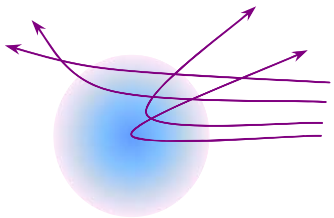
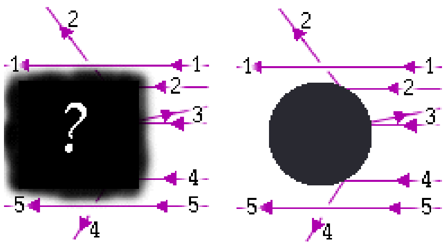
I.12. Elementi di teoria dell'urto



gli urti della fisica possono avvenire anche a distanza senza che ci sia contatto diretto



osservando le traiettorie di opportuni proiettili prima e dopo l'urto si può risalire alle caratteristiche del bersaglio

Rutherford fu il primo ad applicare lo *scattering* delle particelle α contro la materia solida per indagare l'architettura dell'atomo

12.1 Cos'è un urto?

12.1.1 Un chiarimento terminologico: urti senza contatto

Nella esperienza quotidiana si chiama *urto* un fenomeno simile a quello che si osserva quando si urtano due palle di biliardo o si scontrano due automobili, cioè quando si ha un contatto diretto tra i corpi in collisione.

In fisica il termine urto è inteso in un senso più ampio. Si chiama *urto qualsiasi interazione di breve durata tra particelle*. Pertanto parleremo di urto tra le molecole anche se esse *interagiscono a distanza* attraverso i campi elettrici. Analogamente parleremo di urto di neutroni, o di particelle alfa, con un nucleo anche se non si ha il diretto contatto tra le particelle e l'interazione è dovuta alle forze nucleari o a quelle elettriche.

12.1.2 Urti come strumenti di conoscenza

La caratteristica principale della teoria dell'urto consiste nell'ignorare il meccanismo della collisione nei dettagli *concentrandosi solo sul prima e sul dopo*. La ragione di ciò risiede nel fatto che, una analisi dettagliata risulterebbe estremamente complessa e, in alcuni casi, impossibile come nel caso in cui sia ben nota la legge che regola la interazione.

Se non è noto l'andamento della interazione nel tempo e nello spazio non è nemmeno possibile fornire la legge del moto in tutti i suoi particolari, non si può calcolare la traiettoria o determinare la velocità, etc. Ma questo, spesso, non è molto importante anche perché, a causa delle relazioni di indeterminazione che valgono nel mondo microscopico, non ha senso determinare in maniera precisa la traiettoria o la velocità delle particelle coinvolte.

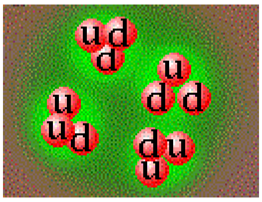
Un altro elemento interessante riguardante la teoria dell'urto è legato al fatto che non solo noi conosciamo il mondo microscopico attraverso la osservazione dei risultati di *processi d'urto*, ma ciò che vediamo risulta fortemente influenzato dalla energia dei proiettili utilizzati.

Così, all'inizio del 900 *Rutherford* e i suoi collaboratori bombardando sottili lamine metalliche con le particelle alfa (da poco scoperte nell'ambito degli studi di radioattività promossi dallo stesso gruppo) riuscirono ad evidenziare la struttura nucleare degli atomi: l'atomo contiene un nocciolo duro di carica positiva in cui è concentrata quasi tutta la massa ed è circondato da una nube elettronica carica negativamente; il rapporto tra le dimensioni dell'atomo e quelle del nucleo è di 10^5.

In questo esperimento il fatto che alcuni proiettili venissero deviati in maniera notevole indicava la presenza del *nocciolo duro* e la loro percentuale dava informazioni sulle dimensioni del nocciolo.

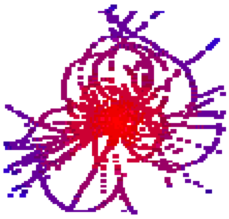
Negli anni 50 un gruppo di ricerca coordinato da Robert *Hofstadter* della università di Standford bombardando idrogeno liquido con fasci di elettroni da 800 MeV riuscì a fissare in 2.8×10^{-15} m la dimensione approssimativa del protone. I proiettili usati non erano in grado di interagire con i costituenti del protone che veniva visto dagli elettroni come un nocciolo duro; gli elettroni interagivano elettricamente con questo nocciolo duro.

Nel 1968 usando elettroni da 8÷15 GeV nell'acceleratore lineare di Standford e successivamente (anni 80) al *FermiLab* di Batavia in Illinois e al CERN di Ginevra, usando muoni da 150 GeV, si scoprirono tre oggetti diversi che ruotavano entro il protone e il cui movimento determinava ciò che noi chiamiamo solitamente protone. Tali oggetti furono chiamati *quark*. [1]



i quark trovano conferma nel bombardamento di protoni tramite elettroni e muoni

Il problema *analisi di un urto* viene solitamente formulato così: essendo note la quantità di moto e l'energia cinetica delle particelle prima dell'urto, come è possibile determinarne i valori dopo l'urto? Ovviamente, per risolvere il problema non deve essere necessaria una analisi dettagliata del processo di interazione. Anzi è la interazione (ignota o poco conosciuta) ad essere studiata attraverso i risultati che determina.



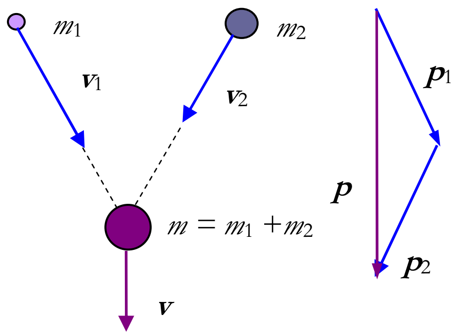
Nel seguito di questo capitolo tratteremo solo della teoria dell'urto nella approssimazione della meccanica newtoniana, quando le velocità delle particelle sono sufficientemente piccole rispetto alla velocità della luce nel vuoto e le loro masse sono abbastanza grandi. Ancora, per ragioni di semplicità, ci limiteremo alla interazione tra due sole particelle. Non inganni la apparente semplificazione del problema. Esso si rivela utile per analizzare molte situazioni fisiche reali.

1 La curiosità è molta, ma in fisica non sempre si può *iniziare il pranzo dal dessert*. Per avere una conoscenza di queste problematiche che non si basi su aneddoti o metafore occorre passare attraverso le *forche caudine* della fisica classica.

12.2 L'urto totalmente anelastico

12.2.1 L'EQUAZIONE È COMPLETAMENTE DETERMINATA

Si dice che un *urto* è *totalmente anelastico* quando, dopo l'urto, i due corpi si muovono con la stessa velocità e rimangono uniti a formare un unico corpo. Sono esempi di questo genere sia l'impatto di un proiettile in un blocco di sabbia, sia quello di un meteorite con la terra, sia molti degli urti tra automobili (frontali e tamponamenti). Nella fisica delle particelle si ha un urto totalmente anelastico quando il proiettile viene incorporato dal bersaglio come accade per esempio nel bombardamento di nuclei con neutroni che vengono catturati a formare un isotopo del bersaglio.



nell'urto anelastico le due particelle m_1 e m_2 restano unite e ciò consente, tramite la conservazione della quantità di moto, di prevedere la velocità finale

Consideriamo l'urto tra due particelle di masse m_1 e m_2 e di velocità $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ che, dopo l'urto, rimangano attaccate assieme. Qual è la velocità del nuovo corpo dopo l'urto?

Poiché stiamo trattando con il caso non relativistico la massa dei corpi non dipende dalla velocità, e pertanto la massa del nuovo corpo è $M = m_1 + m_2$. Applicando la conservazione della quantità di moto si può scrivere che:

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}$$

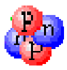
da cui:

$$\boldsymbol{v} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{(I.12.1)}$$

La *velocità finale* è data dalla media ponderata delle velocità iniziali.

Si presti attenzione al fatto che abbiamo usato relazioni di tipo vettoriale che, graficamente, determinano un triangolo. Quando le due particelle si muovono lungo una retta la somma vettoriale si trasforma in una somma algebrica delle componenti.

12.2.2 ESEMPIO: ENERGIE NEL DECADIMENTO α



Esercizio: Come vedremo, in un urto totalmente anelastico la somma delle energie cinetiche prima dell'urto non è mai uguale all'energia cinetica del nuovo corpo dopo l'urto. Si ha sempre una perdita di energia dovuta ai fenomeni dissipativi responsabili delle deformazioni permanenti che si verificano nel corso dell'impatto.

Ciò è del tutto evidente nel caso di due corpi di quantità di moto uguali ed opposte perché in tal caso la energia cinetica finale è zero mentre quella iniziale è diversa da zero.

Un caso particolare di urto totalmente anelastico è quello in cui si ha il processo inverso e cioè da un unico corpo se ne generano due (è quello che abbiamo già studiato come *rinculo*).

Consideriamo come esempio il *decadimento radioattivo alfa*. In tale decadimento, un nucleo di materiale radioattivo emette una particella alfa (nucleo di elio) e il nucleo che si forma da tale processo subisce un rinculo.

Supponiamo di conoscere l'energia cinetica $\mathcal{E}_k$ della particella α e ci proponiamo di determinare quella del nucleo figlio prodotto F che indicheremo con $\mathcal{E}_{kF}$. Il problema ammette una semplice soluzione basata sulla legge di conservazione della quantità di moto.

Indichiamo con m la massa della particella α e con M quella del nucleo prima del decadimento; la massa del nucleo *figlio* sarà allora $M - m$.

Si sa che le particelle α sono particelle non relativistiche [2] e pertanto potremo applicare le leggi della meccanica classica che abbiamo studiato. Se supponiamo che il nucleo fosse a riposo, prima del decadimento, applicando la conservazione della quantità di moto, avremo che:

$0 = \boldsymbol{p}_\alpha + \boldsymbol{p}_F$

Le corrispondenti energie cinetiche saranno:

$$\mathcal{E}_{k\alpha} = \frac{p^2{}_\alpha}{2m} \qquad \mathcal{E}_{kR} = \frac{p^2{}_F}{2(M-m)}$$

Passando al rapporto si semplificano le quantità di moto (che sono uguali in modulo):

$$\frac{\mathcal{E}_{k\alpha}}{\mathcal{E}_{kF}} = \frac{M-m}{m}$$

La variazione di energia del nucleo *padre* (di origine nucleare) sarà ottenuta dalla somma delle energie dei prodotti:

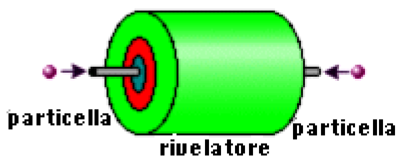
$$\Delta\,\mathcal{E} = \mathcal{E}_{k\alpha} + \mathcal{E}_{kF} = \mathcal{E}_{k\alpha} + \mathcal{E}_{k\alpha}\frac{m}{M-m} = \mathcal{E}_{k\alpha}\frac{M}{M-m}$$

12.2.3 PERCHÉ NEGLI ACCELERATORI SI USANO I FASCI CONTRAPPOSTI DI PARTICELLE ED ANTIPARTICELLE?

Negli acceleratori di particelle si è passati da processi d'urto contro un bersaglio fisso a un sistema che punta ormai a far incontrare fasci di particelle ed antiparticelle che viaggiano in senso contrario (*urti frontali*).

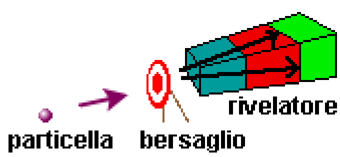
La ragioni di ciò sta nel fatto che, in questo caso la energia trasferita nell'impatto è massima. Per rendercene conto supponiamo di avere due particelle di massa uguale m e consideriamo il valore di energia trasferita nell'urto nei due casi in cui la quantità di moto del sistema è nulla (urto frontale) e in cui una delle due particelle sia ferma. Supporremo che, in entrambi i casi il sistema possieda la stessa energia cinetica $\mathcal{E}_k$ prima dell'urto.

- **fasci contrapposti**



Poiché la quantità di moto si conserva ed essa è nulla prima dell'urto anche la quantità di moto finale è nulla e pertanto è nulla la velocità finale del sistema. Pertanto tutta la energia cinetica posseduta dalle due particelle viene usata come energia di indagine della materia. Si tratta di un urto a grande resa perché non ci sono frammenti che si portano via una quota di energia.

- **bersaglio fisso**



La quantità di moto iniziale vale $\sqrt{2\,m\,\mathcal{E}_k}$ ed essa si conserva nell'urto. Pertanto la energia cinetica dopo l'urto vale $\frac{p^2}{2\,(2m)} = \frac{2\,m\,\mathcal{E}_k}{2\,(2m)} = ½\,\mathcal{E}_k$. In questo caso i frammenti di reazione portano con sé metà della energia inizialmente disponibile.

[2] Ciò è noto dalla conoscenza della massa e della energia cinetica delle particelle α che è sempre di qualche MeV contro una energia di riposo di qualche GeV.

12.3 L'urto elastico

12.3.1 LE EQUAZIONI CHE DESCRIVONO L'URTO

Un *urto* si dice *elastico* se, oltre a conservarsi la quantità di moto, si conserva anche la somma delle energie cinetiche dei corpi che si urtano. Ciò non implica che non cambino le velocità dei due corpi singolarmente presi, anzi, in generale esse cambiano insieme alle singole quantità di moto ed alle energie cinetiche; ma la somma delle *quantità di moto e delle energie* cinetiche rimane costante.

Su scala microscopica gli urti sono sempre o elastici (si tratta di interazioni a distanza tra campi di forza) o completamente anelastici (in questo caso il proiettile viene catturato dal bersaglio e si verifica o una reazione chimica con formazione di una nuova molecola o una reazione nucleare con formazione di un nuovo elemento).

In un *urto elastico* di due corpi valgono le due seguenti equazioni:

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 \qquad \mathcal{E}_{k1} + \mathcal{E}_{k2} = \mathcal{E}'_{k1} + \mathcal{E}'_{k2} \qquad \text{(I.12.2)}$$

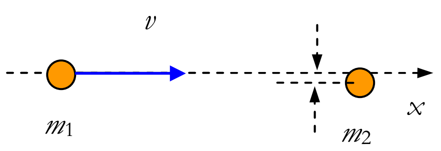
dove le grandezze $\boldsymbol{p}$ ed $\mathcal{E}_k$ si riferiscono agli istanti prima dell'urto e quelle con l'apice si riferiscono a quello dopo l'urto [3].

Le equazioni (I.12.2) corrispondono a 4 equazioni scalari: le prime tre provengono dalla prima equazione scritta nelle componenti lungo i 3 assi e la quarta dalla seconda.

Le incognite sono in generale 6 (le 3 componenti della quantità di moto di ciascuna delle due particelle dopo l'urto) e pertanto l'uso delle due leggi di conservazione non risolve integralmente il problema del conoscere lo stato finale una volta che sia noto quello iniziale.

urto elastico piano: 3 equazioni per 4 incognite; il problema risulta sottodeterminato e per affrontarlo bisogna conoscere il parametro d'urto

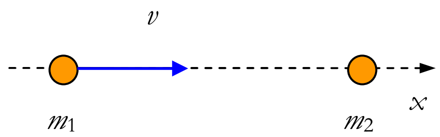
Anche nell'ipotesi di considerare un urto piano il problema non è completamente risolto perché le incognite si riducono a 4, ma le equazioni diventano 3 e manca sempre un dato ulteriore.



il parametro d'urto

In effetti, nel caso dell'urto piano, la situazione dopo l'urto dipende dal cosiddetto *parametro d'urto*, cioè dalla distanza tra la retta individuata dalla velocità della particella proiettile e il centro della particella bersaglio. Al variare del parametro d'urto si conservano la quantità di moto e l'energia cinetica, ma cambia l'angolo formato tra le due sferette dopo l'urto e, con tale angolo cambiano le singole velocità. Il parametro d'urto risulta particolarmente significativo quando si opera con particelle che interagiscono però con forze dipendenti dalla distanza (per esempio interazioni elettriche).

Per esempio nell'esperimento di Rutherford che abbiamo già citato il parametro d'urto determina la forma delle traiettorie e dal loro esame si riesce pertanto a risalire alle dimensioni del nucleo e all'andamento con la distanza della interazione.



12.3.2 IL CASO DELL'URTO CENTRALE AD UNA DIMENSIONE

Consideriamo ora l'*urto centrale elastico* tra due sfere, cioè quello in cui le due velocità giacciono sulla retta che unisce i centri della due sfere. Alla

[3] In fisica, dato il largo uso che si fa di grandezze recanti un soprassegno, a volte un apostrofo, a volte una ~ (tilde), si usano due brutti neologismi, che fanno però parte del linguaggio interno e sono rapidi da usare quando si parla; si parla dunque di quantità *primate* e di quantità *tildate*.

luce di quanto detto al punto precedente, questo è l'unico tipo di urto elastico completamente determinato dalle leggi di conservazione.

Per semplificare i calcoli collochiamo il sistema di riferimento in modo che la massa m_2 sia a riposo e indichiamo con v la velocità della massa m_1.

In tal caso le equazioni (I.12.2) assumono la forma:

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2 \qquad \tfrac{1}{2} m_1 v^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$$

il che, trasportando i termini, equivale a:

$$m_1(v - v_1) = m_2 v_2 \qquad m_1(v^2 - v_1^2) = m_2 v_2^2$$

Dividendo la seconda equazione per la prima [4] si ha:

$$m_1(v - v_1) = m_2 v_2 \qquad v + v_1 = v_2$$

e sostituendo la seconda nella prima si ottiene:

$$m_1(v - v_1) = m_2(v + v_1) \text{ da cui:}$$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \qquad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v \qquad \text{(I.12.3)}$$

Il risultato trovato può essere scritto in modo più efficace attraverso il rapporto delle due masse coinvolte, unico parametro che influenza i risultati. Posto $\beta = \frac{m_2}{m_1}$ basta dividere numeratore e denominatore per m_1 e si ha:

$$v_1 = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} v \qquad v_2 = \frac{2}{1 + \beta} v \qquad \text{(I.12.4)}$$

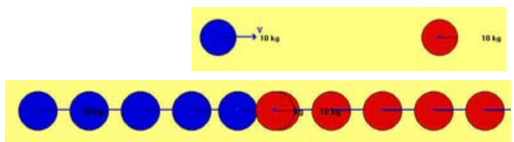
Nel caso generale in cui la seconda sferetta non è ferma e si hanno due velocità v e u si ottiene una espressione simmetrica nelle quantità 1 e 2 la cui determinazione (che si esegue esattamente come la precedente) è lasciata per esercizio allo studente. [5]

$$v_1 = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} v + \frac{2}{1 + \beta} u \qquad v_2 = \frac{2}{1 + \beta} v + \frac{\beta - 1}{1 + \beta} u \qquad \text{(I.12.5)}$$

Torniamo ora alla (I.12.4) e discutiamo i risultati trovati esaminando le casistiche più interessanti.

Proiettile e bersaglio hanno la stessa massa.

Se $m_1 = m_2$ allora $\beta = 1$ $v_1 = 0$ e $v_2 = v$. Pertanto in un *urto elastico* centrale tra una sfera in moto e una seconda sfera della stessa massa, in quiete, il primo corpo si ferma e il secondo parte con la stessa velocità del primo come si vede nella immagine qui a lato.



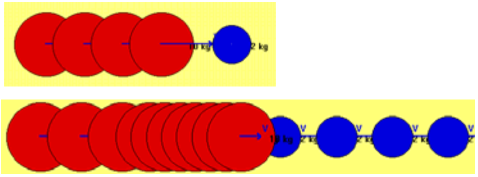
particelle della stessa massa: la prima si ferma la seconda parte con la stessa velocità

Se, oltre a ciò, le sfere sono indistinguibili (come accade, per esempio, nel caso delle molecole) allora sembra che la prima sfera passi attraverso la seconda continuando a muoversi come prima, mentre la seconda rimane in condizioni di stazionarietà.

Questo risultato è ben noto nel gioco delle bocce e nel bigliardo.

[4] La soluzione banale $v = v_1$ corrisponde al caso in cui l'urto non è ancora avvenuto. Si può pertanto supporre $v - v_1 \neq 0$ ed eseguire la divisione tra le due equazioni.

[5] Nel passaggio in cui si effettua la divisione tra le due equazioni si arriva ad un risultato particolarmente interessante: *durante l'urto le due particelle si scambiano le velocità relative*



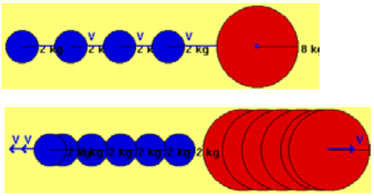
proiettile di massa maggiore del bersaglio: il proiettile rallenta e il bersaglio si muove con velocità maggiore

Il proiettile ha massa maggiore del bersaglio.

Se $m_1 > m_2$ allora $\beta < 1$ e pertanto $0 < v_1 < v$ mentre $v_2 > v$. La situazione è illustrata nell'immagine qui a lato in cui si osservano sia la diminuzione di v_1 sia il fatto che $v_2 > v$.

In particolare, nel caso limite in cui $m_1 >> m_2$ si ha $\beta \rightarrow 0$ e pertanto $v_1 \rightarrow v$ mentre $v_2 \rightarrow 2v$: La velocità della sfera più grossa non viene modificata dall'urto mentre la sfera più leggera, inizialmente in quiete, schizza via con una velocità doppia di quella del proiettile.

Il proiettile ha massa minore del bersaglio



proiettile di massa minore del bersaglio: il proiettile torna indietro e il bersaglio si muove in avanti. Entrambi hanno velocità inferiori a quella iniziale

Se $m_1 < m_2$ allora $\beta > 1$ pertanto $-v \le v_1 < 0$ e $0 \le v_2 < v$ cioè il proiettile più leggero, urtando il bersaglio torna indietro perdendo velocità mentre il bersaglio si muove in avanti con una velocità minore di quella del proiettile.

In particolare se $\beta \rightarrow \infty$ si ha che $v_1 \rightarrow -v$ mentre $v_2 \rightarrow 0$. Pertanto, quando una sferetta urta una parete di massa molto più grande torna indietro con la stessa velocità, mentre la velocità della parete non cambia.

12.3.3 Urto piano di particelle di eguale massa

Nel caso dell'*urto elastico piano* le equazioni (I.12.2) non risolvono il problema, ma consentono comunque di ottenere un risultato importante. Supponiamo che sia $\mathbf{v}_2 = 0$ e che le due particelle che si urtano abbiano la stessa massa di riposo $m_1 = m_2$.

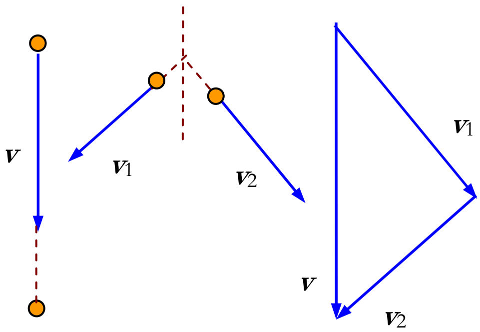
Se indichiamo con $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{v}$ la quantità di moto e la velocità iniziale avremo:

$m\mathbf{v} = m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 \qquad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$

e semplificando per m

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \qquad v^2 = v_1^2 + v_2^2 \qquad \text{(I.12.6)}$$

La prima equazione ci dice che le tre velocità formano un triangolo (somma vettoriale), la seconda afferma che per quel triangolo vale la relazione pitagorica e pertanto il triangolo è rettangolo.



lo scattering a 90° delle particelle della stessa massa

Questo fatto corrisponde ad una ben nota proprietà già osservabile negli urti tra palle di biliardo (sfere della stessa massa dopo l'urto si allontanano ad angolo retto) ma che vale anche nel dominio della particelle elementari. In quest'ultimo caso c'è però una limitazione. Nel dominio delle velocità relativistiche non è più lecita la semplificazione per m (che non è più costante). Le velocità continuano a formare un triangolo, ma tale triangolo non è più rettangolo e l'angolo tra le velocità è acuto.

Questo comportamento osservabile attraverso le tracce lasciate nei rivelatori di particelle costituisce una delle evidenze sperimentali ben note dell'*incremento relativistico della massa*.

12.4 Il rallentamento dei neutroni

12.4.1 PERCHÉ BISOGNA RALLENTARE TRAMITE URTO ELASTICO

In alcuni tipi di reazioni nucleari è necessario *rallentare i neutroni*, cioè ridurne l'energia cinetica da alcuni MeV a qualche centesimo di eV. Poiché i neutroni non risentono della interazione elettromagnetica, non è possibile effettuare il rallentamento attraverso campi elettrici o magnetici come si farebbe per le altre particelle elettricamente cariche, ma bisogna invece utilizzare l'urto elastico con altre particelle.

conoscenze di fisica classica portarono Fermi a comprendere il ruolo dei neutroni lenti nell'agevolare la fissione nucleare

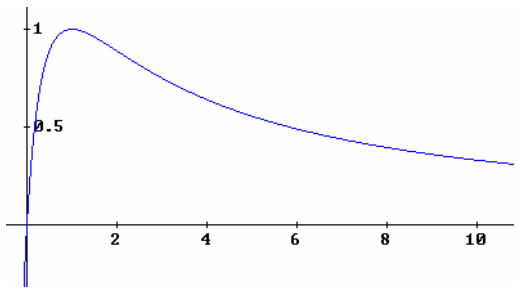
Questo rallentamento, o *moderazione*, come viene chiamato tecnicamente, avviene grazie ad urti elastici tra i neutroni e una sostanza detta *moderatrice*. Ci proponiamo di calcolare il rapporto di moderazione, cioè il rapporto tra l'energia ceduta da un neutrone in un urto e la sua energia cinetica iniziale.

12.4.2 IL CALCOLO DEL FATTORE DI RALLENTAMENTO

Indichiamo con M la massa di un nucleo del moderatore; la sua velocità dopo l'urto, in base alla equazione (I.12.3), sarà pari a $u = \frac{2m}{m + M} v$ e l'energia persa dal neutrone sarà pari a quella acquistata dal moderatore. Pertanto il rapporto r richiesto (*fattore di rallentamento*) sarà:

$$r = \frac{\Delta\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_k} = \frac{Mu^2}{mv^2} = \frac{4mM}{(m + M)^2} = \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2} \qquad \text{(I.12.7)}$$

dove si è posto $\beta = \frac{M}{m}$



andamento di $r = f(\beta)$ come si vede si ha un massimo per $\beta = 1$; per $\beta > 1$ r decresce tendendo a 0 abbastanza lentamente

Per determinare il numero di collisioni necessarie a rallentare completamente il neutrone si procede così: se indichiamo con $\mathcal{E}_k$ la energia cinetica iniziale del neutrone, dopo il primo urto essa vale:

$$\mathcal{E}_{k1} = \mathcal{E}_k - \Delta\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_k(1 - r)$$

dopo il secondo:

$$\mathcal{E}_{k2} = \mathcal{E}_{k1} - \Delta\mathcal{E}_{k1} = \mathcal{E}_{k1}(1 - r) = \mathcal{E}_k(1 - r)^2$$

Di conseguenza, dopo n collisioni l'energia cinetica del neutrone sarà:

$$\mathcal{E}_{kn} = \mathcal{E}_k(1 - r)^n \qquad \text{(I.12.8)}$$

12.4.3 RALLENTAMENTO CON GRAFITE E CON ACQUA PESANTE

Come *moderatore*, agli albori delle tecnologie nucleari, si usava molto spesso il carbonio la cui massa nucleare è pari a 12 volte quella del neutrone. Per $\beta = 12$ si ha:

$$r = \frac{4 \times 12}{13^2} = 0.284 = 28.4\ \%$$

Se assumiamo che sia $\mathcal{E}_k = 1.75$ MeV $= 1.75 \times 10^6$ eV e che debba essere $\mathcal{E}_{kn} = 0.025$ eV con $r = 0.284$ avremo che:

$0.025 = 1.75 \times 10^6 \times 0.716^n$ o anche $7 \times 10^7 = 0.716^{-n}$, da cui: [6]

[6] Si sono utilizzate la definizione di logaritmo per cui $a^b = c \Leftrightarrow b = \log_a c$ e la proprietà dei logaritmi sul cambiamento di base che consente di operare con i logaritmi in base 10: $\log_m n = \frac{\log_p n}{\log_p m}$

$$n = -\log_{0.716}(7 \times 10^7) = -\frac{\log_{10}(7 \times 10^7)}{\log_{10}0.716} = \frac{-7.845}{-0.145} = 54$$

Pertanto, se tutti gli urti del neutrone con il moderatore fossero di tipo centrale, basterebbero 54 collisioni per ridurre l'energia cinetica da 1.75 MeV a 0.025 eV, cioè ad un settantamilionesimo del suo valore iniziale! Ma gli urti reali sono di tipo non centrale e, durante essi, si ha una minor perdita di energia. Pertanto, per ottenere la moderazione richiesta, il numero di urti sarà un po' più alto.

L'*acqua pesante* è un *moderatore* più efficiente del carbonio[7]. Nell'acqua pesante i nuclei di idrogeno sono sostituiti da quelli di idrogeno pesante (il deuterio). In questo caso $\beta = 2$ e $r = \frac{4 \times 2}{3^2} = \frac{8}{9}$. Sostituendo nella equazione si ottiene: $\mathcal{E}_{kn} = \mathcal{E}_k/9^n$ e utilizzando i dati energetici precedenti il calcolo fornisce $n = 7$.

Il primo moderatore storicamente utilizzato da E. Fermi nel prototipo di *pila atomica* fu un blocco di grafite. I moderni reattori nucleari utilizzano oggi acqua pesante e anche acqua leggera che, oltre a moderare in maniera efficace ha però lo svantaggio di avere una elevata probabilità di cattura dei neutroni.

---

[7] Ci si potrebbe chiedere perché non si usi direttamente l'acqua normale visto che in base al diagramma il miglior rallentatore è una particella con $\beta = 1$ cioè l'idrogeno che avrebbe una efficienza oltre che essere più disponibile dell'acqua pesante. La ragione sta nel fatto che i nuclei di idrogeno catturano i neutroni invece di rallentarli e pertanto non possono essere utilizzati. L'urto in questo caso è di tipo anelastico.

12.5 Quesiti di fine capitolo

1. Ricerca di *vero*: a) I processi d'urto sono rilevanti in fisica principalmente per le *implicazioni di tipo meccanico* (per esempio, urti tra automobili); b) L'urto della fisica si verifica in *presenza di un contatto materiale* degli oggetti che si urtano; c) Quando nello studio di un fenomeno si verifica un *urto* si può *sempre* applicare la *conservazione della quantità di moto* anche in *presenza di forze esterne* a risultante non nulla se ci si riferisce all'intervallo temporale dell'urto; d) Nella analisi dell'urto ci si riferisce solo alla quantità di moto *ignorando le problematiche di tipo energetico*. [8]
2. Ricerca di *falso*: a) Nello studio dei processi d'urto si *prescinde dalla conoscenza dettagliata della forza di interazione* in funzione del tempo; b) L'urto è il *coltello* attraverso cui possiamo *sezionare la materia*; c) La scoperta delle *dimensioni approssimative del protone* è della fine degli anni 60. d) Attraverso processi di urto si è potuta avere l'*evidenza sperimentale dell'esistenza dei quark*. [9]
3. Spiegare il ruolo giocato dai processi d'urto nello sviluppo della fisica moderna (studio delle interazioni). [10]
4. Delineare in quindici righe ruolo, luoghi e tempi dei 3 esperimenti d'urto indicati come strumento di conoscenza del nucleo atomico. [11]
5. Ricerca di *vero*: a) Nell'urto *totalmente anelastico* se si conoscono le velocità prima, si *conosce sempre anche la velocità dopo*; b) In un urto totalmente anelastico la relazione $\boldsymbol{v} = \dfrac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}$ *vale solo* se le due particelle che si urtano *si muovono lungo una stessa direzione*; c) In un *urto anelastico le velocità formano sempre un triangolo*; d) Nell'urto totalmente anelastico $\Delta\mathcal{E}_k$ *può avere sia valori positivi sia negativi* a seconda delle caratteristiche delle particelle coinvolte. [12]

---

[8] a) Falso. Gli urti interessano alla fisica per le applicazioni alo studio delle particelle elementari. b) Falso. L'urto è una interazione caratterizzata da breve durata e può avvenire anche a distanza. Incidentalmente, la questione del contatto fisico è mal posta per la banale ragione che *il bordo* di qualsiasi oggetto fisico è un concetto sfumato e corrisponde a zone di intensità rapidamente variabile delle forze di interazione. c) Vero. d) Falso nei processi d'urto gioca un ruolo rilevante anche l'analisi della energia cinetica

[9] a) Vero b) Vero c) Falso. Risale agli anni 50 d) Vero.

[10] Gli urti consentono di risalire alle caratteristiche delle particelle prodotte attraverso la misura di quantità di moto ed energia prima e dopo l'urto con applicazione delle leggi di conservazione

[11] Inizio del 900 esperimenti di Rutherford e Geiger: l'atomo ha struttura nucleare; 1950 Hofstadter stima la dimensione del protone; 1968 al FermiLab e al CERN si osserva che il protone ha una struttura interna (evidenza sperimentale dei quark).

[12] a) Vero: la velocità finale è una sola e può essere determinata attraverso la legge di conservazione della quantità di moto. b) Falso. La relazione citata si ricava applicando la conservazione della quantità di moto che è una legge vettoriale e vale indipendentemente dal modo in cui si muovono le particelle prima e dopo l'urto. c) Falso: sono le quantità di moto che formano un triangolo d) Falso. La energia cinetica diminuisce e la energia che scompare è quella associata al lavoro delle forze dissipative responsabili delle deformazioni.

6. Ricerca di *vero*. Un corpo di massa M ne urta un altro in quiete di massa m e i due corpi restano uniti a) I due corpi *proseguono il loro moto con la stessa velocità* del primo; b) Per determinare la nuova velocità *non serve conoscere* M e m mentre basta *conoscere il loro rapporto*; c) Per un particolare valore del rapporto M/m *i due corpi possono deviare a* 90°; d) La velocità dopo l'urto *tende a zero* quando $M/m \to \infty$. [13]
7. Ricerca di *vero*. Un corpo di massa m e velocità v ne urta un altro di massa doppia e i due corpi proseguono uniti. a) L'*energia cinetica del sistema si conserva*; b) La *velocità si riduce a un terzo* e l'*energia cinetica non cambia* perché la massa triplica; c) La *quantità di moto* dopo l'urto *è la stessa mentre l'energia cinetica diminuisce di un terzo* d) L'energia cinetica finale *è un terzo di quella originale.* [14]
8. Discutere dal punto di vista energetico l'urto totalmente anelastico di due particelle classiche di massa m nei due casi di urto frontale e di tamponamento. In particolare calcolare il rapporto tra la perdita di energia cinetica e l'energia cinetica originaria. [15]
9. Spiegare perché se due particelle si urtano rimanendo attaccate assieme possono fermarsi solo se la quantità di moto iniziale del sistema è nulla. [16]
10. Si determini la variazione relativa di energia cinetica nel caso di urto totalmente anelastico tra un oggetto di massa m dotato di velocità v e un secondo oggetto di massa M con velocità nulla. Si generalizzi successivamente il problema al caso in cui i due corpi hanno velocità v_1 e v_2. [17]
11. Ricerca di *Falso*. a) Nell'*urto piano* non totalmente anelastico le incognite sono le *2 velocità vettoriali* dopo l'urto che corrispondono a *4 incognite scalari*; b) Nell'*urto elastico piano* la applicazione simultanea della conservazione della energia cinetica e della quantità di moto *equivale a scrivere 3 equazioni* e pertanto *non basta* a risolvere il problema; c) Nel caso di *urto elastico ad una sola dimensione* (urto centrale) le grandezze incognite *sono solo due*; d) Il *parametro d'urto* è una *costante adi-*

---

[13] a) Falso la velocità ha la stessa direzione e verso e un modulo inferiore. b) Vero: $v' = \dfrac{M\,v}{M+m} = \dfrac{\beta}{\beta+1}\,v$ c) Falso la direzione è sempre la stessa d) Falso: in quel caso $v' \to v$.

[14] a) Falso: negli urti anelastici diminuisce sempre; b) Falso: punto precedente; c) Falso: la velocità si riduce a 1/3 la energia cinetica diventa $(1/3)^2$ 3 cioè 1/3 e pertanto decresce di 2/3; d) Vero: vedi punto precedente

[15] Vedi testo

[16] Poiché la quantità di moto si conserva e dopo l'urto essa è nulla (particelle ferme) essa deve essere nulla anche prima dell'urto.

[17] Si applica la conservazione della quantità di moto e dopo aver calcolato la energia cinetica finale si calcola $\dfrac{\Delta\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_k} = -\dfrac{M}{M+m}$. Il calcolo può essere eseguito, per risparmiare tempo usando per il calcolo di $\mathcal{E}_k$ la quantità di moto $p = m\,v$ che nell'urto si conserva. Nel caso più generale si ottiene per $|\Delta\mathcal{E}_k|$ il valore $\dfrac{1}{2}\dfrac{mM}{m+M}(v_1 - v_2)^2$. Cioè l'energia trasferita è massima quando è massima la velocità relativa.

mensionale corrispondente al *rapporto tra l'energia cinetica dopo l'urto e quella prima dell'urto*. [18]

12. Ricerca di *falso* a) Si chiama *urto centrale quello nel quale le due velocità prima dell'urto giacciono sulla stessa retta*; b) Nel caso di *urto elastico ad una sola dimensione* la applicazione simultanea della conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto consente di *determinare le due incognite*; c) Nel caso di *urto elastico ad una sola dimensione* la velocità relativa tra le due particelle *diventa opposta* nel corso dell'urto; d) Nell'*urto elastico* il *rapporto delle energie cinetiche* prima dell'urto è uguale al rapporto dopo l'urto. [19]
13. Ricerca di *vero*. Si dimostra che nel caso di urto elastico lineare tra una particella con velocità v e una seconda in quiete e per le quali il rapporto tra le masse della seconda rispetto alla prima vale β le velocità dopo l'urto sono rispettivamente $v_1 = \dfrac{1-\beta}{1+\beta}\,v$ e $v_2 = \dfrac{2}{1+\beta}\,v$

    a) Per $\beta = 0$ si ha che la massa della particella incidente è trascurabile; b) Quando la particella incidente ha massa molto maggiore della particella bersaglio si ha la condizione $\beta \to \infty$; c) Per $\beta = 1$ le due particelle hanno la stessa massa e in tal caso la particella incidente prosegue indisturbata; d) Se la particella bersaglio ha massa superiore a quella incidente, quest'ultima torna indietro. [20]
14. Dimostrare che se un protone non relativistico in moto ne urta un altro fermo, l'angolo di diffusione è di 90°. [21]
15. Con riferimento al quesito precedente si spieghi cosa accade quando la particella incidente è di tipo relativistico. [22]
16. Una particella di massa m e velocità $\boldsymbol{v}$ ne urta un'altra di massa M in quiete. L'urto è elastico e piano. Scrivere le equazioni che governano l'urto in funzione delle quantità di moto $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ delle masse e dei due angoli di scattering θ_1 e θ_2 formati dalle velocità dopo l'urto

[18] a) Vero b) Vero. Si hanno 3 equazioni e 4 incognite. In effetti, dal punto di vista fisico, ciò che accade dopo l'urto dipende anche dal *parametro d'urto*. c) Vero d) Falso: è la distanza tra la retta della velocità della particella incidente e il centro della particella colpita.

[19] a) Vero b) Vero. c) Vero: vedi testo o anche applicando la conservazione della quantità di moto e della energia cinetica. Si ha infatti: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$ e $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \Leftrightarrow m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$ e $m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2$ e da qui dividendo la seconda equazione per la prima si ottiene $v_1 + v_1' = v_2' + v_2$ da cui si ottiene $v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$ d) Falso; si conserva la energia cinetica complessiva

[20] a) Falso b) Falso c) Falso d) Vero. Le prime due risposte sarebbero corrette se fosse $\beta = m_1 / m_2$ e non l'inverso. La terza affermazione è falsa perché se $\beta = 1$, cioè se le due particelle hanno la stessa massa, la prima si ferma e la seconda parte con la stessa velocità. La quarta affermazione è corretta come si può osservare dal fatto che per $\beta >$ 1 si ha $v_1 = \dfrac{1-\beta}{1+\beta}\,v < 0$

[21] Vedi dimostrazione sul testo.

[22] Vedi testo.

con la velocità prima dell'urto. Si ipotizzi che l'urto sia di tipo non relativistico. [23]

17. Si consideri un urto piano totalmente elastico tra una particella m_1 dotata di velocità v ed una particella m_2 immobile. Si indichino con v_1 e v_2 i moduli delle velocità dopo l'urto e con α e β gli angoli di *scattering* rispetto alla direzione di $\boldsymbol{v}$. a) Qual è la relazione tra v_1 e α? b) A quali condizioni deve soggiacere l'angolo α perché il problema ammetta soluzioni? c) L'angolo α può avere valore di 90°? d) In questo caso quanto valgono le due velocità v_1 e v_2? [24]
18. Ricerca di *vero*. a) Per rallentare efficacemente i neutroni per urto li si fa *passare attraverso sostanze molto dense*; b) Per rallentare i neutroni bisogni farli urtare con nuclei di massa il *più possibile prossima a quella dei neutroni* e quindi il *miglior bersaglio è l'idrogeno*; c) L'unico criterio da usare nello scegliere il moderatore è *usare bersagli con massa più possibile prossima* a quella dei neutroni; d) Il miglior *moderatore di neutroni* è l'*acqua pesante*. [25]

---

[23] Applicando la conservazione della quantità di moto e della energia cinetica si ha che $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ e che $\frac{p^2}{2m} = \frac{p^2_1}{2m} + \frac{p^2_2}{2M}$. La prima delle due equazioni, scritta in forma scalare equivale a $p = p_1 \cos\theta_1 + p_2 \cos\theta_2$ e $p_1 \sin\theta_1 = p_2 \sin\theta_2$. Abbiamo dunque 3 equazioni e 4 variabili (p_1, θ_1, p_2, θ_2) e ciò ci permette di determinare le caratteristiche dell'urto a condizione che una delle 4 incognite sia nota per via indipendente (sia per esempio noto θ_1 per via sperimentale).

[24] Si ha applicando le leggi valide per l'urto elastico che:

$$\begin{cases} m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta & ① \\ m_1 v_1 \sin\alpha = m_2 v_2 \sin\beta & ② \\ m_1 v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 & ③ \end{cases}$$

se si elimina la dipendenza da β tra la prima e la seconda equazione attraverso la determinazione di $\cos^2\beta$ da entrambe si ottiene per

$\cos\beta = \frac{m_1 v - m_1 v_1 \cos\alpha}{m_2 v_2}$ mentre dalla eliminazione di β si ha l'equazione di II grado:

$(m_2 + m_1)\, v_1^2 - 2m_1\, v \cos\alpha\, v_1 + (m_1 - m_2)\, v^2 = 0$ ④.

La ④ corrisponde alla risposta alla domanda a).

Questa equazione esprime il legame tra v_1 e α richiesto e ammette soluzioni solo se il $\Delta/4$ della equazione è positivo o nullo cioè se $\sin\alpha \le \frac{m_2}{m_1}$. Risposta b).

Risposta c): affinché $\alpha = 90°$ deve essere $\frac{m_2}{m_1} \ge 1$ e cioè il bersaglio deve essere più massiccio del proiettile.

Risposta d): Si tratta di risolvere la ④ per il caso in cui $\cos\alpha = 0$ e cioè:

$(m_2 + m_1)\, v_1^2 + (m_1 - m_2)\, v^2 = 0$. Da qui si ottiene: $v_1 = \sqrt{\frac{-m_1 + m_2}{m_1 + m_2}}\, v$

La determinazione di v_2 avviene attraverso la ③ e si ottiene alla fine:

$v_2 = \sqrt{\frac{m_1^2}{m_2(m_1+m_2)}}\, v$. Dopo aver trovato v_2 si può risalire infine all'angolo β per il quale si trova: $\sin\beta = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{2m_2}}$

[25] Falso. Ciò che determina la capacità di moderazione è il rapporto tra la massa del nucleo bersaglio e la massa del neutrone. Il rapporto più favorevole si ha per valori prossimi all'unità. b) Falso. È vero che l'idrogeno è un ottimo moderatore; così ottimo che cattura il neutrone e dunque non funziona. c) Falso: vedi punto precedente. d) Ve-

19. Dimostrare che nell'urto elastico lineare tra un nucleo proiettile e un nucleo bersaglio fermo la perdita relativa di energia cinetica del proiettile vale $\frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$ dove β rappresenta il rapporto tra la massa del moderatore e la massa del proiettile. [26]
20. Se il massimo di energia trasferita si ha quando la massa del nucleo moderatore è pari alla massa del neutrone si spieghi come mai il miglior moderatore non sia l'idrogeno. [27]

ro: l'urto con i nuclei di deuterio consente di cedere una elevata energia e il deuterio non cattura i neutroni.

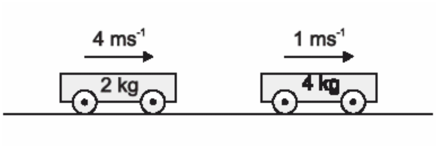
[26] Si ha $\frac{\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_k'}{\mathcal{E}_k} = \frac{p^2 - p^{2'}}{p^2} = 1 - \left(\frac{p'}{p}\right)^2$

Ma d'altra parte nelle condizioni date (in base alle leggi dell'urto lineare elastico con bersaglio fermo) si ha $v' = \frac{1-\beta}{1+\beta}\, v$ e pertanto:

$$\frac{\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_k'}{\mathcal{E}_k} = 1 - \left(\frac{p'}{p}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$$

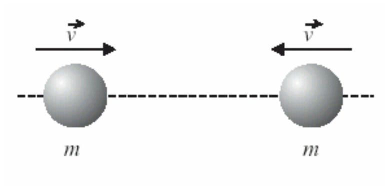
[27] L'idrogeno colpito da un neutrone lo cattura e si trasforma in deuterio. In questo caso l'urto è completamente anelastico.

12.6 Quesiti dalle Olimpiadi della Fisica



1. Due carrelli si muovono nella stessa direzione e verso, come mostrato in figura. Ad un certo momento un carrello tampona l'altro e vi resta agganciato. Dopo l'urto l'energia cinetica dei due carrelli risulta ridotta rispetto alla precedente. La perdita di energia cinetica è …(I livello 1996) [28]

   A …4J B …6J C …12J D …14J E …18J

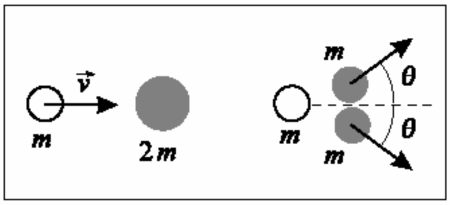


2. Due sfere uguali, ciascuna di massa *m*, si muovono con velocità di modulo *v* l'una verso l'altra; se l'urto tra le sfere è centrale ed elastico, allora … 1) la somma delle quantità di moto prima dell'urto è $2mv$. 2) la somma delle energie cinetiche prima dell'urto è mv^2. 3) la somma delle energie cinetiche dopo l'urto è zero. Quale o quali delle precedenti affermazioni sono corrette? … (I livello 2001)
   A … Solo la 1 B … Solo la 2 C … Solo la 3
   D … Solo la 2 e la 3 E … Solo la 1 e la 2
3. Due satelliti si urtano, nello spazio, anelasticamente. Cosa accade all'energia cinetica e alla quantità di moto totali dei due satelliti? (I livello 2002)

	Energia cinetica totale	Quantità di moto totale
A	Si conserva	Si conserva
B	Si conserva	Aumenta
C	Si riduce	Si conserva
D	Si riduce	Aumenta
E	Si riduce	Si riduce

4. Sei carrelli identici sono attaccati uno all'altro e si trovano in quiete su una rotaia orizzontale. Un settimo carrello, identico ai precedenti, che viaggia ad 1m/s urta i carrelli fermi rimanendovi attaccato. Trascurando effetti di attrito, la velocità con cui i sette carrelli iniziano a muoversi è, in m/s … (I livello 2003)
   A … 1 B … $1/\sqrt{7}$ C … 1/6 D … 1/7 E … 6/7
5. Un oggetto di massa pari a 2 kg che si sta muovendo ad una velocità di 10m/s in direzione nord subisce un urto perfettamente elastico con un oggetto di massa pari a 5 kg che sta viaggiando ad una velocità di 4m/s verso sud. Quanto vale la quantità di moto totale del sistema dei due oggetti immediatamente dopo l'urto?

   A … 0 B… 20 kgm/s, verso nord C … 20 kgm/s, verso sud
   D … 40 kgm/s, verso nord E… 40 kgm/s, verso sud



6. Una particella di massa *m*, che inizialmente si sta muovendo lungo l'asse *x* con una velocità *v*, urta una particella di massa 2*m* inizialmente ferma. In seguito all'urto la prima particella si ferma, mentre la seconda particella si divide in due parti di uguale massa che si muovono in direzioni che formano uno stesso angolo θ con l'asse

[28] La quantità di moto iniziale è 12 kg m/s mentre l'energia cinetica è 18 J. L'energia finale, visto che p si conserva è $p^2/2M_t$ = 144/12= 12 J e pertanto la perdita di energia è 18-12=6J

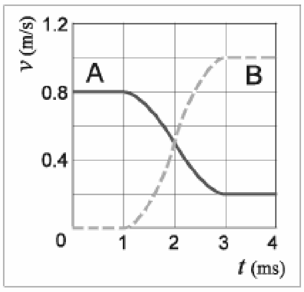
x, come mostrato in figura. Quale delle seguenti affermazioni descrive correttamente la velocità delle due parti? (I livello 2006) [29]

A …Entrambe le parti si muovono con velocità *v*.
B …Una delle due parti si muove con velocità *v*, l'altra con velocità minore di *v*.
C …Entrambe le parti si muovono con velocità *v*/2.
D …Una delle due parti si muove con velocità *v*/2, l'altra con velocità maggiore di *v*/2.
E …Entrambe le parti si muovono con velocità maggiore di *v*/2.

7. In un urto unidimensionale non relativistico, una particella di massa 2m colpisce una particella di massa m inizialmente ferma. Se le particelle rimangono unite dopo l'urto, quale frazione dell'energia cinetica iniziale viene persa nell'urto?… (I livello 2006) [30]

A …0 B …1/4 C …1/3 D …1/2 E …2/3

8. Il grafico mostra l'andamento della velocità in funzione del tempo per due corpi A e B che si urtano frontalmente in maniera elastica. Si supponga che la risultante delle forze esterne agenti sul sistema dei due corpi sia nulla. Quali, tra le seguenti affermazioni, sono corrette?… (I livello 2007) [31]



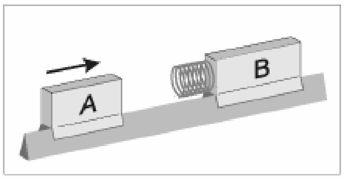
1 - Dopo l'urto A e B si muovono nello stesso verso.

2 - Le velocità di A e B sono uguali nell'istante centrale della collisione.

3 - La massa di B è maggiore di quella di A.

A …Solo la 1 B …Solo la 2 C …Solo la 1 e la 2
D …Solo la 2 e la 3 E …Tutte e tre

9. Su una rotaia a cuscino d'aria, orizzontale, un carrello A di massa 1.5 kg urta contro un carrello B di massa 2.0 kg inizialmente fermo (si veda la figura). Al carrello B è attaccato un respingente a molla. La distanza tra i due carrelli raggiunge il suo valore minimo… (I livello 2007) [32]



A … quando il carrello B è ancora fermo.
B … quando il carrello A si arresta.
C … quando i due carrelli hanno la stessa energia cinetica.
D … quando i due carrelli hanno la stessa quantità di moto.

---

[29] La quantità di moto si conserva nell'urto e dunque (analizzandola lungo i due assi) si ha che (per la conservazione lungo y) deve essere $v_1\sin\theta = v_2\sin\theta$ e dunque $v_1 = v_2$.

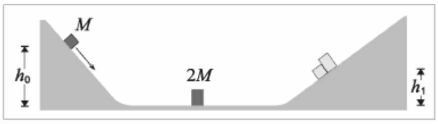
Lungo l'asse x si ha $m\,v = 2m\,v_1\cos\theta < 2m\,v_1$ e dunque $v_1 > v/2$

[30] L'energia cinetica iniziale è $p^2/2m$ mentre quella finale è $p^2/3m$ dunque la variazione è $(1/2 - 1/3)p^2/m = 1/6\ p^2/m$. Dunque il valore relativo è $1/6\ /\ (1/2) = 1/3$

[31] Le prime due affermazioni sono vere e lo si legge dal grafico. Per la III rifacciamoci alla conservazione della qdm. Si ha $0.8m_1 = 0.2m_1 + 1m_2$ da cui $m_2 = 0.6\ m_1$

[32] Il quesito si presta bene a considerazioni di natura fisica. Durante l'urto il carrello A inizia a comprimere la molla mentre il carrello B è inizialmente fermo. A rallenta mentre B aumenta la sua velocità e il processo di compressione prosegue finché le due velocità non diventano uguali. A quel punto la molla inizia nuovamente a distendersi. Se si osservano le diverse alternative restano escluse subito la A e la B; la C resta esclusa perchè quando hanno la stessa velocità non hanno la stessa energia cinetica (masse diverse) e lo stesso vale per la D. La E è vera perché nel processo di compressione della molla si compie del lavoro e dunque la energia cinetica del sistema deve diminuire.

E … quando l'energia cinetica del sistema raggiunge il suo valore minimo.



10. Un blocco di massa M scivola lungo una rampa da un'altezza h_0 e urta un altro blocco di massa 2M inizialmente fermo sul piano orizzontale. I due blocchi restano uniti e proseguono risalendo su una seconda rampa fino ad un'altezza h_1. I tre piani sono opportunamente raccordati in modo che non ci siano irregolarità nel moto dei blocchi. Supponendo di poter trattare le masse come puntiformi e di poter trascurare gli effetti di attrito tra tutte le superfici, quanto vale h_1 ? … (I livello 2007) [33]

    A … h_0 B … $h_0/2$ C … $h_0/3$ D … $h_0/4$ C … $h_0/9$

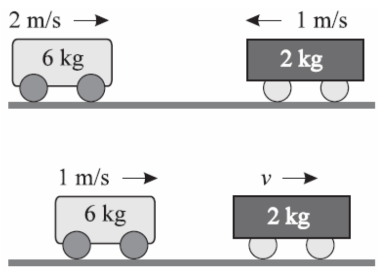
11. Due carrelli si trovano su una rotaia a cuscino d'aria, disposta orizzontalmente, su cui possono muoversi con attrito trascurabile. Il carrello A, di massa m_A, si muove con una velocità v_0 e urta contro un carrello B, di massa $m_B = 9m_A$, inizialmente fermo. Nell'urto i due carrelli restano agganciati. Quale frazione dell'energia cinetica iniziale del sistema viene trasformata in altre forme (energia sonora, energia termica, …) nella collisione? (I livello 2008)

    A … 1% B … 10% C … 50% D … 90% E … 9

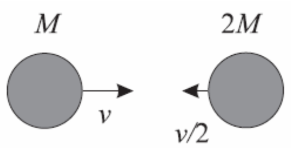
12. Un blocco di massa 2 kg scivola senza attrito su un piano orizzontale alla velocità di 10 m/s fino ad urtare centralmente un secondo blocco fermo avente una massa di 10 kg. Dopo l'urto il primo blocco torna indietro alla velocità di 5 m/s mentre il secondo procede in avanti sulla stessa retta con la velocità iniziale di 3 m/s.

    Quale riga della seguente tabella è corretta. (I livello 2010)

	q.d.m. del sistema	en. cin. del sistema	tipo urto
A	si conserva	si conserva	elastico
B	si conserva	non si conserva	anelastico
C	si conserva	non si conserva	elastico
D	non si conserva	non si conserva	anelastico
E	non si conserva	non si conserva	elastico



13. Due carrelli si muovono lungo una retta e si urtano. I dati relativi sono rappresentati nella figura. Dopo la collisione i due carrelli si muovono come si vede nella parte in basso della figura.
    Qual è il modulo della velocità v del carrello da 2 kg dopo l'urto? (I livello 2011)
    A … 1.25m/s B … 1.75m/s C … 2.0m/s
    D … 4.0m/s E … 5.0m/s



14. Un disco di massa M, che si muove con velocità di modulo v, urta frontalmente un secondo disco di massa 2M e velocità di modulo v/2, come mostrato in figura; i due dischi stanno scivolando su di

[33] Dalle leggi sulla caduta dei gravi sappiamo che la velocità finale di caduta dipende solo dal dislivello e pertanto il corpo di massa M, quando colpisce quello di massa 2M è dotato di velocità $v = \sqrt{2gh_0}$. Nell'urto (totalmente anelastico) si conserva la quantità di moto e dunque Mv = 3M v' da cui v' = 1/3 v. Con la velocità v' il corpo di massa 3M risale sino ad una altezza h_1 tale che $v'^2 = 2g\,h_1$ e dunque $h_1 = \frac{v'^2}{2g} = \frac{\frac{1}{9}2gh_0}{2g} = \frac{1}{9}h_0$

un piano orizzontale con attrito trascurabile. Se dopo l'urto i due dischi rimangono attaccati, la loro velocità ha modulo: (I livello 2013)

A … 0 B … v/2 C … $\sqrt{2}$ v/2 D … $\sqrt{3}$v/2

E … 3v/2

15. Due carrelli si trovano su una rotaia orizzontale con attrito trascurabile. Il primo, che ha massa m_1 e si muove con velocità v_0, urta contro il secondo, inizialmente fermo, che ha massa $m_2 = 9m_1$ e resta attaccato ad esso.

    Qual è la velocità dei due carrelli dopo l'urto? (I livello 2014)

    A … v_0 B … $(9/10)v_0$ C … $(8/9)v_0$

    D … $(1/9)v_0$ E … $(1/10)$ v_0

12.7 Problemi di fine capitolo

Per risolvere i problemi proposti tieni presenti le leggi dei capitoli precedenti ed inoltre:

per affrontare i problemi tieni presente che

- Le problematiche dell'urto si studiano, nell'ambito della meccanica, perché dallo studio degli urti, applicati a sistemi microscopici, è possibile risalire alle caratteristiche (ignote) del sistema stesso.
- Gli urti possono sempre essere analizzati utilizzando il teorema di conservazione della quantità di moto perché, se ci si riferisce agli istanti t_1 e t_2, immediatamente prima e immediatamente dopo l'urto, si possono considerare trascurabili le forze esterne rispetto alle forze interne (forze impulsive d'urto).
- Durante i processi d'urto, in genere, la energia cinetica non si conserva. Si chiama urto *totalmente elastico* l'urto durante il quale si conserva la energia cinetica. Si chiama *urto totalmente anelastico* quello, al termine del quale, i due corpi rimangono appiccicati assieme (perdita massima di energia). Tra i due estremi sono possibili infinite condizioni di perdita di energia caratterizzabili attraverso il rapporto tra la energia cinetica finale e quella iniziale (vale 1 nel caso di urto totalmente elastico).
- Nel caso di urto tra due particelle di cui sono note le caratteristiche prima dell'urto, dopo l'urto si hanno 2 incognite vettoriali: le due velocità (pari a 6 scalari) a fronte di una equazione vettoriale (conservazione della quantità di moto). Pertanto se l'urto avviene nello spazio per risolvere il problema mancano 3 equazioni scalari (6 - 3), se l'urto è piano mancano due equazioni scalari (4 -2), se l'urto è lineare manca 1 equazione (2 -1).

  Le equazioni mancanti possono essere fornite precisando ulteriori caratteristiche dell'urto. Urto totalmente anelastico: le incognite sono solo 3 e pertanto è sufficiente usare la conservazione della quantità di moto. Urto piano: mancano due equazioni (la prima può essere fornita specificando il grado di conservazione dell'energia cinetica, cioè il tipo d'urto; la seconda può derivare da conoscenze relative alla geometria dell'urto). Urto lineare: se si tratta di urto totalmente elastico bastano la conservazione della quantità di moto e la conservazione della energia cinetica perché le incognite sono solo 2.

1. Variazioni di energia negli urti totalmente anelastici

Esercizio: Si determini la variazione relativa di energia cinetica nel caso di urto lineare totalmente anelastico tra un oggetto di massa m = 2.54 kg dotato di velocità v = 15.5 m/s e un secondo oggetto di massa M = 1.25 kg con velocità nulla. Si generalizzi successivamente il problema al caso in cui i due corpi hanno velocità v_1 = 26.2 m/s e v_2 = 11.4 m/s nello stesso verso.

☹

Applicando la conservazione della quantità di moto, e indicando con v' la velocità dopo l'urto si ha:

$$v' = \frac{m}{M+m}v = \frac{2.54}{2.54+1.25}15.5 = 10.4 \text{ m/s}$$

Se indichiamo con $\mathcal{E}_k$ ed $\mathcal{E}'_k$ le energie cinetiche prima e dopo l'urto si ha, in base alla conservazione della quantità di moto,

$\mathcal{E}_k = \frac{p^2}{2m}$ e $\mathcal{E}'_k = \frac{p^2}{2(m+M)}$ e pertanto:

$p = m\, v = 2.54 \cdot 15.5 = 39.4$ kg m/s

$\mathcal{E}_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{39.4^2}{2 \cdot 2.54} = 305.6$ J

$\mathcal{E}'_k = \frac{p^2}{2(m+M)} = \frac{39.4^2}{2 \cdot (2.54+1.25)} = 204.8$ J

$\frac{\Delta\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_k} = \frac{204.8 - 305.6}{305.6} = -\,0.330$

☺

Nel caso in cui entrambe le particelle sono in moto si ha:

$v' = \frac{m\, v_1 + M\, v_2}{M + m} v = \frac{2.54 \cdot 26.2 + 1.25 \cdot 11.4}{2.54 + 1.25} = 21.3$ m/s

$\frac{\Delta\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_k} = \frac{(mv_1^2 + Mv_2^2) - (m + M)v'^2}{mv_1^2 + Mv_2^2}$

$= \frac{(2.54 + 1.25)21.3^2 - (2.54 \cdot 26.2^2 + 1.25 \cdot 11.4^2)}{(2.54 \cdot 26.2^2 + 1.25 \cdot 11.4^2)} = -0.0979$

☺

2. Primo approfondimento sui trasferimenti di energia negli urti totalmente anelastici

Esercizio: Si determini la variazione relativa di energia cinetica nel caso di urto lineare totalmente anelastico tra un oggetto di massa m dotato di velocità v e un secondo oggetto di massa M con velocità nulla. Si generalizzi successivamente il problema al caso in cui i due corpi hanno velocità v_1 e v_2.

☹

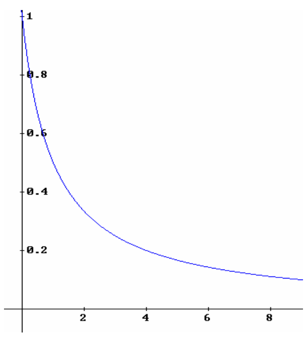
Applicando la conservazione della quantità di moto, e indicando con v' la velocità dopo l'urto e con x il rapporto delle masse, si ha:

$v' = \frac{m}{M + m} v = \frac{x}{1 + x} v$

Se indichiamo con $\mathcal{E}_k$ ed $\mathcal{E}'_k$ le energie cinetiche prima e dopo l'urto si ha:

$\frac{\mathcal{E}'_k}{\mathcal{E}_k} = \frac{(M + m)v'^2}{m\, v^2} = \frac{(M + m)m^2}{m(M + m)^2} = \frac{m}{M + m}$.

Pertanto $\frac{\Delta\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_k} = \frac{\mathcal{E}_k \frac{m}{M + m} - \mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_k} = -\frac{M}{M + m} = -\frac{1}{1 + x}$



Nel diagramma si è rappresentato il valore assoluto della variazione relativa di energia in funzione del rapporto tra la massa del corpo urtante e quella del corpo urtato. Come si vede si ha il massimo di perdita di energia quando x→0 perché in tal caso tutta la energia viene perduta (il sistema alla fine è fermo) mentre quando m→ ∞ il trasferimento di energia tende a 0 perché in tal caso il sistema si muove con la stessa velocità del corpo urtante.

☺

Se consideriamo il caso in cui v_1 e v_2 sono entrambe diverse da zero avremo che $v' = \dfrac{mv_1 + Mv_2}{M + m}$ e pertanto:

$$\mathcal{E}'_k = \tfrac{1}{2}(M + m)v'^2 = \frac{1}{2}(M + m)\left(\frac{mv_1 + Mv_2}{M + m}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m^2}{m + M}v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{m + M}v_2^2 + \frac{m\,M}{m + M}v_1v_2$$

$$\Delta\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_k - \mathcal{E}_k =$$

$$\frac{1}{2}\frac{m^2}{m + M}v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{m + M}v_2^2 + \frac{m\,M}{m + M}v_1\,v_2 - \frac{1}{2}\,m\,\frac{m + M}{m + M}v_1^2 - \frac{1}{2}\,M\,\frac{m + M}{m + M}v_2^2$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2) = -\frac{1}{2}\,\frac{mM}{m + M}(v_1 - v_2)^2$$

Se indichiamo con $m' = \dfrac{mM}{m + M}$ e con v_{12} la velocità relativa potremo scrivere: $|\Delta\mathcal{E}_k| = \dfrac{1}{2}\,m'\,v_{12}^2$.

La relazione trovata è molto importante per diverse ragioni:

- il *trasferimento di energia*, una volta fissate le masse dipende solo dalla velocità relativa ed è dunque massimo quando è massima la velocità relativa.
- la variazione di energia corrisponde alla energia cinetica di un corpo di massa m' che si muove con velocità pari alla velocità relativa. La massa m' è detta *massa ridotta del sistema* e corrisponde alla massa cui si deve ridurre un sistema di due masse che interagiscono quando ci si preoccupa solo della loro interazione, quando cioè si guardano le cose dal punto di vista dell'una rispetto all'altra.

  In effetti la energia cinetica del sistema può essere scritta come somma di due termini: la energia cinetica del centro di massa (che si conserva durante l'urto perché il centro di massa in ogni urto continua a muoversi con la stessa velocità) e la energia cinetica della massa ridotta che, durante l'urto totalmente anelastico, si trasforma in energia interna.

  Il fatto che la energia trasferita durante gli urti totalmente anelastici sia massima quando è massima la velocità relativa trova una applicazione negli acceleratori di particelle in cui, usando orbite circolari percorse in verso contrario, si riesce a massimizzare l'energia trasferita.

☺

3. Secondo approfondimento sui trasferimenti di energia negli urti totalmente elastici

Esercizio: Si studi l'urto lineare totalmente elastico tra due particelle di massa m_1 e m_2 dotate di velocità v_1 e v_2. Si analizzino in particolare i seguenti elementi, relativi all'urto:

a) l'andamento delle velocità al variare del rapporto delle masse dei due oggetti che si urtano

b) il bilancio dei trasferimenti di energia tra i due oggetti che si urtano analizzando in particolare il caso in cui sia $v_2 = 0$

☹

Dopo aver fissato una retta orientata come riferimento possiamo operare direttamente con simboli che rappresentino in valore e segno le velocità. Se applichiamo la conservazione della quantità di moto e quella della energia cinetica avremo: $\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \\ m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2 \end{cases}$ ①

Il sistema ① è di II grado e può essere ricondotto al I grado osservando che una delle soluzione è quella banale $v_1' = v_1$ e $v_2' = v_2$ che corrisponde semplicemente ad assenza di interazione.

A questo scopo riscriviamo il sistema nella forma equivalente:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \end{cases} \quad ②$$

Se dividiamo la II equazione per la I (il che è lecito perché $v_1' \neq v_1$ e $v_2' \neq v_2$, per quanto osservato in precedenza) otteniamo:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \\ v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \\ v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \end{cases} \quad ③$$

La II equazione del sistema ③ ha un significato autonomo: nell'urto elastico si scambiano le velocità relative (situazione opposta a quella dell'urto totalmente anelastico in cui le velocità relative si annullano).

Risolvendo il sistema ③ si ottiene:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_1' + v_1 - v_2 - v_2) \\ v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (m_2 + m_1)v_1' = v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2 \\ v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (m_2 + m_1)v_1' = -v_1(m_1 + m_2) + 2m_1v_1 + 2m_2v_2 \\ v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} v_1' = -v_1 + 2\dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \\ v_2' = -v_2 + 2\dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad ④$$

Osserviamo che poiché $\dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$ è la velocità del centro di massa v_{cm} la ④ può anche essere scritto, in maniera molto sintetica come:

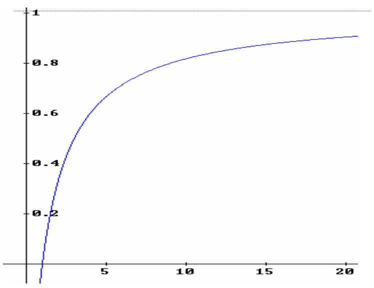
$$\begin{cases} v_1' = -v_1 + 2\,v_{cm} \\ v_2' = -v_2 + 2\,v_{cm} \end{cases} \quad ⑤$$

Le soluzioni, oltre che nella forma ④, possono anche essere scritte in una forma che distingue meglio la incidenza di v_1 e v_2 come:

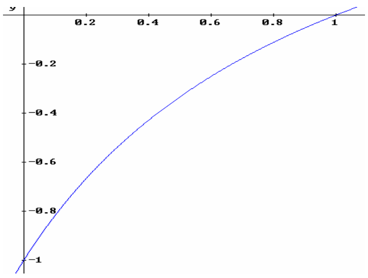
$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \dfrac{\beta - 1}{\beta + 1} v_1 + \dfrac{2}{\beta + 1} v_2 \\ v_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = \dfrac{2\beta}{\beta + 1} v_1 + \dfrac{1 - \beta}{\beta + 1} v_2 \end{cases} \quad ⑥$$

con $\beta = \dfrac{m_1}{m_2}$.

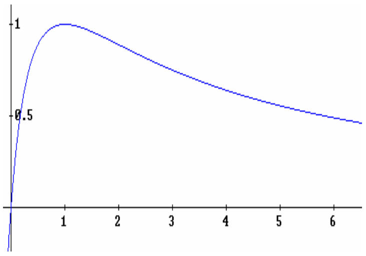
Il sistema ⑥ ci mostra che, al variare di β, le velocità dopo l'urto possono essere sia concordi sia discordi.



L'andamento di v_1'/v_1 al variare di β per 0< β < 1 cioè quando il secondo corpo ha massa minore del primo



L'andamento di v_1'/v_1 al variare di β per β > 1 cioè quando il secondo corpo ha massa maggiore del primo



Andamento della quota di energia trasferita per urto elastico al variare del rapporto delle masse

Per agevolarne lo studio supponiamo che sia $v_2 = 0$, in tal caso si ottiene:

$$v_1' = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}\, v_1 \quad \text{e} \quad v_2' = \frac{2\beta}{\beta + 1}\, v_1$$

Tale coppia di soluzioni può essere studiata graficamente rappresentando il rapporto tra la velocità finale e quella iniziale in funzione del rapporto tra le masse con $\beta \in [0,+\infty)$. Per migliorare la leggibilità degli andamenti abbiamo distinto i due casi $\beta \in [0,1]$ e $\beta \in [1,+\infty)$.

Nel primo caso $m_1 < m_2$ e v_1' varia da $-v_1$ a 0 mentre corrispondentemente v_2' varia da 0 a v_1. Dunque quando un oggetto ne urta un secondo fermo e di massa superiore torna indietro (o si ferma quando le due masse sono uguali). A sua volta l'oggetto colpito si mette in movimento e raggiunge la velocità massima quando le due masse sono uguali.

Nel secondo caso $m_1 > m_2$ e v_1' varia da 0 a v_1 mentre corrispondentemente v_2' varia da v_1 a $2v_1$. Dunque il bersaglio riceve una velocità superiore a quella del proiettile, ma il movimento avviene nello stesso senso.

Studiamo infine il problema del trasferimento della energia cinetica limitandoci al caso in cui sia $v_2 = 0$.

$$\Delta\mathcal{E}_k = \mathcal{E}'_{k2} = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2\beta}{\beta + 1}\right)^2 v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1}{\beta}\left(\frac{2\beta}{\beta + 1}\right)^2 v_1^2$$

$$\Delta\mathcal{E}_k = \frac{4\beta}{(\beta + 1)^2}\,\mathcal{E}_{k1}$$

Pertanto la quota di energia cinetica trasferita è data da $\frac{4\beta}{(\beta + 1)^2}$ e il suo andamento al variare di β presenta un massimo per β = 1 quando tutta la energia del proiettile è trasferita al bersaglio.

Come si è già osservato nel testo il problema di trasferire energia attraverso urti elastici si presenta nel caso del rallentamento dei neutroni che possono cedere energia solo per urto elastico o anelastico, ma in tal caso vengono catturati e spariscono.

Per innescare la fissione nucleare servono i cosiddetti *neutroni termici*, neutroni con valori di energia cinetica $\frac{3}{2}k_B T$ con T nell'ordine delle temperature ambiente.

Tali energie corrispondono a qualche centesimo di eV e poiché i neutroni generati dalle fissioni spontanee hanno energie nettamente superiori (dell'ordine del MeV) occorre rallentarli facendoli interagire con nuclei di materiali di massa non molto diversa da quella del neutrone. La situazione ottimale sarebbe quella dell'idrogeno ($m_p \approx m_n$) ma in tal caso si ha una alta probabilità di cattura neutronica con formazione di nuclei di deuterio. Nel prototipo di reattore nucleare approntato dalla équipe di Fermi si utilizzò carbonio 12.

In tal caso $\beta = \frac{1}{12}$ e $\frac{\Delta\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_{k1}} = \frac{4\beta}{(\beta + 1)^2} = \frac{4\frac{1}{12}}{(\frac{1}{12} + 1)^2} \approx 0.284$

☺

4. Urto lineare totalmente elastico: bilancio energetico

Esercizio: Si studi l'urto lineare totalmente elastico tra due particelle di massa $m_1 = 2.50$ kg e $m_2 = 5.45$ kg dotate di velocità $v_1 = 22.0$ m/s e $v_2 = -13.2$ m/s.

Dopo aver trovato le velocità dopo l'urto si trovi la variazione di energia cinetica della prima massa.

☹

Le relazioni del problema precedente, anche se non vanno memorizzate vanno tenute presenti. Sono disponibili su molti testi ed è bene conoscerne l'esistenza. Per questa ragione risolveremo il problema proposto senza noiosamente risolvere il sistema di II grado che si risolve sempre come è stato proposto (cioè mediante un abbassamento di grado).

Tra le relazioni proposte scegliamo quella che esprime le velocità dopo l'urto attraverso la velocità del centro di massa e cogliamo l'occasione per sottolineare che quando ci si mette nel sistema di riferimento del centro di massa ciò che accade è semplicemente la inversione delle velocità.

Tornando al problema converrà, prioritariamente, determinare la velocità del centro di massa

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2.50 \cdot 22.0 - 5.45 \cdot 13.2}{2.50 + 5.45} = -2.13 \text{ m/s}$$

A questo punto:

$v_1' = -v_1 + 2\, v_{CM} = -22.0 - 2 \cdot 2.13 = -26.3$ m/s

$v_2' = -v_2 + 2\, v_{CM} = 13.2 - 2 \cdot 2.13 = 8.94$ m/s

$\mathcal{E}_{k1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}\, 2.50 \cdot 22.0^2 = 605$ J

$\mathcal{E}'_{k1} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2}\, 2.50 \cdot 26.3^2 = 864$ J

$\Delta \mathcal{E}_{k1} = 864 - 605 = 59$ J

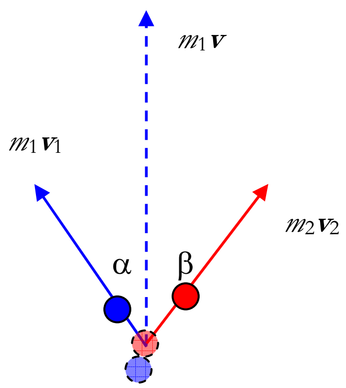
☺

5. Urto piano totalmente elastico

Esercizio: Si consideri un urto piano totalmente elastico tra una particella $m_1 = 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg dotata di velocità $v = 2.55 \cdot 10^5$ m/s ed una particella $m_2 = 6.64 \cdot 10^{-27}$ immobile. La prima particella viene deflessa di un angolo $\alpha = 48.0°$. Determinare la velocità v_1 e i parametri di deflessione della seconda particella.

Discutere il problema in generale in modo di evidenziare il cambiamento di comportamento al cambiare dei dati.

☹



Se applichiamo la conservazione dell'energia cinetica e quella della quantità di moto scomponendone le componenti nelle direzioni tangenziale e normale a **v** otterremo un sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite v_1, v_2 e β.

$$\begin{cases} m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta & ① \\ m_1 v_1 \sin\alpha = m_2 v_2 \sin\beta & ② \\ m_1 v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 & ③ \end{cases}$$

Eliminiamo la dipendenza da β tra la prima e la seconda equazione;

dalla seconda si ha:

$$\sin\beta = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2}\sin\alpha \Leftrightarrow \cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = 1 - \left(\frac{m_1 v_1}{m_2 v_2}\sin\alpha\right)^2$$

e dalla prima:

$$\cos\beta = \frac{m_1 v - m_1 v_1 \cos\alpha}{m_2 v_2} \Leftrightarrow \cos^2\beta = \left(\frac{m_1 v - m_1 v_1 \cos\alpha}{m_2 v_2}\right)^2$$

Eguagliando i secondi membri eliminiamo β:

$$1 - \left(\frac{\mathrm{m_1 v_1}}{\mathrm{m_2 v_2}}\sin\alpha\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{m_1 v - m_1 v_1}\cos\alpha}{\mathrm{m_2 v_2}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(m_2 v_2)^2 - (m_1 v_1 \sin\alpha)^2 = (m_1 \mathrm{v})^2 + (m_1 v_1 \cos\alpha)^2 - 2m_1^2\, v\, v_1 \cos\alpha$$

ma per la terza $(m_2 v_2)^2 = m_1 m_2 v^2 - m_1 m_2 v_1^2$

e pertanto si ottiene:

$$(m_2 + m_1)\, v_1^2 - 2m_1\, v \cos\alpha\; v_1 + (m_1 - m_2)\, v^2 = 0 \quad ④$$

La equazione trovata ci dice, sotto quali condizioni il problema ammette soluzione. Infatti, fissato α, esistono dei valori corrispondenti per v_1 a condizione che il discriminante della equazione sia ≥ 0; pertanto dovrà essere:

$$\frac{\Delta}{4} = (m_1\, v \cos\alpha)^2 - (m_1^2 - m_2^2)\, v^2 = v^2\,(-\, m_1^2 \sin^2\alpha + m_2^2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin^2\alpha \leq \left(\frac{\mathrm{m_2}}{\mathrm{m_1}}\right)^2 \Leftrightarrow \sin\alpha \leq \frac{\mathrm{m_2}}{\mathrm{m_1}}$$

Con i dati del nostro problema si hanno certamente soluzioni perché $\frac{m_2}{m_1}$ = 4 e pertanto l'angolo α può avere qualsiasi valore dato che sen α < 4 è sempre vera.

Fissato α entro la condizione $\sin\alpha \leq \frac{\mathrm{m_2}}{\mathrm{m_1}}$ si trovano due valori per la velocità v_1 di *scattering*

$$v_1 = \frac{m_1 \cos\alpha \pm \sqrt{-\, m_1^2 \sin^2\alpha + m_2^2}}{\mathrm{m_2} + m_1}\ \mathrm{v} = \frac{\cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha + \varphi^2}}{1 + \varphi}\ v \quad ⑤$$

dove si è posto $\varphi = \frac{m_2}{m_1} = 4$

Con i dati numerici forniti si ottiene:

$$v_1 = = \frac{\cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha + \varphi^2}}{1 + \varphi} = \frac{\cos 48.0 \pm \sqrt{-\sin^2 48.0 + 16}}{1 + 4} =$$

$= 0.920 \cdot 2.55 \cdot 10^5 = 2.35 \cdot 10^5$ m/s.

La soluzione negativa è stata scartata perché, avendo esplicitato i segni le grandezze considerate sono espresse in modulo.

Le caratteristiche del vettore $\mathbf{v}_2$ possono essere ottenute dalla ③:

$$(m_2 v_2)^2 = m_1 m_2 \mathrm{v}^2 - m_1 m_2 v_1^2 \Leftrightarrow \varphi\, v_2^2 = v^2 - v_1^2 \Leftrightarrow$$

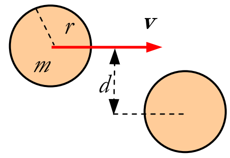
$$v_2 = \sqrt{\frac{v^2 - v_1^2}{\varphi}} = 0.495 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

$\sin \beta = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} \sin \alpha = \frac{2.35}{4 \cdot 0.495} \sin 48.0 = 0.882$ da cui $\beta = 61.9°$.

☺

6. Il parametro d'urto

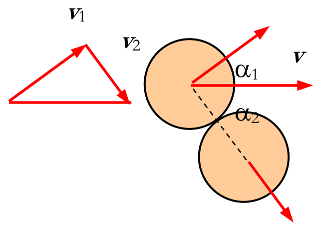
Esercizio: Un disco piano di raggio r e massa m ne urta un secondo fermo e con le stesse caratteristiche. Determinare le velocità $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ dopo l'urto conoscendo la velocità $\vec{v}$ prima dell'urto e il parametro d'urto d.



☹

Dopo l'urto il secondo corpo si muove lungo la direzione determinata dai due centri nel momento del contatto poiché la forza interna al sistema (forza d'urto) agisce lungo quella direzione. Pertanto possiamo già conoscere l'angolo α_2 perché $\sin \alpha_2 = \frac{d}{2r}$.

Ma d'altra parte sappiamo che l'angolo tra le due velocità è di 90° e pertanto $\alpha_1 = 90° - \arcsin \frac{d}{2r}$



Se ci riferiamo al triangolo che fornisce la somma delle velocità avremo che $v_1 = v \sin \alpha_2 = v \frac{d}{2r}$ mentre $v_2 = v \cos \alpha_2 = v \sqrt{1 - \left(\frac{d}{2r}\right)^2}$

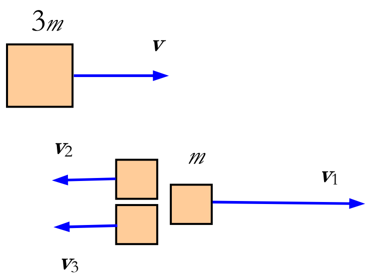
☺

7. Esplosione in volo con apporto energetico

Esercizio: Un proiettile in volo con velocità v = 800 m/s esplode in 3 frammenti identici in modo che la energia cinetica totale $\mathcal{E}'_k = 1.8\, \mathcal{E}_k$.

Scrivere le relazioni tra le velocità corrispondenti alla conservazione della quantità di moto ed alla condizione data sulle energie cinetiche (indicare con β il rapporto $\mathcal{E}'_k / \mathcal{E}_k$).

Determinare il valore massimo di velocità che può essere raggiunto da uno dei tre frammenti sulla base del suggerimento fornito.



Eseguire il calcolo con i dati numerici forniti. Suggerimento da motivare: la velocità sarà massima quando i tre frammenti hanno la stessa direzione e verso, inoltre per simmetria dovranno essere uguali i moduli dei due frammenti residui …[34]

---

[34] a) Se si indicano con $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ le 3 velocità dei frammenti di massa m dovrà essere per la conservazione della quantità di moto:

$m\vec{v_1} + m\vec{v_2} + m\vec{v_3} = 3m\vec{v} \Rightarrow \vec{v_1} = -(\vec{v_2} + \vec{v_3}) + 3\vec{v}$

Mentre per le energie cinetiche (dopo aver semplificato per m/2):

$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 3v^2$

b) Tenuto conto della necessità di ottenere un urto centrale per massimizzare a parità di condizioni il modulo di $\mathbf{v}_1$ e della simmetria che impone che sia $v_1 = v_2$ si trova

$v_1 = 3v + 2v_2$ e $v_1^2 + 2v_2^2 = 3v^2$

Il sistema di II grado porta alla soluzione $v_1 / v = 1 + \sqrt{2(\beta - 1)}$

Perché si è scartata la soluzione $1 - \sqrt{2(\beta - 1)}$?

c) Con i valori forniti si ha $v_1 = 2.23 \cdot 10^3$ m/s

☹

8. Urto elastico piano: energie ed angoli di scattering

Esercizio: Una particella di quantità di moto $\boldsymbol{p}$ ne urta una seconda in quiete e viene deflessa con un angolo di 90° mentre la particella bersaglio viene deflessa di α. Sono conosciuti il rapporto $h = \frac{m_1}{m_2}$ e la variazione relativa di energia cinetica(espressa in valore assoluto) $\left|\frac{\Delta\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}_k}\right| = k$.

a) Determinare la relazione che lega α con i valori di h e k.

b) Determinare il valore di h che corrisponde ad un angolo di scattering di 26° e ad una perdita di energia del 30%. [35]

☹

9. Urto elastico piano: Compito in classe marzo 2004

Esercizio: Una particella di massa m e quantità di moto p ne colpisce un'altra in quiete e di massa $2m$. Dopo l'urto le due particelle formano nell'ordine angoli di *scattering* α e β con la direzione iniziale. Indicate con $\boldsymbol{p}_1$ e $\boldsymbol{p}_2$ le quantità di moto dopo l'urto si determini quanto segue:

a) le due equazioni che consentono di determinare i moduli p_1 e p_2 delle due quantità di moto in funzione di p.

b) la espressione di p_1 e di p_2 in funzione di p (soluzione del sistema)

c) le due energie cinetiche $\mathcal{E}_{k1}$ ed $\mathcal{E}_{k2}$ in funzione di p.

d) Eseguendo i calcoli successivi si trova che il rapporto μ tra la energia cinetica finale ($\mathcal{E}_{k1} + \mathcal{E}_{k2}$) e quella iniziale vale $\dfrac{\frac{1}{2} + \left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2}{\left(\frac{\sin\beta}{\tan\alpha} + \cos\beta\right)^2}$

e) il valore di μ ipotizzando che sia $\alpha = 35°$ e $\beta = 46°$; commentare il risultato

f) supponendo che sia $\alpha = 35°$, il valore di β che corrisponde all'urto elastico ($\mu = 1$). [36]

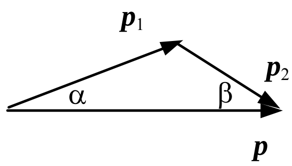
---

[35] Si tratta di tener conto della conservazione della quantità di moto e di calcolare le due energie cinetiche dopo l'urto.

Si ottiene: $h = \dfrac{1 - k - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

Con i valori numerici forniti si ha poi $h = 0.373$

[36] Dalla conservazione della quantità di moto riferita al diagramma delle quantità di moto



si ha: $p = p_1 \cos\alpha + p_2 \cos\beta \wedge p_1 \sin\alpha = p_2 \sin\beta$

Da qui operando per sostituzione si trova:

$$p_2 = \frac{p}{\frac{\sin\beta}{\tan\alpha} + \cos\beta} = \frac{p\sin\alpha}{\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta} = \frac{p\sin\alpha}{\sin(\beta + \alpha)}$$

☹

---

e $p_1 = \dfrac{p \sin \beta}{\sin(\beta + \alpha)}$ (senza bisogno di fare i conti, ma per simmetria).

Si arriva allo stesso risultato anche operando direttamente con il teorema dei seni a partire dalla composizione vettoriale delle quantità di moto.

Poiché in meccanica classica è $\mathcal{E}_k = \dfrac{p^2}{2m}$ si avrà (ricordando che la II particella ha massa $2m$):

$$\mathcal{E}_{k2} = \frac{p_2^{\,2}}{4m} = \tfrac{1}{2}\,\frac{p^2}{2m}\,\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} \quad \text{mentre } \mathcal{E}_{k1} = \frac{p_1^{\,2}}{2m} = \frac{p^2}{2m}\,\frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$$

Poiché è richiesta la somma delle due energie cinetiche è più opportuno calcolare

$$\mathcal{E}_{k2} + \mathcal{E}_{k1} = \frac{p^2}{2m}\,\frac{\sin^2\alpha + \tfrac{1}{2}\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{\sin^2\alpha + \tfrac{1}{2}\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}\,\mathcal{E}_k$$

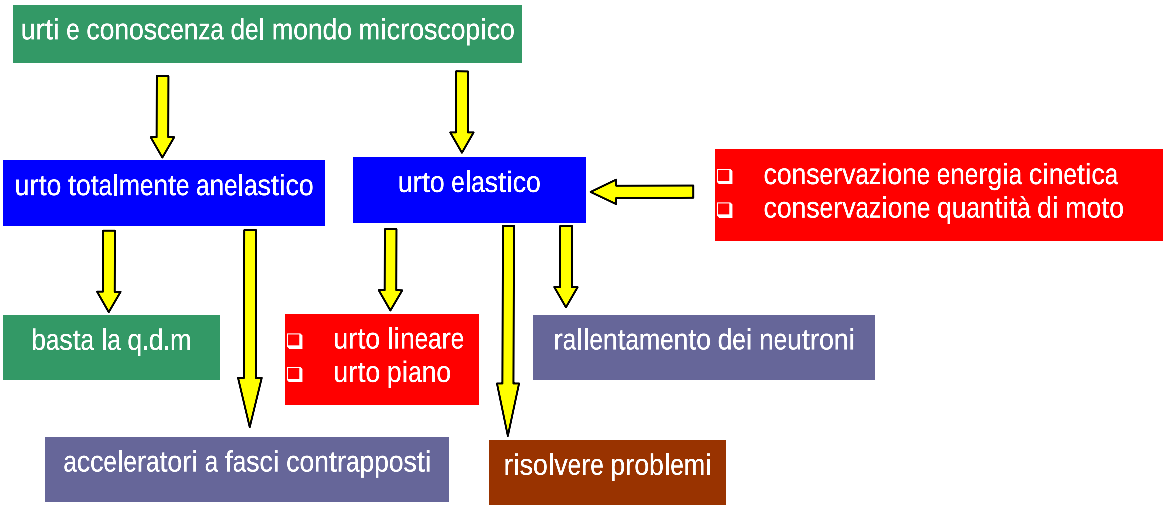
Dunque il valore di μ richiesto è $\dfrac{\sin^2\beta + \tfrac{1}{2}\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}$ che, dividendo per $\sin^2\alpha$, si può anche scrivere $\dfrac{\tfrac{1}{2} + \left(\dfrac{\sin \beta}{\sin \alpha}\right)^2}{\left(\dfrac{\sin\beta}{\tan \alpha} + \cos \beta\right)^2}$

Sostituendo i valori forniti per gli angoli si ottiene $\mu = 0.699$ con una perdita di enrgia intorno al 30%. Si osservi che la frazione di energia perduta dipende esclusivamente dagli angoli di scattering e non dipende dalla quantità di moto della particella incidente.

Nella ipotesi di urto elastico($\mu = 1$) con $\alpha = 35°$ si ottiene una equazione goniometrica di II grado in seno e coseno riducibile in tangente:

$1.495 \tan^2\beta - 2.86 \tan \beta - 0.500 = 0$ che porta alla soluzione positiva $\tan \beta = 2.07$ corrispondente a $\beta = 64.2°$.

Indice analitico


urti e conoscenza del mondo microscopico
urto totalmente anelastico
urto elastico
conservazione energia cinetica
conservazione quantità di moto
basta la q.d.m
urto lineare
urto piano
rallentamento dei neutroni
acceleratori a fasci contrapposti
risolvere problemi