I.10. Il teorema di conservazione della quantità di moto

10.1 Forze variabili nel tempo

10.1.1 IL CONCETTO DI IMPULSO DI UNA FORZA

Sappiamo già che le forze determinano accelerazioni cioè variazioni di velocità. Lo scopo di questo capitolo è quello di studiare l'effetto delle forze correlate agli intervalli di tempo in cui queste forze agiscono. Ciò ci porterà ad apprezzare l'importanza della *quantità di moto* grandezza che sino ad ora abbiamo introdotto sul piano esclusivamente simbolico.

Consideriamo un corpo di massa m dotato di velocità $\boldsymbol{v}$ e indichiamo con $\boldsymbol{p}$ la quantità di moto; supponiamo che esso sia sottoposto all'azione di una forza $\boldsymbol{F}$ e per semplificare le cose limitiamoci al caso del moto rettilineo in modo di poterci riferire al solo aspetto scalare delle grandezze considerate. [1]

In base alla II legge della dinamica potremo scrivere che:

$$F = \frac{\delta(mv)}{\delta t} = \frac{\delta p}{\delta t} \text{ o anche } F\,\delta t = \delta p$$

La quantità $F\,\delta t$ è detta *impulso elementare* della forza relativo all'intervallo δt e si scrive:

l'impulso elementare di una forza si correla alla variazione di quantità di moto

$$\delta I = F\,\delta t = \delta p \qquad \text{(I.10.1)}$$

In particolare, se la forza considerata è costante, si potrà scrivere una relazione che vale anche per periodi di tempo Δt finiti:

$$I = F\,\Delta t = \Delta p$$

In generale quando si applica una forza ad un corpo essa determina una accelerazione (variazione di quantità di moto) e tale variazione dipende sia dalla intensità della forza, sia dal tempo di applicazione della stessa. Il significato fisico dell'impulso è il seguente: *due forze di intensità e durata diversa sono caratterizzate dallo stesso impulso se determinano la stessa variazione di quantità di moto.*

Esercizio: Una forza costante F = 5.00 N viene applicata ad un corpo in quiete di massa m = 2.00 kg per un tempo Δt = 0.200 s. Si determini la velocità finale del corpo e si trovi quindi il valore della forza F' necessaria a determinare la stessa velocità finale nel caso in cui Δt' = 0.500 s.

☹

Poiché la velocità iniziale è nulla avremo che $F\,\Delta t = m\,v$ e quindi:

$$v = \frac{F\,\Delta t}{m} = \frac{5.00 \times 0.200}{2.00} = 0.500 \text{ m/s}$$

Per rispondere alla seconda domanda basta eguagliare i due impulsi:

---

[1] Il caso generale corrisponde ad operare con le componenti della forza e della quantità di moto lungo le 3 direzioni su cui si esamina il moto. Ovvero, l'impulso, come la quantità di moto, è una grandezza vettoriale.

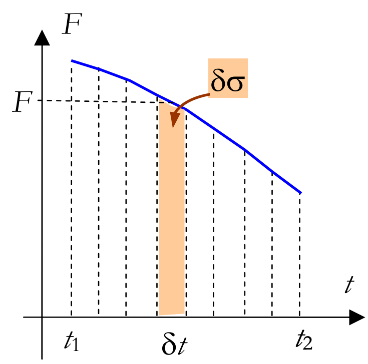
$F\,\Delta t = F'\,\Delta t'$ e pertanto:

$$F' = F\frac{\Delta t}{\Delta t'} = 5.00\,\frac{0.200}{0.500} = 2.00 \text{ N}$$

☺

10.1.2 TEOREMA DELL'IMPULSO E FORZA MEDIA

Consideriamo ora il caso di una forza variabile nel tempo, come in Figura e proponiamoci di verificare cosa accade alla quantità di moto per effetto dell'azione della forza in un intervallo di tempo finito..



Il significato geometrico dell'impulso: area sottesa dal diagramma forza - tempo; tale grandezza ci dà la variazione di quantità di moto

L'intervallo finito Δt può essere esaminato come somma di tanti intervalli infinitesimi: $\Delta t = \sum \delta t$ e lungo ciascun intervallino si ha:

$\delta I = F\,\delta t = \delta p$

Inoltre, dalla figura si osserva che l'area sottesa da ciascun elemento δt è l'impulso elementare. Avremo pertanto:

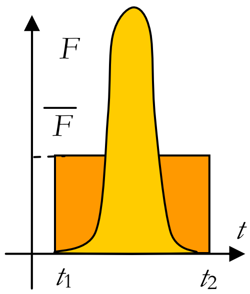
$$p_2 - p_1 = \sum \delta p = \sum \delta I = \sum \delta\sigma = \text{area} \qquad \text{(I.10.2)}$$

Alla luce della (I.10.2) si definisce *impulso* I della forza variabile F la somma degli impulsi elementari, cioè l'area racchiusa dal diagramma, e si può scrivere:

$$I = \sum \delta I = \text{area} = p_2 - p_1 \qquad \text{(I.10.3)}$$

Teorema dell'impulso: *L'impulso corrisponde all'area del diagramma forza tempo ed è sempre pari alla variazione di quantità di moto nell'intervallo considerato.*

Ne consegue che due forze diverse che determinano la stessa area determinano anche la stessa variazione di quantità di moto.



forza media è la forza costante che individua la stessa area della forza variabile

Osserviamo infine che, attraverso il concetto di impulso di una forza, si può definire la *forza media* di una forza variabile. Si chiama *forza media la forza costante caratterizzata dallo stesso impulso, cioè la forza costante che determina la stessa variazione di quantità di moto.*

Poiché l'impulso è l'area sottesa dal diagramma possiamo affermare che *la forza media è quella forza costante che definisce un rettangolo avente la stessa area di quella sottesa dal diagramma.*

10.1.3 FORZE IMPULSIVE E FORZA MEDIA

Si presti attenzione al fatto che la *forza media* determina la stessa variazione di quantità di moto, ma non può essere considerata equivalente alla forza data sotto ogni aspetto, perché a volte una forza impulsiva intensa può determinare effetti permanenti di rottura che non vengono invece prodotti da una forza costante con lo stesso impulso.

attenzione alla diversità di effetto che due forze impulsive diverse con la stessa forza media possono determinare a causa della diversa resistenza dei materiali

Consideriamo, per esempio, le forze impulsive che si verificano in tutti i processi d'urto e occupiamoci, in particolare delle forze che si sviluppano quando un atleta atterra dopo un salto.

Un attimo prima dell'impatto la quantità di moto vale p e dopo l'impatto vale 0, pertanto durante la fase di impatto agisce un impulso $I = -\,p$. A tale impulso, determinato esclusivamente dalla massa e dalla velocità di impatto, corrisponde una forza impulsiva esercitata dal pavimento sull'atleta.

Per la III legge della dinamica le strutture ossee e muscolari devono esercitare sul pavimento una forza uguale e contraria (in realtà è la forza

airbag e cinture di sicurezza: due protezioni basate sull'aumento di Δt che, a parità di impulso, fa diminuire la forza di interazione

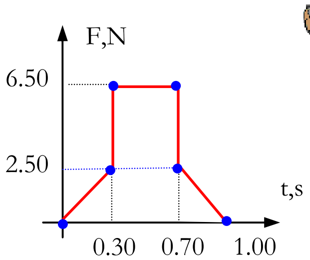
esercitata dall'atleta a sollecitare il pavimento che risponde a sua volta con la forza di arresto).

Il valore di tale forza, che ha sempre un andamento impulsivo (rapida crescita seguita da una rapida decrescita) dipende dalla durata Δt della fase di impatto (si veda la figura della pagina precedente in cui sono rappresentate due forze impulsive dotate di uno stesso impulso e corrispondenti a due valori Δt considerevolmente diversi).

Come si vede la forza impulsiva massima dipende inversamente da Δt e pertanto è conveniente utilizzare dei tempi di arresto lunghi per ottenere forze meno intense (e meno pericolose). Se si ragiona sulle forze medie, che sono costanti si può affermare, in base al teorema dell'impulso, che *la forza media è inversamente proporzionale alla durata dell'impatto.*

Quanto detto spiega il comportamento degli atleti e dei paracadutisti, che sono allenati ad effettuare cadute morbide (cioè prolungate nel tempo) e illustra anche il funzionamento delle cinture di sicurezza e dell'air bag, che sono progettati in modo di *prolungare la durata del processo* di frenamento.

Naturalmente vale anche il viceversa: negli sport di offesa (pugilato, arti marziali, …) in cui si ricerca la produzione di forze di alta intensità bisogna fare in modo che Δt sia più breve possibile.



Esercizio: Un corpo puntiforme di massa m = 2.54 kg è sottoposto all'azione di una forza che agisce nella direzione del moto e il cui diagramma è rappresentato in figura. La velocità iniziale vale v_0 = 0.55 m/s.

Determinare a) l'impulso della forza b) La forza media <F> c) La variazione di velocità Δv

☹

a) L'impulso è pari all'area sottesa dal diagramma $\mathcal{I} = 2\cdot\frac{0.30\cdot 2.50}{2} + 0.40\cdot 6.50 = 3.35$ N·s

b) La forza media è la forza costante con lo stesso impulso pertanto $\langle F \rangle = \frac{\mathcal{I}}{\Delta t} = \frac{3.35}{1.00} = 3.35$ N

c) La variazione di velocità si trova dal teorema dell'impulso $\Delta v = \frac{\mathcal{I}}{m} = \frac{3.35}{2.54} = 1.32$ m/s

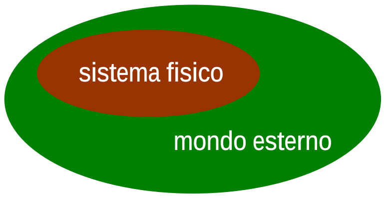
☺

10.2 Il concetto di sistema fisico

10.2.1 DAL SINGOLARE AL PLURALE

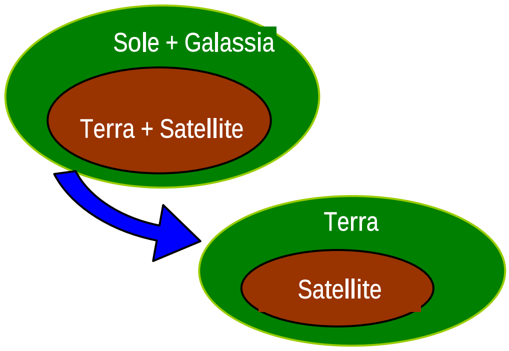
Se è vero quanto si è già detto a proposito del fatto che le forze sono sempre risultato di interazioni tra corpi e della validità del principio di azione e reazione ne deriva che *non ha un grande significato una fisica che si occupi di singoli corpi su cui agiscono forze di provenienza sconosciuta*.

il concetto di sistema fisico è molto semplice: con questa parolona intendiamo semplicemente l'insieme delle cose che decidiamo di studiare



Il mondo fisico è fatto di una molteplicità di oggetti che interagiscono tra loro e questo aspetto del reale ci porta al concetto di *sistema fisico* inteso come *insieme delle cose che si stanno studiando*.

Per dare una corretta soluzione al problema del moto di un corpo bisogna prendere in esame tutte le forze che agiscono su di esso dovute alla interazione del corpo con gli altri corpi che lo circondano. Ma le forze di questo tipo possono essere molto numerose; inoltre tali forze, in genere, sono variabili perché i corpi circostanti si muovono a loro volta a causa delle interazioni reciproche. Pertanto, a causa delle notevoli difficoltà matematiche, quando il problema viene impostato in questo modo in genere non ammette una soluzione semplice.



Si possono operare notevoli semplificazioni se si suppone che le forze dei corpi circostanti non siano tutte della stessa importanza. Per esempio, se si studia un satellite in orbita intorno alla Terra, e si sa che l'interazione del satellite con il Sole e con l'intera Galassia sono trascurabili rispetto alla interazione con la Terra, si può considerare il sistema fisico Terra Satellite e trascurare tutto il resto.

Lo studio di tale *sistema fisico* può poi essere ulteriormente semplificato se si decide che, poiché la massa del Satellite è molto minore della massa della Terra mentre le forze di interazione sono uguali, la accelerazione della Terra risulta del tutto trascurabile rispetto a quella del Satellite e dunque possiamo studiare il sistema costituito dal solo Satellite su cui agisce una sola forza esterna (al sistema) esercitata dalla Terra sul Satellite.

bisogna saper individuare in ogni contesto il sistema fisico più conveniente a seconda del grado di precisione con cui si vuole operare nel descrivere il moto

10.2.2 INTERNO ED ESTERNO

Il concetto di sistema fisico è puramente convenzionale: *si chiama sistema fisico l'insieme delle cose che decido di studiare in questa fase* e pertanto uno stesso corpo può risultare interno ad un sistema, oppure esterno, a seconda della definizione di sistema che si è data.

Le forze che si esercitano tra componenti del sistema sono dette *forze interne*, mentre quelle che si esercitano tra corpi del sistema e corpi esterni al sistema sono dette forze esterne *forze esterne*. Una forza esterna diventa interna quando il corpo che la esercita viene inserito nel sistema.

- forze esterne : sono quelle esercitate da corpi esterni al sistema su corpi del sistema
- forze interne: sono esercitate da corpi appartenenti al sistema su corpi del sistema

La risultante delle forze interne ad un sistema è sempre zero per effetto della III legge della dinamica e pertanto, quando si opera con la risultante le forze interne non contano mai.

C'è però un caso in cui anche le forze esterne non contano: è il caso del cosiddetto *sistema chiuso* (o *isolato*) che si verifica quando le forze esterne, confrontate con quelle interne, possono essere trascurate.

Si è volutamente evitato di affermare che le forze esterne debbano essere assenti (concetto questo privo di significato e che rischia di essere fuorviante). *Un sistema è chiuso se le interazioni principali sono quelle interne.*

Come vedremo questa precisazione gioca un ruolo determinante nella analisi dei processi d'urto. Naturalmente un caso di sistema chiuso è quello caratterizzato dalla particolarità che la risultante delle forze esterne è zero.

Nell'esempio citata in precedenza, il sistema di corpi formato dalla terra e dal satellite può, in prima approssimazione, essere considerato chiuso.

Il sistema solare può essere considerato un sistema chiuso con un alto grado di accuratezza. In effetti, le forze di interazione tra il sole e i pianeti sono molto maggiori di quelle tra i pianeti e le stelle più vicine.

Il concetto di sistema chiuso si rivela essere una astrazione molto utile perché i fenomeni all'interno di una tale sistema sono descritti da leggi semplici e generali. Dunque, appena se ne presenti la possibilità, *è bene prescindere dall'azione delle forze esterne e trattare il sistema come chiuso*. Successivamente, se sarà necessario, la soluzione ottenuta in prima approssimazione, verrà corretta per tenere conto delle perturbazioni dovute alle forze esterne.

10.3 La quantità di moto di un sistema

10.3.1 LE LEGGI DI CONSERVAZIONE

Le *leggi di conservazione* sono particolari leggi fisiche caratterizzate da un enunciato sempre dello stesso tipo, che analizzeremo sul piano logico. Tale enunciato presenta la seguente forma: *se si verifica la situazione S allora la grandezza G non cambia (si conserva).*

luna legge di conservazione è una legge che stabilisce che, in un determinato contesto (sistema fisico con certe caratteristiche), una certa grandezza fisica si conserva

Il vantaggio di un enunciato del genere è quello di consentire calcoli su grandezze fisiche prescindendo totalmente dalla storia intermedia tra i due stati considerati (siano essi fenomeni, istanti, posizioni spaziali, …).

Ma la ragione per cui i fisici sono molto affezionati alle leggi di conservazione risiede in una questione più sottile emersa nei primi decenni del 900; si è scoperto che quando una grandezza fisica si conserva dietro questo enunciato si cela sempre una proprietà molto generale della natura. L'argomento sarà ripreso al termine dello studio della meccanica. [2]

10.3.2 STUDIO DI UN GENERICO SISTEMA CON FORZE INTERNE ED ESTERNE

Quando si passa dallo studio di un singolo punto materiale a quello di un sistema la II legge della dinamica che vale per ogni singolo costituente del sistema vale anche in una forma sintetica che descrive l'intero sistema.

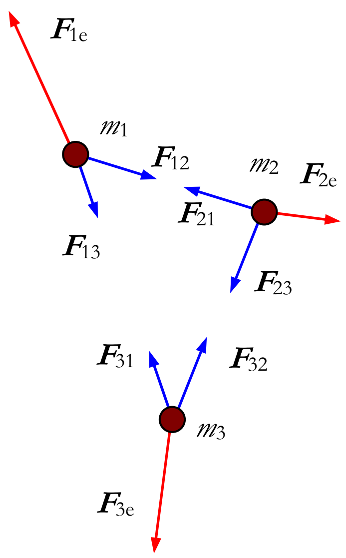
Precisamente, se si indica con $\boldsymbol{R}_e$ *la risultante di tutte le forze esterne* applicate al sistema e con $\boldsymbol{p}$ *la quantità di moto dell'intero sistema intesa come somma vettoriale di tutte le quantità di moto dei singoli componenti* si ha che:

$$\boldsymbol{R}_e = \frac{\delta \boldsymbol{p}}{\delta t} \qquad \text{(I.10.4)}$$

la II legge riferita ad un sistema fa riferimento alle sole forze esterne ed alla variazione di quantità di moto complessiva

L'unica osservazione da fare riguarda la scelta di esplicitare le forze esterne e non genericamente la risultante di tutte le forze: *si considera la risultante delle sole forze esterne non per il gusto di complicare ma perché, come si è già osservato, la risultante delle forze interne è sempre 0 in virtù della III legge della dinamica.*

Per semplicità dimostrativa ci limiteremo al caso di un sistema composto da tre corpi; infatti il caso generale di un sistema di *n* corpi non introduce nulla di nuovo dal punto di vista concettuale, mentre complica la scrittura e la comprensione dei passaggi matematici.



Consideriamo dunque tre corpi di massa m_1, m_2 e m_3 e la situazione delle forze di interazione sia quella rappresentata in figura.

Supponiamo che, all'istante t_1 i tre corpi abbiano velocità $\boldsymbol{v}'_1$, $\boldsymbol{v}'_2$, e $\boldsymbol{v}'_3$ e indichiamo con $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ i valori relativi all'istante t_2. Le quantità di moto saranno indicate con la lettera $\boldsymbol{p}$ seguendo la stessa convenzione.

In base alla II legge della dinamica applicata ad ogni singolo corpo potremo scrivere:

$$\boldsymbol{F}_{1e} + \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} = \frac{\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}'_1}{t_2 - t_1}$$

[2] Si veda il cap. II.1: simmetrie della natura e leggi di conservazione

$$\boldsymbol{F}_{2e} + \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{23} = \frac{\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}'_2}{t_2 - t_1}$$

$$\boldsymbol{F}_{3e} + \boldsymbol{F}_{32} + \boldsymbol{F}_{31} = \frac{\boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}'_3}{t_2 - t_1}$$

Sommiamo le equazioni avendo l'accortezza di separare le forze interne da quelle esterne e di sommare i termini di quantità di moto che si riferiscono ad identici istanti:

$$(\boldsymbol{F}_{1e} + \boldsymbol{F}_{2e} + \boldsymbol{F}_{3e}) + (\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21}) + (\boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{31}) + (\boldsymbol{F}_{23} + \boldsymbol{F}_{32}) =$$

$$\frac{\boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_1 - (\boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 + \boldsymbol{p}'_3)}{t_2 - t_1} = \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'}{t_2 - t_1} = \frac{\delta \boldsymbol{p}}{\delta t}$$

Ma, in base alla III legge della dinamica, tutte le forze interne si elidono a coppie, e si ottiene pertanto la (I.10.4):

un risultato notevole e valido in generale: le forze interne non contano quando si adotta una visione di insieme

$$\boldsymbol{R}_e = \boldsymbol{F}_{1e} + \boldsymbol{F}_{2e} + \boldsymbol{F}_{3e} = \frac{\delta \boldsymbol{p}}{\delta t}$$

in un sistema fisico qualsiasi la risultante delle forze esterne al sistema corrisponde sempre al rapporto tra la variazione della quantità di moto del sistema e l'intervallo di tempo considerato. Abbiamo esteso la *II legge della dinamica* al caso di un generico sistema fisico.

10.3.3 Se il sistema è isolato si conserva la quantità di moto

l'enunciato del teorema di conservazione della quantità di moto che vale in un sistema isolato

Riscriviamo la (I.10.4) in modo di isolare la variazione di quantità di moto $\delta t\, \boldsymbol{R}_e = \delta \boldsymbol{p}$ ed osserviamo che se *il sistema è isolato, cioè se $\boldsymbol{R}_e$ si annulla (o è trascurabile rispetto alle forze interne separatamente prese) si deve annullare la variazione di quantità di moto e ciò significa che la quantità di moto del sistema deve rimanere costante.*

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 + m_3 \boldsymbol{v}_3 + \ldots = \text{costante} \qquad \text{(I.10.5)}$$

Questa è la *legge di conservazione della quantità di moto*: *in un sistema isolato la quantità di moto del sistema rimane costante.*

La legge non prevede che rimanga costante la quantità di moto dei singoli componenti del sistema. Anzi, in generale capita il contrario: per effetto dell'azione delle forze interne ed esterne la quantità di moto dei diversi corpi del sistema cambia continuamente. Ma *il vettore somma delle quantità di moto delle diverse parti del sistema rimane costante.*

la quantità di moto può conservarsi anche rispetto ad una particolare direzione e ciò consente di fare previsioni su particolari aspetti del moto di un sistema

Poiché la legge ha natura vettoriale se ne può dare una interessante applicazione riferita anche ad una singola direzione: se il sistema non è isolato ma si annulla la *componente della risultante delle forze esterne lungo una particolare direzione* rimarrà costante la quantità di moto del sistema lungo quella direzione.

10.4 Applicazioni della conservazione della quantità di moto

10.4.1 IL FENOMENO DEL RINCULO

Un fenomeno abbastanza comune sia nell'esperienza macroscopica sia nel comportamento di particelle elementari è la separazione di un corpo in due parti sotto l'azione delle sole forze interne.

Quando le forze interne sono molto più intense di quelle esterne, è possibile considerare *chiuso* il sistema e applicare, pertanto, la conservazione della quantità di moto. Naturalmente il confronto deve riguardare due istanti durante i quali le forze interne agiscano, perché solo in tale caso si può considerare trascurabile l'effetto delle forze esterne.

Per semplificare la trattazione ci limiteremo a considerare il caso in cui il sistema di riferimento viene scelto a riposo rispetto alla configurazione iniziale. In tale caso *i due frammenti si muovono lunga la stessa direzione con verso opposto e con velocità inversamente proporzionali alle masse.*

Applicando la conservazione della quantità di moto e tenendo conto che se il sistema era inizialmente in quiete **p** = 0 si avrà:

$0 = m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2$

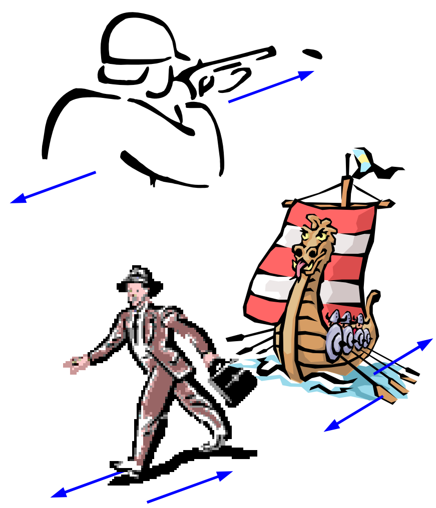
o anche:

$$\boldsymbol{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{v}_1 \qquad \text{(I.10.6)}$$

I fenomeni di *rinculo* si osservano in tutte le esplosioni, di qualsiasi natura e, in particolare, in tutte le armi da fuoco. Nelle armi automatiche il rinculo viene utilizzato per espellere il bossolo e per ricaricare l'arma.

Anche il moto di tutti i mezzi di trasporto e l'azione del camminare sono associati a fenomeni di rinculo. Nella rotazione delle ruote motrici di un'auto si esercita una forza d'attrito tra i pneumatici e il terreno.

Si tratta di una forza interna (nel sistema terra-auto) e tale forza fa muovere l'auto e la terra in due versi opposti. Ovviamente, poiché la massa della terra è molto maggiore di quella dell'auto, la velocità acquistata dalla terra sarà trascurabile. Una nave si muove esattamente allo stesso modo; l'elica spinge l'acqua all'indietro, oltre la poppa, e, di conseguenza, la nave si muove in avanti.



esempi di moti dovuti a rinculo: le singole parti del sistema si separano e ciò produce un moto relativo mentre la quantità di moto totale rimane nulla

Anche molti fenomeni di fisica nucleare sono caratterizzati da rinculo. Per esempio, durante la disintegrazione nucleare, i nuclei di uranio, dopo aver catturato un neutrone, si spezzano in due frammenti all'incirca della stessa massa. Poiché, prima della reazione il nucleo e il neutrone si muovono a velocità molto basse (dette *velocità termiche* [3]) si può affermare che, prima della fissione, il sistema era a riposo e quindi dopo la fissione i due frammenti si devono muovere in verso contrario come è possibile osservare anche in fotografie ottenute in speciali rivelatori detti *camere a nebbia e camere a bolle.*

[3] Le velocità sono dette termiche perché, come si vedrà la temperatura è un indicatore della velocità di agitazione delle particelle costituenti la materia, e corrispondono a quelle di particelle che si trovano a temperature ordinarie che si muovono per effetto del moto di agitazione termica.

Le particelle percorrono le loro traiettorie in una sorta di nebbia artificiale o in un liquido soprassaturo che bolle al passaggio delle particelle e queste lasciano delle tracce visibili. Tali tracce possono poi essere fotografate come dato osservabile di quanto è avvenuto.

Esercizio: Determinare la velocità di rinculo di un fucile di massa M = 3.00 kg sapendo che spara un proiettile di massa m = 0.022 kg con una velocità di v = 500 m/s. Quindi, supponendo che il rinculo venga attutito dalla spalla nel tempo Δt = 0.2 s si determini la forza media di impatto.

☹

Applicando la relazione (I.10.6) riferita ai valori assoluti delle velocità si ha:

$$V = \frac{m}{M}\ v = \frac{0.022}{3.00} \times 500 = 3.67 \text{ m/s}$$

Per determinare la forza media di impatto basta calcolare la variazione di quantità di moto che è pari all'impulso e quindi ricavare F dividendo per l'intervallo di tempo considerato..

$$F = \frac{M\ V}{\Delta t} = \frac{3.67 \times 3.00}{0.2} \approx 55 \text{ N}$$

☺

10.4.2 MISURE DI MASSA INERZIALE

Attraverso la legge di conservazione della quantità di moto è possibile confrontare le masse di due corpi senza bisogno di pesarli. Leghiamo con una leggera fune due corpi diversi dopo aver interposto tra essi una molla di massa trascurabile tenuta in tensione da una fune. Se tagliamo la fune i due corpi inizieranno a muoversi in verso contrario con velocità $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$.

Poiché le *velocità di rinculo* sono inversamente proporzionali alle masse, si può determinare la massa di uno dei due corpi, senza bisogno di pesarlo, se sono note la massa dell'altro e le due velocità.

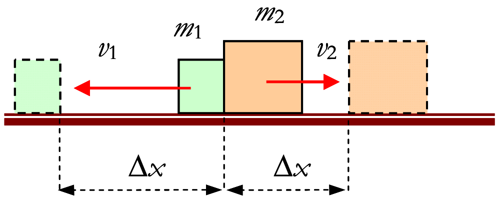
Questo metodo di misura della massa ha scarse applicazioni in meccanica perché è difficile misurare le velocità dei due corpi che variano continuamente a causa dell'attrito. Invece, in fisica nucleare, dove le velocità si possono determinare dalla osservazione delle tracce lasciate, questo metodo si rivela utile, per esempio, per confrontare le masse dei prodotti di fissione.

Consideriamo due corpi di massa m_1 e m_2 inizialmente in quiete che, per effetto di qualche forza interna di tipo impulsivo iniziano a muoversi. Supponendo che i due corpi striscino su un piano orizzontale con coefficiente di attrito μ uguale per entrambi i due corpi si muovono di m.u.a. percorrendo percorsi diversi sino a fermarsi.

Ci proponiamo di trovare il rapporto delle masse in funzione del rapporto degli spazi percorsi dai due corpi.

Il rapporto delle velocità iniziali dei due corpi è pari al rapporto inverso delle masse (fenomeno del rinculo). Per effetto dell'attrito il sistema non è chiuso, ma se ci si riferisce ai due istanti t_1 e t_2 di inizio e fine della forza impulsiva, la forza di attrito può essere considerata trascurabile e pertanto si può applicare la conservazione della quantità di moto.

Sui due corpi agiscono due forze d'attrito diverse $F_a = \mu\, m\, g$ proporzionali alle masse e pertanto le accelerazioni sono identiche e valgono $a = F_a / m = \mu\, g$.



dal rapporto degli spostamenti si risale al rapporto delle masse anche se si opera con attrito

Se indichiamo con Δx_1 e Δx_2 i due spazi percorsi dai due corpi dotati di velocità iniziali diverse, avremo, in base alla equazione che lega la velocità allo spazio percorso:

$2\, a\, \Delta x_1 = v_1^2 \qquad 2\, a\, \Delta x_2 = v_2^2$

Infine, se eseguiamo i rapporti avremo che:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}.$$

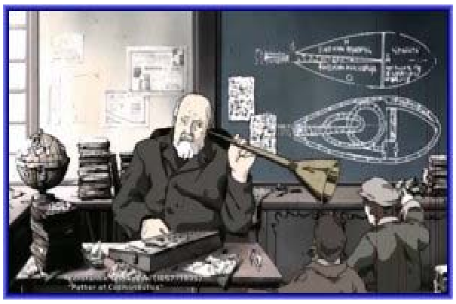
Pertanto il rapporto delle masse vale:

$$\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}} \qquad \text{(I.10.7)}$$

Il risultato trovato è particolarmente interessante perché ci dice che è possibile, anche con mezzi poveri effettuare misurazioni dirette di massa inerziale tra due corpi dello stesso tipo (ciò dotati di coefficienti di attrito uguali). Allo scopo basta riuscire a far muovere i due corpi per *rinculo* (per esempio con una molla) e misurare quindi lo spazio percorso prima di arrestarsi.

10.4.3 LA PROPULSIONE A REAZIONE

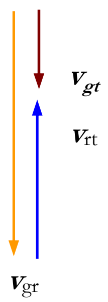
Il moto di un razzo si spiega con le stesse leggi che spiegano il rinculo, cioè attraverso la conservazione della quantità di moto. Quando il combustibile brucia, i gas vengono espulsi ad alta velocità attraverso lo scarico e, di conseguenza, il razzo si muove in verso contrario in modo che la somma delle quantità di moto del razzo e dei gas rimanga costante. Osserviamo di sfuggita che il *moto a reazione* può avvenire nel vuoto, anzi nel vuoto avviene nelle condizioni migliori per l'assenza di fenomeni dissipativi dovuti all'attrito.



Konstantin Ėduardovič Ciolkovskij, (1857 - 1935), è stato uno scienziato russo, pioniere dell'astronautica. Teorizzò molti aspetti del volo spaziale e della propulsione missilistica. Viene considerato il padre del volo spaziale umano e non a caso fu l'ex URSS a primeggiare nella costruzione di vettori molto potenti che portarono nel 1957 all'impresa dell Sputnik e nel 1961 al volo di Gagarin

Rispetto alla situazione del rinculo semplice tra due corpi inizialmente in quiete ci sono due difficoltà in più: il sistema non è in quiete e la massa del razzo continua a diminuire man mano che il combustibile brucia e i prodotti di reazione vengono espulsi attraverso i gas di scarico.

Supponiamo che, ad un certo istante t, la massa del razzo (della struttura, del combustibile e del comburente) valga m e che la sua velocità rispetto alla terra sia $\boldsymbol{v}_{rt}$. All'istante $t' = t + \delta t$ dopo che è stata bruciata una frazione di combustibile, la massa del razzo sarà $m' = m - \delta m$ e la corrispondente velocità $\boldsymbol{v}_{rt}' = \boldsymbol{v}_{rt} + \delta \boldsymbol{v}_{rt}$. [4]



La velocità dei gas rispetto al razzo, *velocità di scarico*, sarà indicata con $\boldsymbol{v}_{gr}$ e risulterà costante ed opposta a quella del razzo rispetto ai gas. La velocità dei gas rispetto alla terra all'istante t', indicata con $\boldsymbol{v}_{gt}$ sarà in base alla composizione classica delle velocità: $\boldsymbol{v}_{gt} = \boldsymbol{v}_{gr} + \boldsymbol{v}_{rt}$.

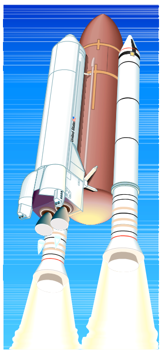
La quantità di moto totale del sistema (razzo + gas) all'istante t vale

$\boldsymbol{p} = m\, \boldsymbol{v}_{rt}$

[4] Per evitare di riempire il calcolo di inutili segni – si è indicata con δm una quantità positiva cioè l'opposto della variazione di massa.

mentre all'istante t' vale:

$$\boldsymbol{p}' = (m - \delta m)\, \boldsymbol{v}_{rt}' + \delta m\, \boldsymbol{v}_{gt} = (m - \delta m)\, \boldsymbol{v}_{rt}' + \delta m\, (\boldsymbol{v}_{gr} + \boldsymbol{v}_{rt})$$



Poiché il razzo e i gas formano un sistema chiuso, si può applicare la conservazione della quantità di moto e dunque:

$$m\, \boldsymbol{v}_{rt} = (m - \delta m)\, (\boldsymbol{v}_{rt} + \delta \boldsymbol{v}_{rt}) + \delta m\, (\boldsymbol{v}_{gr} + \boldsymbol{v}_{rt})$$

o anche eliminando i termini simili [5]:

$$m\, \delta \boldsymbol{v}_{rt} = -\delta m\, \boldsymbol{v}_{gr} \qquad \text{(I.10.8)}$$

I gas espulsi dall'ugello del razzo agiscono sul razzo esercitando una forza detta *spinta a reazione* ed essa può essere determinata facendo uso della II legge della dinamica. A tale scopo basta dividere l'equazione precedente per δt.

Poiché la *forza di propulsione* è $\boldsymbol{F} = m \dfrac{\delta \boldsymbol{v}_{rt}}{\delta t}$ si ha:

per aumentare la spinta si può operare o sulla velocità di scarico o sulla rapidità di diminuzione della massa

$$\boldsymbol{F} = m \frac{\delta \boldsymbol{v}_{rt}}{\delta t} = -\, \boldsymbol{v}_{gr} \frac{\delta m}{\delta t} = -\, \boldsymbol{v}_{gr}\, \mu \qquad \text{(I.10.9)}$$

dove si è indicata con $\mu = \delta m/\delta t$ la rapidità con cui il razzo cambia massa.

Quindi *la forza di propulsione è proporzionale alla velocità di consumo del combustibile e alla velocità di espulsione dei gas*; tale forza si esercita in verso contrario a quello di espulsione dei gas.

Per aumentare la spinta di reazione il metodo migliore è quello di aumentare v_{gr} perché l'aumento di μ comporta un aumento del consumo di combustibile nell'unità di tempo e pertanto un corrispondente aumento della massa iniziale senza un equivalente aumento di accelerazione.

L'aumento di v_{gr} si ottiene sia intervenendo sulle caratteristiche dell'ugello da cui vengono fatti fluire i gas di combustione, sia aumentando la loro temperatura e, su questo fronte, l'unica limitazione è costituita dalle caratteristiche di resistenza dei materiali utilizzati.

Esercizio: Determinare la accelerazione di un razzo la cui massa iniziale $M = 4.00\times10^4$ kg sapendo che i gas vengono espulsi con una velocità $v_{gr} = 4.10$ km/s e che la velocità di consumo del combustibile vale $\mu = 235$ kg/s.

☹

Dalla relazione (I.10.9) si ha che:

$$F = v_{gr}\, \mu = 4.10\times10^3 \times 2.35\times10^2 \approx 9.63\times10^5 \text{ N}$$

Pertanto la accelerazione iniziale vale: $a = \dfrac{F}{M} = \dfrac{9.63\times10^5}{4.00\times10^4} \approx 24.1 \text{ m/s}^2$

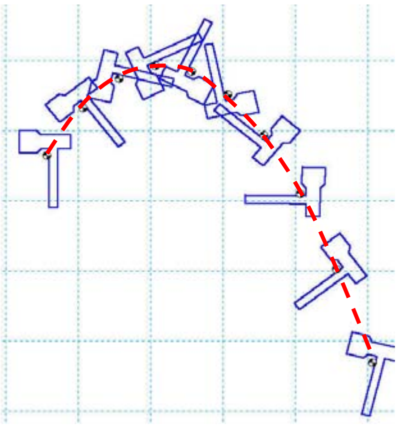
☺

[5] e trascurando il prodotto $\delta m\, \delta \boldsymbol{v}_{rt}$ che costituisce una quantità infinitesima rispetto alle altre essendo il prodotto di due infinitesimi

10.5 Il centro di massa

10.5.1 Cerchiamo di vedere un sistema complesso come un tutto

Quando si studia un sistema fisico composto da più particelle si può essere interessati a sapere come si muove il sistema stesso *visto come un tutto* indipendentemente dai moti particolari dei singoli componenti del sistema. A questo problema risponde il concetto di *centro di massa* che ci apprestiamo a definire.



la definizione del centro di massa

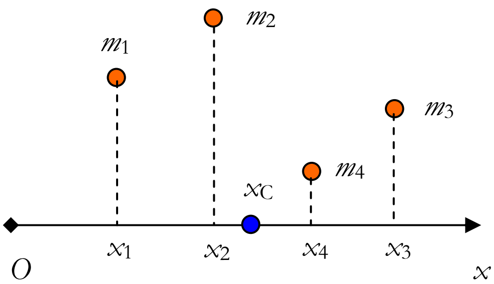
Consideriamo come esempio l'immagine qui a lato che rappresenta un corpo macroscopico lanciato in aria. Come si vede il moto del corpo è complesso perché l'utensile ruota durante il suo volo ma se ci concentriamo sul punto indicato con un cerchietto (il centro di massa) noteremo subito che la sua traiettoria è molto semplice e che si tratta di una parabola.

Il centro di massa di un sistema è un punto (non necessariamente facente parte del sistema) caratterizzato da una definizione un po' strana: *le sue coordinate si trovano facendo la media ponderata delle coordinate dei punti costituenti il sistema.*

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \qquad \text{(I.10.10)}$$

e si ottengono relazioni simili per y_C e z_C quando le particelle non sono collocate lungo l'asse x.

Nel caso particolare di 2 sole particelle il *centro di massa* gode di una proprietà particolarmente semplice: si trova a distanze dalle particelle inversamente proporzionali alle rispettive masse.



In effetti se supponiamo che due particelle di massa m_1 e m_2 si trovino lungo l'asse della ascisse alle coordinate x_1 e x_2 ed indichiamo la loro distanza con $l = x_2 - x_1$.

Da $x_C = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$ si ha $x_C\,(m_1 + m_2) = m_1 x_1 + m_2 x_2$ da cui:

$m_1(x_C - x_1) = m_2(x_2 - x_C)$. Se ora si indicano con $l_1 = x_C - x_1$ e $l_2 = x_2 - x_C$, si ha che:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1} \qquad \text{(I.10.11)}$$

10.5.2 Come si muove il centro di massa?

Il centro di massa di un sistema si muove come se in esso fosse concentrata tutta la massa (somma delle masse) e ad esso fossero applicate tutte le forze (somma delle forze).

In altri termini il centro di massa è il *punto sintesi del sistema* e il suo moto è influenzato solo dalle forze esterne perché, ricordiamolo ancora, la somma delle forze interne a un sistema è sempre nulla.

In molti casi studiando un sistema complesso è conveniente osservarlo dal *sistema di riferimento del centro di massa*: le cose, viste da questo punto di osservazione risultano molto semplici da osservare e da descrivere.

Per dimostrare le particolari caratteristiche di moto del centro di massa si parte dalla definizione (I.10.10) e la si studia a due istanti diversi; sottraendo si ha:

$$\delta x_C = \frac{m_1\, \delta x_1 + m_2\, \delta x_2 + \ldots + m_n\, \delta x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

dopo aver diviso entrambi i membri della equazione per $\delta t = t_2 - t_1$ e indicando la componente del vettore velocità lungo l'asse delle ascisse con $v_{xc} = \dfrac{\delta x_c}{\delta t}$ si ha:

$$v_{xC} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \ldots + m_n v_{nx}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

Lungo gli altri assi si ottengono equazioni simili e pertanto l'equazione vettoriale del moto del centro di massa si scrive:

$$\boldsymbol{v}_c = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + m_n \boldsymbol{v}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_I} = \frac{\boldsymbol{p}}{M} \qquad \text{(I.10.12)}$$

dove si è indicata con $\boldsymbol{p}$ la quantità di moto totale del sistema e con M la massa totale. Da qui si ha:

$$M\, \boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{p} \qquad \text{(I.10.13)}$$

Dunque *moltiplicando la velocità del centro di massa per la massa totale si ottiene la quantità di moto del sistema*. Ma noi abbiamo già visto che:

$\boldsymbol{R}_e = \dfrac{\delta \boldsymbol{p}}{\delta t}$ e pertanto:

$$\boldsymbol{R}_e = \frac{\delta \boldsymbol{p}}{\delta t} = \frac{\delta(M\, \boldsymbol{v}_c)}{\delta t} = M \frac{\delta \boldsymbol{v}_c}{\delta t} = = M\, \boldsymbol{a}_C \qquad \text{(I.10.14)}$$

Il centro di massa di un sistema si muove come se in esso fosse concentrata tutta la massa (somma delle masse) e ad esso fossero applicate tutte le forze (somma delle forze).

10.5.3 IL CENTRO DI MASSA DI UN SISTEMA ISOLATO

Nel caso di un sistema isolato la quantità di moto è costante e, pertanto, rimane costante anche la velocità del centro di massa.

In altre parole, *il centro di massa di un sistema chiuso si muove di moto inerziale*, cioè si muove di moto rettilineo uniforme indipendentemente dal tipo di moto dei diversi componenti del sistema.

Vale la pena di soffermarsi su questo risultato. In un sistema chiuso le forze interne agiscono e quindi, i singoli componenti del sistema si muovono di moto accelerato e le loro velocità cambiano continuamente. Ciò però non ha effetti sul *moto del centro di massa che non viene modificato dalla azione delle forze interne.*

Lo studente può trovare da solo molti esempi che confermano questa affermazione. Se siete dentro una automobile potete premere contro le pareti con una forza qualsiasi, ma la macchina non modificherà il suo moto: se è a riposo, rimane a riposo, se è in moto continua a muoversi come prima.

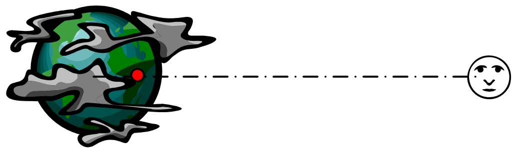
Se un uomo cammina lungo una barca su un lago, la barca si muoverà in verso contrario al suo. La ragione è che la forza d'attrito tra la barca e l'acqua, a velocità basse, è molto piccola e dunque l'uomo e la barca formano un sistema chiuso. Il moto dell'uomo in un verso causa un moto della barca in verso contrario.

Quando si studia il comportamento di sistemi formati da due corpi il *punto di riferimento dovrebbe sempre essere il centro di massa*. *Esercizio*: Per esempio, è sbagliato parlare di moto di rivoluzione della Luna intorno alla Terra. In realtà il sistema Terra Luna ruota intorno al proprio centro di massa.

Per determinare il centro di massa di tale sistema poniamo l'origine del sistema di riferimento nel centro della Terra. La distanza Terra Luna vale circa 384'000 km mentre la massa della Terra è 81 volte quella della Luna.

Dalla definizione segue che la distanza del centro di massa dal centro della Terra è:

$$x_c = \frac{(1 \times 384'000) + (81 \times 0)}{1 + 81} \approx 4'700 \text{ km}$$



il centro di massa del sistema Terra Luna

ma poiché il raggio terrestre è di 6'370 km possiamo concludere che il centro di massa si trova all'interno della Terra ad una significativa distanza dal centro. Dunque il *sistema Terra Luna ruota intorno al centro di massa del sistema che si trova all'interno della Terra*.

10.5.4 SEMPLICI APPLICAZIONI

Esercizio: Determinare la posizione del centro di massa di un sistema di 3 particelle disposte lungo una linea retta e di masse $m_1 = m$, $m_2 = 0.5m$, $m_3 = 0.8m$ sapendo che le tre particelle distano l'una dall'altra di *l* e *2l*.

☹

Mettiamo l'origine del sistema di riferimento in coincidenza con la prima particella ed applichiamo la definizione; avremo:

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0m + 0.5m\, l + 0.8m\, 3l}{m + 0.5m + 0.8m} \approx 1.26\, l$$

Il centro di massa si trova appena oltre la seconda particella.

☺

Esercizio: Dimostrare che il centro di massa di un generico triangolo costruito di materiale omogeneo coincide con il baricentro.

☹

Supponiamo di tagliare il triangolo in tante strisce parallele ad un lato e di spessore trascurabile. Il centro di massa di ogni striscia, per ragioni di simmetria è il punto medio della striscia e pertanto possiamo affermare che il centro di massa del triangolo sta sulla mediana.

Poiché il ragionamento si può ripete egualmente per qualsiasi lato se ne conclude che il centro di massa sta sul punto di incontro delle 3 mediane, cioè nel baricentro.

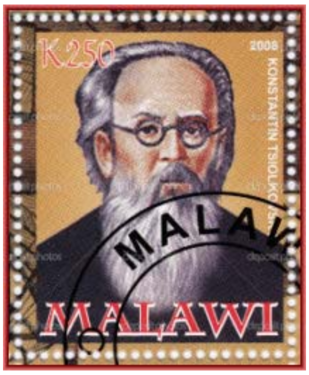
☺

10.6 Calcolo del combustibile di un razzo

10.6.1 UNA STIMA APPROSSIMATA

Esercizio: Per avere un'idea della quantità di combustibile richiesto per mettere in orbita un razzo si può eseguire il seguente calcolo approssimato. Supponiamo che si debba fornire una accelerazione $a = 5g = 49$ m/s^2 ad un razzo di massa $m = 10^4$ kg

☹



La forza di propulsione necessaria vale $F = ma = 49 \times 10^4$ N. Nei moderni razzi la velocità di espulsione dei gas arriva oggi sino a $v_{gr} = 4$ km/s e pertanto la velocità di consumo del combustibile deve essere:

$$\mu = \frac{F}{v_{gr}} = \frac{49\times10^4}{4\times10^3} = 122.5 \text{ kg/s}$$

Un razzo che si muova con una accelerazione di circa 50 m/s^2 raggiungerà la velocità di orbita circolare (circa 8 km/s) in un tempo

$$t = \frac{v}{a} = \frac{8000}{50} = 160 \text{ s.}$$

Pertanto il combustibile M_{com} globalmente necessario sarà:

$$M_{com} = \mu t = 122.5 \text{ kg/s} \times 160 \text{ s} = 19'600 \text{ kg} \approx 20 \text{ ton}$$

☺

10.6.2 UNA STIMA RAFFINATA

Il calcolo precedente costituisce solo una rozza approssimazione del risultato e non può essere utilizzato nemmeno per una prima stima del combustibile necessario a mettere in orbita il razzo. In effetti, il *razzo è un corpo a massa variabile* perché la sua massa continua a diminuire man mano che il combustibile si consuma e la stima fatta all'inizio sulla determinazione della forza ha trascurato completamente la massa del combustibile, salvo lo scoprire a posteriori che tale massa è superiore a quella del razzo.

Per porre in orbita un razzo di 10 ton, anche nel caso del nostro calcolo rozzo, la massa al decollo dovrebbe essere di 30 ton e quindi la forza necessaria dovrebbe essere tre volte maggiore di quella stimata. Ciò porterebbe ad un nuovo valore nel consumo di combustibile e dunque ad un nuovo valore di massa.

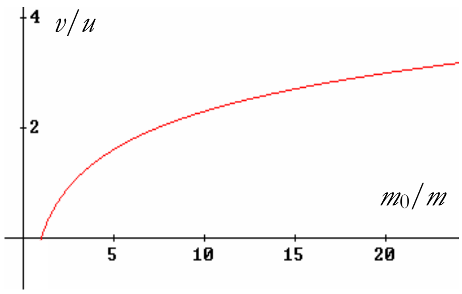
Il valore di combustibile necessario può essere calcolato tramite la *relazione di Tsiolkovsky* che si può dedurre dalla (I.10.8) con calcoli di analisi matematica e che riportiamo in nota per completezza: [6]

$$\frac{v_{rt}}{v_{gr}} = \ln\frac{m_0}{m} \qquad \text{(I.10.15)}$$

[6] Per economia di scrittura indichiamo la velocità del razzo con v e quella dei gas con u. Se si passa dai vettori alle componenti e si indica con δm la variazione con segno della massa si ha: $m\,\delta v = -\,u\,\delta m \Leftrightarrow \delta v = -\,u\frac{\delta m}{m}$ e *integrando* $v = -\,u \ln m + k$. Per le condizioni iniziali al tempo t = 0 si ha $v = 0$ e $m = m_0$ da cui $k = u \ln m_0$. Si ha pertanto: $v = -u \ln m + u \ln m_0 = u\,(-\ln m + \ln m_0) = u \ln\frac{m_0}{m}$

dove m e m_0 rappresentano la massa ad un generico istante t e la massa iniziale.

Il grafico della funzione è rappresentato in Figura con il tipico andamento della funzione logaritmo che cresce sempre più lentamente.



Questo è l'elemento centrale e *sconfortante*. *Più combustibile si carica, meno rendono i motori* perché la loro spinta serve prevalentemente ad accelerare il combustibile stesso.

Se passiamo alla funzione inversa e indichiamo con k il rapporto $\frac{v}{u}$ avremo che:

$$\frac{m_0}{m} = e^k \qquad \text{(I.10.15')}$$

Esercizio: Calcolare la quantità di combustibile necessario per fornire ad un razzo una velocità finale v = 8 km/s, sapendo che la velocità di espulsione dei gas vale u = 4 km/s, e che la massa finale del razzo vale M =10 ton.

☹

Applicando la (I.10.15') si ottiene:

$$\frac{m_0}{m} = e^2 = 7.39,\ m_0 = 7.39 \times 10 = 73.9 \text{ ton e } m_{\text{com}} = 63.9 \text{ ton.}$$

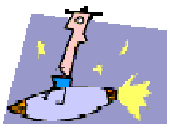
Il valore ottenuto è circa tre volte e mezzo il valore stimato precedentemente.

☺

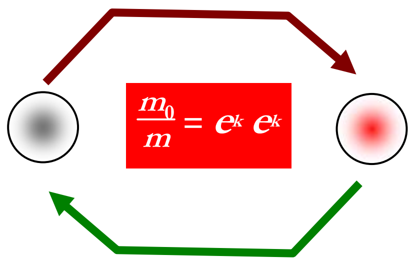
10.6.3 Possibilità e limitazioni nei viaggi spaziali

come si calcola il combustibile necessario a raggiungere la velocità di fuga

Quando si ragiona sui *viaggi spaziali* ci sono due altri valori di velocità da prendere in esame: la velocità di fuga dalla attrazione terrestre (pari a 11.2 km/s) e quella necessaria a sfuggire dal sistema solare (pari a 16.7 km/s).



In questi due casi $\frac{v}{u}$ vale rispettivamente 2.8 e 4.175 e, in corrispondenza di questi valori, si ottiene per $\frac{m_0}{m}$ rispettivamente 16 e 65.



La cosa sembrerebbe, a prima vista accettabile; per intraprendere un viaggio interplanetario basta che il razzo disponga di una quantità di combustibile pari a 60 volte la sua massa. Ma quando si intraprende un viaggio del genere bisogna mettere in conto anche il *combustibile per il ritorno* e, nell'ipotesi di approdare ad un pianeta esterno al sistema solare con le dimensioni della terra servirà, per andare e tornare, una massa pari a 60×60 = 3'600 volte la massa del razzo e questo, allo stato attuale, sembra un limite insuperabile. [7]

per esplorare lo spazio bisogna conteggiare il combustibile per il ritorno e ciò comporta di elevare al quadrato il valore della semplice andata

Se poi ci si pone l'obiettivo della esplorazione interstellare e si prendono in esame gli effetti relativistici (visto che ha senso pensarci solo se si pensa a velocità di viaggio dell'ordine della velocità della luce) la situazione diviene ancora più sconfortante perché in tale caso i valori di $\frac{M_0}{M}$

[7] Per chi volesse saperne di più si consiglia la lettura del Dossier n. 3 *L'esplorazione dello spazio* - Edizioni Le Scienze - Primavera 2000

assumono valori superiori al rapporto tra la massa stimata dell'universo e la massa dell'elettrone. Si può allora incominciare a pensare a *razzi fotonici* e via di questo passo, ma si sfocia rapidamente nella fantascienza.

Esercizio: Spiegare come mai gli astronauti risentono di un soprappeso crescente durante la fase di accelerazione. Si supponga che il tasso di consumo del combustibile sia costante.

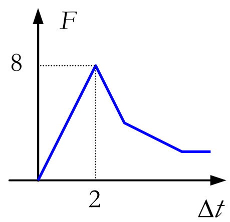
☹

Il soprappeso è l'effetto della spinta accelerante del razzo e tale spinta, se μ e u rimangono costanti, risulta pure costante. Ma, poiché la massa del razzo diminuisce, aumenta la accelerazione. Di conseguenza, man mano che si consuma combustibile l'astronauta percepisce un sovrappeso crescente.

☺

10.7 Quesiti di fine capitolo

1. Ricerca di *falso* a) Due *forze costanti* hanno lo stesso impulso se determinano la *stessa variazione di quantità di moto* b) La quantità $F\ \delta t$ è detta *impulso della forza* c) L'*impulso elementare* è pari alla *variazione elementare* di quantità di moto d) Due forze costanti di *intensità diversa* possono avere lo *stesso impulso*. [8]
2. Ricerca di *vero* a) Due forze di tipo impulsivo dotate dello *stesso valore medio* determinano gli *stessi effetti* b) Due forze impulsive dotate dello *stesso valore medio* determinano la *stessa variazione di quantità di moto* c) Due forze impulsive dotate dello *stesso impulso* determinano la *stessa accelerazione* d) Una forza costante di 2.00 N che agisce su un corpo di 2.00 kg determina un impulso di 4.00 N kg. [9]
3. Ricerca di *vero*: a) L'*impulso* di una forza variabile è pari alla *somma degli impulsi elementari*; b) L'*impulso* di una forza variabile è pari all'*area del diagramma quantità di moto - tempo*; c) Due *forze della stessa durata e dello stesso impulso* di cui la prima è costante e la seconda variabile hanno lo *stesso valore massimo*; d) Quando la quantità di moto passa *da un valore positivo a zero* la forza corrispondente *non può essere costante*. [10]
4. Ricerca di *falso*: a) L'*air bag* ha la funzione di aumentare la durata dell'impatto; b) La *cintura di sicurezza* serve a *tenere il passeggero attaccato al sedile* in modo che non urti la testa contro il vetro in caso di urto; c) L'*air bag* va sempre usato *insieme alle cinture di sicurezza* perché in caso contrario diventa pericoloso; d) L'*area del diagramma forza tempo* è in grado di farci determinare la *variazione di velocità di un corpo di massa nota*. [11]
5. Ricerca di *vero*: la forza media riferita all'intervallo tra 1 e 4 s vale: a) 5.17 N; b) 3.67 N; c) 7.0 N ; d) 6.29 N. [12]



6. Spiegare in 4 righe il concetto di forza media. [13]
7. Spiegare perché una forza variabile assume almeno in un istante lo stesso valore della forza media. [14]

---

[8] a) Vero b) Falso: è detta *impulso elementare* c) Vero d)Vero: basta che le durate della interazione siano l'una la metà dell'altra

[9] a) Falso: determinano la stessa variazione di quantità di moto ma potrebbero produrre altri effetti di tipo diverso (resistenza alle sollecitazioni) b) Vero: se hanno lo stesso valore medio hanno lo stesso impulso c) Falso: determinano la stessa variazione di quantità di moto; le accelerazioni possono essere molto diverse d) Falso: i dati disponibili non consentono di trovare l'impulso

[10] Ricerca di vero: a) Vero: definizione b) Falso: è l'area del diagramma forza tempo c) Falso: quella impulsiva deve avere un valore massimo maggiore per garantire uguale area d) Falso: affermazione del tutto non pertinente

[11] Ricerca di falso: a) Vero, aumentando la durata si ha una corrispondente riduzione delle forze di interazione; b) Falso: serve ad aumentare la durata della interazione c) Vero: in caso contrario il passeggero arriva sull'air bag mentre si sta gonfiando e ciò aumenta la variazione di quantità di moto da realizzare d) Vero: ci consente di determinare la variazione di quantità di moto e nota la massa si trova la variazione di velocità.

[12] Si tratta di calcolare l'area e dividere per l'intervallo di tempo di 3 s; così facendo si ottiene (6 + 6 + 3.5) / 3 = 5.17 N e cioè la risposta a)

[13] E' la forza costante che determina la stessa variazione di quantità di moto; sul diagramma Forza tempo corrisponde alla altezza di un rettangolo con la stessa area.

8. Spiegare in 4 righe perché in presenza di forze impulsive conviene aumentare la durata della interazione. [15]
9. Enunciare il teorema dell'impulso per moti ad 1 dimensione (compresa la definizione di impulso) relativo ad un corpo puntiforme di massa m soggetto all'azione di una forza variabile $\boldsymbol{F}$ tra gli istanti generici t_1 e t_2 (33 parole) [16]
10. Spiegare perché le cinture di sicurezza devono accompagnare il movimento rallentandolo e non devono invece legare il passeggero al sedile. [17]
11. Determinare la forza media che si determina quando un passeggero con massa $m = 80.0$ kg in un'auto in moto con $v = 40.5$ m/s subisce un impatto contro un oggetto fermo di massa molto maggiore della massa dell'auto supponendo che l'auto venga fermata in $\Delta t = 0.15$ s. Cosa accade se, grazie alle cinture di sicurezza $\Delta t' = 1.5$ s ? [18]
12. Ricerca di falso a) Il concetto di sistema diventa significativo se sono coinvolti almeno due corpi b) Dato un sistema fisico le forze esterne rimangono tali anche se si cambiano i confini del sistema c) In un sistema fisico le forze interne hanno sempre risultante nulla d) Il concetto di interno ed esterno ad un sistema dipende da come il sistema è stato denotato. [19]
13. Ricerca di vero: a) In un sistema chiuso non si ha presenza di forze esterne b) Il sistema solare non può essere considerato chiuso perché bisogna tener conto delle forze esercitate dalle altre stelle della galassia sui diversi costituenti del sistema solare c) La forza d'attrito è sempre una forza esterna d) La forza peso quando si studia un sistema formato da un proiettile che esplode è una forza esterna. [20]
14. Si consideri un corpo che striscia sul pavimento orizzontale di un edificio. Enunciare le forze coinvolte precisando quali siano interne e quali siano esterne nella ipotesi che il sistema sia costituito dal singolo corpo o dal corpo e dalla terra.

---

[14] Perché se il valore medio corrisponde ad un rettangolo con la stessa area, la forza variabile dovrà avere zone con area maggiore e zone con area minore pertanto …

[15] Se si aumenta la durata, a parità di impulso (dato dalla variazione di quantità di moto) si ottiene una forza di intensità minore perché l'area non cambia mentre aumenta la base.

[16] L'impulso della forza è pari alla variazione di quantità di moto del corpo. L'impulso è la somma degli impulsi elementari ciascuno dei quali vale $F\,\delta t$ dove δt è l'intervallo elementare di tempo.

[17] L'obiettivo è quello di aumentare la durata della interazione; quindi …

[18] Si può ipotizzare che la quantità di moto finale sia nulla e pertanto l'impulso risulta pari a $40.5 \cdot 80 = 3.24 \cdot 10^3$ kg m/s. A tale valore di impulso corrisponde una forza $F =$

$$= \frac{3.24 \cdot 10^3}{0.15} = 2.16 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

Se l'intervallo temporale decuplica, la forza si riduce a 1/10.

[19] Ricerca di falso a) Vero b) Falso: se cambiano i confini le forze esercitate dai corpi precedentemente esterni e che ora entrano nel sistema diventano interne. c) Vero: per la III legge della dinamica d) Vero

[20] a) Falso: ciò che conta è che si annulli la risultante b) Falso: le forze esterne sono trascurabili rispetto a quelle interne c) Falso: è esterna quando il secondo dei due corpi che interagiscono non fa parte del sistema, in caso contrario è interna d) Vero

15. Ricerca di *falso*: a) In una legge di conservazione hanno sempre la forma *se si verifica la situazione S allora la grandezza G non cambia (si conserva)*; b) In una legge di conservazione non importa sapere come la situazione evolve istante per istante; c) Le leggi di conservazione della meccanica derivano da proprietà molto generali della natura; d) Poiché le leggi di conservazione sono del tutto generali esse valgono per qualsiasi sistema fisico. [21]
16. Ricerca di *vero*: dato un sistema fisico a) la legge $\boldsymbol{R}_e = \frac{\delta \boldsymbol{p}}{\delta t}$ vale solo se il sistema è isolato; b) la quantità di moto dei singoli componenti del sistema del sistema è influenzata solo dalle forze esterne; c) nello studiare la quantità di moto non si considerano le forze interne perché la presenza di forze esterne ne rende trascurabili gli effetti; d) nel dedurre la legge $\boldsymbol{R}_e = \frac{\delta \boldsymbol{p}}{\delta t}$ si sfrutta in maniera fondamentale la III legge della dinamica. [22]
17. Ricerca di *falso*: a) Se su un sistema non agiscono forze esterne la quantità di moto si conserva b) Se la risultante delle forze esterne è nulla la quantità di moto si conserva c) Se le forze interne sono molto maggiori delle forze esterne la quantità di moto si conserva d) se la risultante delle forze esterne si annulla lungo una direzione la quantità di moto si conserva. [23]
18. Due particelle dotate dello stesso valore di quantità di moto $p_1 = p_2 = 3$ kg m/s si muovono formando tra loro un angolo $\alpha = 45°$. La quantità di moto del sistema vale: a) 6 kg m/s; b) non è determinabile se non si conosce la massa; c) $3(\sqrt{2}+1)$ kg m/s; d) $3\sqrt{2+\sqrt{2}}$ kg m/s. [24]
19. La quantità di moto di un sistema di 3 particelle di massa m dotate di modulo di velocità v e sfasate tra loro di 120° in unità del SI vale: a) $3\sqrt{3}\,mv$ b) dipende dal valore di m e di v c) 0 d) $3\sqrt{3}\,/2\,mv$ [25]
20. Tre particelle sono dotate di quantità di moto $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$. L'angolo tra $\boldsymbol{p}_1$ e $\boldsymbol{p}_2$ è di 90°. L'angolo tra $\boldsymbol{p}_1$ e $\boldsymbol{p}_3$ è pari a $180 + \alpha$ dove α = arc

[21] Ricerca di falso: a) Vero b) Vero: si confronta la situazione finale con quella iniziale c) Vero d) Falso: valgono se sono soddisfatte le ipotesi previste dalla legge di conservazione considerata

[22] a) Falso: vale per qualsiasi sistema b) Falso: la quantità di moto di singoli componenti è influenzata dall'azione delle forze che agiscono su essi siano interne od esterne; è la quantità di moto totale che viene influenzata solo dalla risultante delle forze esterne; c) Falso: la loro risultante è nulla e non influenza la quantità di moto totale d) Vero: in base ad essa $\boldsymbol{R}_i = 0$.

[23] Ricerca di falso: a) Vero b) Vero c) Vero d) Falso: si conserva la componente della quantità di moto lungo quella direzione

[24] La quantità di moto del sistema è pari al modulo del vettore che si ottiene sommando i due vettori. Si può operare o sommando e calcolando il modulo con il teorema di Pitagora o con il teorema del coseno applicato al terzo lato di un triangolo isoscele di cateti 3 ed angolo di 135°. In entrambi i casi si ottiene la risposta d.

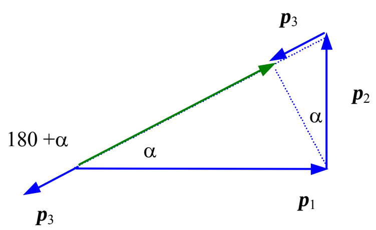
[25] Vale 0 perché i tre vettori si trovano ai vertici di un triangolo equilatero con origine nel baricentro e in quel caso la somma vettoriale fa 0.

$\tan \frac{p_2}{p_1}$. Sapendo che $p_3 = p_2 \sin \alpha$ la quantità di moto $\boldsymbol{p}$ del sistema a) Ha la direzione di $\boldsymbol{p}_{12}$ e vale $p_2 \cos \alpha$; b) Si trova all'interno dell'angolo tra $\boldsymbol{p}_1$ e $\boldsymbol{p}_2$ ma il modulo non ammette una soluzione semplice; c) Ha la direzione di $\boldsymbol{p}_{12}$ e vale $p_2 \sin \alpha$; d) Ha la direzione di $\boldsymbol{p}_{12}$ e vale $p_1 \cos \alpha$. [26]

21. Spiegare in cosa la legge $\boldsymbol{R}_e = \frac{\delta \boldsymbol{p}}{\delta t}$ differisca dalla II legge della dinamica. [27]
22. Si enunci e dimostri il teorema di conservazione della quantità di moto.
23. Come cambia la II legge della dinamica per un sistema di n corpi (rispondere senza scrivere formule). (21 parole) [28]
24. Nella dimostrazione del teorema di conservazione della quantità di moto si sfrutta la III legge della dinamica. Dove e come? [29]
25. Preso un sistema fisico cosa significa l'equazione $\vec{R}_e = \frac{\delta \vec{p}}{\delta t}$? Da essa come si passa al teorema di conservazione della quantità di moto? [30]

---

[26] Dopo aver costruito la figura si osserva che $\boldsymbol{p}_{12}$ forma con $\boldsymbol{p}_2$ l'angolo α e che $\boldsymbol{p}_3$ ha la stessa direzione con verso contrario. Dunque la somma delle tre quantità di moto è diretta come $\boldsymbol{p}_{12}$ e ha modulo pari a $p_{12} - p_3$. Poiché però $p_3 = p_2 \sin \alpha$ il triangolo formato da $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ è rettangolo e dunque lo è anche quella formato da $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{p}_1$. Dunque $p = p_1 \cos \alpha$ e dunque la risposta giusta è la d) come si può osservare dalla immagine qui sotto



[27] La legge proposta è riferita ad un sistema fisico e consente di analizzarne le caratteristiche in una visione di insieme evidenziando che, ciò che conta, in termini di variazione della quantità di moto del sistema sono solo le forze esterne

[28] La risultante delle forze esterne moltiplicata per l'intervallo di tempo elementare fornisce la variazione elementare di quantità di moto del sistema. La seconda legge della dinamica vale anche per i sistemi a condizione di sommare le sole forze esterne (quelle interne si annullano a coppie) e di riferire il calcolo alla quantità di moto complessiva o equivalentemente alla accelerazione del centro di massa.

[29] Si scrive la II legge della dinamica per un sistema isolato (assenza di forze esterne) nella forma degli impulsi e si sommano tutte le equazioni. A sinistra viene 0 perché le forze interne si annullano a coppie (III legge) e quelle esterne si annullano per ipotesi. A destra viene la somma delle variazioni di quantità di moto pari alla variazione di quantità di moto del sistema. Dunque se la variazione è 0 la quantità di moto è costante.

[30] Significa che un sistema (quando si prescinde dai dettagli) può essere studiato come un unico corpo (il centro di massa che ha la quantità di moto del sistema e nel quale si concentra l'intera massa) a cui è applicata la risultante delle forze esterne. Se $\vec{R}_e = 0$ ne segue che $\vec{p}$ è costante.

26. Si spieghi cosa accade quando il tappo di una bottiglia di spumante viene espulso dalla bottiglia e si assegnino valori sensati alle diverse grandezze: massa del tappo e della bottiglia, velocità di espulsione del tappo, impulso della bottiglia, forza che agisce sul polso che regge la bottiglia.
27. Ricerca di *vero*: a) il fenomeno del rinculo riguarda solo il caso di un *corpo inizialmente dotato di q.d.m. nulla*; b) nei fenomeni di rinculo la conservazione della quantità di moto va *riferita all'istante immediatamente precedente e immediatamente successivo all'interazione* c) nel fenomeno del rinculo *si ha sempre* $\boldsymbol{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{v}_1$ d) il movimento di una nave non può essere analizzato in termini di rinculo perché *la forza esercitata dall'acqua sull'elica è una forza esterna non equilibrata.* [31]
28. Ricerca di vero. Si consideri il rinculo su di un piano orizzontale tra due masse m_1 e m_2 inizialmente in quiete che dopo aver percorso spazi Δx_1 e Δx_2 si arrestano a) Gli spazi percorsi da ogni massa sono *direttamente proporzionali alla radice della massa* b) Gli spazi percorsi *dipendono dal coefficiente d'attrito* c) Il *rapporto degli spazi percorsi è uguale al rapporto delle masse* d) Il rapporto degli spazi percorsi *varia al variare del coefficiente d'attrito.* [32]
29. Ricerca di *falso*. Moto a reazione: si indicano con $\boldsymbol{v}_{gr}$ la velocità dei gas rispetto al razzo e con $\boldsymbol{v}_{rt}$ quella del razzo. a) Nel moto a reazione si opera con *sistemi a massa variabile soggetti a rinculo*; b) Le due velocità $\boldsymbol{v}_{gr}$ e $\boldsymbol{v}_{rt}$ hanno verso contrario; c) Un ruolo di rilievo nell'analisi del fenomeno è svolto dalla velocità di consumo della massa indicata con μ; d) La forza di propulsione è data da $v_{rt}\,\mu$. [33]
30. Ricerca di *vero*. Moto a reazione: si indicano con $\boldsymbol{v}_{gr}$ la velocità dei gas rispetto al razzo, con $\boldsymbol{v}_{rt}$ quella del razzo e con μ la velocità di consumo della massa. a) Per aumentare la accelerazione si può indifferentemente aumentare v_{gr} o μ; b) Il valore tipico per v_{gr} è di 4 km/s; c) il valore della velocità del razzo dipende esclusivamente dalla velocità dei gas; d) Secondo la *relazione di Tsiolkovsky* $\frac{v_{rt}}{v_{gr}} = ln\frac{m}{m_0}$ [34]
31. Scrivere la relazione per il rinculo nel caso in cui la quantità di moto iniziale non sia nulla. [35]

---

[31] a) Falso b) Vero, ciò consente di trascurare il ruolo delle forze esterne c) Falso; ciò vale solo se $\boldsymbol{p} = 0$ d) Falso: si considera il sistema nave acqua e la forza è interna.

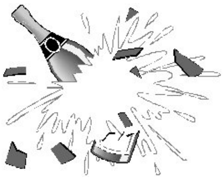
[32] a) Falso: sono inversamente proporzionali b) Vero: $\Delta x_1 = \frac{v_1^2}{2a_1} = \frac{v_1^2}{2F_{a1}} = \frac{v_1^2}{2\mu m_1 g}$ Si osservi che su v_1 non si può dire nulla se non che il rapporto con v_2 dipende dal rapporto delle masse. c) Falso il rapporto degli spazi è pari al rapporto inverso della radice delle masse d) Falso: vedi risposta precedente

[33] a) Vero b) Vero c) Vero d) Falso è data da $v_{gr}\,\mu$.

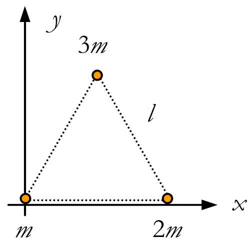
[34] a) Falso: se si aumenta μ cresce la forza ma si è costretti a caricare più combustibile b) Vero c) Falso è legato anche al rapporto delle masse d) Falso: il rapporto tra le masse è quello inverso come si può capire anche dal fatto che v_{rt} deve raggiungere valori maggiori di v_{gr}

[35] Indicata con $\boldsymbol{p}$ la quantità di moto del sistema si ha: $m_1\,\boldsymbol{v}_1 + m_2\,\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{p}$ e ciò consente di trovare $\boldsymbol{v}_1$ noti $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{p}$

32. Spiegare come mai attraverso il rinculo si possa risalire al rapporto delle masse coinvolte anche in presenza della forza d'attrito. [36]
33. Riassumere in 20 righe relazioni e problemi connessi al movimento a reazione. [37]



34. Commentare alla luce del teorema di conservazione della quantità di moto l'immagine qui a lato. [38]
35. Ricerca di vero: centro di massa a) il *centro di massa* di un corpo esteso è un *particolare punto del corpo*; b) il *centro di massa* è il punto in cui *si trova concentrata tutta la massa*; c) la *quantità di moto del centro di massa* è la *quantità di moto dell'intero sistema* d) il centro di massa *si trova a distanze proporzionali alle masse.* [39]
36. Ricerca di falso: centro di massa a) Se si lancia in aria una chiave inglese questa *ruota intorno al centro di massa* mentre il centro di massa si muove su traiettoria parabolica; b) Il centro di massa di un proiettile che esplode in volo *continua a muoversi come se l'esplosione non fosse avvenuta*; c) Il centro di massa ha come coordinata la *media ponderata delle coordinate* delle diverse masse del sistema; d) nel caso di due sole masse il centro di massa si trova tra le due masse a *distanze proporzionali* alle masse. [40]
37. Ricerca di vero: centro di massa a) Il centro di massa di un triangolo omogeneo è l'*incentro* punto di incontro delle bisettrici b) La accelerazione del centro di massa è nulla c) La velocità del centro di massa è *perfettamente nota se è nota la quantità di moto di un sistema* d) Il centro di massa nel caso di un rinculo *rimane fermo.* [41]



38. Ricerca di vero; Tre masse m, $2m$ e $3m$ si trovano a distanze l identiche l'una dall'altra in un piano. Si disponga un sistema xOy come in figura. La posizione del centro di massa C è la seguente: a) Il baricentro del triangolo che ha per vertici le tre masse; b) Non è determinabile se non si conosce il valore di l; c) $\mathbf{r}_C \equiv (7/12\, l; \frac{1}{2}\, l)$; d) $\mathbf{r}_C \equiv (7/2\, l; 2/3\, l)$ [42]
39. Ricerca di vero; Date tre masse m_1, m_2, m_3 disposte in un piano, relativamente alla posizione del centro di massa si può affermare: a) Che

---

[36] Si veda il testo

[37] Si veda il testo: ma si deve far riferimento alla conservazione della quantità di moto, introdurre la velocità relativa dei gas e il tasso μ di consumo della massa che consentono di determinare la spinta; trattandosi di un sistema a massa variabile si avrà comunque una accelerazione variabile.

[38] Osservare e discutere il comportamento dei frammenti

[39] a) Falso: per esempio in una rondella è il centro delle due circonferenze che non appartiene alla rondella; b) Falso: è un punto matematico che si muove come se in esso fosse concentrata tutta la massa e ad esso fosse applicata la risultante di tutte le forze c) Vero d) Falso: si trova a distanze inversamente proporzionali nel solo caso in cui le masse siano due.

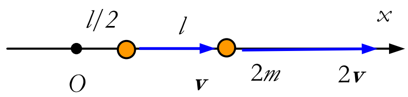
[40] a) Vero. b) Vero c) Vero d) Falso: il centro di massa si trova tra le due masse a distanze inversamente proporzionali alle masse.

[41] a) Falso: è il baricentro (vedi dispensa) b) Falso: se la risultante delle forze esterne non è nulla il centro di massa è accelerato c) Vero: basta dividere la quantità di moto per la massa totale d) Falso: rimane fermo solo se era nulla la quantità di moto iniziale.

[42] Basta applicare la definizione e si ottiene la risposta c). Per esempio $x_C =$ $= 7/12\, l$

si trova sicuramente all'interno del triangolo che ha per vertici le tre masse; b) Che si trova all'interno o all'esterno a seconda dei rapporti tra le diverse masse; c) Se cambiano i valori delle tre masse la posizione del centro di massa muta sicuramente; d) Se non cambia la somma delle tre masse la posizione del centro di massa non cambia. [43]

40. Ricerca di vero; due masse m e $2m$ si muovono come in figura: a) Il centro di massa C ha ascissa $\frac{3}{5}l$; b) La velocità del centro di massa $v_C = \frac{3}{5}v$; c) Nel sistema di riferimento del centro di massa si ha $v_{1C} = -\frac{2}{3}v$; d) Nel sistema di riferimento del centro di massa si ha $v_{CC} = \frac{5}{3}v$. [44]



41. Dare la definizione di centro di massa ed illustrarne le principali proprietà (20 righe)
42. Partendo dalla definizione di centro di massa si spieghi perché il centro di massa si muove come se possedesse la quantità di morto del sistema ed in esso fosse concentrata tutta la massa.
43. Un razzo parte da una base spaziale. Quando giunge ad altezza h dove si trova il centro di massa del sistema formato dal razzo e dai gas di scarico emessi? [45]
44. Il teorema di conservazione della quantità di moto ha natura vettoriale. In quale contesto, anche se $\overrightarrow{R_e} \neq 0$, lo si può applicare in forma scalare? [46]
45. Spiegare come si possa applicare il teorema di conservazione della quantità di moto ai processi d'urto anche quando si è in presenza di forze esterne non equilibrate. [47]

---

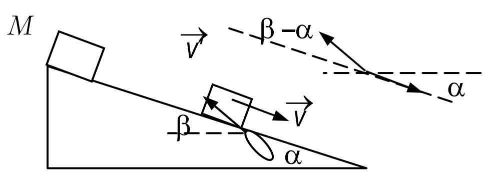
[43] a) Vero, infatti la media ponderata è sempre compresa tra il valore massimo e il valore minimo e dunque lungo qualsiasi asse passante per 2 delle 3 masse è sempre interno alla regione compre tra quella più a destra e quella più a sinistra. Se si ripete 3 volte il ragionamento si conclude che deve stare nel triangolo. b) Falso, vedi risposta precedente; c) Falso, non muta se le tre masse cambiano nello stesso rapporto; d) Falso, lo si può vedere con un banale controesempio in cui una massa non cambia e le altre due si scambiano il valore.

[44] a) Falso: applicando la definizione si ha il centro di massa C ha ascissa $\frac{5}{6}l$; b) Falso: vale $v_C = \frac{mv + 2m\,2v}{3m} = \frac{5}{3}v$; c) Vero: $v_{1C} = v_{1O} + v_{OC} = v - \frac{5}{3}v = -\frac{2}{3}v$; d) Falso: vale 0.

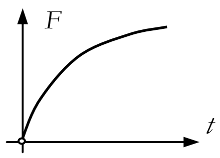
[45] La quantità di moto del sistema era 0 e pertanto essa è rimasta zero; dunque il centro di massa si trova ancora presso la base di partenza.

[46] La relazione $\overrightarrow{R_e} = \frac{\delta \vec{p}}{\delta t}$ è sempre vera e corrisponde a 3 relazioni scalari. Se lungo l'asse k si ha che $R_{ek} = 0$ avremo che $\frac{\delta p_k}{\delta t} = 0$ ovvero che p_k = costante

[47] Nei processi d'urto le forze interne hanno natura impulsiva e sono molto maggiori delle forze esterne. Pertanto, se si considera l'intervallo temporale all'inizio e alla fine della forza impulsiva si può considerare la forza esterna assolutamente trascurabile ed applicare la conservazione della quantità di moto come se il sistema fosse isolato.



46. Un corpo di massa M scivola lungo un piano inclinato di angolo α e percorre uno spostamento Δl sotto l'azione della gravità raggiungendo una velocità v. A questo punto un proiettile di massa m dotato di velocità v' che forma un angolo β con l'orizzontale lo colpisce e lo arresta. a) quanto vale v ? b) Costruire la figura in maniera di individuare bene gli angoli coinvolti e quindi dimostrare che $v' = \dfrac{M\sqrt{2g\,\Delta l \sin\alpha}}{m\cos(\beta-\alpha)}$ [48]
47. Un corpo puntiforme di massa m si sta movendo lungo una retta (asse x) con velocità v_x quando subisce l'azione di una forza F diretta lungo l'asse x e con intensità variabile (in intensità e verso). La forza agisce per un intervallo di tempo Δt e al termine della sua azione la velocità raggiunge il valore v'_x: a) non si può calcolare la forza media perché non si conosce come F varia nel tempo b) v'_x è sicuramente diverso da v_x perché c'è stato lavoro e dunque si è avuta una variazione di energia cinetica c) la forza media vale è pari alla media aritmetica tra la forza massima e quella minima d) Nel calcolare l'impulso bisogna sommare in valore assoluto sia le aree positive sia quelle negative e) La forza media può essere calcolata con i dati a disposizione. [49]
48. Molte automobili dispongono di cuscini d'aria detti "*airbags*" che, in caso di incidente, si gonfiano automaticamente. Lo scopo di tale dispositivo è quello di proteggere il guidatore…
    A …riducendo l'impulso
    B …aumentando la variazione nell'unità di tempo della sua quantità di moto
    C …riducendo la sua velocità finale
    D …aumentando la variazione totale della sua quantità di moto
    E … riducendo la variazione nell'unità di tempo della sua quantità di moto



49. Una forza $\vec{F}$ dotata di direzione costante varia nel tempo come indicato in figura. Rappresentare sullo stesso diagramma il valore della forza media spiegando sul foglio come si fa e perché. [50]

---

[48] La velocità v si calcola molto semplicemente o con la II legge della dinamica, o con le leggi della cinematica vettoriale o con la conservazione della energia.

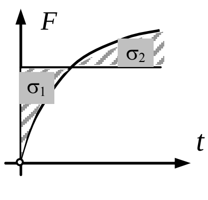
La componente tangenziale del vettore accelerazione è $a_t = g \sin\alpha$ e poiché il moto è u.a. con velocità iniziale nulla si ha: $v^2 = 2g \sin\alpha\,\Delta l$.

Tra corpo e proiettile si ha un urto dopo il quale la quantità di moto diviene 0 e se applichiamo la conservazione della quantità di moto nella direzione del piano avremo: $M v - mv' \cos(\beta-\alpha) = 0$ da cui: $v' = \dfrac{Mv}{m\cos(\beta-\alpha)} = \dfrac{M\sqrt{2g\,\Delta l \sin\alpha}}{m\cos(\beta-\alpha)}$

[49] Come è noto la forza media è la forza che, nello stesso intervallo di tempo fornisce la medesima variazione di quantità di moto e poiché sono stati dati sia Δt sia la variazione di quantità di moto si ha $\langle F\rangle = \dfrac{m(v'_x - v_x)}{\Delta t}$

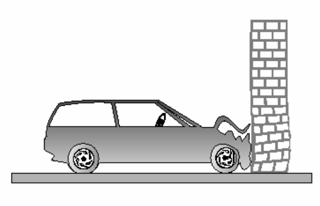
[50] La forza media è *la forza costante che produce nello stesso intervallo di tempo la stessa variazione di quantità di moto*. Poiché la variazione di quantità è sempre pari all'impulso che, a sua volta corrisponde all'area sottesa dal diagramma forza tempo, ne consegue che la forza media si trova tracciando una retta orizzontale che individui la stessa area.

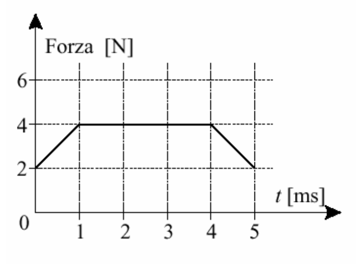
50. Se ad un corpo di massa *m* è applicata una forza che varia nel tempo con legge data da una relazione espressa da un trinomio di II grado descrivere come si potrebbe determinare la variazione di quantità di moto in un intervallo dato. [51]



[51] La variazione di quantità di moto corrisponde all'impulso che a sua volta corrisponde all'area sottesa dalla parabola. Si tratta di calcolare l'area di un settore parabolico. L'area del settore si ottiene come somma o differenza tra l'area di un trapezio e l'area di un segmento parabolico (teorema di Archimede)

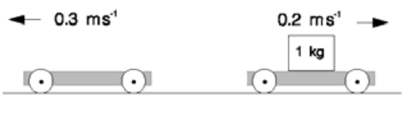
10.8 Quesiti dalle Olimpiadi della Fisica





1. *Olimpiadi 1999* I livello: Un'auto X è stata costruita in modo che la sua parte anteriore possa deformarsi durante un urto, come in figura. Una seconda auto Y è uguale alla prima, ma ha la parte anteriore molto meno deformabile. Entrambe le auto urtano un muro alla stessa velocità. In relazione alle auto X e Y, quali delle seguenti affermazioni riferite all'urto, sono corrette? I La forza media agente sull'auto X è più piccola. II L'auto X si arresta in un tempo maggiore. III La variazione di quantità di moto dell'auto X è minore. a) Soltanto la I; b) Sia la I che la II; c) Sia la I che la III; d) Sia la II che la III; e) Tutte e tre. [52]
2. *Olimpiadi 1999* I livello: Un oggetto si muove in linea retta sotto l'azione di una forza parallela alla direzione di moto. In figura è indicato il modo in cui l'intensità della forza varia nel tempo. Qual è l'impulso trasmesso all'oggetto dalla forza, nell'intervallo di tempo tra 0 e 5 s ? a) $8\cdot10^{-3}$Ns; b) $10\cdot10^{-3}$Ns; c) $15\cdot10^{-3}$Ns; d) $18\cdot10^{-3}$Ns; e) $20\cdot10^{-3}$Ns. [53]
3. *Olimpiadi 1998* I livello; Una forza di 50N agisce per 2s su un corpo che ha la massa di 1 kg mentre questo si sposta di 10m. L'impulso trasferito al corpo è a) 1000 kg m/s b) 500 kg m/s c) 100 kg m/s d) 50 kg m/s d) 10 kg m/s. [54]
4. *Olimpiadi 1996* I livello; Durante una partita di baseball, il ricevitore afferra una palla da 0.1 kg che gli arriva sul guantone alla velocità di 20m/s e per fermare la palla impiega 0.01 s. La media temporale della forza applicata alla palla è a) 20N; b) 100N; c) 200N; d) 1000N; e) 2000N
5. *Olimpiadi 2004* I livello; Una palla di massa 0.6 kg, inizialmente ferma, viene colpita con una mazza di legno. La palla rimane in contatto con la mazza per 0.2 s e quando se ne discosta la sua velocità è di 25 m/s. Quanto vale l'intensità media della forza esercitata dalla palla sulla mazza? a) 3 N; b) 8.3 N; c) 15 N; d) 75 N; e) 150 N
6. Olimpiadi 1997 I livello; Quali delle seguenti quantità sono costanti per un proiettile in volo, in assenza di atmosfera? I La componente orizzontale della velocità. II La componente verticale dell'accelerazione. III La componente verticale della quantità di moto.

   Tutte e tre; b) Solo la II; c) Solo la II e la III; d) Solo la I e II; e) Nessuna delle tre



7. *Olimpiadi 1995* I livello; Due carrelli identici vengono tenuti insieme comprimendo una molla di massa trascurabile, interposta tra di essi; su uno dei due carrelli viene fissata una massa di 1 kg. Ad un certo istante si fa scattare la molla e i due carrelli vengono lanciati da parti opposte, lungo una rotaia piana. In figura è indicata la velocità dei

---

[52] La I è vera perché essendo deformabile si determina una durata più lunga della interazione e dunque una forza media minore (a parità di variazione di qdm). Per la stessa ragione è vera la II. La III è falsa perché le due auto hanno la stessa massa e le stesse velocità iniziali e finali.

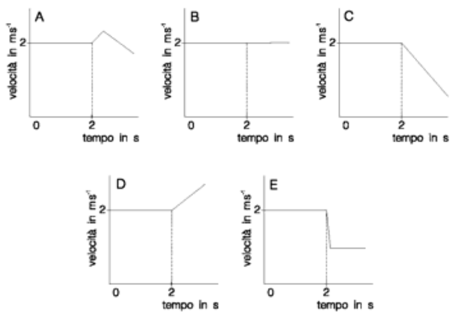
[53] L'impulso è pari all'area (attenzione alle unità, tempi in ms).

[54] N·m = kg m/s; presenza di dati inutili come distrattori

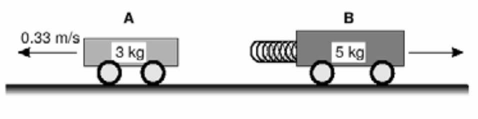
carrelli dopo lo scatto della molla. La massa di ciascun carrello è a) 2/3 kg; b) 1 kg; c) 3/2 kg; d) 2 kg; e) 5/2 kg [55]

8. *Olimpiadi 1995* I livello; Un carrello di 1 kg di massa si muove su di un piano alla velocità di 2m/s per 2 s. Da un'altezza di pochi centimetri si fa cadere sul carrello un mattone di massa pari ad 1 kg. Assumendo che l'attrito dovuto alle ruote sia trascurabile, quale dei seguenti grafici potrebbe rappresentare meglio il moto del carrello?

   A B C D E [56]

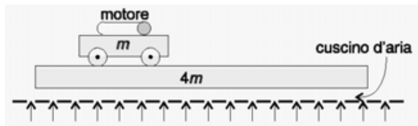


9. *Olimpiadi 2004* I livello; In figura sono mostrati due carrelli posti su una superficie orizzontale priva di attrito, mentre sono spinti via da una molla che viene fatta scattare. Il carrello A ha una massa di 3 kg, quello B di 5 kg. Il primo si muove con una velocità di 0.33 m/s. Se inizialmente i carrelli erano fermi, qual è la velocità del carrello B? a) 0.12 m/s; b) 0.20 m/s; c) 0.27 m/s; d) 0.33 m/s; e) 0.55 m/s; [57]



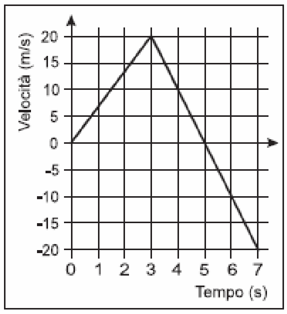
10. *Olimpiadi 1999* I livello Un proiettile ha una massa di 5kg e si muove orizzontalmente con una velocità di 200m/s, quando esplode e si divide in due pezzi che continuano a muoversi nel verso e direzione iniziali. Uno dei due pezzi di 3kg si muove con una velocità di 100 m/s. Quale sarà la velocità del secondo pezzo? a) 150 m/s; b) 200 m/s; c) 300 m/s; d) 350 m/s; e) 750m/s. [58]

11. *Olimpiadi 1996* I livello; La figura mostra un carrello di massa m dotato di un motore che si trova su una base di massa 4m sollevata da un cuscino d'aria. Ad un certo istante il carrello inizia a muoversi verso destra. Quando il carrello ha assunto la velocità v rispetto al suolo, la base: a) rimane ferma. b) si muove verso destra con velocità v/5; c) si muove verso sinistra con velocità v/5. d) si muove verso destra con velocità v/4. e) si muove verso sinistra con velocità v/4. [59]



12. *Olimpiadi 2007* I livello: il grafico della velocità in funzione del tempo in figura rappresenta il moto di un carrello di massa 3kg che si muove di moto rettilineo. Quanto vale la variazione di quantità di moto del carrello tra gli istanti t_1 = 1.5 s e t_2 = 3.0 s

   A … 20 kg ms^{-1} B … 30 kg ms^{-1} C … 60 kg ms^{-1}
   D … 80 kg ms^{-1} E … 90 kg ms^{-1}



13. *Olimpiadi 2008* I livello: Un ragazzo e una ragazza stanno pattinando sul ghiaccio. Ad un certo istante, quando sono vicini e fermi, si danno una spinta allontanandosi e poco dopo sono distanti 8 m. La massa del ragazzo è di 75 kg e quella della ragazza

[55] (m+1)0.2 = m 0.3

[56] Il carrello subisce l'azione decelerante della forza d'attrito del mattone che si esercita finché c'è moto relativo

[57] $v_B = \dfrac{3\cdot 0.33}{5}$

[58] 5·200 = 100·3 + 2·x

[59] mv + 4m v' = 0

di 45. L'attrito è trascurabile. Qual è lo spazio percorso dalla ragazza in questo intervallo di tempo. [60]

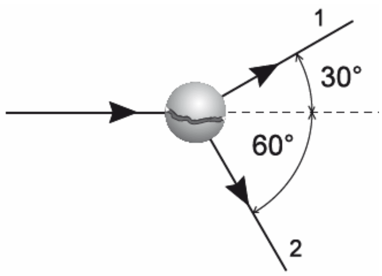
A … 8 m B … 6.5 m C … 5 m D … 4 m

E … 3 m

14. *Olimpiadi 2008* I livello: In una partita d tennis uno dei giocatori respinge la palla che gli viene incontro alla velocità di 20 m/s; la palla, la cui massa è di 58 g, viene respinta nella stessa direzione. Il giocatore, con la racchetta, applica alla palla una forza media di 1.24 kN per un tempo di 3 ms. Che velocità ha la palla appena è stata respinta? [61]

A … 19 m/s B … 25 m/s C … 35 m/s

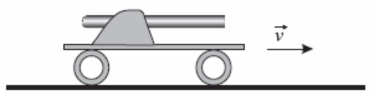
D … 44 m/s E … 48 m/s



15. *Olimpiadi 2008* I livello: Un satellite sta muovendosi con velocità v_0 quando improvvisamente un componente interno esplode spaccandolo in due pezzi di uguale massa che si allontanano uno dall'altro con velocità di modulo v_1 e v_2 come mostrato in figura. Quale tra le relazioni proposte tra le due velocità è quella corretta. [62]

A … $v_1 = v_2$ B … $v_1 = 1.2v_2$ C … $v_1 = 1.3v_2$

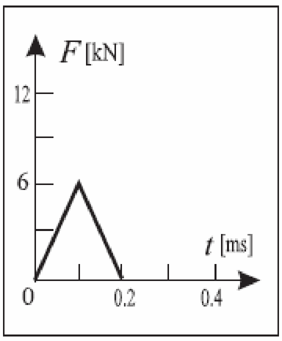
D … $v_1 = 1.7v_2$ E … $v_1 = 1.9v_2$



16. *Olimpiadi 2009* I livello: Un cannoncino giocattolo è fissato a un carrellino che si muove con velocità v lungo un binario rettilineo come mostrato in figura. Il cannone è puntato nella direzione del moto. Quando il cannone spara un proiettile il cannone e il carrello, per il contraccolpo, si fermano. Indichiamo con M la massa del carrello con il cannone (escluso il proiettile) e con m la massa del proiettile. Qual è la velocità del proiettile, rispetto al suolo, subito dopo che è stato sparato. [63]

A … $\frac{M}{m}v$ B … $\frac{M+m}{m}v$ C … $\frac{M-m}{m}v$

D … $\frac{m}{M}v$ E … $\frac{m}{M-m}v$



17. *Olimpiadi 2010* I livello: Una pallina, inizialmente ferma, viene colpita con una mazza da golf. Il grafico a destra mostra l'andamento temporale dell'intensità della forza applicata dalla mazza alla pallina durante il colpo. Una seconda pallina, di tipo diverso, ma della stessa dimensione e massa della prima, viene colpita con la stessa mazza. La pallina schizza via con la stessa velocità della prima.

---

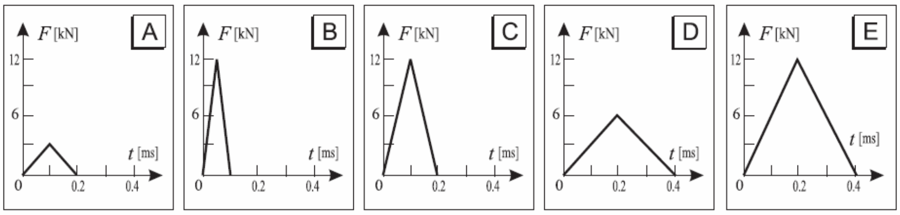
[60] Per la conservazione della quantità di moto $m_1v_1+m_2v_2=0$ e poiché il moto è uniforme $m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2=0$. D'altra parte $\Delta x_2-\Delta x_1=d$ dove di è indicato con d la distanza tra i due. Si ottiene $\Delta x_2 = \frac{m_1 d}{m_1+m_2} = \frac{75\cdot 8}{120} = 5$ m. Il quesito può essere risolto in maniera elegante anche operando con il centro di massa che era e rimane in quiete.

[61] Teorema dell'impulso

[62] La componente verticale della quantità di moto era nulla e rimane nulla

[63] Conservazione della quantità di moto $(M + m)v = mv' + 0$

Quale tra i seguenti grafici, può rappresentare l'intensità della forza applicata dalla mazza alla seconda pallina. [64]



A B C D E

18. *Olimpiadi 2012* I livello: In un incidente automobilistico un passeggero avente massa di 44 kg e velocità di 15 m/s viene fermato in 0.10 s. Qual è l'intensità della forza media che agisce sul passeggero durante l'incidente? [65]

A … 293 N B … 440 N C … 660 N D … 4400 N

E … 6600 N

[64] Dai dati forniti, poiché la variazione di quantità di moto è la stessa, ne segue che la seconda pallina deve aver subito lo stesso impulso della prima che vale (area) 6·0.2/2 = 0.6 N·ms. Dobbiamo cercare tra i 6 diagrammi forniti quello con la stessa area e l'unico è il B

[65] Teorema dell'impulso 44·15/0.1

Problemi di fine capitolo

Per affrontare i problemi tieni presenti le relazioni già discusse nei capitoli precedenti e inoltre che:

per affrontare i problemi tieni presente che

- La II legge della dinamica può essere scritta in una forma che si presta ad analizzare bene il caso delle forze impulsive. Si chiama *impulso elementare di una forza* relativo ad un intervallo infinitesimo δt il prodotto $F\ \delta t$. Nel caso di intervalli di tempo finiti Δt si chiama impulso della forza la somma $\Sigma F\ \delta t$.

- La quantità $p = m\ v$ è chiamata quantità di moto del corpo e, nel caso di un sistema di più corpi si chiama quantità di moto del sistema $\Sigma\ m\ v$.

- Poiché $\Sigma F \delta t$ rappresenta l'area racchiusa sotto il diagramma forza tempo si può affermare che *l'impulso di una forza, pari all'area racchiusa dal diagramma,* è pari alla variazione di quantità di moto del corpo cui si applica la forza. *(teorema dell'impulso)*

- Quando la risultante delle forze esterne (cioè delle forze applicate da corpi esterni al sistema su corpi interni al sistema) è nulla allora la quantità di moto del sistema rimane costante o, equivalentemente, la sua variazione è uguale a 0 *(teorema di conservazione della quantità di moto).* Il teorema si può applicare *anche quando* le forze interne abbiano valori molto più elevati delle forze esterne (per esempio nei processi d'urto).

- Si chiama *centro di massa* di un sistema di n particelle di massa m_1, m_2, ...m_n un punto che si muove come se in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema e, ad esso fosse applicata la risultante di tutte le forze. Si dimostra che, se si indicano con x_1, x_2,..x_n le coordinate delle masse e con x_{cm} quella del centro di massa si ha $x_{cm} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$. Si dimostra inoltre che $v_{cm} = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2 + ... + m_nv_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$ cioè che la quantità di moto del sistema è pari al prodotto tra la massa del sistema e la velocità del centro di massa.

1. *Esercizio:* Analizzare, alla luce del teorema dell'impulso, il destino di un pilota di automobile con o senza cintura di sicurezza nel caso di *urto secco* contro un oggetto di massa molto maggiore della massa dell'auto.

☹

In caso di urto secco la velocità finale dell'auto è nulla e pertanto la variazione di quantità di moto del pilota è pari alla sua massa per la sua velocità. Il valore della forza esercitata dall'auto sul pilota dipende dall'intervallo di tempo Δt in cui avviene l'arresto. Tale intervallo è influenzato da diversi fattori:

- la durata della interazione durante la quale l'auto si accartoccia: quanto maggiore è questo tempo tanto maggiore è anche il tempo di impatto tra pilota e auto
- la durata della interazione vera e propria tra pilota e auto: tale durata è certamente aumentata dall'uso delle cinture di sicurezza che consentono di *frenare* il corpo del pilota mentre si avvicina al volante o al parabrezza e da altri accorgimenti quali *l'air bag*.

Si può stimare che la presenza delle cinture porti ad aumentare tra 10 e 20 volte il tempo di impatto che, nel caso di mancanza di accorgimenti di sicurezza è di qualche decimo di secondo.

A titolo di esempio consideriamo un impatto di $\Delta t = 0.02$ s tra una testa ($m \approx 5$ kg) che viaggi a circa 20 m/s e un parabrezza. La superficie di interazione (porzione di osso frontale) si può stimare in circa 50 cm². Applicando il teorema dell'impulso avremo che $F = \frac{5 \cdot 20}{0.02} = 5000$ N.

Questa forza media (*) agisce su una superficie di 50 cm² determinando una sollecitazione di compressione $\sigma_c = \frac{F}{S} = \frac{5\ 10^3}{5\ 10^{-4}} = 10^7$ N/m².

Il carico limite di resistenza alla compressione per l'osso è di $1.7 \cdot 10^8$ N/m² ed è dunque 17 volte più alto del valore trovato. Poiché però i dati utilizzati sono puramente indicativi possiamo affermare di essere, già in queste condizioni, in zona di pericolosità.

Infatti basta un riduzione della superficie di impatto, o tener conto del carattere impulsivo delle forze, o ancora tener presente che, quello da fermare è l'intero corpo, per rendersi conto che una frattura del cranio sia perfettamente plausibile.

L'effetto della cintura di sicurezza è triplice: aumenta di almeno un ordine di grandezza il tempo di interazione; aumenta la superficie di interazione che di distribuisce su tutta la fascia di appoggio, tratta il corpo come un tutto unico evitando di scaricare su una sola parte l'azione di frenamento (si pensi a cosa succede alle vertebre cervicali durante l'urto tra parabrezza ed ossa frontali).

☺

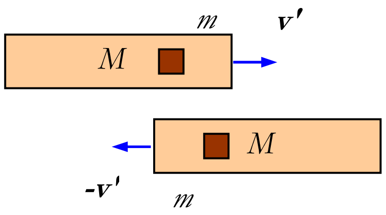
2. *Esercizio:* Si consideri la seguente coppia di eventi, apparentemente simmetrici, e che invece portano a risultati diversi. Due chiatte di massa M e velocità v trasportano, in aggiunta alla loro massa, un sacco di cemento di massa m. Vengono realizzati i seguenti 2 eventi:
   a) quando le due chiatte si incrociano i due sacchi vengono scambiati simultaneamente e, poiché possiedono una velocità relativa rispetto alla chiatta di arrivo, strisciano rallentando la chiatta sino a fermarsi
   b) quando le due chiatte si incrociano viene eseguito lo stesso esperimento, ma sequenzialmente: cioè prima si sposta un sacco dalla chiatta 1 alla 2 e poi un sacco dalla 2 alla 1.

   Trascurare gli effetti di spostamento laterale e determinare la velocità finale delle due chiatte nei due casi. Quindi motivare la ragione della diversità di risultato e perché la velocità finale sia maggiore nel secondo caso.

☹

Il problema si risolve applicando il teorema di conservazione della quantità di moto lungo la direzione di movimento delle barche ad eventi in cui i corpi coinvolti hanno inizialmente velocità diverse e, alla fine, la stessa velocità.

(*) teniamo presente che, trattandosi di una forza di natura impulsiva, i picchi sono ancora più elevati



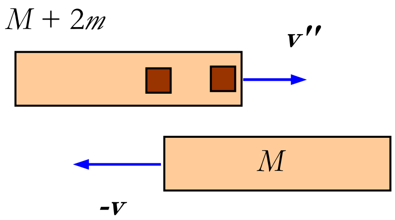
L'unica difficoltà sta nel comprendere che non si deve lavorare con il sistema fisico costituito dai 4 corpi perché la sua quantità di moto, per ragioni di simmetria, è nulla all'inizio e alla fine e dunque non si riesce da esso a determinare alcuna velocità.

- Nel primo caso consideriamo il sistema formato dalla chiatta 1 e dal sacco 2 (o equivalentemente quello formato dalla chiatta 2 e dal sacco 1). La interazione avviene tra essi nel momento in cui i sacchi vengono appoggiati.

  Applicando il teorema di conservazione della quantità di moto avremo che:

  $M\,v - m\,v = (M + m)\,v'$ da cui si ottiene:

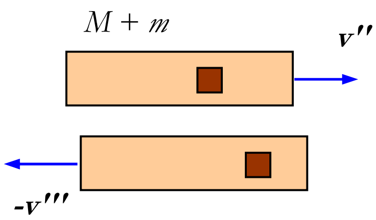
  $$v' = \frac{M - m}{M + m}\,v = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}\,v$$



- Nel secondo caso avvengono due interazioni distinte e successive: nella prima fase il sacco 2, dotato di velocità $-v$ viene appoggiato sulla chiatta 1 di massa $M + m$ e velocità v. Si ottiene così una velocità v'' per la chiatta 1; nella seconda fase un sacco dotato di velocità v'' viene spostato dalla chiatta 1 alla chiatta 2 dotata di velocità $-v$. Si otterrà una velocità v''' che, per ragioni di simmetria dovrebbe risultare uguale a v'' ma, come vedremo, diversa da v'.

  Applicando il teorema di conservazione della quantità di moto al primo trasferimento si ha:

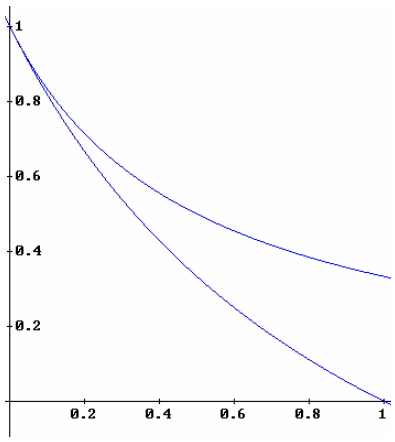
  $-m\,v + (M + m)\,v = (M + 2m)\,v''$ da cui $v'' = \dfrac{M}{M + 2m}\,v = \dfrac{1}{1 + 2\beta}\,v$



  Applicandolo poi al secondo trasferimento si ha:

$m\,v'' - M\,v = -(M + m)\,v'''$ e quindi $m\dfrac{M}{M + 2m}\,v - M\,v = -(M + m)\,v'''$

$\Leftrightarrow \dfrac{m\,M - M^2 - 2\,m\,M}{M + 2m}\,v = -(M + m)\,v''' \Leftrightarrow v''' = \dfrac{M}{M + 2m}\,v = v''$ come si era previsto



Per confrontare i risultati ottenuti abbiamo riportato in diagramma il rapporto tra velocità finale ed iniziale nei due casi in funzione del rapporto β.

Le due curve passano entrambe per il punto (0,1) ma quella relativa al primo tipo di evento si trova costantemente al di sotto, segno che nel primo caso la perdita di energia è maggiore.

E' possibile osservare per via algebrica che $\dfrac{1}{1 + 2\beta} > \dfrac{1 - \beta}{1 + \beta}$ infatti la disuguaglianza equivale ad affermare (poiché i due denominatori sono entrambi positivi) che:

$1 + \beta > (1 + 2\beta)(1 - \beta) \Leftrightarrow 1 + \beta > 1 - \beta + 2\beta - \beta^2 \Leftrightarrow \beta > 0$

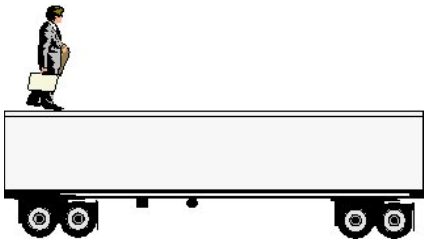
che è sempre vera tranne quando $\beta = 0$ il che corrisponde al punto comune delle due curve.

In effetti, nel secondo caso durante la prima parte della operazione il sacco rallenta di meno la chiatta perché essa trasporta anche l'altro sacco e dunque la variazione di quantità di moto del sacco trasferito viene bilanciata attraverso una minor variazione di velocità. Nella seconda parte della operazione come abbiamo visto si ottiene sull'altra chiatta la stessa velocità e, anche in questo caso si può osservare che il frenamento è minore perché la velocità relativa chiatta- sacco è inferiore a quella che si ha nel primo tipo di esperimento.

☺

3. *Esercizio:* Una persona cammina su un carrello disposto su un piano orizzontale e in grado di muoversi senza attrito sul piano stesso. Indicate con m e M le due masse e con μ il coefficiente d'attrito tra uomo e carrello si determini la relazione tra la velocità dell'uomo rispetto al carrello v_{uc} e quella dell'uomo rispetto al pavimento v_u supponendo che il sistema parta dalla quiete.

☹



Soluzione

Se consideriamo il sistema formato dal carrello e dall'uomo, poiché la risultante delle forze esterne è nulla (per il gioco combinato della forza peso e delle reazioni vincolari) si può applicare la conservazione della quantità di moto:

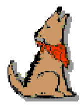
$$m\,\boldsymbol{v}_u + M\,\boldsymbol{v}_c = 0$$

D'altra parte poiché $\boldsymbol{v}_u = \boldsymbol{v}_{uc} + \boldsymbol{v}_c$ si ha che $m\,\boldsymbol{v}_u + M\,(\boldsymbol{v}_u - \boldsymbol{v}_{uc}) = 0$ il che porta alla relazione: $\boldsymbol{v}_u = \dfrac{M}{m+M}\,\boldsymbol{v}_{uc} = \dfrac{1}{1+\beta}\,\boldsymbol{v}_{uc}$.

Dunque la relazione è di tipo lineare e il coefficiente angolare della retta dipende dal rapporto delle due masse e vale $\dfrac{1}{1+\beta}$.

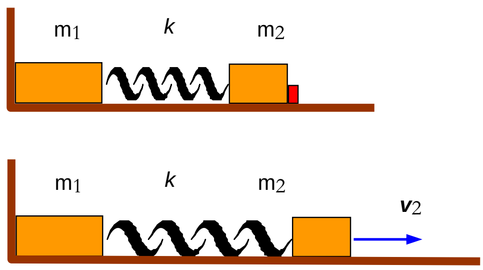
Nota bene: ovviamente il risultato non dipende dal coefficiente d'attrito il quale è solo in grado di determinare la forza con cui l'uomo spinge il carrello e dunque, in ultima analisi, l'andamento e il valore nel tempo di $\boldsymbol{v}_{uc}$.

☺



4. *Esercizio:* Due masse m_1 e m_2 sono collegate attraverso una molla di costante k. All'istante iniziale la massa m_1 è appoggiata ad una parete mentre la massa m_2 è mantenuta bloccata da un vincolo con la molla in tensione. Spiegare cosa accade al sistema quando si toglie il vincolo.

☹



Quando si toglie il vincolo la molla inizia a distendersi e la massa m_2 si sposta verso destra finché la molla risulta in tensione. Indichiamo con $\boldsymbol{v}$ la velocità di m_2 in quell'istante. Da allora in poi cessa l'azione della parete su m_1 (forza esterna) ed è possibile applicare alle due masse la conservazione della quantità di moto. Il sistema si muoverà verso destra alternando compressioni e rarefazioni in modo che $m_1\,\boldsymbol{v}_1 + m_2\,\boldsymbol{v}_2 = m_2\boldsymbol{v}$.

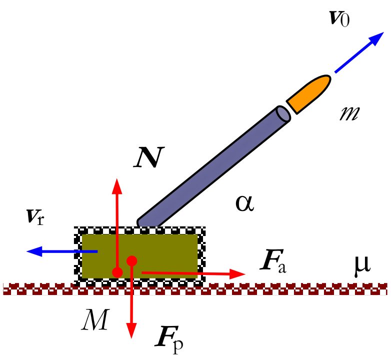
Per entrare in dettaglio sulle caratteristiche del movimento sono necessarie considerazioni di natura energetica che vengono rinviate ai capitoli successivi.

☺

5. *Esercizio:* Un obice di massa *M* (compresa la piattaforma) lancia un proiettile di massa m con velocità iniziale v_0 e con angolo di inclinazione α. Indicato con μ il coefficiente d'attrito tra la piattaforma e il terreno si trovi la velocità di rinculo v_r della piattaforma.

☹

Applichiamo all'intervallo di tempo δt relativo al momento dello scoppio della carica di lancio il teorema dell'impulso per il sistema costituito dalle due masse *m* e *M* che interagiscono con il terreno.



Sul sistema agiscono lungo l'orizzontale la forza d'attrito $\boldsymbol{F}_a$ che si oppone al moto della piattaforma, e lungo la verticale la forza peso e la reazione vincolare (che non si fanno equilibrio e determinano la variazione di quantità di moto lungo la verticale); sono inoltre presenti le due forze interne prodotte dallo scoppio, ma poiché esse si fanno equilibrio, sommandone i contributi sull'intero sistema possiamo ignorarle.

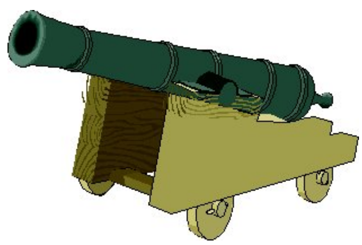
Avremo pertanto lungo l'orizzontale:

$$F_a\,\delta t = m\,v_0 \cos\alpha - M\,v_r \quad \text{con } F_a = \mu\,N$$

e lungo la verticale

$$[N - (M + m)g]\,\delta t = m\,v_0 \sin\alpha$$

Da ciò si ottiene per sostituzione:



$$v_r = \frac{1}{M}[m\,v_0 \cos\alpha - \mu\,N\,\delta t]$$

$$v_r = \frac{1}{M}[m\,v_0 \cos\alpha - \mu\,m\,v_0 \sin\alpha - \mu\,(M + m)g\delta t]$$

$$v_r = \beta\,v_0\,[\cos\alpha - \mu \sin\alpha - \mu\,(1 + \beta)\frac{g\,\delta t}{v_0}]$$ [66]

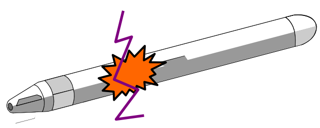
D'altra parte poiché $g\,\delta t << v_0$ a causa del carattere *esplosivo* del fenomeno potremo trascurare l'ultimo dei termini tra parentesi e scrivere:

$$v_r = \frac{m}{M}v_0\,[\cos\alpha - \mu \sin\alpha] \quad ①$$

La relazione ① (avendo indicato con v_r il modulo della velocità di rinculo) ha senso solo per $v_r > 0$ e cioè $\cos\alpha - \mu \sin\alpha > 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha < \frac{1}{\mu}$.

Per valori di α superiori a questi valori la piattaforma non si muove.

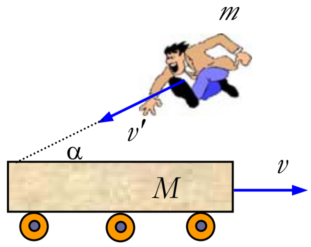
6. *Esercizio:* Un carro armato di massa M = 3'500 kg si muove con velocità v = 25 km/h quando spara un proiettile di massa m = 30 kg alla velocità (riferita alla canna del cannone) v_{pc} = 750 m/s. Determinare la velocità del carro subito dopo lo sparo ipotizzando che non ci siano sistemi di ammortizzamento dello sparo.



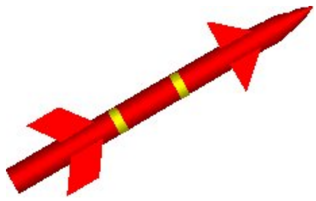
7. *Esercizio:* Un proiettile di massa m = 25 kg viene sparato da un obice con una velocità iniziale v_0 = 650 m/s con un angolo di alzo rispetto alla orizzontale di 35°. Per un difetto di fabbricazione il proiettile, 20 s dopo lo sparo il proiettile esplode in due frammenti. Il primo frammento di massa pari a 2/3 della massa del proiettile subisce un incremento di velocità Δv di 45 m/s nella stessa direzione in cui si stava muovendo. Determinare:
   a) Il punto in cui avviene l'esplosione
   b) Il vettore quantità di moto al momento della esplosione

[66] Si è posto per comodità $\beta = \frac{m}{M}$

c) La distanza dal punto di sparo a cui arriva a terra il primo frammento
d) Il punto di arrivo a cui sarebbe giunto il proiettile
e) La posizione del secondo frammento attraverso considerazioni sul moto del centro di massa. [67]



8. *Esercizio:* Un carrello di massa M si sta muovendo senza attrito con velocità v. Un signore di massa m balza sul carrello atterrando su di esso con una velocità v' (riferita al terreno) e con un angolo di impatto α. Quanto vale la velocità del sistema carrello passeggero dopo l'impatto. Svolgere il calcolo numerico per M = 120 kg, m = 70 kg, α = 35°, v = 15 m/s, v' = 8 m/s



9. *Esercizio:*La massa di un razzo a due stadi vale M = 2500 kg mentre il secondo stadio ha massa m = 500 kg. Nel momento della separazione tra i due stadi la velocità v_0 del sistema è di 230 m/s e l'incremento di velocità Δv del secondo stadio è pari a 156 m/s. Determinare la velocità v_1 del primo stadio dopo la separazione.
10. *Esercizio:* Determinare la accelerazione iniziale di un razzo di massa iniziale $m_0 = 4.00\cdot10^4$ kg sapendo che la velocità di espulsione dei gas u = 4.00 km/s e il combustibile viene bruciato al tasso di μ = 200 kg/s. [68]
11. *Esercizio:* Un missile ha massa iniziale $m_0 = 1.60\cdot10^5$ kg mentre la velocità di espulsione dei gas u = 4.00 km/s. Dopo che è stata bruciata una massa $m' = 0.90\cdot10^5$ kg viene sganciato il primo stadio di massa $m_1 = 0.30\cdot10^5$ kg. A questo punto si accende il secondo stadio di massa $m_2 = 0.28\cdot10^5$ kg. Determinare la velocità finale del II stadio. Quindi determinare la velocità finale di un missile con le stesse caratteristiche ma funzionante con un solo stadio. Utilizzare la relazione di *Tsiolkovsky* e tenere presente che quando viene applicata ad un oggetto dotato di velocità iniziale diversa da zero bisogna sostituire $\frac{v}{u}$ con $\frac{\Delta v}{u}$. [69]

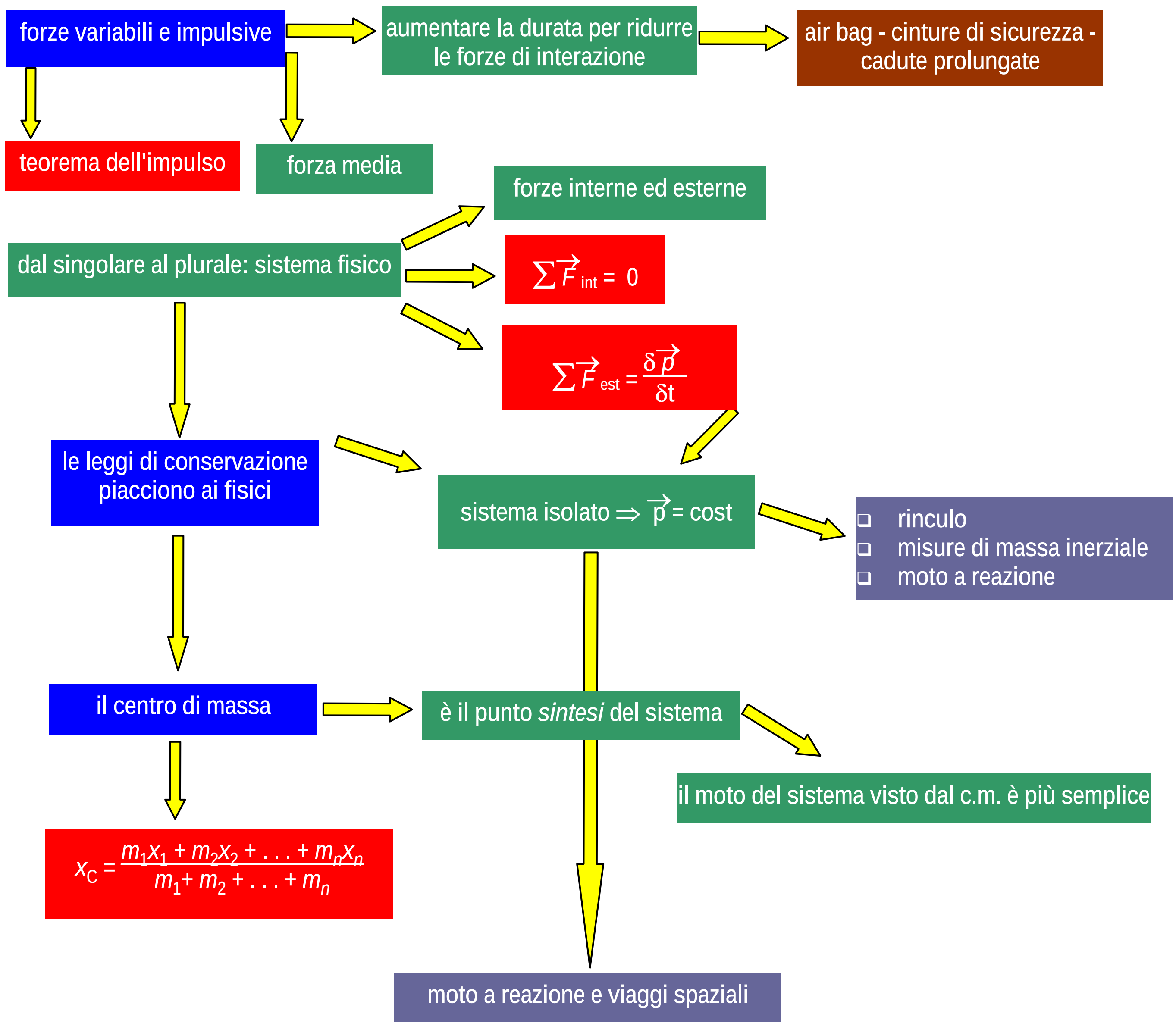
---

[67] Determinare prioritariamente il punto in cui avviene l'esplosione e la velocità necessaria al calcolo del vettore $\boldsymbol{p}$

[68] Si ottiene a = 20.0 m/s²

[69] Applicare due volte la relazione di *Tsiolkovsky* e tenere presente quanto detto alla fine del testo ricordandosi dello sganciamento del primo stadio. Si ottiene v_1 = 3.3 km/s, v_2 = 8.1 km/s. Nel caso di razzo ad uno stadio si ottiene v_3 = 5.3 km/s da cui si evince la convenienza dei missili a più stadi.

Indice analitico


forze variabili e impulsive
aumentare la durata per ridurre le forze di interazione
air bag - cinture di sicurezza - cadute prolungate
teorema dell'impulso
forza media
forze interne ed esterne
dal singolare al plurale: sistema fisico
$\sum \vec{F}_{int} = 0$
$\sum \vec{F}_{est} = \frac{\delta \vec{p}}{\delta t}$
le leggi di conservazione piacciono ai fisici
sistema isolato $\Rightarrow \vec{p} = \text{cost}$
❑ rinculo
❑ misure di massa inerziale
❑ moto a reazione
il centro di massa
è il punto *sintesi* del sistema
il moto del sistema visto dal c.m. è più semplice
$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$
moto a reazione e viaggi spaziali