = \frac{2\ \Delta s}{g \cos\alpha\ \Delta t_1^{\ 2}} - \tan\alpha$$

Con riferimento ai dati forniti avremo che:

$$v_1 = \frac{2\ \Delta s}{\Delta t_1} = \frac{60}{3}\ \text{m/sec} = 20\ \text{m/s} \quad \text{e}$$

$$\mu = \frac{2\ \Delta s}{g \cos\alpha\ \Delta t_1^{\ 2}} - \text{tg}\ \alpha = \frac{60}{9.80 \cdot 0.766 \cdot 9} - \ 0.839 \approx\ 0.049$$

Per determinare il tempo di discesa Δt_2 sfruttiamo il fatto che

$\Delta s = -\frac{1}{2} a_d \Delta t_2^{\ 2}$ (*) e pertanto

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{2\ \Delta s}{-a_d}} = \sqrt{\frac{2\ \Delta s}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}$$

Infine la velocità finale di discesa risulta essere determinabile dal fatto che $2\Delta s = -\ v_2\ \Delta t_2$ e pertanto $v_2 = -\frac{2\Delta s}{\Delta t_2} = 18.9$ m/s

oppure dal fatto che

$$v_2 = a_d\ \Delta t_2 = -\ g\ (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\sqrt{\frac{2\ \Delta s}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}$$

$$= -\sqrt{2g\Delta s(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

Utilizzando i valori forniti si ha:

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{2\ \Delta s}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{60}{9.80(\ 0.643 - 0.049 \cdot 0.766)}} \approx\ 3.18\ \text{s}$$

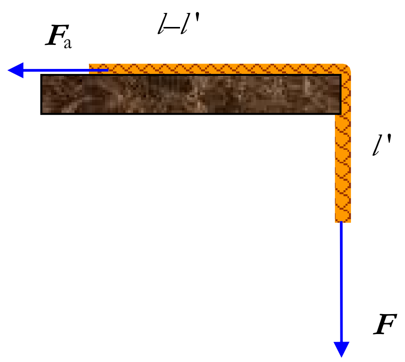
☺

9.6.3 UN CORDA SOSPESA

Esercizio: Una corda omogenea di massa *m* e lunghezza *l* è appoggiata ad un piano orizzontale. Determinare la lunghezza massima *l'* che può pendere dal piano senza che la catena scivoli. Si indichi con μ il coefficiente d'attrito statico tra la corda e il piano.

☹

Soluzione



La parte di lunghezza l' trascina l'altra con una forza **F** proporzionale a l' mentre tra la restante parte di lunghezza $l - l'$ e il tavolo si esercita una reciproca forza d'attrito $\mathbf{F_a}$ determinata dal suo peso.

Come è noto $F_a \leq \mu N$ dove N indica la reazione vincolare (pari al peso della parte appoggiata), mentre $N = mg\frac{l - l'}{l}$ e $F = mg\frac{l'}{l}$ perché la forza peso risulta proporzionale alla frazione di lunghezza coinvolta nel fenomeno.

Pertanto si ha equilibrio nel caso di massimo valore di l' quando

$$\mu N = \mu\ mg\frac{l - l'}{l}\ =\ mg\frac{l'}{l}.$$

(*) Il segno meno deriva dal fatto che lo spazio percorso durante la discesa è $-\Delta s$

Da qui, eliminando *m, g* e *l* si ottiene

$\mu\,(l - l') = l'$ e ricavando l' si ha $l' = \dfrac{\mu}{\mu + 1}\,l$

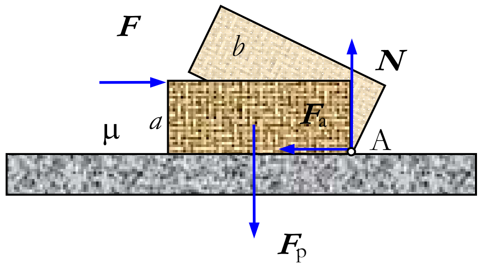
Nota Bene: Il risultato non dipende né dalla massa né dalla densità della fune

☺

9.6.4 PARALLELEPIPEDO E RIBALTAMENTO PER ATTRITO

Esercizio: Una sbarra a forma di parallelepipedo di spigoli *a*, *b*, c è appoggiata in quiete sulla base *bc* ad un piano rugoso con coefficiente d'attrito μ. Sulla parte superiore dello spigolo *a* viene applicata una forza *F* parallela al piano. Discutere cosa accade e determinare in particolare la condizione per cui può avvenire il ribaltamento del corpo.

☹



Soluzione

In assenza di *F* agiscono solo la forza peso e la reazione vincolare con la stessa retta d'applicazione. Quando si applica *F* inizia ad agire la forza d'attrito che bilancia la forza finché la prima non raggiunge il suo valore massimo.

Ma oltre agli aspetti di natura traslazionale occorre ragionare su quelli di natura rotazionale perché quando il momento rotazionale della coppia F, F_a raggiunge il valore di quello determinato da F_p e N il corpo tende a ruotare in verso orario intorno al punto A (punto in cui viene applicata la reazione vincolare).

Si ha così:

$F = F_a \le F_{in} = \mu\, N$ (equilibrio lungo l'orizzontale e definizione di forza d'attrito)

$N = F_p$ (equilibrio lungo la verticale)

$F_p \dfrac{b}{2} - F\,a = 0$ condizione di equilibrio sui momenti.

Da qui si ottiene:

$F = F_p \quad = F_a \le F_{in} = \mu\, N = \mu\, F_p$.

Pertanto il corpo ruota senza strisciare se $\mu \ge \dfrac{b}{2a}$.

Se invece $\mu < \dfrac{b}{2a}$ il corpo striscia a condizione che la forza applicata superi la forza d'attrito massima.

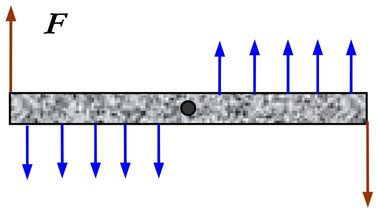
☺

9.6.5 MESSA IN MOTO DI UNA SBARRA IN QUIETE

Esercizio: Una sbarra omogenea di lunghezza *l* e di massa *m* è appoggiata su un piano scabro di coefficiente d'attrito μ. Confrontare, rispetto alla messa in moto del sistema, i due seguenti casi: a) si applicano negli estremi due forze F parallele e con verso contrario per produrre una rotazione rispetto al baricentro b) si applica una forza traslazionale 2 F in uno degli estremi.

☹

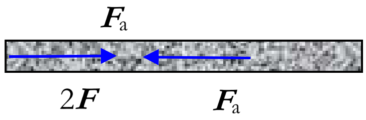
La situazione è stata rappresentata in figura vista dall'alto con le forze peso entranti nel piano della pagina.



a) Nel primo caso le due forze F applicate negli estremi devono vincere il momento di segno contrario dovuto alle forze d'attrito distribuite su tutta la sbarra.

Agli effetti del momento è come se ci fossero due sole forze d'attrito pari a $\mu\frac{mg}{2}$ applicate a distanza $\frac{l}{4}$ dal baricentro. Pertanto dovrà essere:

$$2F\frac{l}{2} - 2F_{in}\frac{l}{4} \geq 0 \text{ ma poichè } F_{in} = \mu\frac{mg}{2} \text{ si ottiene che } F \geq \frac{\mu mg}{4}$$



b) Nel secondo caso la situazione è molto semplice e dovrà essere

$$2F \geq \mu mg \text{ e cioè } F \geq \frac{\mu mg}{2}\quad .$$

Dunque la forza traslazionale, a parità di attrito, è doppia di quella rotazionale

☺

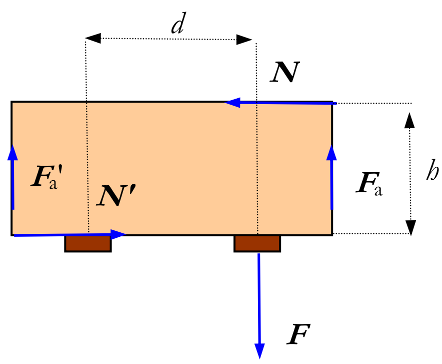
9.6.6 Aprire un cassetto con una maniglia sola

Esercizio: La parete frontale di un cassetto di profondità h è dotata di due maniglie simmetriche poste a distanza d. Sapendo che il coefficiente d'attrito tra il cassetto e le guide vale μ, discutere la possibilità che il cassetto possa essere estratto utilizzando una sola maniglia.

☹

Rappresentiamo il cassetto in proiezione orizzontale (vista dall'alto) mediante un rettangolo cui saranno applicate nel piano rappresentato la forza esterna $\boldsymbol{F}$ di trazione, le due reazioni vincolari $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{N'}$ e le due forze d'attrito $\boldsymbol{F}_a$ e $\boldsymbol{F}_a'$.

Osserviamo che le due forze d'attrito opponendosi al movimento del cassetto sono entrambe opposte a $\boldsymbol{F}$ ed uguali (essendo determinate dal peso) mentre le due reazioni vincolari, che impediscono la rotazione hanno verso opposto e la stessa intensità.



Per ragioni di simmetria le due reazioni vincolari sono identiche in accordo con il fatto che il cassetto, bloccato dalle guide, non può ruotare e pertanto sono identiche anche le due forze d'attrito. Se applichiamo la condizione sulla nullità dei momenti alla rotazione intorno al centro di simmetria del cassetto potremo scrivere una equazione che non comprende le forze d'attrito perché i loro momenti risultano uguali ma di segno contrario. Si avrà così una relazione che ci consente di determinare il legame tra F e N:

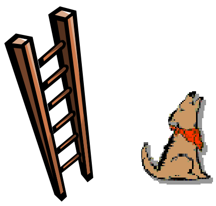
$$N\frac{h}{2} + N'\frac{h}{2} - F\frac{d}{2} = 0 \text{ da cui } N = F\frac{d}{2h}$$

Affinché il cassetto si possa muovere dovrà essere positiva la risultante nella direzione di F e pertanto $F > 2F_{AMax} = 2\mu N = 2\mu F\frac{d}{2h}$ e da qui, semplificando per F si ottiene la condizione che consente al cassetto di scorrere: $\mu \leq \frac{h}{d}$

Nota Bene

- La condizione trovata è di natura puramente geometrica ed è indipendente dalla forza applicata. In altri termini, data la configurazione geometrica, il cassetto scorre solo se il coefficiente d'attrito è abbastanza basso.
- D'altra parte, fissato il coefficiente d'attrito il cassetto scorre se è sufficientemente profondo o, equivalentemente, se le maniglie sono sufficientemente vicine.

☺

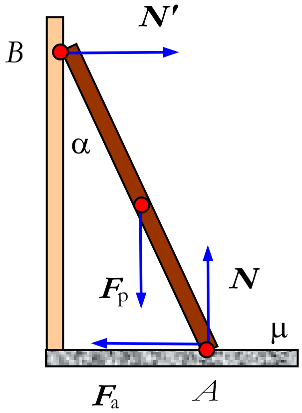


9.6.7 Equilibrio di una scala da parete

Esercizio: Si consideri una scala di massa *m* e lunghezza *l* che appoggia contro una parete verticale liscia formando con essa un angolo α ed ha l'altro estremo su un piano orizzontale di coefficiente d'attrito μ. Determinare come varia la condizione di equilibrio al variare dell'angolo α .

☹

Soluzione



La scala preme sui vincoli nei punti A e B e subisce delle reazioni vincolari N e N' ortogonali alla superficie di appoggio. Inoltre in A agisce anche una forza d'attrito $F_a \le \mu N$.

La condizione di equilibrio si ottiene imponendo che si annulli la risultante delle forze e quella dei momenti e, per semplificare i calcoli converrà assumere l'asse di rotazione in A o in B (assumiamo A).

La condizione $R_y = 0$ equivale a porre $N = F_p$

mentre $R_x = 0$ equivale a porre $N' = F_a$.

Inoltre, poiché deve essere nulla la risultante dei momenti, sarà:

$$F_p \frac{l}{2} \sin \alpha - N' \, l \cos \alpha = 0.$$

Questa equazione consente di determinare N' : $N' = \frac{F_p}{2} \tan \alpha$.

Ma la forza d'attrito deve sempre essere minore o eguale al suo valore massimo $F_a \le \mu N = \mu m g$

Si ottiene così: $F_a = N' = \frac{F_p}{2} \text{tg } \alpha = \frac{mg}{2} \tan \alpha \le \mu mg$ da cui si ottiene, infine, $\mu \ge \frac{\tan \alpha}{2}$.

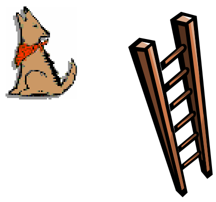
Nota Bene

- Il risultato non dipende dalle caratteristiche fisiche e geometriche della scala ma solo dall'angolo di inclinazione e dal coefficiente d'attrito.
- Fissato il coefficiente d'attrito, cioè le caratteristiche delle due superfici di contatto, deve essere $\tan \alpha \le 2\mu$. Questo significa che esiste un angolo limite, superato il quale, la scala cade. Inoltre poiché l'andamento della tangente al variare dell'angolo non è di tipo lineare, l'angolo deve crescere più lentamente del coefficiente d'attrito.

  Per esempio, se $\mu = 0.5$ l'angolo limite è di 45° (tg 45° = 1), se $\mu = 1$ l'angolo limite è di circa 63° (tg 63° ≅ 2). Quando l'angolo va verso 90° occorrerebbero coefficienti d'attrito tendenti a infinito per sostenere la scala.

☺

Esercizio: Si consideri una scala di massa *m* e lunghezza *l* che appoggia contro una parete verticale formando con essa un angolo α ed ha l'altro estremo su un piano orizzontale. Entrambi i vincoli sono caratterizzati da un coefficiente d'attrito μ. Determinare come varia la condizione di equilibrio al variare dell'angolo α.



☹

Soluzione

Rispetto al problema precedente la scala poggia contro due pareti entrambe dotate dello stesso coefficiente d'attrito. La scala preme sui vincoli nei punti A e B e subisce delle reazioni vincolari N e N' ortogonali alla superficie di appoggio. Inoltre in A e in B agiscono anche le forze d'attrito

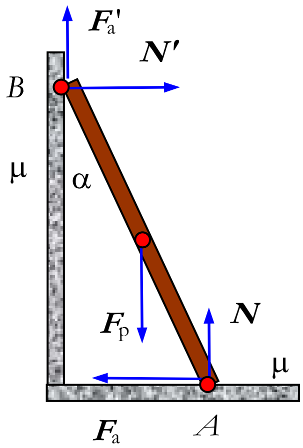
$F_a \le \mu N$ e $F'_a \le \mu N'$ ①

La condizione di equilibrio si ottiene imponendo che si annulli la risultante delle forze e quella dei momenti e, per semplificare i calcoli converrà assumere l'asse di rotazione in A o in B (assumiamo A).

La condizione $R_y = 0$ equivale a porre $N + F'_a = F_p$ ②

mentre $R_x = 0$ equivale a porre $N' = F_a$ ③.

Inoltre, poiché deve essere nulla la risultante dei momenti, sarà:



$$F_p \frac{l}{2} \sin\alpha - N' l \cos\alpha - F'_a l \sin\alpha = 0 \text{ ④}.$$

Dalla ④ si ha che

$N' \cos\alpha = (\frac{1}{2} F_p - F'_a) \sin\alpha \Rightarrow$

$$\text{cotan } \alpha = \frac{\frac{F_p}{2} - F'_a}{N'} = \frac{\frac{N + F'_a}{2} - F'_a}{N'} = \frac{\frac{N}{2} - \frac{F'_a}{2}}{N'} = \frac{N}{2N'} - \frac{F'_a}{2N'} \text{ ⑤}.$$

Dalla ① si ha che $\frac{F'_a}{N'} \le \mu$ e che $\frac{N}{N'} = \frac{N}{F_a} \ge \frac{1}{\mu}$ e dalla ⑤ segue che:

$$\text{cotan } \alpha \ge \frac{1}{2\mu} - \frac{\mu}{2} = \frac{1 - \mu^2}{2\mu} \text{ ⑥}$$

Nota Bene

La diseguaglianza ⑥ se si vuole passare in tangente (funzione crescente al crescere di α) porta a due situazioni diverse a seconda del segno di 1 - μ^2.

- Se $1 - \mu^2 > 0$, cioè se $0<\mu<1$ si ha equilibrio per $\tan\alpha < \frac{2\mu}{1 - \mu^2}$ e cioè l'angolo deve essere minore di un angolo limite definito. Per esempio se $\mu = 0.5$ si ha $\tan\alpha < 4/3$ con un angolo limite di circa 53°. Al tendere di μ verso 1 l'angolo limite tende a 90° e cioè è sempre garantita una situazione di equilibrio
- Se $1 - \mu^2 < 0$, cioè se $\mu > 1$ si ha equilibrio per $\tan\alpha > \frac{2\mu}{1 - \mu^2} < 0$ e dunque si ha sempre equilibrio perché se α è acuto la condizione

data è sempre vera (un numero positivo è sempre maggiore di un numero negativo).

☺

9.6.8 Scala da parete: fin dove si può salire senza rischiare di cadere?

Esercizio: Si consideri una scala di lunghezza *l* e di massa *m* appoggiata ad una parete verticale liscia e ad una parete orizzontale con coefficiente d'attrito μ. La scala forma un angolo α e, in quella condizione, si trova in equilibrio. Un corpo di massa *M* sale lungo la scala a partire dal basso finché si rompe l'equilibrio e la scala scivola. Trovare l'altezza *h* a cui avviene lo scivolamento.

☹

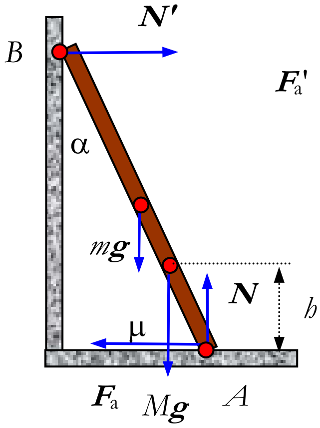
Soluzione

Le condizioni di equilibrio sono:

$N' = F_a$ ① $(M+m)\,g = N$ ②

$mg\frac{l}{2}\sin\alpha + M\,g\,h\tan\alpha - N'\,l\cos\alpha = 0$ ③ $F_a \le \mu N$ ④

Per trovare l'altezza a cui avviene lo scivolamento ricaviamo *h* dalla ③ e vediamo di minorarlo attraverso la disuguaglianza ④.



$$h = \frac{N'\,l\cos\alpha - mg\frac{l}{2}\sin\alpha}{Mg\,\mathrm{tg}\alpha} = \frac{F_a\,l\cos\alpha - mg\frac{l}{2}\sin\alpha}{Mg\,\mathrm{tg}\alpha}$$

$$h \le \frac{\mu N\,l\cos\alpha - mg\frac{l}{2}\sin\alpha}{Mg\,\mathrm{tg}\alpha} = \frac{\mu(M+m)g\,l\cos\alpha - mg\frac{l}{2}\sin\alpha}{Mg\,\mathrm{tg}\alpha} =$$

$$\frac{\mu(M+m)\cos\alpha - m\frac{1}{2}\sin\alpha}{M\,\mathrm{tg}\alpha}\,l \quad ⑤$$

La ⑤ può essere scritta in maniera più efficace introducendo il rapporto $\beta = m / M$ come:

$\frac{h}{l} = \frac{\mu(1+\beta)\cos\alpha - \beta\frac{1}{2}\sin\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}$ e ancora meglio con il confronto tra *h* e l'altezza *h'* della scala $= l\cos\alpha$

$$\frac{h}{h'} = \frac{\mu(1+\beta) - \beta\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{\mu(1+\beta)}{\mathrm{tg}\alpha} - \frac{\beta}{2} \quad ⑥$$

- Per esemplificare supponiamo che sia $\mu = 0.7$, $\alpha = 30°$ e $\beta = 0.07$. In tal caso, tenendo conto che $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ si ha $\frac{h}{h'} = 1.26$ cioè la scala non cade mai.
- Se invece si opera con angoli superiori puo accadere che la scala cada. Per la precisione, affinché sia $\frac{h}{h'} < 1$, deve essere:

$$\frac{\mu(1+\beta)}{\mathrm{tg}\alpha} - \frac{\beta}{2} < 1 \Leftrightarrow \frac{\mu(1+\beta)}{\mathrm{tg}\alpha} < 1 + \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \mathrm{tg}\,\alpha > \frac{\mu(1+\beta)}{1+\frac{\beta}{2}}$$

e con i dati assegnati si ha tg α > 0.724 cioè α > 36.0°.

Dunque per angoli maggiori di 36° quando una persona con β = 0.07 (cioè con una massa pari a 14 volte quella della scala) sale sulla scala prima o poi cade.

Vediamo quando ciò accade supponendo che sia α = 45°.

$$\frac{h}{h'} = \frac{\mu\,(1+\beta)}{\mathrm{tg}\alpha} - \frac{\beta}{2} = \frac{0.7\,(1+0.07)}{\mathrm{tg}45°} - \frac{0.07}{2} = 0.714$$

Pertanto l'uomo che sale la scala cade quando il suo baricentro si trova al 71% della altezza della scala.

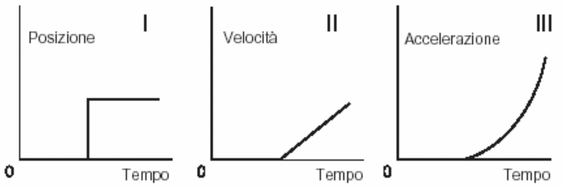
☺

9.7 Quesiti delle Olimpiadi della fisica sulle leggi della dinamica

1. Un paracadutista di 80 kg scende verticalmente a velocità costante di 3m/s. Assumendo che l'accelerazione di gravità sia di $10 m/s^2$, quale è la forza complessiva che agisce sul paracadutista? … (Juniores 1995)

   A …800 N, verso l'alto. B …Zero. C …240 N, verso il basso.
   D …360 N, verso il basso. E …800 N, verso il basso.

2. Un guidatore, appena il semaforo diventa verde, preme sull'acceleratore: a lato si vede schematizzato l'andamento della forza impressa all'automobile. Osserva i seguenti grafici della posizione, velocità e accelerazione della macchina nel tempo. Quali grafici sono corretti? … (Juniores 1995) [4]



   A …Tutti e tre. B …Solamente il I e il III.
   C …Solamente il II e il III. D …Solamente il I.
   E …Solamente il II.

3. Un baule viene trascinato lungo un corridoio a velocità costante, pari a 4m/s. Quale delle seguenti affermazioni, relative alla forza con cui viene spinto il baule, è corretta? … (Juniores 1997)

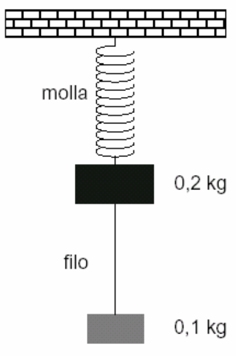
   A …Se si raddoppia la forza con cui si spinge il baule, la sua velocità diventa di 8 m/s.

   B …La forza con cui si spinge il baule non può essere inferiore al suo peso.

   C …La forza con cui si spinge il baule deve essere pari a quella esercitata dall'attrito con il pavimento.

   D …La forza di attrito con il pavimento è uguale al peso del baule.

   E …II baule si muove di moto uniforme e non è necessaria nessuna forza per spingerlo.



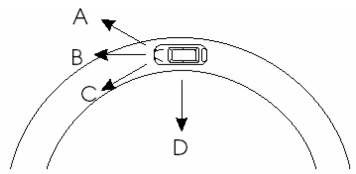
4. All'estremità di una molla è sospeso un corpo di 0.2 kg; a questo è attaccato un filo con all'estremità un oggetto di 0.1 kg. La molla è appesa ad un sostegno e tutto il sistema viene lasciato finché non raggiunge lo stato di equilibrio. Cautamente, senza provocare oscillazioni del sistema, il filo viene bruciato e l'oggetto ad esso sospeso cade. Approssimando il valore dell'accelerazione di gravità g con $10 m/s^2$, quale forza esercita la molla in questo istante sulla massa di 0,2 kg? … (Juniores 1997)

   A …2N verso il basso. B …3N verso il basso.
   C …2N verso l'alto. D …3 N verso l'alto.

[4] Se la forza è costante lo è anche la accelerazione e l'auto si muove di moto uniformemente accelerato con la velocità che cresce in maniera uniforme partendo da 0. La posizione cambia con legge quadratica.

E …Non è determinabile perché non si conosce la costante elastica della molla.

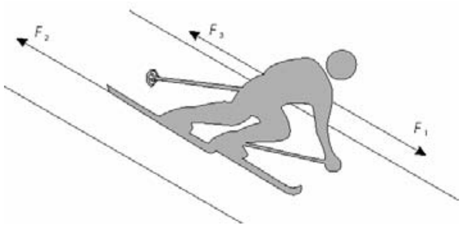
5. Un'automobile percorre una pista circolare a velocità, in modulo, costante.



Quale delle frecce indica la direzione della risultante delle forze che agiscono sulla macchina? … (Juniores 1998)

A B C D

6. In figura uno sciatore scende lungo un pendio. Sullo sciatore agiscono le tre forze $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ nella situazione raffigurata $\vec{F_1}$ha modulo uguale a $\vec{F_2}$, mentre si è osservato che l'intensità di $\vec{F_3}$si riduce quando lo sciatore si abbassa piegando le ginocchia.



Considera le tre seguenti affermazioni:

1 – F_1 aumenta se il pendio si fa più ripido.

2 – F_2 ha modulo uguale a F_1 anche se il pendio si fa più ripido.

3 – F_3 si annulla se la velocità dello sciatore è costante.

Delle affermazioni fatte… (Juniores 1998)[5]

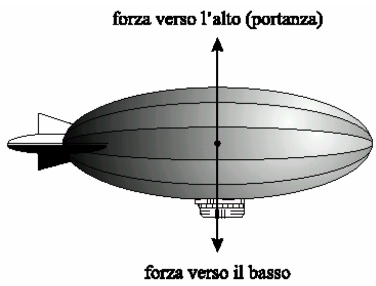
A …è corretta solo la 1.

B …sono corrette tutte tre.

C …sono corrette solamente la 1 e la 3.

D …sono corrette solamente la 2 e la 3.

7. Il dirigibile in figura procede in linea retta mantenendo sempre la stessa quota. Quale delle seguenti affermazioni è corretta? … (Juniores 2002)



A …La forza di gravita non agisce più sul dirigibile.

B …II dirigibile in queste condizioni ha massa nulla.

C …L'energia potenziale del dirigibile deve essere zero.

D …La forza verso l'alto e quella verso il basso si fanno equilibrio.

8. Come mai un corpo che cade nel campo gravitazionale terrestre può raggiungere una velocità costante? … (Juniores 2002)

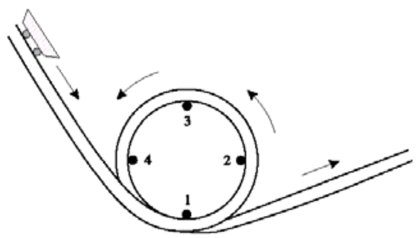
A …Perché la resistenza dell'aria cresce al crescere della velocità.

B …Perché il campo gravitazionale terrestre diminuisce a mano a mano che il corpo cade.

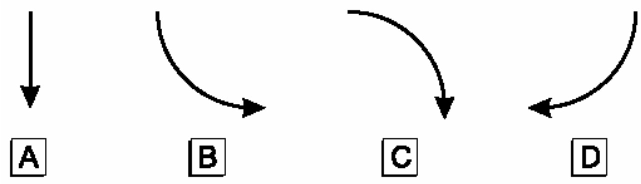
C …Perché la massa del corpo rimane costante.

D …Perché il peso del corpo cresce mentre questo cade.

9. Un carrello parte da fermo e scende con attrito trascurabile lungo la rotaia mostrata in figura. Il carrello parte da un'altezza sufficiente per completare il loop. Quale diagramma rappresenterebbe la traiettoria di un oggetto che scivola fuori dal carrello quando questo si trova nel punto 4? … (Juniores 2004)

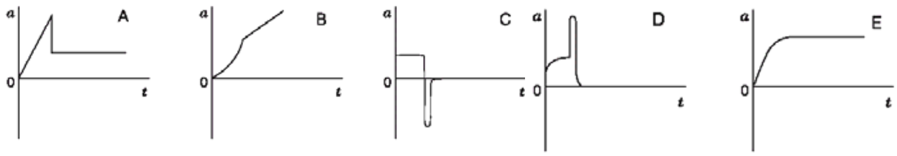


[5] F_1 è la componente tangenziale del peso che cresce con la pendenza, F_2 rappresenta la forza d'attrito radente dinamico che dipende dalla componente normale del peso che diminuisce al crescere della pendenza F_3 rappresenta la resistenza del mezzo (nel caso di uno sciatore, data la velocità, prevalentemente da pressione) ed essa è proporzionale al quadrato della velocità e non si annulla se v è costante.



A B C D

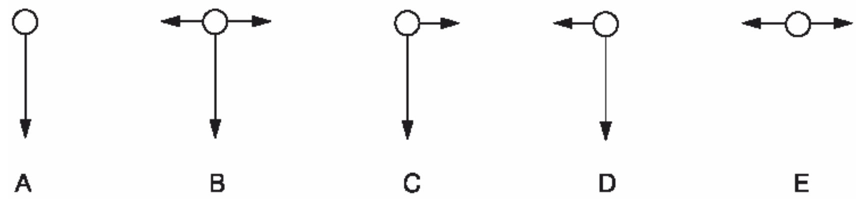
10. Un paracadutista si lancia dall'aereo rimanendo in caduta libera per 2 s, dopodiché apre il paracadute. Quale dei seguenti grafici accelerazione–tempo rappresenta meglio l'accelerazione verticale del paraca-



dutista durante i primi 5s del moto? … (I livello 1995)[6]

A B C D E

11. Una pietra è stata lanciata in aria, verso destra. Quale dei seguenti diagrammi rappresenta meglio il sistema di forze agenti sulla pietra nel momento in cui passa alla massima altezza nella sua traiettoria? … (I livello 1995)[7]



A B C D E

12. I motori di manovra di un satellite che si trova in orbita circolare attorno alla Terra vengono fatti agire in modo da esercitare una forza esattamente uguale ed opposta a quella dovuta al campo gravitazionale della Terra. Di conseguenza il satellite inizia a muoversi …(I livello 1995)

A …lungo una spirale verso la superficie della Terra

B …lungo la retta passante dal satellite stesso e dal centro della Terra, cioè radialmente

C …lungo la retta tangente all'orbita nel punto in cui sono stati accesi i motori

D …in un'orbita circolare con periodo più lungo

E …in un'orbita circolare con periodo più corto

13. Durante una partita di baseball, il ricevitore afferra una palla da 0.1kg che gli arriva sul guantone alla velocità di 20m/s e per fermare

[6] Quando si apre il paracadute si passa da accelerazione *g* costante ad una accelerazione negativa dovuta all'azione della resistenza del mezzo e viene rapidaemte raggiunta la velocità limite per la quale l'accelerazione si annulla

[7] Sono la forza peso e la forza d'attrito opposta alla velocità che, nel punto di massimo, è orizzontale

la palla impiega 0.01s. La media temporale della forza applicata alla palla è: …(I livello 1996)

A …20N B …100N C …200N

D …1000N E …2000N

14. Un uomo in ascensore sta sopra ad una bilancia pesapersone. L'uomo si era pesato sulla stessa bilancia prima di entrare in ascensore ed aveva annotato un peso di 800N. Ora, dentro l'ascensore, misura un peso di 820 N. Ciò sta ad indicare che l'ascensore…(I livello 1996)

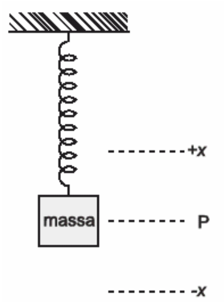
A …è fermo

B …sale a velocità costante

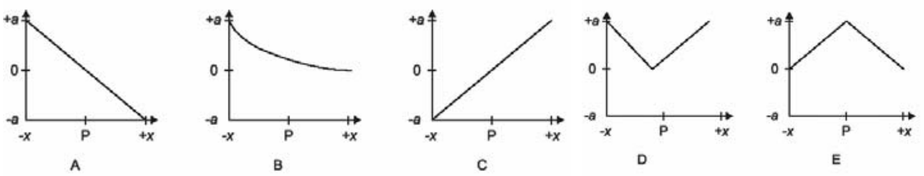
C …scende a velocità costante

D …sale con velocità crescente in modulo

E …scende con velocità crescente in modulo



15. Una massa appesa alla molla viene portata nel punto $-x$ e quindi lasciata libera. La massa si muove verso l'alto oltrepassando la posizione di equilibrio P e raggiungendo il punto $+x$. Assumendo l'accelerazione positiva verso l'alto, quale dei grafici seguenti mostra l'andamento dell'accelerazione in funzione della posizione? …(I livello 1996) [8]



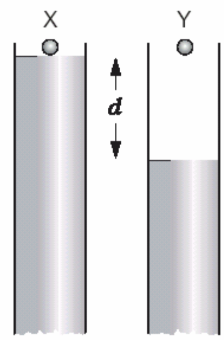
A B C D E

16. Una massa è sospesa ad una molla. La reazione alla forza di gravità terrestre agente sulla massa è la forza esercitata dalla…(I livello 1996)

A …massa sulla Terra B …massa sulla molla

C …molla sulla massa D …molla sulla Terra

E …Terra sulla massa



17. Due sfere identiche X ed Y sono lasciate cadere da ferme all'imboccatura di due cilindri sufficientemente alti. Uno dei cilindri è completamente riempito di un certo liquido, l'altro è riempito parzialmente dello stesso liquido di modo che Y cade per un tratto d prima di raggiungere la superficie del liquido. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? 1) La velocità di X dopo aver percorso il tratto d è minore di quella di Y quando questa ha percorso lo stesso tratto. 2) X impiega più tempo di Y a percorrere lo stesso tratto d. 3) X ed Y, dopo un tempo sufficiente, possono raggiungere la stessa velocità. …(I livello 1997)

A …Tutte e tre B …La prima e la seconda

C …La prima e la terza D …Solo la prima

E …Solo la seconda

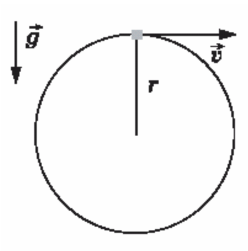
[8] Attenzione alla posizione dello 0 sul diagramma!

18. Un disco la cui superficie è uniforme, posto orizzontalmente, ruota intorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Un piccolo corpo di massa m è appoggiato sul disco a distanza r dal centro e viene trascinato nella rotazione. La velocità angolare del disco viene gradualmente aumentata sino a quando il corpo viene lanciato via; ciò accade quando la velocità angolare è ω_0. Se il corpo deve essere lanciato via ad una velocità angolare minore di ω_0 quali delle seguenti operazioni possono essere adeguate? 1) Aumentare il valore di r. 2) Diminuire il coefficiente di attrito fra corpo e disco 3) Diminuire la massa m del corpo…(I livello 1997)

A …Tutte e tre B …Solo la 1 e la 2

C …Solo la 2 e la 3 D …Solo la 1 e la 3

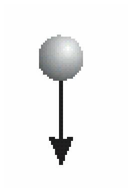
E …Nessuna delle tre



19. Un veicolo compie un giro della morte su una pista circolare disposta in un piano verticale. Qual è la minima velocità che il veicolo deve avere nel punto più alto della pista? …(I livello 1997) [9]

A …$\sqrt{rg}$ B …$\sqrt{2rg}$ C …½ $\sqrt{rg}$

D …$2\sqrt{rg}$ E …$\sqrt{rg/2}$



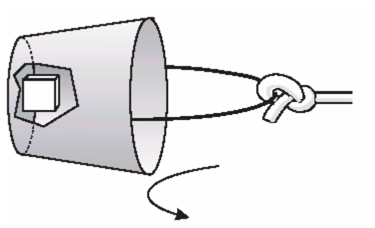
20. La figura rappresenta il diagramma delle forze agenti su un oggetto nelle situazioni seguenti: 1) una sfera di metallo che cade nel vuoto 2) un satellite in orbita attorno alla Terra 3) una palla in quiete sul tavolo del biliardo. Quali sono le affermazioni corrette? …(I livello 1998)

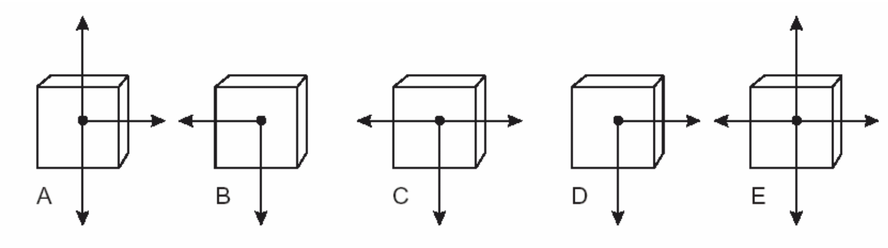
A …Tutte e tre B …Solo la 1 e la 2

C … solo la 2 e la 3 D … solo la 1

E …solo la 3

21. Un secchio legato ad una corda viene posto in rotazione uniforme su un piano orizzontale come indicato in figura. Durante il moto rotatorio un oggetto rimane contro il fondo ruvido, senza cadere sulla parete del secchio. Quale dei seguenti diagrammi rappresenta nel modo migliore le forze agenti sull'oggetto in un sistema di riferimento solidale con il terreno? … (I livello 1998)





A B C D E

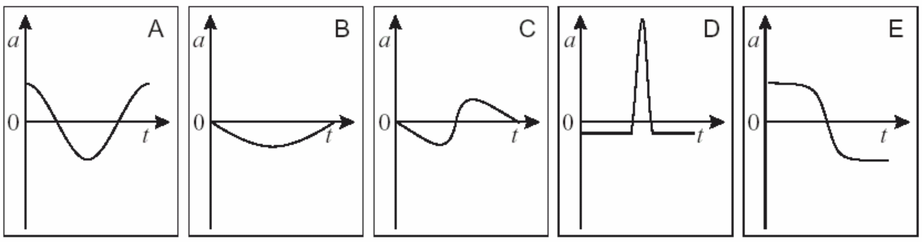
22. La Terra, di massa M, esercita una forza F sulla Luna, di massa m. L'intensità della forza esercitata dalla Luna sulla Terra è: … (I livello 1998)

A …F B …$\left(\frac{m}{M}\right)F$ C … $\left(\frac{M}{m}\right)F$

[9] Deve essere $v^2/r = g$

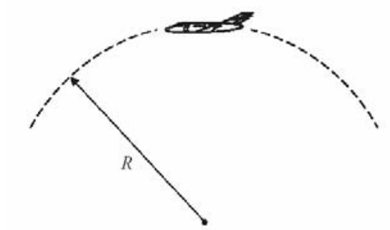
D $\ldots\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} F$ D $\ldots\left(\frac{m}{M}\right)^{2} F$

23. Carlo sta saltando sul tappeto elastico di un Luna Park; ogni volta che cade sul tappeto il rimbalzo lo fa ritornare in alto, al punto di partenza. Considerando un intero periodo del moto a partire dall'istante in cui Carlo si trova alla massima altezza, quale dei seguenti grafici descrive nel modo migliore l'accelerazione verticale a di Carlo in funzione del tempo t? … (I livello 1998)[10]



A B C D E

24. Un aeroplano, compiendo delle acrobazie, si muove in un piano verticale a velocità costante percorrendo un arco di traiettoria circolare di raggio R. Nel punto più alto della traiettoria, il pilota si sente senza peso. Qual è la velocità dell'aereo in quel punto? … (I livello 1998)



A …gR B …$\sqrt{g\,R}$ C …$\frac{g}{R}$

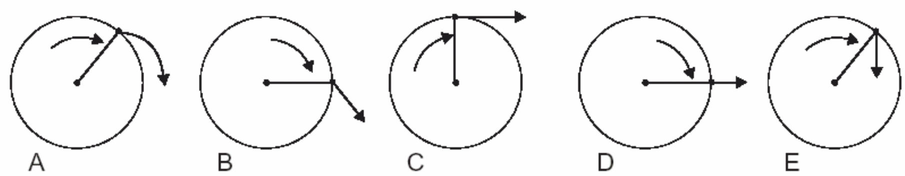
D …$\sqrt{\frac{g}{R}}$ E …$2gR$

25. Un oggetto di massa 1 kg è in caduta libera nell'atmosfera a velocità costante. La forza di resistenza dell'aria sull'oggetto vale circa… (I livello 1998)

A 0.1N B …1N C …10N

D …100N E …1'000N

26. Le figure qui sotto rappresentano alcune situazioni possibili per un sasso che, attaccato ad uno spago, viene fatto girare su di un piano verticale. Quando il sasso si trova nella posizione indicata, lo spago si rompe ed il sasso vola via. Quale disegno schematizza meglio il tratto iniziale del moto? … (I livello 1998)



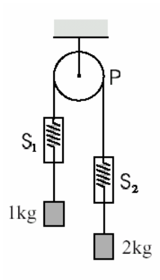
A B C D E

27. In un esperimento una sferetta leggera cade in aria a velocità costante V. Se la sferetta viene sottoposta anche a una forza di modulo F

[10] Durante la interazione con il tappeto si ha una accelerazione opposta alla gravità che inverte la velocità

diretta verso l'alto, risale assumendo una velocità costante $2V$. Se poi il modulo della forza diventa $F/2$, la sferetta … (I livello 2000)[11]

A cade con velocità $V/4$ B cade con velocità $V/2$
C sale con velocità V/2 D sale con velocità 3/2 V
E rimane ferma

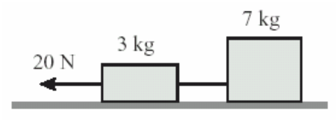


28. Nella macchina di Atwood rappresentata in figura, la puleggia P, i fili inestensibili e i dinamometri S_1 ed S_2 hanno massa trascurabile. NOTA: si *assuma* in questo caso g = 10m/s². Se il sistema viene lasciato libero di muoversi con attrito trascurabile, le indicazioni di S_1 ed S_2 saranno rispettivamente …(I livello 2000) [12]

A 10/3 N, 20/3 N B 40/3 N, 40/3 N
C 20/3 N, 40/3 N D 20/3N, 20/3N
E 10N, 20 N

29. Una gru sostiene un carico di massa 2200 kg. La tensione del cavo ha il valore di 20’000N e il carico sta accelerando verso il basso. Ammettendo che sia g = 9.81 $\mathrm{Nkg^{-1}}$ quale dei seguenti valori esprime meglio in $\mathrm{ms^{-2}}$ l’accelerazione del carico? …(I livello 2002)[13]

A 0 B 0.71 C 4.0 D 9.1
E 9.8



30. Due blocchi di legno, collegati da una fune, sono sollecitati da una forza di 20 N, come in figura. I blocchi sono appoggiati su una superficie liscia. Qual è l’intensità della forza applicata dalla fune al blocco di 7 kg.

A 20N B 14N C 10N D 8N
E 6N

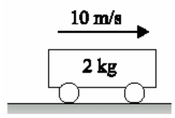


fig. 1

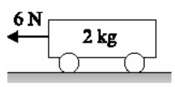


fig. 2

31. La figura 1 mostra un carrello di massa uguale a 2 kg, che si muove verso destra con una velocità costante di 10m/s. In un certo istante al carrello viene applicata una forza costante diretta verso sinistra come mostrato in figura 2. L’accelerazione del carrello quando agisce questa forza è …(I livello 2003)

A 3 m/s², verso destra. B 3 m/s², verso sinistra.
C 7 m/s², verso destra. D 12 m/s², verso destra.
E 12 m/s², verso sinistra.

32. Un carrello di 2 kg si muove a velocità costante su una pista circolare di 3m di raggio; la forza centripeta applicata al carrello è di 24 N. Trovare la velocità del carrello, in m/s. (I livello 2004)

---

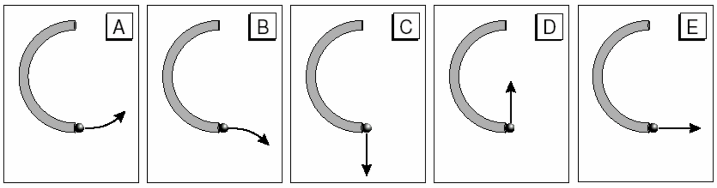
[11] La sferetta è soggetta alla forza viscosa (piccole dimensioni) e inizialmente la forza viscosa è pari al peso. Se con F sale con velocità 2v vuol dire che ora c’è una forza viscosa doppia e verso il basso, e dunque F è 3 volte il peso. Se ora si applica F/2 la forza è 3/2 p e dunque la sferetta sale e poiché la forza d’attrito dovrà essere pari a ½ p ne segue che la velocità è v/2.

[12] Come si è visto al capitolo 7 la accelerazione è a = $\frac{2-1}{2+1}10$ = 10/3 m/s². La tensione si trasmette inalterata e dunque i due dinamometri hanno la stessa indicazione. Applichiamo la II legge a quello di sinistra: T - 10·1 = 1·10/3 da cui T =40/3 N

[13] La risultante è 2000·9.81 -20000 = 1582 N e dunque l’accelerazione è 1582/2200 = 0.719 m/s². Dunque 0.71 è quello che *esprime meglio*. Attenzione che N/kg = m/s² !

A 4.0 B 6.0 C 12 D 16
E 36

33. Una pallina rotola dentro un tubo di forma semicircolare, appoggiato per tutta la sua lunghezza sopra un tavolo orizzontale. Fra le figure seguenti, che mostrano la situazione vista dall'alto, quale rappresenta meglio il moto della pallina quando esce dal tubo? (I livello 2004)

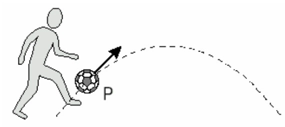


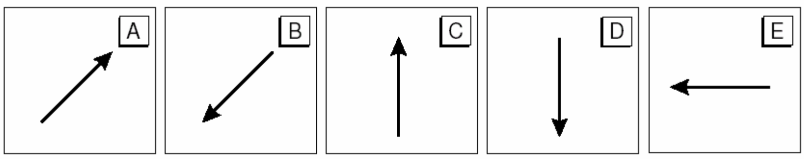
A B C D E

34. Una forza F che agisce su un oggetto di massa m_1 lo accelera con accelerazione a, mentre una forza 3F applicata ad un altro oggetto di massa m_2 lo accelera con accelerazione 2a. Qual è il rapporto tra la massa m_1 e la massa m_2? (I livello 2004)

A 3:2 B 2:3 C 1:2 D 1:3 E 1:6

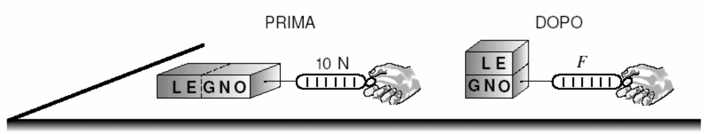
35. Un pallone da calcio descrive la traiettoria rappresentata in figura. Quale vettore rappresenta meglio la direzione della resistenza dell'aria sul pallone, nel punto P? (I livello 2004)





A B C D E

36. Il disegno seguente mostra, a sinistra, uno studente che sta applicando una forza di 10N per spostare un blocco di legno a velocità costante sopra un piano orizzontale. Successivamente, come mostrato nel disegno a destra, il blocco viene diviso in due parti uguali e una parte è collocata sopra l'altra. Quanto vale l'intensità della forza F necessaria per spostare i due pezzi di legno a velocità costante lungo il piano nel secondo caso? (I livello 2004)



A 40N B 20N C 10N

D 5N E 2.5N

37. Una palla di massa 0.6 kg, inizialmente ferma, viene colpita con una mazza di legno. La palla rimane in contatto con la mazza per 0.2 s e quando se ne discosta la sua velocità è di 25m/s. Quanto vale l'intensità media della forza esercitata dalla palla sulla mazza? (I livello 2004)

A 3N B 8.3N C 15N
D 75N E 150N

38. Un corpo di 2 kg viene fatto scivolare sul pavimento ed è accelerato da una forza orizzontale di 30 N; l'accelerazione risulta essere di 10m/s^2. Determinare il modulo della forza d'attrito che agisce sul corpo. (I livello 2004)

A	0N	B	5N	C	10N
D	20N	E	30N		

39. Se lasci cadere un oggetto senza dargli nessuna spinta, esso cade con un'accelerazione di $9.8 m/s^2$, in assenza di resistenza dell'aria. Se invece lo scagli con forza verso il basso, com'è la sua accelerazione dopo che si è staccato dalla tua mano, in assenza di resistenza dell'aria? …(Juniores 2004)

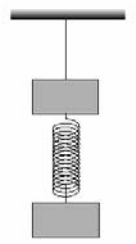
A …minore di $9.8 m/s^2$ B …uguale a $9.8 m/s^2$

C …maggiore di $9.8 m/s^2$

D …Il suo valore dipende dalla velocità iniziale dell'oggetto.

40. Un ragazzo di 50 chili che si trova sulla superficie della Terra esercita sulla Terra una forza di attrazione gravitazionale che, espressa in newton, è meglio approssimata da:

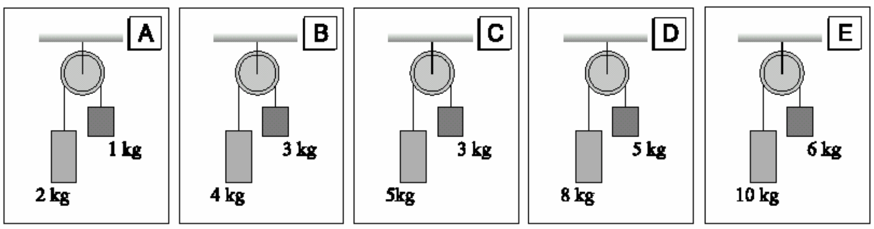
A	$3 \cdot 10^{-5}$	B	50	C	500
D	$2 \cdot 10^{14}$	E	Non ci sono dati sufficienti		



41. Due blocchi identici sono connessi con una molla di massa trascurabile e il sistema così ottenuto è sospeso al soffitto con una fune, come in figura. Ad un certo istante, con il sistema in equilibrio, la fune si rompe. Immediatamente dopo la rottura della fune, qual è l'accelerazione del blocco superiore? (I livello 2005)[14]

A	0	B	½g	C	g
D	$\sqrt{2}\, g$	E	2g		

42. Ciascuna delle figure qui sotto rappresenta due blocchi connessi da un filo inestensibile e di massa trascurabile che passa in una carrucola, anch'essa di massa trascurabile, che può ruotare senza attrito. In quale caso il modulo dell'accelerazione dei due blocchi sarà maggio-



re? (I livello 2005)[15]

A B C D E

43. Un paracadutista sta scendendo verticalmente alla velocità di regime con il paracadute ancora chiuso. Ad un certo istante apre il paracadute e, dopo un breve intervallo di tempo, raggiunge una nuova velocità di regime, molto più bassa. Si confrontino le intensità della forza di resistenza dell'aria sul paracadutista nelle due situazioni a regime, rispettivamente con il paracadute aperto e chiuso. Quale delle seguenti affermazioni è corretta? (I livello 2005) [16]

---

[14] La molla esercita una forza mg e il corpo ha un peso mg pertanto è sottoposto a una forza 2mg e pertanto accelera con accelerazione 2g

[15] Le accelerazioni sono rispettivamente 1/3 g 1/7 g ¼ g 3/13 g e ¼ g

[16] Quesito molto interessante perché pieno di ottimi distrattori. A regime la forza d'attrito bilancia il peso.

A Il rapporto tra le due intensità è uguale al rapporto tra le due velocità.

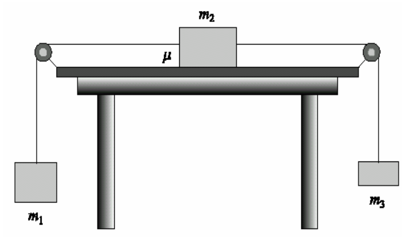
B Il rapporto tra le due intensità è uguale all'inverso del rapporto tra le due velocità.

C L'intensità della forza a paracadute aperto dipende dalle dimensioni del paracadute.

D La forza a paracadute chiuso è più intensa a causa della maggiore velocità.

E Le due intensità sono uguali.

44. Tre masse sono collegate come mostrato in figura con fili inestensibili. Le masse e l'attrito delle corde e delle pulegge sono abbastanza piccoli da produrre un effetto trascurabile sul sistema. Se il coefficiente di attrito dinamico tra la massa m_2 ed il tavolo vale μ, quanto vale l'accelerazione verso l'alto della piccola massa m_3? (I livello 2005)[17]



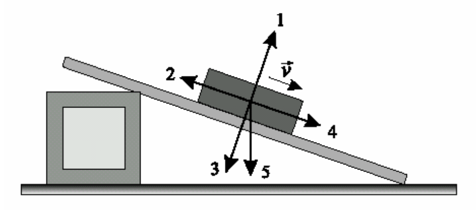
A $\dfrac{m_1}{m_1+m_2+m_3}g$ D $\dfrac{\mu(m_1-m_2-m_3)}{m_1+m_2+m_3}g$

B $\dfrac{m_1+\mu m_2}{m_1+m_2+m_3}g$ E $\dfrac{m_1-\mu m_2-m_3}{m_1+m_2+m_3}g$

C $\dfrac{\mu(m_1+m_2+m_3)}{m_1-m_2-m_3}g$

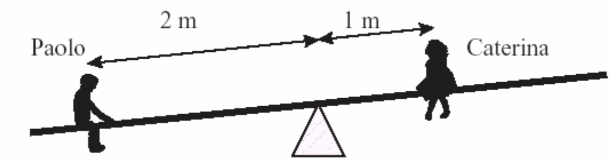
A B C D E

45. La figura seguente mostra una scatola che sta scendendo lungo un piano inclinato a velocità $\vec{v}$. Tra quelle indicate in figura, quale sarà la direzione della forza di attrito che agisce sulla scatola?



A 1 B 2 C 3 D 4 E 5

46. Paolo e Caterina tentano di bilanciarsi su un asse imperniato ad un fulcro nel suo centro stando seduti nelle posizioni indicate nella seguente figura. Paolo ha una massa di 40 kg e Caterina invece ha 70 kg. Quale delle seguenti azioni pensi che li aiuterebbe a bilanciarsi? …(Juniores 1996)



A …Dare a Paolo una massa di 5 kg.

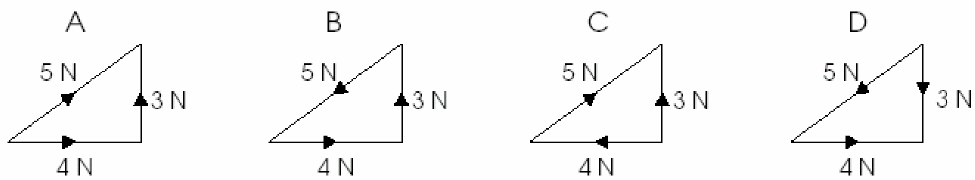
B …Dare a Caterina una massa di 5kg.

C …Dare a Paolo una massa di 10 kg.

D Dare a Caterina una massa di 10 kg.

E …Dare a Paolo una massa di 30 kg.

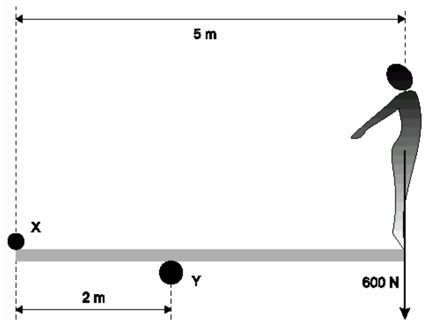
47. Quale dei diagrammi seguenti mostra correttamente la risultante del-



[17] E' inutile ogni volta rifare tutti i conti; il sistema si muove come se avesse la massa totale e fosse sottoposto alla risultante delle tre forze (i pesi e la forza d'attrito)

le due forze da 4 N e da 3 N? …(Juniores 1998)

A B C D E



48. In figura è mostrata una tuffatrice su un trampolino. L'asse del trampolino è sostenuta da due sbarre, X e Y. La ragazza è ferma all'estremità dell'asse e il suo peso è 600 N: quali forze sono esercitate dalle sbarre sull'asse del trampolino? Trascura il peso del trampolino. …(Juniores 1999)[18]

	da X, verso il basso	*da Y, verso l'alto*
A …	400 N	1000 N
B …	600 N	1200 N
C …	900 N	600 N
D …	900 N	1500 N

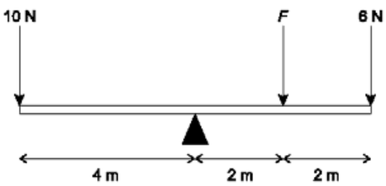
49. La tabella seguente riporta il coefficiente d'attrito statico al distacco μ_s e il coefficiente d'attrito dinamico μ_d per la gomma di un pneumatico in contatto con diverse superfici. Quale delle seguenti affermazioni sono corrette? …(Juniores 2000)

	Cemento secco	Asfalto secco	Cemento bagnato	Asfalto bagnato
μ_s	1.0	1.2	0.7	0.6
μ_d	0.7	0.6	0.5	0.5

1 - Il cemento secco produce maggiore attrito statico dell'asfalto secco. 2 - Un'automobile in moto slitta più facilmente sul cemento bagnato che sull'asfalto bagnato. 3 - Un'automobile con i freni bloccati slitta per una distanza più breve sul cemento secco che sull'asfalto secco.

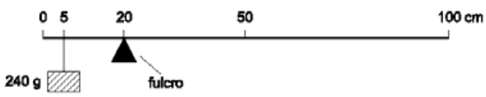
A …Tutte e tre. B …Sia la 1 che la 2.

C …Soltanto la 1. D …Soltanto la 3.



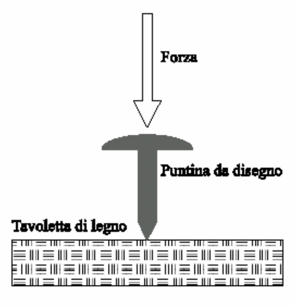
50. Una sbarra uniforme poggia in equilibrio su di un cuneo sotto l'azione delle forze mostrate nella figura. Qual è l'intensità della forza *F*? …(Juniores 2001)

A …2 N B …4 N C …8 N D …14 N



51. In figura è schematizzata un'asta graduata omogenea e lunga un metro; l'asta è appoggiata ad un fulcro che non sta nel suo centro di massa e viene quindi tenuta in equilibrio sospendendovi, sulla linea dei 5cm, una massa di 240 g. Qual è la massa dell'asta? …(Juniores 2002)

A …12g B …24g C …45g D …120g



52. La figura mostra una puntina da disegno, opportunamente ingrandita, che viene inserita in una tavoletta di legno. La puntina può essere inserita nel legno con una certa facilità: come mai? …(Juniores 2003)

A …La testa della puntina, larga e pesante, ne alza il baricentro.

B …La forza che spinge la puntina ha un momento piuttosto grande rispetto alla punta.

C …L'area grande della testa aumenta la forza.

D …L'area piccola della punta fa sì che la pressione sia grande.

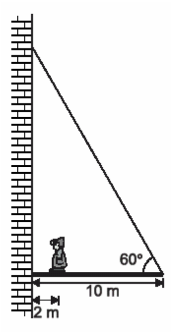
[18] x + 600 = y e 3·600 = 2x

53. Due studenti spingono un'auto in pianura. Quale angolo devono fare con il piano orizzontale le braccia di ciascuno studente per rendere massima la componente orizzontale della forza? ...(Juniores 2004)

A …0° B …30° C …45° D …90°

54. Una molla leggera viene tagliata in due parti, una di lunghezza doppia dell'altra. Il grafico forza–allungamento relativo alla molla più corta è risultato lineare sino ad un carico W. Per l'altra molla quali delle seguenti affermazioni sono vere? 1) Il grafico è lineare solo fino ad un carico pari a ½ W. 2) La costante della seconda molla è diversa. 3) Per un dato carico, l'allungamento della molla più lunga è doppio. …(I livello 1995)

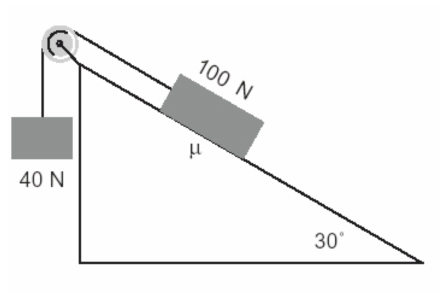
A …Tutte e tre B … Solo la 1 e la 2 C … Solo la 2 e la 3
D … Solo la 1 E … Solo la 3



55. Una trave del peso di 400N è incernierata in un muro ed è lunga 10 m. L'estremità della trave è sostenuta da un cavo fissato al muro in modo da formare un angolo di 60°. Qual è la tensione del cavo quando una persona che pesa 500N sta ferma in piedi sulla trave a 2m dal muro? …(I livello 1996)[19]

A … 0 N B … 289 N C … 346 N

D … 519 N E … 808 N



56. Nel sistema rappresentato in figura l'attrito statico tra il piano e il blocco vale $\mu = 0.24$; il blocco è mantenuto fermo applicando una forza parallela al piano inclinato. Quale deve essere l'intensità e il verso di tale forza. …(I livello 1997)[20]

A … Uguale a 10.8N rivolta verso il basso

B … Maggiore di 10.8N rivolta verso il basso

C … Compresa fra 30.8N verso l'alto e 10.8N verso il basso

D … Uguale a 30.8N verso l'alto

E … Maggiore di 30.8 N verso l'alto

57. Si consideri ancora il sistema trattato nel quesito precedente, sapendo che l'attrito dinamico tra blocco e piano vale $\mu = 0.2$ e che il blocco più pesante sta scendendo a velocità costante. Quale deve essere l'intensità e il verso della forza applicata adesso al blocco che scende sul piano? …(I livello 1997)[21]

A …Uguale a 7.3N, rivolta verso il basso

B …Maggiore di 7.3N, rivolta verso il basso

---

[19] Equilibrio dei momenti con polo nel punto di incastro nel muro $500 \cdot 2 + 400 \cdot 5 = T\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10$

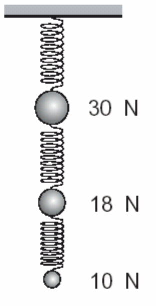
[20] Data l'inclinazione, la forza peso ha una componente tangenziale di 50 N verso il basso che si somma algebricamente ai 40 N della tensione della fune dando una forza di 10 N verso il basso; la componente normale è di 86.6 N ed essa può determinare una forza d'attrito massima di 86.6·0.24= 20.8 N. Pertanto si possono avere forze comprese tra 30.8 verso l'alto e 10.8 verso il basso

[21] Essendo attrito dinamico il valore è definito e poiché essa vale 86.6·0.2 = 17.3 N orientata verso l'alto visto che il blocco scende occorrerà una forza verso il basso di 17.3-10=7.3 N

C …Compresa fra 27.3N verso l'alto e 7.3N verso il basso

D …Uguale a 30.8N, verso l'alto

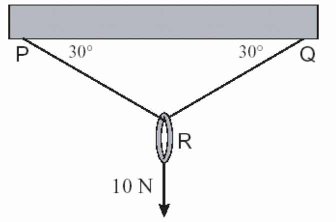
E …Maggiore di 30.8N, verso l'alto



58. Tre sfere pesano rispettivamente 30 N, 18 N e 10 N e sono collegate ad un supporto rigido per mezzo di molle identiche, di massa trascurabile, come mostrato in figura. La costante elastica di ciascuna molla è 1 N/mm. L'allungamento della molla centrale è: …(I livello 1997)[22]

A …8 mm B … 12 mm C …18 mm

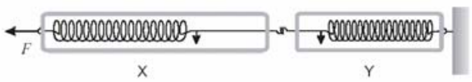
D … 28 mm E …58 mm



59. In figura è mostrato un anello R, del peso di 10N, appeso ad una corda fissata negli estremi P e Q ad un asse orizzontale; la corda forma angoli di 30° con l'asse. Qual è la tensione della corda? …(I livello 1998)

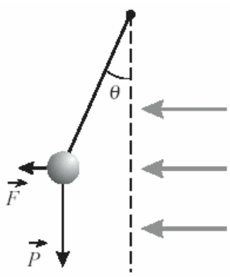
A …5N B …$5\sqrt{3}$ N C …10 N

D …$10\sqrt{3}$ N E … 20 N



60. Due dinamometri diversi, X ed Y, sono attaccati uno all'altro. Il dinamometro Y è vincolato ad un muro, mentre l'altro è tirato in verso opposto al muro, come mostrato in figura. Il valore della costante elastica della molla di X è doppio di quella di Y e il rapporto delle corrispondenti lunghezze a riposo delle due molle è 1.5; i due dinamometri sono tarati in modo da misurare direttamente la forza in newton (N). Quale forza si leggerà sul dinamometro Y, se X indica una forza di 4 N? …(I livello 1998)[23]

A …0N B …4N C … 6N D … 8N E …12N

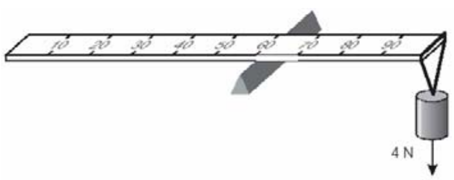


61. Una sferetta di peso P è appesa a una cordicella sottile. In presenza di una forte corrente d'aria che soffia orizzontalmente, il cui effetto è quello di esercitare una forza costante F sulla sferetta, il filo forma un angolo θ con la verticale, come indicato nella figura. Qual è l'equazione corretta che lega θ, F e P ? …(I livello 2001)

A … $\cos\theta = F / P$ B … $\sin\theta = F / P$

C … $\cos\theta = P / F$ D … $\sin\theta = P / F$

E … $\tan\theta = F / P$



62. Un'asta metrica lunga un metro e del peso di 2N può ruotare attorno a un asse orizzontale in corrispondenza del segno di 60 cm. Un oggetto pesante 4N viene appeso a un'estremità dell'asta, come in figura, provocandone la rotazione attorno al fulcro. Quando l'asta è orizzontale, quanto vale il momento delle forze applicate, rispetto al fulcro? … (I livello 2001) [24]

---

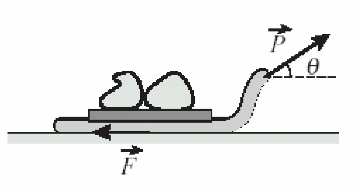
[22] La molla centrale è sollecitata dalla massa di 18N, dall'azione della molla sottostante di 10 e dall'azione verso l'alto della prima molla per 30 N. Le tre forze agiscono tutte nel determinare un allungamento e pertanto la molla risente di una forza di 58 N che determina un allungamento di 58 mm.

[23] Interessante perché ricco di distrattori. Per la III legge i due dinamometri indicano la stessa forza. I dati forniti garantiscono solo che gli allungamenti sarann divesi.

[24] Mettere il peso a metà asta 4·0.4 - 2·0.1 = 1.4 Nm

A … zero B … 1.2 Nm C … 1.4 Nm
D … 1.6 Nm E … 1.8 Nm

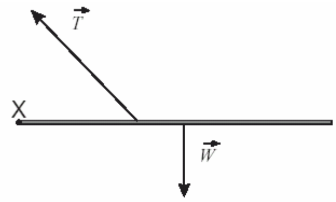
63. Una slitta viene trascinata a velocità costante sulla neve, vincendo una forza di attrito orizzontale $\vec{F}$. La fune che tira la slitta forma un angolo θ con il piano orizzontale, come mostrato in figura. Quando la slitta si muove orizzontalmente a velocità costante, l'intensità della forza $\vec{P}$ impressa dalla fune è … (I livello 2001)

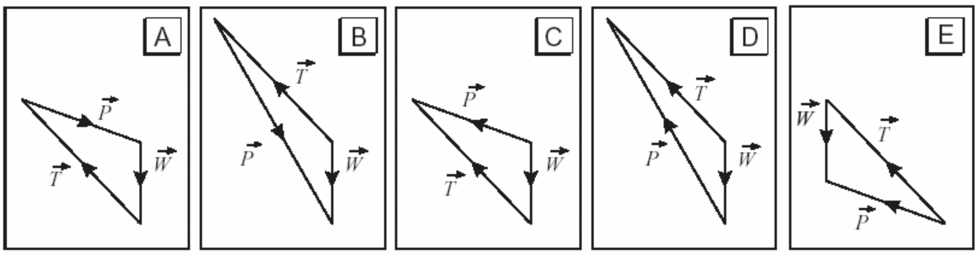


A …F B … $F \cos \theta$ C … F sen θ
D … $F/\cos \theta$ E … F /sen θ

64. Una molla ha una lunghezza a riposo di 50mm e una costante elastica uguale a 400Nm^{-1}. La forza esercitata dalla molla quando la sua lunghezza totale è di 70 mm è ……(I livello 2001)
A … 8.0 N B … 28 N C … 48 N
D … 160 N E … 400 N

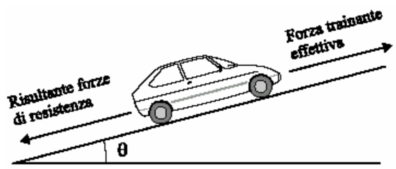
65. Il diagramma mostra il braccio di una gru. Sul braccio agiscono solo tre forze la tensione $\vec{T}$ esercitata dal cavo di sostegno, il peso $\vec{W}$ del braccio e la forza $\vec{P}$, non mostrata agente nel punto X. Il braccio della gru è in equilibrio. Qual è, tra i seguenti, il triangolo delle forze





corretto. …(I livello 2002)
A B C D E

66. Un'automobile di massa m risale a velocità costante un pendio che forma un angolo θ con l'orizzontale, come mostrato in figura. Se F è l'intensità risultante delle forze di resistenza agenti sull'automobile, la forza effettiva dovuta al motore e capace di mantenere costante la velocità è … (I livello 2003)



A mg cos θ + F B mg cos θ – F
C mg sen θ + F D mg sen θ – F
E mg + F sen θ

67. Tra le seguenti, quale combinazione di tre forze complanari che agiscono su un corpo puntiforme non può produrre equilibrio? (I livello 2004)[25]
A 1 N, 3 N, 4 N B 1 N, 3 N, 5 N
C 2 N, 2 N, 2 N D 3 N, 4 N, 5 N
E 4 N, 4 N, 5 N

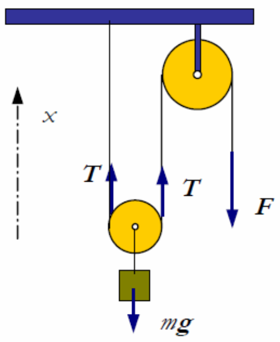
[25] La B non rispetta la disuguaglianza triangolare; la A funziona con forze parallele; la C dà un triangolo equilatero, la D un triangolo rettangolo e la E un triangolo isoscele

9.8 Problemi di fine modulo su leggi della dinamica con e senza attrito

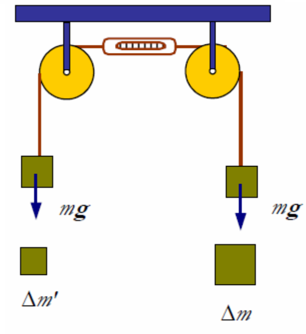
Per risolvere i problemi è bene tenere presenti seguenti elementi.

- Per studiare il moto di un componente di un sistema fisico occorre disegnare il cosiddetto diagramma del corpo libero, cioè rappresentare tutte le forze che agiscono sul corpo ed eventualmente trovarne la risultante attraverso la determinazione delle componenti secondo direzioni opportune. Nello scegliere le direzioni lungo cui determinare le componenti si deve tenere conto della presenza di vincoli che obblighino il movimento secondo determinate direzioni.
- La determinazione del moto si fa determinando la accelerazione attraverso la II legge della dinamica con $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$
- Quando un corpo striscia su un piano, in prima approssimazione, è costante il rapporto Fa/N tra la forza d'attrito esercitata dal piano sul corpo e la reazione vincolare esercitata dal piano. Tale rapporto dipende solo dalle caratteristiche e dalla natura delle due superfici, ma non dalle loro dimensioni. A tale rapporto, indicato con μ_d, si dà il nome di coefficiente d'attrito radente dinamico.
- Se i due corpi si trovano in condizioni statiche allora $F_a \leq \mu_s N$ e, inoltre, il coefficiente d'attrito in questo caso ha un valore più elevato e si chiama coefficiente d'attrito statico. Quando un corpo striscia su un piano inclinato di inclinazione α con coefficiente d'attrito μ, si dimostra che, in condizioni di moto incipiente, è $\mu = \text{tg}\,\alpha$
- Quando si studiano sistemi collegati da funi si può ammettere che la tensione nella fune si trasmetta inalterata a condizione che la massa della fune sia trascurabile, oppure che il sistema si muova di moto uniforme
- Nello studio del moto di sistemi complessi in cui intervengono forze di trasmissione (tensioni) è conveniente studiare il sistema nei suoi singoli componenti e tenere conto di eventuali condizioni geometriche che leghino le diverse grandezze incognite.
- Ricorda che il vettore accelerazione, nel caso dei moti curvilinei, può essere scomposto in una componente tangenziale $a_t = \delta v_t/\delta t$ e in una componente normale $a_n = v^2/r$
- La relazione su cui si fonda la definizione di viscosità secondo cui lo sforzo tangenziale è proporzionale al gradiente di velocità: $\tau = \eta \frac{\Delta v}{\Delta n}$
- Le relazioni che forniscono la forza d'attrito viscoso per un corpo di dimensione tipica l e in particolare la relazione di Stokes che vale per una sfera di raggio r $F = D\eta v l$ $\quad F = 6\,\pi\,\eta v\, r$
- La relazione che fornisce la forza di resistenza del mezzo (valida per v elevate) su un corpo di sezione A secondo cui: $F = ½\, C\, A\rho v^2$
- Per stabilire il regime prevalente si fa il rapporto tra le due forze ottenendo il numero di Reynolds $Re = \frac{\rho v l}{\eta}$
- Per determinare la velocità limite di caduta in presenza di attrito da parte di un mezzo si tratta di annullare la accelerazione e ciò richiede l'equilibrio tra forze d'attrito e forze di caduta (peso od elettriche)

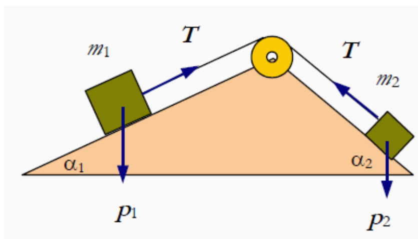
P1. Si consideri il sistema rappresentato in figura. Supponendo trascurabili sia la massa delle pulegge, sia quella della fune, si trovi la condizione di equilibrio e il valore della forza F corrispondente ad una accelerazione a del corpo di massa m. Completare la trattazione determinando la forza necessaria per impartire ad un corpo di massa m =85.2 kg una accelerazione a = 1.26 m/s^2. [26]



P2. Si consideri il sistema rappresentato in figura. Se si incrementa di Δm la massa di destra il sistema accelera e la indicazione del dinamometro cambia. Paradossalmente per evitare che la tensione della fune muti bisogna decrementare la massa di sinistra di $\Delta m'$. Calcolare in particolare $\Delta m'$ quando la variazione a destra è del 10.0%. [27]



P3. Si consideri il sistema rappresentato in figura e si supponga che sia $v_0 = 0$. Dopo aver determinato la condizione che consente di stabilire quale dei due corpi salga, si determini la accelerazione delle due masse. Si determini in funzione delle masse e degli angoli lo spostamento verticale di una massa rispetto all'altra in un tempo Δt. Se ne trovi il valore nel caso di 2 masse identiche sapendo che quando il corpo 1 si sposta di 3.00 metri scende di 2.00 metri mentre il corpo 2 sale di 1.00 metro. [28]

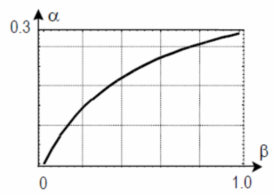


---

[26] Poiché la tensione si trasmette inalterata sarà $T = F$, pertanto, se applichiamo la II legge della dinamica al corpo di massa m avremo (indicando le accelerazioni positive verso l'alto): $2T - mg = ma \Leftrightarrow 2F - mg = ma \Leftrightarrow F = m\frac{a+g}{2}$

In condizione di equilibrio (a=0) si ha $F = m\frac{g}{2}$. Dunque il sistema proposto costituisce una macchina favorevole per il sollevamento perché il peso può essere sostenuto da una forza pari alla sua metà.
Sostituendo i dati numerici si ha: $F = 471$ N

[27] Se ci si limita ad aggiungere Δm volendo lasciare la tensione a T = mg la accelerazione risulta … $a = \frac{\Delta m}{m+\Delta m}g$. Affinché la massa di sinistra acceleri verso l'alto sotto l'azione di T = mg bisogna che il suo valore scenda a m' tale che mg – m'g = m' a da cui $m' = \frac{m(m+\Delta m)}{m+2\Delta m}$. Così $\Delta m' = m - m' = \ldots = \frac{m\,\Delta m}{m+2\Delta m} = \frac{\Delta m}{1+2\frac{\Delta m}{m}}$ e ragionando in termini di valori relativi: $\alpha = \frac{\Delta m'}{m} = \frac{\beta}{1+2\beta}$ con $\beta = \frac{\Delta m}{m}$



Per β = 0.1 si ha α = 0.1/1.2 = 0.083.
E' interessante osservare che la funzione α=f(β) è un ramo di iperbole traslata di cui si riporta l'andamento.

[28] In base a quanto già stabilito nei problemi precedenti possiamo trattare i due corpi come un corpo unico (di massa $m_1 + m_2$) soggetto alla risultante delle forze in direzione tangenziale alla fune. Si ha dunque $a = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1 + m_2} g$

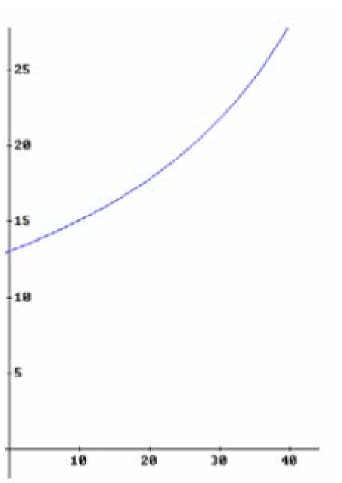
Il primo corpo scende se $m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta > 0$ cioè $\frac{m_1}{m_2} > \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$
Lo spostamento verticale di una massa rispetto all'altra (una scende e l'altra sale) è dato dalla somma dei rispettivi spostamenti verticali e poiché, in uno stesso tempo Δt si ha che $\Delta s_1 = \Delta s_2$, avremo che $\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 = \Delta s_1 \sin\alpha + \Delta s_2 \sin\beta = \Delta s(\sin\alpha + \sin\beta)$.
D'altra parte Δs è facilmente determinabili dalle leggi del m.u.a. …

P4. Il serbatoio di un razzo ha massa $m_0 = 8.00 \cdot 10^3$ kg mentre la massa del razzo, compreso il serbatoio, è $M_0 = 15.00 \cdot 10^3$ kg. Si sa inoltre che il combustibile brucia ad un ritmo costante in un tempo $\Delta t = 40.0$ s e determina una spinta costante $F = 1.96 \cdot 10^5$ N. Il razzo viene orientato orizzontalmente. Determinare il diagramma $a_x = f(t)$ e utilizzarlo per determinare la velocità orizzontale dopo 20.0 s.
Se il razzo viene lanciato verso l'alto si determini il valore della forza d'attrito dell'aria sapendo che per al tempo t = 20.0 s si ha una accelerazione a = 0.8 g
L'accelerazione del razzo viene misurata mediante uno strumento formato da una molla di costante elastica k', contenuta in un tubo verticale compressa da una massa m'. Determinare la relazione tra l'accorciamento e la accelerazione. [29]

Soluzione

La massa M decresce con legge $M = M_0 - kt$ e la costante k può essere determinata osservando che $k = \frac{m_0}{\Delta t} = \frac{8.00 \cdot 10^3}{40.0} = 2.00 \cdot 10^2$ kg/s

Pertanto sarà: $a_x = \frac{F}{M} = \frac{F}{M_0 - kt} = \frac{1.96 \cdot 10^5}{15.00 \cdot 10^3 - 2.00 \cdot 10^2 t} = \frac{1.96 \cdot 10^3}{150 - 2.00t}$



Il diagramma di questa legge può essere ottenuto interpolando i punti calcolati dalla equazione ad intervalli di 5 sec e si ottiene, in tal caso la tabella seguente:

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$M/10^3$	15	14	13	12	11	10	9	8	7
a_x	13.1	14.0	15.1	16.3	17.8	19.6	21.8	24,5	28.0

Se applichiamo il metodo dell'area otterremo la differenza tra la velocità iniziale (in questo caso nulla) e quella finale. Per calcolare l'area sarà sufficiente approssimare i *trapezoidi* racchiusi dal diagramma con dei trapezi e, ricordando che l'area del trapezio si ottiene dalla semisomma delle basi (valori adiacenti di accelerazione) per l'altezza (intervallo di 5 secondi) avremo:

$v - v_0 = ½\, 5\, (13.1 + 2 \cdot 14.0 + 2 \cdot 15.1 + 2 \cdot 16.3 + 17.8) = 304$ m/sec

La velocità trovata è quella in orizzontale. Poiché i valori di a determinati sono dello stesso ordine di grandezza della accelerazione di gravità non è possibile trascurare il moto lungo la verticale.

Nel caso di lancio lungo la verticale, se indichiamo con F la forza di spinta, con F_p il peso e con F_a la forza d'attrito avremo: $F - F_p - F_a = Ma$ con $F_p = Mg$ e $M = M_0 - kt$

Pertanto $F_a = F - M(a + g) = 1.96 \cdot 10^5 - (15 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^2 \cdot 20)(1 + 0.8)\, 9.8 = 1.96 \cdot 10^3$ N

Il misuratore di accelerazione si basa sulle problematiche affrontate nel testo sulle variazioni di peso nei sistemi accelerati. Se indichiamo con F_{el} la forza elastica esercitata dalla molla su m' e con Δx lo scostamento dalla condizione di riposo avremo, applicando la II legge della dinamica al moto di m':

$F_{el} - F_p = m'a$ e da qui: $k'\Delta x - m'g = m'a \Leftrightarrow a = \frac{k'}{m'}\Delta x - g$

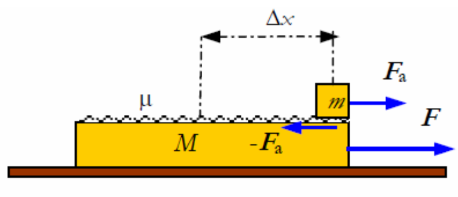
$\Delta h = ½\ \Delta t^2 g (\sin\alpha + \sin\beta) \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1 + m_2}$

Se le due masse sono identiche la espressione precedente si riduce a $\Delta h = ¼\ \Delta t^2 g (\sin^2\alpha - \sin^2\beta)$… Alla fine si trova $\Delta h = 1/12\ \Delta t^2 g$

[29] L'esercizio comporta elementi di calcolo numerico e pertanto viene svolto integralmente nel testo.

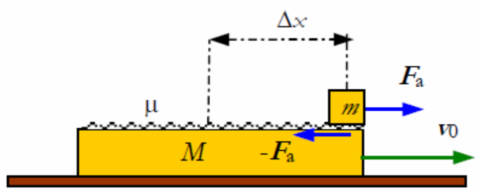
Sulla base del risultato trovato possiamo affermare che la scala dello strumento è di tipo lineare.

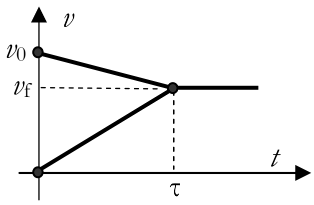
P5. Si consideri un parallelepipedo di massa M appoggiato su una superficie piana senza attrito su cui viene appoggiato un secondo corpo di massa m con coefficiente d'attrito μ rispetto al primo. Se si applica al primo corpo una forza **F** il sistema, inizialmente in quiete, si mette in moto accelerato. Se F è sufficientemente bassa, per effetto dell'attrito anche il II corpo si muove con il primo.
a) Si determini il valore della forza F in corrispondenza della quale il secondo corpo inizia a strisciare b) Nel caso in cui ci sia strisciamento reciproco, la accelerazione relativa ed il tempo impiegato dal corpo sovrastante a percorrere uno spazio Δx rispetto al corpo sottostante. Esprimere i risultati evidenziando il rapporto β tra le due masse.[30]



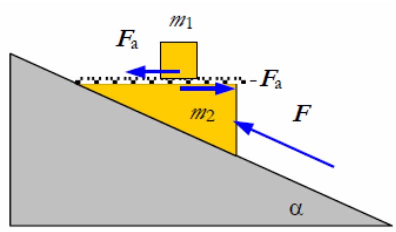
P6. Si consideri un parallelepipedo di massa M appoggiato su una superficie piana senza attrito e dotato di velocità v_0; su di esso viene appoggiato un secondo corpo di massa m, inizialmente in quiete. Se il coefficiente d'attrito tra i due corpi è μ i due corpi inizialmente strisciano l'uno rispetto all'altro e man mano diminuisce la loro velocità relativa finché si fermano. Si trovino:

a) le accelerazioni a_m e a_M dei due corpi e si tracci il diagramma velocità tempo dei due corpi
b) l'istante τ in cui il sistema cessa di accelerare
c) lo spazio Δx che viene percorso dal secondo corpo strisciando sul primo, prima di arrestarsi
d) la velocità finale v_f del sistema dei due corpi.
e) si rappresenti l'andamento di v_f al variare del rapporto β delle due masse [31]





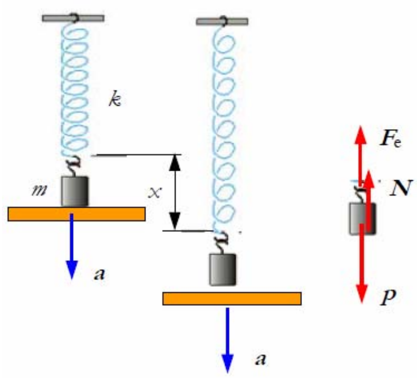
P7. Si consideri un sistema costituito da due corpi di massa m_1 e m_2 appoggiati l'uno sull'altro e posti su un piano inclinato di angolo α e di massa molto elevata. Il corpo inferiore ha la stessa forma del piano in modo di presentare una superficie superiore orizzontale ed è sollecitato da una forza F diretta come il piano e orientata verso l'alto; tra i due corpi si ha un coefficiente d'attrito μ. Determinare: a) il valore F_{eq} di F per il quale il sistema è in equilibrio. b)



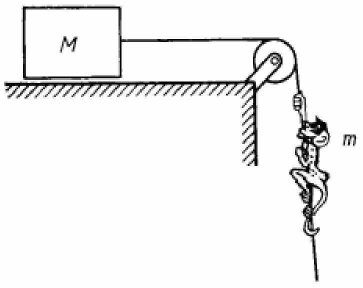
[30] a) scrivere l'accelerazione se non c'è moto relativo e usare la II legge. Il valore limite per F risulta μ (M + m)g . b) si scrivono le due accelerazioni e si fa la differenza per trovare il valore relativo $a_r = \mu g(1+\beta) - \frac{F}{M}$ c) il corpo striscia di m.u.a. e pertanto per percorrere Δx impiega $\tau = \sqrt{\frac{2\Delta x}{\frac{F}{M} - \mu g(1+\beta)}}$

[31] Indichiamo con le maiuscole i dati di M e con le minuscole quelli di m. a = μg e A = $-\mu g\beta$ b) si hanno due m.u.a. (vedi diagramma) v = μgt e V = $v_0 - \mu\beta g t$ e mettendo a sistema si ottengono $\tau = \frac{v_0}{\mu g(1+\beta)}$ e $v_f =$. Lo spazio percorso da m si trova calcolando l'area di un triangolo (vedi diagramma) e risulta $\Delta x = \frac{v_0^2}{\mu g(1+\beta)}$ e il diagramma è un ramo di iperbole traslata che si consiglia di tracciare ragionando sul significato fisico.

il valore F'di F in corrispondenza del quale i due corpi incominciano a scivolare l'uno rispetto all'altro. c) Cosa accade per $\mu=1/\tan\alpha$? [32]



P8. Un corpo di massa m è sospeso ad una molla fissa di costante elastica k che si trova in condizione di riposo quando il corpo è appoggiato ad un supporto orizzontale. Ad un certo istante il supporto comincia ad accelerare con accelerazione verso il basso **a** minore della accelerazione di gravità. Il corpo a sua volta inizia a cadere sotto l'azione simultanea del proprio peso, della forza elastica e della reazione vincolare. a) Determinare l'istante in cui il corpo inizia a distaccarsi dal supporto. b) Dire cosa accade se il supporto cade liberamente. [33]



P9. Una scimmia di massa m si arrampica lungo una fune che scorre in una puleggia; l'altro estremo della fune è fissato ad un peso di massa M giacente in un piano orizzontale. Supponendo che l'attrito sia trascurabile determinare la accelerazione dei due corpi e la tensione nella fune nei seguenti tre casi: a) la scimmia non si muove rispetto alla fune b) la scimmia si muove rispetto alla fune con accelerazione a_{sf} verso l'alto c) la scimmia si muove rispetto alla fune con accelerazione a_{sf} verso il basso [34]

P10. Un corpo di peso **p** è appoggiato su un piano orizzontale con coefficiente d'attrito μ. Nel baricentro del corpo è applicata una forza **F** che forma un angolo acuto α positivo con l'orizzontale. De-

---

[32] a) La condizione di equilibrio corrisponde a $F_{eq} = (m_1 + m_2)g \sin \alpha$. Per il resto il problema è piuttosto complesso perché se si scrive l'equazione de moto del sistema in condizione di strisciamento incipiente compaiono due incognite F' e a':

$F' - (m_1+m_2)g \sin\alpha = (m_1+m_2)a'$

Se d'altra parte scriviamo l'equazione del moto di m intervengono due nuove incognite e cioè la reazione vincolare tra i due corpi e la forza d'attrito.

$F_a\cos\alpha + N_1 \sin\alpha - m_1 g \sin\alpha = m_1 a'$

Ci servono pertanto altre due equazioni, la prima lega N_1 a $F_a = \mu N_1$ mentre la seconda è quella dell'equilibrio delle forze in direzione ortogonale a F.

$N_1 \cos\alpha - m_1 g \cos\alpha - F_a \sin\alpha = 0$

Risolvendo il sistema si ottengono N_1 e poi F'

$N_1 = \dfrac{m_1 g}{1 - \mu\tan\alpha}$ e $F' = g \cos\alpha\, (m_1+m_2)\dfrac{\mu+\tan\alpha}{1 - \mu\tan\alpha}$ Per $\mu = 1/\tan\alpha$ la forza necessaria tende a infinito. Posto $\mu = 1/\tan\varphi$ si ottiene

$$F' = g \cos\alpha\, (m_1+m_2)\frac{1+\tan\alpha \tan\varphi}{\tan\varphi - \tan\alpha} = = g \cos\alpha\, (m_1+m_2) \frac{1}{\tan(\alpha - \varphi)}$$

[33] Scrivere la II legge della dinamica per il corpo considerato e tener conto che sino all'istante del distacco il corpo cade con accelerazione a e dunque con legge oraria $x = ½\, a\, t^2$. Nel momento del distacco si annulla la reazione vincolare e così si ottiene:

$$\tau = \sqrt{\frac{2m(g - a)}{k\, a}}$$

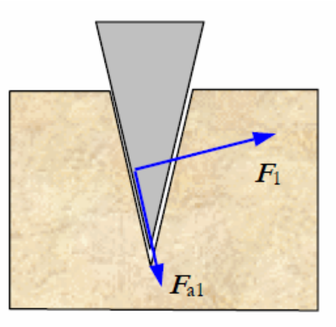
Se a = g il distacco è immediato perché il corpo viene rallentato dalla azione della forza elastica e tale situazione si riscontra anche nella relazione già determinata.

[34] Nel primo caso la accelerazione è la stessa, non occorrono conti, e vale $a = \dfrac{mg}{M+m}$ mentre la tensione T = Ma.

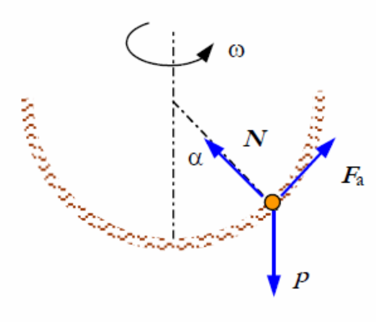
Nel secondo caso, indicata con A la accelerazione di M e con a quella della scimmia si ha: $a = A - a_{sf}$ mente per la II legge $T = Ma$ e $mg - T = m(A - a_{sf})$. Si ottiene $A = \dfrac{m}{M + m}(g + a_{sf})$. Nel terzo caso si ha solo un cambio di segno $A = \dfrac{m}{M + m}(g - a_{sf})$

terminare, in funzione di μ e di α, il valore della forza **F** che determina la condizione di *moto incipiente* (valore massimo della forza d'attrito). [35]

P11. Quando un cuneo di acciaio di apertura α penetra nel legno per rompere il ciocco agiscono sul cuneo le forze d'attrito tra legno e metallo e le reazioni vincolari esercitate dal legno. Il cuneo non viene espulso se le reazioni vincolari del legno (che sono molto elevate) danno una risultante minore di quella delle forze d'attrito. a) Determinare la relazione che lega il coefficiente d'attrito μ con l'angolo di apertura α nella ipotesi che si possa trascurare il peso del cuneo rispetto alle altre forze di interazione in gioco. b) Utilizzare il risultato trovato per spiegare come mai i cunei abbiano angoli di apertura piuttosto piccoli. c) Se si volesse effettuare una stima della intensità delle reazioni vincolari e delle forze d'attrito quale altra grandezza bisognerebbe conoscere? [36]



P12. Una pallina puntiforme di massa *m* si trova entro una scodella di raggio *r* caratterizzata da un coefficiente d'attrito μ e può essere mossa all'interno della scodella. a) Determinare il valore massimo dell'angolo formato con il raggio verticale per il quale si determina una condizione di equilibrio. b) Si supponga poi che la scodella ruoti con velocità angolare ω attorno ad un asse verticale. Determinare l'intervallo di estremi ω_1 ed ω_2 entro il quale la sfera rimane in equilibrio per una dato valore di α.
Suggerimenti: in figura è rappresentato il caso di moto incipiente verso il basso; poiché nella soluzione del sistema è presente la tangente è conveniente esprimere il coefficiente μ come tangente di un opportuno angolo φ; ciò consente di scrivere in forma più elegante i risultati. [37]

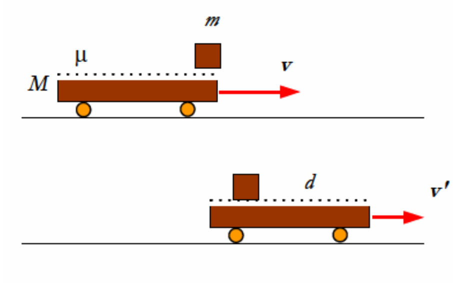


---

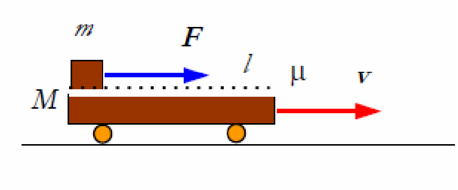
[35] N = mg – F sin α mentre $F_a = \mu N$. Inoltre per l'equilibrio lungo il piano Fa = μ(mg – F sinα. Si ottiene $F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}$ e se si pone, come al solito, $\mu = 1/\tan\varphi$ si arriva alla espressione più compatta ed elegante: $F = \dfrac{mg \sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}$

[36] a) Il problema è simmetrico rispetto alla verticale e basta operare su un solo lato con Angoli ½ α. Il cuneo resta conficcato se la risultante tra **F** e $\mathbf{F_a}$ lungo la verticale è nulla
in condizione di moto incipiente (cioè quando la forza d'attrito statico prende il suo valore massimo). Si arriva così alla condizione $\mu > \tan \alpha/2$.
b) Poiché μ è fissato il suo valore determina il valore massimo che può avere l'angolo di apertura $\alpha_{max} = 2 \arctan \mu$
c) Come si è visto trattando il punto a) le reazioni vincolari si semplificano il che vuol dire che il risultato non dipende da quanto il cuneo venga conficcato nel legno. E' proprio questa la informazione che ci manca; man mano che il cuneo penetra le fibre del legno vengono flesse lateralmente ed è questa flessione a determinare le reazioni vincolari fino al superamento del limite di rottura.

[37] In presenza di attrito e in assenza di rotazioni basta tracciare il diagramma del corpo libero e si ottiene immediatamente che l'angolo massimo di equlibrio si ottiene per $\tan \alpha = \mu$. Supponiamo ora che il sistema stia ruotando a bassa velocità per determinare il limite inferiore di ω. La forza d'attrito è tangente alla scodella e orientata verso l'alto. Se scriviamo la II legge della dinamica scomponendo lungo un asse orizzontale e uno verticale avremo: $N \sin\alpha - Fa \cos \alpha = m \omega^2 r \sin \alpha$ e $N \cos\alpha + Fa \sin \alpha = mg$ con l'ulteriore condizione che $Fa = \mu N$.

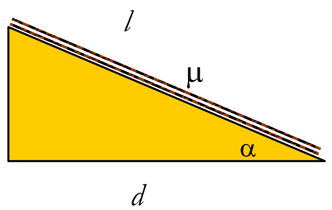


P13. Un carrello di massa M si muove di moto uniforme con velocità **v** su rotaie in un contesto di attrito trascurabile. Un corpo di massa m viene appoggiato con velocità iniziale nulla sul bordo anteriore del carrello. Indicando con μ il coefficiente d'attrito tra M e m determinare: a) La velocità v dei due corpi quando cessano di strisciare l'uno sull'altro e l'istante τ in cui si verifica tale condizione. b) La posizione d di m rispetto al bordo anteriore c) Eseguire i calcoli nell'ipotesi che sia $M/m = 10$, $\mu = 0.4$, $v = 15$ m/s. Suggerimento: indicare con a_1 e a_2 le due accelerazioni durante la fase di strisciamento e con β il rapporto delle due masse; tener conto delle leggi del m.u.a. [38]



P14. Un carrello di massa M e un corpo di massa m disposto all'estremo posteriore si stanno muovendo con velocità **v** su rotaie in un contesto di attrito trascurabile; il coefficiente d'attrito tra i due corpi vale μ e il carrello ha lunghezza l. Ad un certo istante viene applicata una forza **F** a m. Determinare: a) La forza minima necessaria a determinare uno strisciamento relativo tra i due corpi. b) Nel caso in cui **F** sia più grande del valore trovato la accelerazione relativa dei due corpi ed il tempo impiegato da m a cadere sul davanti del carrello.

Suggerimento: indicare con β il rapporto delle due masse e determinare le due accelerazioni a_1 e a_2 cui sono soggetti i due corpi. [39]



P15. Un corpo, partendo dalla quiete, scivola dalla sommità di un piano inclinato di spigolo di base d, angolo α e coefficiente d'attrito dinamico μ. a) Determinare la espressione della accelerazione b) Determinare la espressione del tempo di discesa c) Dimostrare che il tempo di discesa è minimo per $\tan(2\alpha) = 1/\mu$. d) Supponendo

---

Da qui si ottiene $\omega^2 = \dfrac{g}{r\sin\alpha}\,\dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$ ma dalle identità sulla combinazione lineare di seni e coseni se si pone $\mu = \tan\varphi$ si ottiene $\omega^2 = \dfrac{g}{r\sin\alpha}\tan(\alpha - \varphi)$

Si ragiona analogamente quando si cerca il limite superiore. In questo caso la forza d'attrito è orientata verso il basso per impedire la risalita e si ottiene:

$\omega^2 = \dfrac{g}{r\sin\alpha}\tan(\alpha + \varphi)$. Dunque il sistema risulta è in equilibrio per:

$$\sqrt{\frac{g}{r\sin\alpha}\tan(\alpha - \varphi)} \le \omega \le \sqrt{\frac{g}{r\sin\alpha}\tan(\alpha + \varphi)}$$

[38] Si scrivono le equazioni del moto dei due corpi governati dalle accelerazioni (una positiva e l'altra negativa) dovute alle due forze d'attrito. Il moto relativo cessa quando le due velocità diventano uguali. Si trova:

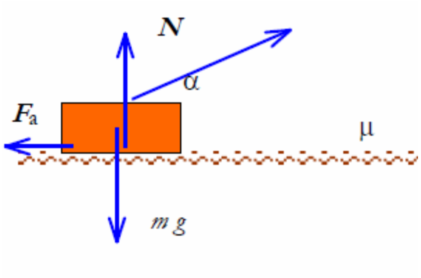
$\tau = \dfrac{v}{\mu g\,(1 + \alpha)}$ e $v = \dfrac{v}{1 + \alpha}$

La quantità d può essere trovata o come differenza delle posizioni o studiando il moto relativo del corpo m su M. In entrambi i casi si ha: $d = \dfrac{v^2}{2\mu g(1 + \alpha)}$

[39] La forza minima si ha per $F = \mu\ m\,g\,(1 + \alpha)$. Il tempo τ necessario al corpo m per percorrere la distanza l può essere ottenuto dopo aver calcolato la accelerazione relativa; si ha allora $\tau = \sqrt{\dfrac{2\,l}{F/m - \mu g(1 + \alpha)}}$

che sia μ = 0.35 e l = 2.50 m determinare il valore del tempo minimo e del corrispondente angolo
Suggerimento: per rispondere alla domanda c) osservare che il tempo è minimo quando lo è il suo quadrato e che perché ciò si verifichi deve essere massimo il denominatore; utilizzare poi la identità della combinazione lineare di seni e coseni già citata. [40]

P16. Un corpo di massa m scivola su un piano orizzontale sotto l'azione di una forza **F** di modulo variabile e inclinata di α. F varia nel tempo con legge $F = k\,t$ dove k è una opportuna costante. Determinare: a) L'istante τ in cui il corpo si distacca dal piano. b) Il valore di velocità in quell'istante c) Lo spazio percorso d) L'istante τ nella ipotesi che tra il corpo ed il piano agisca un coefficiente d'attrito μ.
Suggerimento: si tenga presente che se la accelerazione è proporzionale al tempo allora l'andamento della velocità sarà di tipo parabolico. Se il diagramma della velocità è di tipo parabolico lo spazio (area) può essere calcolato attraverso il teorema di Archimede. [41]



P17. Le particelle di polvere, a causa delle loro ridotte dimensioni, cadono sotto l'effetto prevalente della resistenza viscosa. a) Stimare il tempo impiegato dalle particelle di polvere a depositarsi in una stanza di altezza h = 2.40 m. Si assuma come raggio medio delle particelle il valore r ≈0.03 mm, densità media dei costituenti $\rho \approx 2.0\times10^3$ kg/m³, viscosità dell'aria *a* temperatura ambiente η =

---

[40] a) La accelerazione non dipende dalla massa che si semplifica quando si scrive la II legge della dinamica e risulta $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. Il moto è u.a. e dunque $l = \frac{1}{2} a\tau^2$ con la precisazione che $l = d/\cos\alpha$.

Dunque $\tau = \sqrt{\dfrac{2\,d}{\cos\alpha\; g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}$

$\text{sen}\,\alpha\cos\alpha - \mu\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\text{sen}\,2\alpha - \mu\cos2\alpha - \mu) = \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2+1}\,[\text{sen}(2\alpha-\varphi) - \mu]$ con $\varphi = \arctan\mu$

Il tempo è minimo quando si ha il massimo al denominatore e cioè quando $\text{sen}(2\alpha - \varphi) = 1$ ovvero per $2\alpha - \varphi = \pi/2$ e cioè $2\alpha = \pi/2 + \varphi$ e cioè $\tan2\alpha = \tan(\pi/2 + \varphi) = -1/\tan\varphi = -1/\mu$

Con i dati forniti si ha: $2\alpha = 180 + \arctan(-1/0.35)$ e $\alpha = 54.645°$

Sostituendo nella espressione del temp t = 1.44 s

[41] Il distacco avviene quanto $F_y = mg$ e da ciò si ottiene $t = \dfrac{Mg}{k\sin\alpha}$

Dopo aver calcolato la accelerazione il valore di v risulta essere $\dfrac{m^2 g^2\cos\alpha}{2\,k\sin^2\alpha}$

Se $v = \frac{1}{2} k\cos\alpha\, t^2$ per trovare Δx basta tener presente che se l'area del segmento parabolico è 2/3 di quella del rettangolo l'area sottesa dalla parabola (che è lo spazio percorso) è 1/3 di quella del rettangolo e cioè:

$\Delta x = (1/3\, t)(\frac{1}{2} k\cos\alpha\, t^2) = 1/6\, k\cos\alpha\, t^3$. Sostituendo per t il valore del distacco si ottiene $\dfrac{m^2 g^3\cos\alpha}{6\,k^2\sin^3\alpha}$

L'istante del distacco non è influenzato dalla presenza della forza d'attrito che influenza invece l'andamento della accelerazione tangenziale, la velocità e lo spazio percorso.

1.8×10^{-5} Pa·s. b) A posteriori verificare, calcolando il numero di Reynolds, che ci si trova effettivamente nelle condizioni di predominanza dell'attrito viscoso.

P18. Calcolare, seguendo la metodologia usata nel testo per le gocce di pioggia, la velocità limite dei chicchi di grandine ipotizzando che sia 2r = 6 mm e che la densità del granello sia $\rho = 0.8 \times 10^3$ kg/m^3.

9.9 Quesiti di fine capitolo

Raccolta di quesiti a risposta aperta e chiusa relativi agli argomenti e considerazioni del testo

1. Indicare la proposizione vera; *a*) Il termine attrito rinvia al concetto di attrazione tra le superfici *a* contatto. b) La forza d'attrito impedisce il movimento. c) L'attrito interno riguarda fenomeni che interessano almeno un fluido d) L'attrito volvente è una forma di attrito interno. [42]
2. Stabilire quale di queste coppie di aggettivi riguardanti l'attrito è incompatibile: *a*) interno radente b) esterno radente c) radente statico d) volvente radente. [43]
3. Indicare la proposizione falsa; *a*) Per un corpo soggetto *a* forza d'attrito F_a ha un valore che dipende solo dalle caratteristiche dei corpi a contatto; b) Quando un corpo rugoso è fermo su un piano orizzontale la forza d'attrito statico è nulla; c) La forza d'attrito statico è l'espressione macroscopica delle forze dovute alla deformazione elastica delle microasperità delle superfici *a* contatto; d) La forza d'attrito massima tra due superfici è proporzionale alla forza applicata in direzione perpendicolare alle superfici. [44]
4. Indicare la proposizione vera; *a*) La forza d'attrito statico tra due corpi è sempre proporzionale alla forza esercitata tra i due corpi in direzione normale alla superficie di contatto; b) Una volta che siano assegnate le caratteristiche delle superfici di contatto e le forze che agiscono in direzione perpendicolare alle stesse, la forza d'attrito statico è completamente determinata; c) La forza d'attrito statico tra due materiali dipende dalla estensione della superficie di appoggio; d) Il coefficiente d'attrito statico è generalmente compreso tra 0.1 e 1. [45]
5. Indicare la proposizione vera *a*) Il coefficiente d'attrito è senza dimensioni; b) Il coefficiente d'attrito statico diminuisce sempre man mano che aumenta il grado di finitura delle superfici *a* contatto; c) Il coefficiente di attrito statico può essere determinato misurando con un dinamometro la forza orizzontale minima necessaria *a* mettere in moto un corpo in quiete e rapportandola con la forza peso; d) Su un piano inclinato di inclinazione φ si ha sempre $\tan \varphi = \mu_s$. [46]

---

[42] *a*) Falso; viene dal latino *attrere* (sfregare). b) Falso: tende ad impedire il moto relativo tra i due corpi *a* contatto, ma ciò può essere causa di movimento, per esempio nel camminare. c) Vero d)Falso

[43] *a*) L'attrito radente è una forma di attrito esterno, cioè si sviluppa all'esterno (per la precisione alla superficie) dei corpi. La coppia radente e volvente non è incompatibile; si pensi per esempio alla sua simultaneità durante la frenata di una automobile

[44] *a*) Falso, dipende anche dalla forza premente b) Vero. c) Vero d) Vero.

[45] *a*) Falso: quella proporzionale è la forza d'attrito statico massima. b) Falso: la forza d'attrito statico è una forza variabile il cui valore massimo è determinato dalle condizioni dette, ma il cui valore attuale dipende solo dalla condizione $R_t = 0$ c) Falso d) Vero

[46] *a*) Vero: è pari al rapporto tra due forze. b) Falso: raggiunto un grado elevato le superfici *a* contatto iniziano ad interagire su base molecolare e le forze d'attrito aumentano. c) Falso: bisogna aggiungere che il corpo si deve trovare su di un piano orizzon-

6. Indicare la proposizione falsa *a*) Il coefficiente d'attrito ha un valore indipendente dal sistema di unità di misura scelto; b) Un corpo è appoggiato in quiete su di un piano inclinato di angolo α. Se $\sin\alpha > \mu_s$ il corpo si mette in moto sicuramente; c) Il coefficiente di attrito dinamico è sempre minore del coefficiente di attrito statico; d) La forza d'attrito dinamico dipende in misura sensibile dalla velocità relativa tra le due superfici *a* contatto. [47]
7. Indicare la proposizione vera *a*) Mentre la forza d'attrito statico ha un valore variabile da 0 a un valore massimo quella d'attrito dinamico ha un valore fissato una volta che siano note la forza in direzione perpendicolare al vincolo e le caratteristiche delle superfici a contatto. b) Quando un corpo sale lungo un piano inclinato in presenza di attrito e si arresta non può mai ridiscendere spontaneamente perché $\mu_s > \mu_d$. c) Se si indica con α l'angolo di inclinazione di un piano su cui può scivolare un corpo di coefficienti d'attrito μ_d il corpo non riesce *a* salire sul piano se $\tan\alpha > \mu_d$. d) La forza d'attrito radente e la forza d'attrito volvente hanno, solitamente lo stesso ordine di grandezza. [48]
8. Indicare la proposizione vera *a*) Il coefficiente d'attrito statico della gomma su calcestruzzo asciutto è > 1. b) Il coefficiente d'attrito statico della gomma su calcestruzzo bagnato è molto minore di 1 c) Il coefficiente d'attrito volvente ha le stesse dimensioni del coefficiente d'attrito radente. Al crescere del raggio di curvatura la forza d'attrito volvente aumenta. [49]
9. Dare le motivazioni fisiche che consentono di affermare che la forza d'attrito statico varia da 0 a un valore massimo prefissato. [50]
10. Dare una spiegazione della seguente equazione che definisce la forza d'attrito definendo il contesto a cui la si applica $F_a \le F_{a,max}$
11. Spiegare in termini microscopici l'origine dell'attrito radente. [51]
12. Spiegare perché la forza d'attrito dinamico è sempre minore di quella d'attrito statico massima.

---

tale. d) Falso: la relazione è vera quando, per effetto del particolare angolo di inclinazione il corpo si trovi in condizione di moto incipiente.

[47] *a*) Vero: è un numero puro. b) Vero. Non ci si faccia ingannare dal fatto che nella legge compare la tangente; infatti è sempre $\tan\alpha > \sin\alpha$ e pertanto se la condizione è vera per il seno lo è *a* maggior ragione per la tangente. c) Vero. d) Falso: dipende solo molto debolmente dalla velocità relativa.

[48] *a*) Vero; b) Falso: durante la fase di salita il corpo si arresta perché sia la forza peso, sia la forza d'attrito si oppongono al moto. Dopo l'arresto potrebbe accadere che la componente tangenziale del peso sia maggiore della forza d'attrito statico massima. c) Falso: il fatto che il corpo salga dipende esclusivamente dall'essere dotato di una velocità iniziale. d) Falso: l'attrito volvente determina forze nettamente inferiori.

[49] *a*) Vero; b) Falso: vale 0.8 c) Falso: ha le dimensioni di una lunghezza d) Falso: diminuisce.

[50] Se la forza d'attrito statico non fosse variabile un corpo soggetto a una forza traente uguale a zero si muoverebbe sotto l'azione della forza d'attrito che, invece, in quel caso è nulla. D'altra parte il fatto che per mettere in moto un corpo in quiete si debba applicare una forza nella direzione del moto maggiore di un valore minimo ci dice che la forza d'attrito non può crescere indefinitamente.

[51] Microasperità e interazione microscopica tra le molecole delle superfici *a* contatto

13. Spiegare il significato della seguente relazione $F_s^{max} = \mu_s N$ [52]
14. Discutere la dipendenza del coefficiente di attrito statico dallo stato delle superfici considerate.
15. Spiegare perché solo in condizione di moto incipiente si può affermare che su un piano inclinato di angolo φ cui viene appoggiato un corpo soggetto alla azione del peso si ha $\tan \varphi = \mu_s$. [53]
16. Discutere come cambia la forza d'attrito di un corpo in quiete su un piano inclinato al cambiare dell'angolo di inclinazione partendo da inclinazione nulla. [54]
17. Spiegare perché le gomme da bagnato sono scanalate mentre quelle da asciutto sono lisce. [55]
18. Una corda omogenea di lunghezza l penzola parzialmente da un piano con coefficiente d'attrito μ. Dimostrare che la parte l' di lunghezza massima che può penzolare senza che la corda si muova vale $l' = l\dfrac{\mu}{\mu + 1}$. [56]
19. Un corpo di massa m è appoggiato ad un piano orizzontale di coefficiente d'attrito μ. Al corpo viene applicata una forza F che forma un angolo α con la orizzontale. Al crescere di F, fissato l'angolo α il corpo rimane in equilibrio finché, per un valore di F da determinare si raggiunge lo stato di moto incipiente. Determinare tale valore di F. [57]

---

[52] La forza d'attrito statico massima è proporzionale alla reazione vincolare in direzione normale (che *a* sua volta è pari alla componente normale della risultante delle forze non vincolari) e la costante di proporzionalità è detta coefficiente d'attrito statico.

[53] In generale $\tan\varphi = \sin \varphi / \cos \varphi = (mg\sin \varphi)/(mg\cos \varphi) = F_a/N \le \mu_s$. Quando F_a raggiunge il valore massimo si ottiene l'uguaglianza

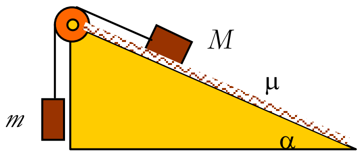
[54] Man mano che aumenta la inclinazione aumenta la componente tangenziale del peso e deve pertanto aumentare la forza d'attrito. Mentre avviene questo fenomeno la componente normale della forza peso diminuisce ed essa determina il valore massimo della forza d'attrito. Dunque, al crescere dell'angolo si va verso la condizione di moto incipiente che si realizza quando la forza d'attrito necessaria *a* mantenere la quiete è pari al valore massimo possibile della stessa.

[55] Le scanalature fanno scorrere l'acqua che, in caso contrario, darebbe un effetto lubrificante; in condizioni di asciutto non si corre questo rischio e pertanto si usa una gomma liscia che massimizza la superficie di contatto (stabilità) e può essere costruita con mescole più morbide (maggiore coefficiente d'attrito e più rapido processo di andata in temperatura).

[56] La forza d'attrito in condizione di moto incipiente è legata al peso del tratto di fune appoggiata e vale $\rho(l - l')\mu$ dove ρ è la densità lineare (massa per unità di lunghezza). La forza di trazione è pari al peso della fune che penzola $\rho l'\mu$. In condizione di moto incipiente le due forze sono uguali; da cui: $(l - l')\mu = l'\mu$. Ricavando l' si ottiene il risultato. Osservazione: come si vede, trattandosi di un problema in cui è richiesto un confronto tra due grandezze entrambe influenzate da ρ, il risultato è indipendente da ρ.

[57] In condizioni di moto incipiente $F_a = \mu N$. Applicando la condizione di equilibrio $R_t = R_n = 0$ ed esplicitando F si ottiene $F = \dfrac{\mu m g}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$

20. Spiegare la differenza a livello microscopico tra attrito statico ed attrito dinamico. [58]
21. Fornire almeno tre valori tipici di coefficiente d'attrito dinamico.
22. Si consideri un piano inclinato di angolo α su cui viene collocato un corpo di massa M e dotato di coefficiente d'attrito μ con $\tan \alpha > \mu$. Il corpo è collegato mediante ad una fune ed una puleggia di massa trascurabile ad un secondo corpo di massa m libero di cadere lungo la verticale. In queste condizioni è intuitivo affermare che il primo corpo, *a* seconda dei diversi valori di m/M, possa sia trascinare il secondo, sia essere trascinato da esso. Dimostrare che il corpo rimane *a* riposo quando $M(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \le m \le M(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$. [59]



23. Consideriamo il caso del quesito precedente e supponiamo che sia $M > (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) > m$. In queste condizioni il primo corpo scivola lungo il piano. Determinarne la accelerazione e stabilire cosa accade quando il secondo corpo dopo aver superato la puleggia comincia anch'esso *a* scivolare lungo il piano.
24. Discutere le considerazioni che portano ad introdurre il concetto di attrito volvente ed i parametri che governano il fenomeno.
25. Spiegare, attraverso considerazioni microscopiche, la ragione per cui le forze d'attrito volvente sono inferiori *a* quelle d'attrito radente. [60]
26. Indicare la proposizione vera *a*) La velocità massima *a* cui si può affrontare una curva si ottiene dalla relazione $\frac{mv^2}{r} \ge \mu mg$; b) Nelle relazioni in cui si discute la tenuta in curva il coefficiente d'attrito è quello dinamico; c) Se si rispetta la condizione per cui $v \le \sqrt{\mu\, r g}$ allora non esistono vincoli circa l'angolo di cui ci si può inclinare rispetto alla verticale; d) Se ci si piega dell'angolo corretto rispetto alla velocità ed al raggio di curvatura è il moto stesso *a* far curvare la ruota. [61]
27. Determinare l'angolo massimo di cui ci si può inclinare rispetto alla verticale nella effettuazione di una curva. [62]
28. Perché quando si hanno problemi di tenuta su ghiaccio o neve è consigliabile diminuire la pressione dei pneumatici? [63]

---

[58] Nel caso di moto incipiente le microasperità hanno raggiunto le condizioni di massima deformazione oltre la quale esse iniziano *a* scorrere le une sulle altre dando luogo *a* incastri solo parziali, saltellamenti, …Ciò fa sì che la forza d'attrito sia minore.

[59] Si tratta di un istruttivo esercizio sul diagramma del corpo libero e sulla II legge della dinamica. Mentre si risolvono i vari sistemi di equazioni cercare di prestare attenzione al significato dei risultati via via trovati.

[60] Cosa succede alle microasperità?

[61] *a*) Falso: la condizione è del tipo < e corrisponde *a* chiedere che la forza centripeta necessaria *a* rimanere in traiettoria sia maggiore della forza d'attrito massima. b) Falso: è quello statico perché in direzione radiale (cioè nella direzione in cui si esercitano le forze) non c'è movimento. c) Falso: l'angolo ottimale di piega dipende dalla velocità e dal raggio di curvatura secondo la relazione $\tan\alpha = \frac{v^2}{rg}$ ma in corrispondenza di tale angolo deve essere $\tan \alpha \le \mu$ perché altrimenti si cade. d) Vero.

[62] Si veda la discussione nel testo.

[63] Si ha un aumento di stabilità connesso alla maggiore superficie di appoggio

29. Spiegare la funzione delle curve sopraelevate nei circuiti di alta velocità [64]
30. Indicare la proposizione falsa *a*) Se si sospende, mediante un filo sottile, un cilindro di metallo all'interno di un liquido in rotazione il cilindro si mette *a* ruotare insieme al liquido; b) L'attrito interno rappresenta l'opposizione che i diversi strati di un fluido oppongono allo scorrere gli uni sugli altri; c) In un fluido newtoniano il rapporto tra lo sforzo tangenziale ed il gradiente di velocità è costante e si chiama viscosità del fluido; d) Un fluido newtoniano è un fluido nel quale l'attrito interno non sia trascurabile. [65]
31. Indicare la proposizione falsa *a*) Lo sforzo tangenziale è la misura della forza d'attrito di origine viscosa relativa ad una superficie σ divisa per la superficie stessa; b) L'equazione dimensionale della viscosità è $[\eta] = M\ L^{-1}\ T^{-1}$; c) In un fluido newtoniano al crescere del gradiente di velocità cresce la resistenza viscosa; d) La viscosità dei liquidi e dei gas diminuisce al crescere della temperatura. [66]
32. Indicare la proposizione vera *a*) La resistenza di un fluido nei confronti del moto di un corpo solido immerso in esso dipende dalla forma e dalle dimensioni del corpo, dalla velocità relativa e dalle caratteristiche del fluido. Non dipende invece dalla massa del corpo; b) La resistenza del fluido dipende da una resistenza viscosa e da una resistenza da pressione e normalmente la seconda predomina sulla prima; c) La resistenza da pressione è legata alla pressione del fluido; d) Quando la viscosità è espressa in SAE W la lettera W sta per water cioè si riferisce al confronto con la viscosità dell'acqua [67]
33. Indicare la proposizione vera *a*) La resistenza da pressione è dovuta alla compressione esercitata dal corpo sul fluido; b) La resistenza viscosa è legata alla presenza di un gradiente di velocità del fluido nelle immediate vicinanze del corpo immerso; c)La resistenza alla pressione dipende dalla forma del corpo ed è proporzionale alla densità del fluido, alla sezione trasversale del corpo ed alla velocità; d) La resistenza viscosa è proporzionale alla velocità del corpo, alla viscosità del fluido e ad una dimensione caratteristica del corpo ma non dipende dalla forma del corpo stesso. [68]
34. Indicare la proposizione falsa *a*) La forma del corpo immerso influenza molto notevolmente la resistenza alla pressione perché determina la comparsa o meno di vortici nella parte posteriore del corpo; b) Per stabilire se ci si trovi in zona di prevalente azione viscosa

---

[64] Piegandosi si diminuisce la reazione vincolare e ciò fa diminuire la forza d'attrito invece con la curva sopraelevata …

[65] *a*) Vero. b) Vero. c) Vero. d) Falso: è un fluido esente da vortici nel quale il rapporto tra lo sforzo tangenziale e il gradiente di velocità sia costante

[66] *a*) Vero b) Vero c) Vero d) Falso: diminuisce per i liquidi ma cresce per i gas

[67] *a*) Vero b) Falso: le due forme di resistenza hanno ambiti di predominanza variabili *a* seconda del contesto c) Falso d) Falso: w sta per winter; esprime cioè la viscosità ad una temperatura invernale di riferimento

[68] *a*) Falso: è dovuta alla differenza di pressione tra parte anteriore e posteriore del corpo che penetra nel fluido b) Vero c) Falso: è proporzionale al quadrato della velocità. d) Falso: dipende dalla forma attraverso un coefficiente adimensionale

o di resistenza alla pressione si utilizza una costante adimensionale detta numero di Reynolds pari al rapporto tra resistenza del mezzo e forza viscosa; c) Il numero di Reynolds ha le dimensioni di una forza; d) Il numero di Reynolds può essere calcolato solo *a* posteriori dopo aver ipotizzato quale forza fosse prevalente. [69]

35. Illustrare le considerazioni che portano ad introdurre la nozione di viscosità soffermandosi sul concetto di fluido newtoniano.
36. Dedurre da considerazioni dimensionali la relazione per la resistenza di un fluido alla pressione esercitata da un corpo in moto.
37. Spiegare il ruolo e la deduzione dimensionale del numero di Reynolds.
38. Dedurre attraverso considerazioni dimensionali la legge che fornisce la resistenza viscosa ed illustrarne in particolare il valore nel caso di una sfera di raggio R.
39. Indicare la proposizione falsa *a*) La velocità limite di un caduta di un corpo immerso in un fluido è quel valore di velocità per il quale la forza di resistenza determina una risultante nulla di tutte le forze applicate al corpo. b) La velocità limite è il valore di velocità massimo che un corpo in caduta libera in un fluido può assumere c) Il valore della velocità limite ha espressioni diverse *a* seconda del tipo di resistenza prevalente. d) Nel caso di moto soggetto alla resistenza viscosa la velocità limite è proporzionale alla densità del corpo e non dipende dalla densità del fluido. [70]
40. Illustrare il concetto di velocità limite e quali siano i parametri da considerare per la sua determinazione.
41. Determinare la velocità limite per una sfera soggetta alla legge di Stokes.
42. Supponendo che una sferetta d'acqua cada in aria discutere quali siano i parametri in grado di determinare la presenza di resistenza viscosa o di resistenza da pressione. Dare qualche ordine di grandezza delle velocità finali conseguenti. [71]
43. Tramite la legge di Stokes determinare la velocità limite di caduta in condizioni attrito viscoso di una sferetta di raggio R.

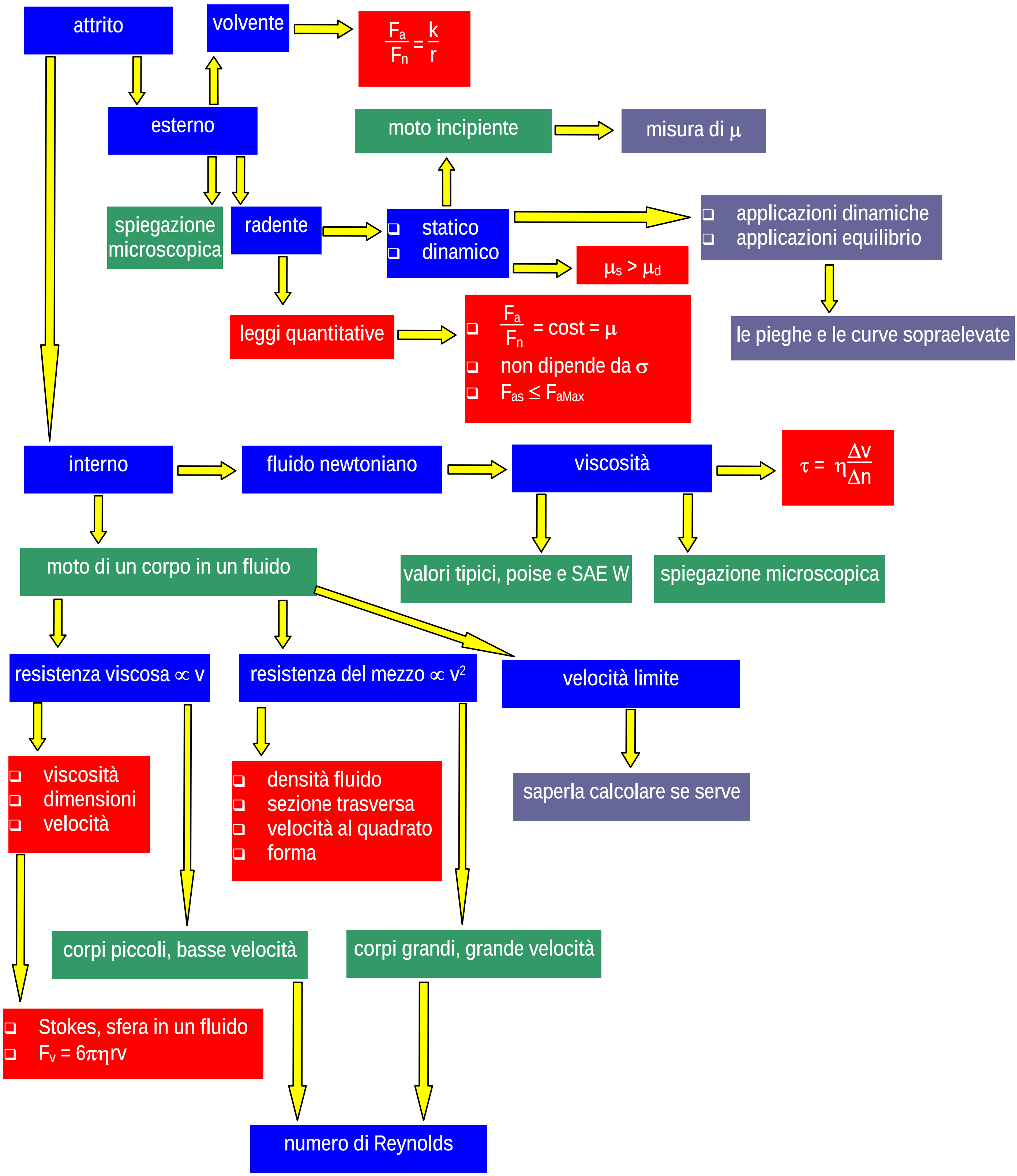
---

[69] *a*) Vero. b) Vero c) Falso: è un numero puro d) Vero: e serve *a* stabilire se l'ipotesi fatta per determinare la velocità limite era corretta.

[70] *a*) Vero b) Vero c) Vero. d) Falso: è proporzionale alla densità ridotta cioè alla differenza delle due densità

[71] Il parametro fondamentale è la dimensione della goccia che, per valori molto piccoli, rende predominante la resistenza viscosa e determina velocità limite molto basse. Si vedano i calcoli svolti nel testo.

9.10 Indice analitico


attrito
volvente
$\frac{F_a}{F_n} = \frac{k}{r}$
esterno
moto incipiente
misura di μ
spiegazione microscopica
radente
statico
dinamico
applicazioni dinamiche
applicazioni equilibrio
$\mu_s > \mu_d$
leggi quantitative
$\frac{F_a}{F_n} = cost = \mu$
non dipende da σ
$F_{as} \leq F_{aMax}$
le pieghe e le curve sopraelevate
interno
fluido newtoniano
viscosità
$\tau = \eta\frac{\Delta v}{\Delta n}$
moto di un corpo in un fluido
valori tipici, poise e SAE W
spiegazione microscopica
resistenza viscosa ∝ v
resistenza del mezzo ∝ v^2
velocità limite
viscosità
dimensioni
velocità
densità fluido
sezione trasversa
velocità al quadrato
forma
saperla calcolare se serve
corpi piccoli, basse velocità
corpi grandi, grande velocità
Stokes, sfera in un fluido
$F_v = 6\pi\eta r v$
numero di Reynolds