

- ⌘ La scoperta della legge
- ⌘ La legge di gravitazione universale
- ⌘ Cos'è la accelerazione di gravità?
- ⌘ Pesiamo la Terra, il Sole, i pianeti
- ⌘ Applicazioni astronomiche
- ⌘ Effetti della rotazione terrestre sulla accelerazione di caduta libera
- ⌘ Quesiti di fine capitolo
- ⌘ Quesiti dalle Olimpiadi della Fisica
- ⌘ Problemi di fine capitolo



la gravitazione non esce dalla fisica, come un coniglio dal cappello, ma fonda la fisica: la gravitazione e la dinamica vengono costruite contestualmente



Il sistema copernicano 1543 viene proposto inizialmente come modello alternativo ad uso della navigazione

I.13. La gravitazione

13.1 La scoperta della legge

13.1.1 DUE PAROLE DI INTRODUZIONE GENERALE

La pubblicazione da parte di Newton dei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* nel 1687 segna la fine della preistoria di quella che sarà la scienza in senso moderno e l'inizio di una fase di grandi scoperte che, per quasi due secoli, si muoveranno entro uno schema dominato dal modello newtoniano.

Di solito nei libri di fisica per ragioni di ordine pedagogico si segue uno schema entro il quale si costruisce quasi tutta la meccanica (descrizione del moto, cause dei cambiamenti nel moto, leggi della dinamica) e poi, al termine, si *cava dal cappello il coniglio della gravitazione*.

Questo modo di procedere è più semplice perché le difficoltà di comprensione del significato di alcune grandezze fisiche vengono diluite a beneficio del principiante, ma non è corretto sul piano storico. Senza il *coniglio della gravitazione* non sarebbero esistiti, probabilmente, la accelerazione, la forza, il concetto di massa o la II legge della dinamica.

Ciò significa che il grande schema concettuale che abbiamo tracciato nel capitolo I.7 con l'*analisi critica dei principi della dinamica* è frutto di un grande ripensamento successivo e che la comprensione, per esempio, del legame tra forza ed accelerazione, con riferimento alle forze centripete con le quali oggi descriviamo il moto circolare, è da inserire non in una astratta ricerca sui legami tra le forze e le accelerazioni, ma entro un unico schema di *unificazione di terra e cielo* entro il quale Newton arriva a postulare l'esistenza della gravitazione universale come causa dei moti celesti nello stesso istante in cui afferma che le accelerazioni (visibili e misurabili) sono l'effetto di forze.

13.1.2 DUE SECOLI E MEZZO DI RIVOLUZIONE COSMOLOGICA

Una visione dettagliata in termini di storia della scienza, storia della cultura e storia della civiltà occidentale dell'affermarsi del copernicanesimo può essere oggetto di indagine parallela a quella di un corso di fisica. Qui ci interessano alcuni nodi cruciali che ci limitiamo a citare in ordine cronologico:

- 1543: muore Copernicus ⁽¹⁾ e viene pubblicato il suo *De revolutionibus orbium coelestium*. Nelle intenzioni dell'autore si insiste sul fatto che, rispetto alla cosmologia tolemaica *non ci sono fatti nuovi e c'è solo maggiore semplicità*. L'opera di Copernico appare all'inizio come un modo nuovo di fare previsioni, una sorta di miglioramento delle capacità di previsione e di descrizione del moto degli oggetti celesti ad uso della navigazione.

Ma, come osserva Paolo Rossi *ci sono in ogni sistema in equilibrio instabile (e tale era senza dubbio l'astronomia dei tempi di Copernico) punti problematici,*

¹ Niklas Kepperlingk (1473-1543) italianizzato in Niccolò Copernico

che non si possono toccare senza che crolli l'intero sistema. Il moto della Terra era uno di questi. ⁽²⁾

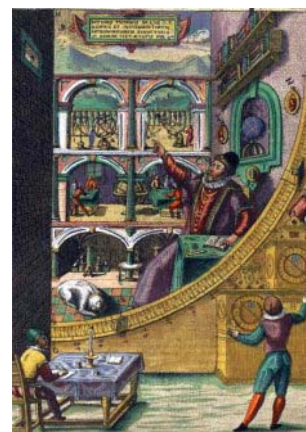
- 1572: Tycho Brahe⁽³⁾ osserva nella costellazione di Cassiopea una nuova brillantissima stella che risulterà visibile per circa 2 anni. Il mondo delle stelle fisse non è immutabile. Si tratta di un esempio di *supernova*. In altre civiltà e culture (islamica, cinese) le supernove erano già state osservate; erano invece ignorate dalla civiltà occidentale per la quale, semplicemente, non potevano esistere.

Tycho Brahe sarà anche il primo ad eseguire misurazioni dei movimenti stellari con una precisione quasi cento volte superiore alla precedente. Sembra una banalità, ma è uno dei numerosi casi della scienza in cui la tanto disprezzata *quantità* si trasforma in *qualità*. Aumenta la precisione delle misure, si scoprono cose nuove e soprattutto si scoprirà che il vecchio modo di guardare alla realtà era inadeguato.

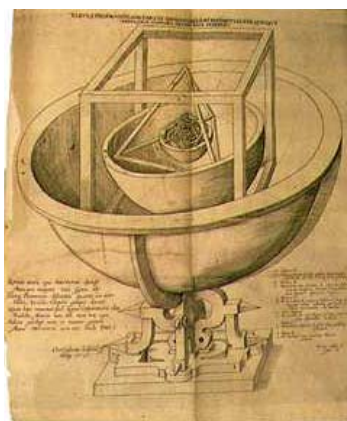
- 1609: Johannes Kepler⁽⁴⁾ pubblica la sua *Astronomia nova* nella quale è contenuta la *legge delle aree* (il raggio tracciato dal Sole ad un Pianeta descrive in tempi eguali aree uguali) e quella *delle orbite* (secondo cui i pianeti si muovono su orbite ellittiche con il Sole in uno dei fuochi). La *terza legge* (quella che stabilisce che il quadrato del periodo di rivoluzione dei pianeti intorno al Sole è proporzionale al cubo della loro distanza dal Sole) verrà enunciata nel 1619.

La vicenda di Kepler è quella di un cosmologo sfortunato, ma testardo ed onesto nelle sue ricerche. Kepler era alla ricerca di un universo che si adegua a leggi semplici e perfette. I suoi modelli erano la *numerologia dei pitagorici* o la *perfezione dei solidi platonici*. Su queste strade cercava le sue leggi ma era anche molto rigoroso nel sottoporle al vaglio dei dati osservativi (quelli precisi di Tycho).

Per esempio, il *ripudio della forma circolare nei moti celesti* emerge da un duro lavoro di studio dei moti di Marte: Marte si trova spostato di 8 secondi di arco da dove dovrebbe stare secondo le cosmologie tolemaiche, copernicane e tychoniche. Parte da questo dato il programma di ricerca teso a verificare il *carattere ellittico delle orbite*.



lo studio di Tycho Brahe e il sistema di osservazione ad occhio nudo delle posizioni delle stelle e dei pianeti: decine d'anni di rilevazioni consentono la raccolta dei dati dalla cui elaborazione Kepler troverà le sue leggi osservative; la matematica ci consente di calcolare come vedremmo le cose nel sistema di riferimento del Sole



le pagine in cui Kepler confronta le orbite dei pianeti con le caratteristiche di inscrivibilità dei 5 poliedri regolari platonici; dall'idea di perfezione alla ricerca di una legge

² P. Rossi, *La nascita della scienza moderna in Europa*, Laterza

³ Tycho Brahe (1546-1601) può essere considerato il primo grande astronomo sperimentale. Costruì, grazie al mecenatismo del re di Danimarca, il primo osservatorio astronomico su di una isoletta a nord di Copenaghen. Non si usavano telescopi ma si eseguivano misure accurate di posizione spaziale attraverso la osservazione del cielo da parte di un osservatore che, attraverso opportune cremagliere modificava la sua posizione rispetto ad un mirino di puntamento del cielo.

⁴ Johannes Kepler è una figura a metà strada tra il cosmologo e l'astronomo. Egli dispone della gran massa di dati osservativi di Brahe e, a differenza di Copernicus, si fa portavoce di una vera e propria cosmologia alternativa basata sulla ricerca di regolarità aritmetiche di tipo pitagorico. Lo conosciamo oggi per le 3 leggi relative al moto dei pianeti che portano il suo nome e con le quali Newton si misura nei suoi lavori sulla gravitazione. Sui temi della rivoluzione astronomica esistono numerosissime pubblicazioni reperibili in ogni biblioteca. Oltre ai classici lavori di Koyré (la rivoluzione astronomica; studi galileiani; studi newtoniani, dal mondo del pressappoco all'universo della precisione) segnalo un'opera recente e di gradevole lettura: J.P. Verdet, *storia della astronomia*, Longanesi



Si tenga presente che non si tratta di partire da dati osservativi visti da un sistema di riferimento comodo: guardiamo le cose dalla Terra e dobbiamo scoprire che il moto di Marte è ellittico se lo si guarda da un sistema di riferimento nel quale il Sole si trova in uno dei fuochi.



le fasi Lunari descritte da Galilei nel Sidereus Nuncius

- 1610: esce il *Sidereus Nuncius* di Galilei frutto della osservazione del cielo attraverso il telescopio (fasi della Luna, osservazione della superficie Lunare, satelliti di Giove).
- 1616: condanna ufficiale del Copernicanesimo da parte della Chiesa Cattolica
- 1632: Galilei: *dialogo sui massimi sistemi*
- 1633: condanna di Galilei
- 1638: Galilei *Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze*
- 1669: Newton pubblica *il metodo delle flussioni* (quella che diventerà la moderna analisi matematica). Newton è padrone della nuova matematica ma utilizzerà per i suoi *Principia* i metodi classici di tipo geometrico
- 1684: Newton mette in circolazione un trattato (noto come *il de motu*) nel quale enuncia alcuni dei teoremi che riprenderà in forma più generale nei Principia.
- 1687: prima edizione dei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* di Newton (leggi della dinamica, spiegazione del funzionamento del sistema solare, legge di gravitazione universale); la nascente fisica venne da allora chiamata *filosofia naturale*.

13.1.3 L'OPERA DI NEWTON

In un testo di fisica di primo livello non è possibile entrare in dettaglio nella illustrazione della catena di ragionamenti che portano Newton ad enunciare la legge di gravitazione universale. È però opportuno fornire alcuni chiarimenti per evitare fraintendimenti che sono spesso presenti nei manuali di fisica per le scuole superiori. ⁽⁵⁾

Non è vero che Newton si sia posto il problema di costruire una teoria in accordo con le leggi di Kepler o che si sia posto il problema di dimostrarle; il suo orizzonte culturale è più vasto e muove da una logica di ricerca della legge della forza che governa il funzionamento del sistema solare. Nell'ambito di questa ricerca Newton perviene ad una serie di risultati che in parte confermano, e in parte smentiscono, correggendole, le leggi di Kepler.

Newton dimostra la legge delle aree in un contesto più generale della legge di gravitazione evidenziando che *ogni forza diretta verso un centro determina un moto che rispetta la legge delle aree*. Pertanto i pianeti seguiranno la legge delle aree nella misura in cui si possa assimilare il Sole ad un centro di forza fisso intorno a cui ruotano i pianeti. Ma seguirebbero questa legge anche se la forza non dipendesse dall'inverso del quadrato della distanza ⁽⁶⁾



Il programma di ricerca di Newton non corrisponde ad una semplice generalizzazione delle leggi di Kepler



⁵ Su questi argomenti un testo utile per una ricerca approfondita può essere Bernard Cohen, *la rivoluzione newtoniana*, Feltrinelli

⁶ Ma a Newton è già chiaro che ciò è vero solo in prima approssimazione e che il sistema Sole pianeta ruota intorno a quello che oggi chiamiamo *centro di massa del sistema*.

Nei Principia Newton dopo aver osservato che il moto ellittico dei pianeti e la legge delle aree sono solo *costrutti matematici* validi in prima approssimazione si occupa dello studio dei sistemi a due corpi (Sole più pianeta) nel rispetto della III legge della dinamica e persino delle perturbazioni che i pianeti interagendo tra loro determinano sul carattere ellittico delle orbite e fa esplicito riferimento alla interazione tra Giove e Saturno.

Newton riconosce un *debito culturale solo nei confronti della III legge di Kepler* perché in virtù di essa, cioè della regolarità tra periodo e distanza al cambiare del pianeta, può affermare il carattere unitario della forza di interazione tra Sole e pianeti. A questo punto passa alla generalizzazione ed afferma che si tratta della stessa forza che spiega il moto del sistema Terra Luna e del sistema di Giove e dei suoi satelliti.

Newton passa infine a dimostrare che, come conseguenza della legge della forza che ha trovato, *le orbite dei corpi celesti possono essere ellittiche, paraboliche o iperboliche a seconda delle condizioni iniziali* e ciò gli consentirà di avanzare nuove ipotesi di spiegazione del *moto delle comete*.



13.1.4 UN MODELLO DI RAGIONAMENTO PER CUI $F \propto \frac{1}{R^2}$

Per dare una idea del tipo di *ragionamenti condotti da Newton* (e che come abbiamo detto si riferiscono al caso generale con orbite corrispondenti ad una generica sezione conica) supponiamo che, in prima approssimazione, i pianeti ruotino intorno al Sole di moto uniforme in orbite che differiscono molto poco da circonferenze. Tale approssimazione è giustificata dai seguenti due elementi:

- la eccentricità delle orbite cioè lo scostamento relativo dalla condizione di circolarità vale 0.017 per la Terra, 0.09 per Marte, 0.007 per Venere, 0.05 per Giove, Saturno e Urano ed è significativa solo per Mercurio e Plutone (circa 0.2)
- la massa del sistema solare è quasi tutta concentrata nel Sole (il rapporto tra la massa del Sole e la massa di tutti gli altri costituenti assommata vale circa 700) e dunque con ottima approssimazione si può supporre che il *centro di massa del sistema solare* sia nel centro del Sole.

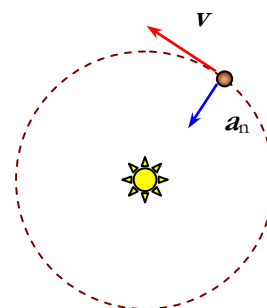
Ma se il moto del pianeta è circolare uniforme esiste una accelerazione centripeta diretta verso il centro dell'orbita, cioè verso il Sole. Dalla II legge della dinamica sappiamo che una tale accelerazione è dovuta all'azione di una forza; dunque il Sole agisce su ogni pianeta con una forza diretta verso di sé. Dalla validità della III legge della dinamica segue inoltre che il Sole subisce a sua volta l'azione di una forza opposta alla precedente ed esercitata dal pianeta. ⁽⁷⁾

In base alla III legge di Kepler il rapporto tra il raggio orbitale al cubo e il quadrato del periodo è costante, cioè:

$$T^2 = k R^3 \quad (I.13.1)$$



i limiti che consentono di considerare i pianeti come punti materiali e le orbite come circonferenze



⁷ Si ricordi che il contributo di Newton consiste nella affermazione contemporanea della legge di gravitazione universale e delle tre leggi della dinamica. Il principio di azione e reazione viene formulato proprio avendo come riferimento la legge di gravitazione e diventa un principio perché anche la più importante legge della forza conosciuta lo soddisfa.

dove la costante k non dipende dal particolare pianeta considerato. D'altra parte, se ipotizziamo che valga la II legge della dinamica avremo che:

$$F = m_P a = m_P \omega^2 R = m_P \frac{4\pi^2}{T^2} R = m_P \frac{4\pi^2}{k R^3} R = m_P \frac{4\pi^2}{k R^2} \quad (I.13.2)$$

Dunque se vale la III legge di Kepler entro il modello newtoniano della dinamica la forza che causa il moto dei pianeti è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra il centro del pianeta e il centro del Sole.

13.1.5 LA FORZA CHE CAUSA IL MOTO DEI PIANETI HA LA STESSA NATURA DI QUELLA CHE FA GIRARE LA LUNA



Così come i pianeti ruotano intorno al Sole, la Luna gira intorno alla Terra. Viene spontaneo (a noi, che siamo già abituati all'idea di un unico meccanismo di spiegazione del funzionamento del sistema solare) ipotizzare che la forza che fa girare i pianeti sia la stessa che governa il funzionamento del sistema Terra Luna.



A proposito di esso teniamo presente che questo sistema è tra quelli per i quali è *azzardata* la scelta di ipotizzare la Terra ferma e la Luna che le gira intorno. In effetti, se vale la III legge della dinamica, il sistema è caratterizzato da due forze identiche e da due accelerazioni inversamente proporzionali alle masse.

Poiché la massa della Luna non è trascurabile rispetto alla massa della Terra neanche la accelerazione della Terra è trascurabile rispetto a quella della Luna ed esiste addirittura un fenomeno imputabile alla rotazione della Terra intorno al centro del sistema Terra Luna: si tratta delle *maree* che vengono finalmente spiegate dopo l'enunciato della legge di gravitazione universale.

Newton avanzò l'ipotesi *sconcertante* che la forza di gravità che agisce su un corpo presso la superficie terrestre e la forza con cui la Terra attira la Luna, avessero la stessa origine e che la loro differenza dipendesse solo dalla distanza dal rispettivo centro di forza. Si trattava del primo passo verso la affermazione del carattere *universale* della forza di gravitazione.

Questa ipotesi venne da lui confermata confrontando l'accelerazione di caduta libera dei corpi con quella *normale* (o centripeta) con cui la Luna gira nella sua orbita (da qui il famoso *aneddoto sulla mela*: la forza che fa cadere la mela è la stessa che fa cadere *girando* la Luna).

La accelerazione centripeta può essere dedotta dai dati seguenti di origine astronomica: la distanza tra la Terra e la Luna è di 3.84×10^8 m e il periodo di rivoluzione Lunare è di 27.3 giorni = $27.3 \times 24 \times 3600$ s.

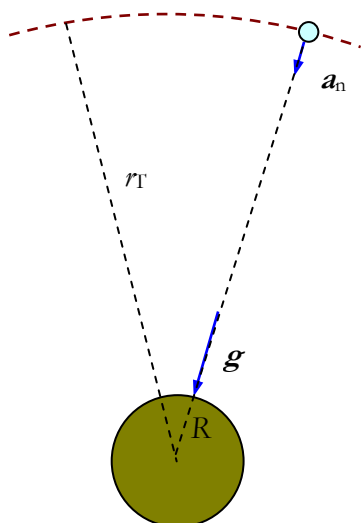
La velocità orbitale vale $v = \frac{2\pi r}{T}$ e pertanto:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 3.84 \times 10^8}{(27.3 \times 24 \times 3600)^2} = 2.72 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Come si può vedere dal risultato, la accelerazione normale della Luna e la accelerazione di gravità differiscono nettamente in intensità secondo il rapporto:

$$\frac{g}{a_n} = \frac{9.81}{2.72 \times 10^{-3}} \approx 3'600$$

dalla osservazione che $g = 3'600 a_n$ Newton deduce che la accelerazione decresce con l'inverso del quadrato della distanza; la gravitazione è universale



Newton, rifacendosi alla legge relativa al moto dei pianeti, spiegò la differenza tra questi valori avanzando l'ipotesi che *la forza di attrazione gravitazionale decrescesse al crescere della distanza tra i corpi che interagiscono, secondo la stessa legge.*

Supponiamo dunque che sia $a \propto \frac{1}{r^\alpha}$ dove α è l'esponente ignoto che ci proponiamo di determinare. Se la legge che governa il fenomeno è unica basta eseguire il confronto tra due accelerazioni note per le quali siano note anche le distanze e in questo modo si determinerà il valore α incognito.

$$\frac{g}{a_n} = \left(\frac{r_{TL}}{R} \right)^\alpha = \left(\frac{3.84 \times 10^8}{6.37 \times 10^6} \right)^\alpha = 60^\alpha$$

e ciò ci permette di determinare l'esponente incognito perché da $3600 = 60^\alpha$ si ottiene $\alpha = 2$.

Dunque anche la accelerazione dovuta alla attrazione della Terra, decresce in proporzione inversa al quadrato della distanza. Se nella equazione (9.5) si pone $\alpha = 2$ si ottiene:

$$a_n = g \left(\frac{R}{r_{TL}} \right)^2 = \frac{K}{r_{TL}^2}$$

dove K è una costante che dipende dalla Terra e il cui significato, per ora ci sfugge.



una bella immagine del centro della via Lattea, la galassia entro cui si trova il Sole in posizione periferica

13.2 La legge di gravitazione universale

13.2.1 LA DIPENDENZA DALLE MASSE DEI DUE CORPI

Se riprendiamo in esame la (I.13.2) cui assegniamo ora un carattere di universalità potremo affermare che:

$$F \propto m_p \frac{1}{R^2} \quad (\text{I.13.3})$$

dove la *costante di proporzionalità dipende esclusivamente dal centro di forza, cioè dal Sole*.⁸

Ma, se vale la III legge della dinamica, potremo affermare egualmente che il pianeta attira il Sole con una forza identica e rovesciando il ragionamento saremo costretti ad ammettere che la forza è proporzionale alla massa del Sole. Poiché non compaiono altre grandezze fisicamente rilevanti la costante di proporzionalità G dovrà essere indipendente dalla coppia di corpi celesti scelta e sarà una costante universale.

Potremo dunque scrivere:

$$F_{SP} = m_p a_p = \frac{m_p K_S}{r_{PS}^2} = G \frac{m_p m_S}{r_{PS}^2}$$

e poiché è $F_{SP} = F_{PS} = F$ possiamo scrivere che:

$$F = G \frac{m_S m_p}{r_{SP}^2} \quad (\text{I.13.4})$$

13.2.2 L'ENUNCIATO DELLA LEGGE

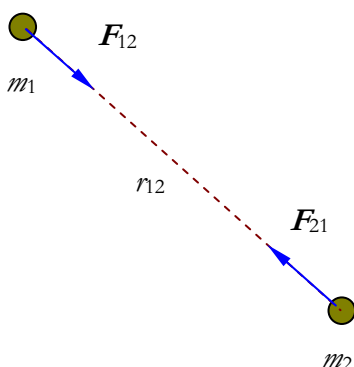
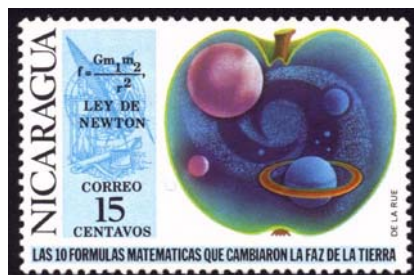
La *legge di gravitazione universale* può essere enunciata così: *tra due masse puntiformi m_1 e m_2 poste a distanza r si esercita una forza attrattiva diretta lungo la congiungente le due masse; tale forza è proporzionale al prodotto delle masse ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza reciproca. La costante di proporzionalità ha valore universale, cioè non dipende dalle particolari masse considerate ed è invariabile nello spazio e nel tempo.*

$$F_{12} = F_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad (\text{I.13.5})$$

La trattazione precedente non può essere considerata come una deduzione della legge di gravitazione universale, ma serve solo ad illustrare la linea di ragionamento seguita da Newton.

Per verificare la validità della legge di gravitazione che è stata ricavata attraverso un *ragionamento di natura induttiva* dovremmo essere in grado di determinare la forza di attrazione gravitazionale tra due corpi di dimensioni finite così come di due punti materiali. Nel caso generale questo problema pone grandi difficoltà di natura matematica e non può essere risolto per via elementare.

Tra l'altro, alcune delle pause nel lavoro di *Newton* sono proprio legate alla necessità cruciale di dimostrare in maniera inoppugnabile quello che per noi appare quasi una ovvietà, ma che tale non è, e cioè il fatto che dal punto di vista gravitazionale gli effetti di una sfera di dimensioni fini-



legge di gravitazione universale

$$F_{12} = F_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

⁸ La massa che compare in questa relazione è la massa inerziale, ma abbiamo già osservato che esiste identità operativa tra i concetti di massa inerziale e di massa gravitazionale. Pertanto, e ciò è più rispettoso del ragionamento newtoniano, la massa che compare nella relazione 13.3 è la massa gravitazionale.

te o quelli di una massa puntiforme, siano identici. Ricordiamo che quella che oggi viene chiamata analisi matematica e che Newton chiamava *calcolo delle flussioni* venne creata contestualmente a questi problemi proprio per risolverli.

Il fattore G nella legge di gravitazione universale è detto *costante di gravitazione universale*; il suo valore è pari alla forza di interazione tra due masse unitarie che si trovino a distanza unitaria e può essere determinato solo per via sperimentale. La sua determinazione richiede una misurazione diretta perché in tutte le equazioni della dinamica essa o sparisce nei rapporti o compare insieme a qualche altra grandezza astronomica ignota. Come vedremo, dalla conoscenza di G è possibile risalire ai valori di tali grandezze.



la galassia di Andromeda: un oggetto più grande e complesso del sistema solare governato dalla universalità della legge di gravitazione

13.2.3 LA DETERMINAZIONE DI G

Come abbiamo già osservato la determinazione di G non può avvenire che attraverso una misura diretta. Infatti, se si cerca di utilizzare una metodica indiretta di tipo dinamico, nelle equazioni compare sempre la massa di una grandezza astronomica incognita.

Nel 1798 lo scienziato inglese Henry *Cavendish* (1731-1810) ⁹ eseguì un esperimento per misurare in laboratorio la attrazione gravitazionale e quindi determinare la costante di gravitazione. L'apparato sperimentale era costituito da una *bilancia di torsione* il cui funzionamento è schematizzato in figura. Si tratta dello stesso tipo di apparato utilizzato da Coulomb nel 1784 per indagare la natura della forza elettrica.

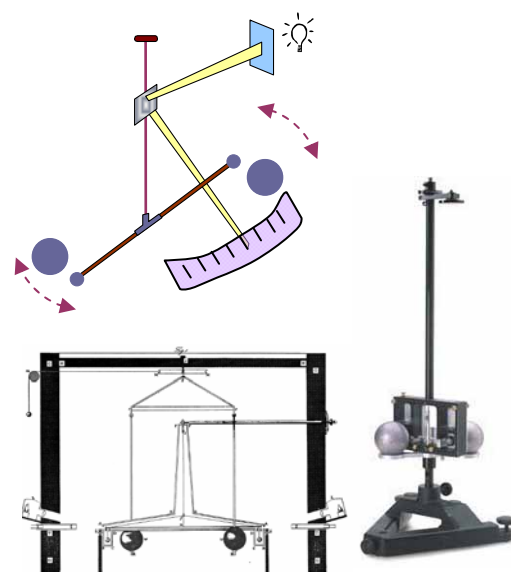
Un sottile filo di quarzo con uno specchietto sostiene una leggera sbarra orizzontale di quasi 2 metri di lunghezza. Lo specchio consente di riflettere un fascio di luce verso una scala graduata. Quando la sbarra ruota intorno all'asse verticale il fascio di luce si muove lungo la scala e indica l'angolo di rotazione.

Agli estremi della sbarra sono collocate due piccole sfere di piombo di massa m (circa 730 g) mentre due altre sfere, più grandi (circa 158 kg) di piombo e di massa M sono collocate vicino alle prime due al di là della sbarra. L'attrazione tra le sfere fa ruotare la barra e il filo finché la reazione elastica dell'apparato mobile bilancia la attrazione gravitazionale.

Nella sua esperienza *Cavendish*, dopo aver misurato la costante elastica del filo di quarzo dal periodo di oscillazione dell'apparato mobile, riuscì a determinare la costante di gravitazione universale misurando l'angolo di equilibrio, le masse e la distanza tra i loro centri. Il valore determinato, rapportato alle odierne unità fu di $6.675 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ con un errore dell'1% rispetto ai valori oggi noti.

Si osservi che, nel caso della bilancia di torsione, si fa esplicito uso di un risultato già determinato da Newton, quello secondo cui i *corpi sferici e omogenei sono sempre assimilabili a puntiformi* anche quando le loro dimensioni, rispetto alle distanze in gioco, non consentirebbero tale affermazione.

Una seconda misurazione più accurata fu poi eseguita a fine 800 da Jolly attraverso la comparazione dei pesi di un corpo campione misurati su di



la bilancia di torsione ci ha consentito di misurare la costante G e di trovare indirettamente le masse del Sole e dei pianeti : schema, modello di Cavendish, apparecchiatura didattica

⁹ Anche se nei manuali di fisica Cavendish compare sempre a questo punto, i suoi contributi principali hanno riguardato lo studio della nascente elettricità e della chimica. In particolare egli scoprì la presenza dell'idrogeno come componente dell'acqua ed identificò nell'aria la presenza dell'Argon.

una bilancia a braccia nei due casi in cui il corpo veniva posto sopra o sotto una massiccia sfera di piombo.

La *misura più accurata*, eseguita migliorando gli apparati sperimentali ha portato al seguente valore:

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$



$$(I.13.6)$$

13.2.4 PERCHÉ BISOGNA IMPARARE IL VALORE DI G ?

È molto importante farsi un'idea concreta del significato del numero che abbiamo appena determinato.

Si tratta di una costante molto piccola, così piccola che per apprezzare fenomeni gravitazionali su scala della esperienza ordinaria occorrono strumenti molto precisi (come la bilancia di torsione).

Per farci un'idea del valore di G supponiamo di far interagire gravitazionalmente due masse sferiche di 100 kg e poniamole alla distanza di 1 m la forza di interazione risulta di circa 10^{-6} N cioè un decimo di milligrammo.

Questa è la ragione per la quale i fenomeni di natura gravitazionale governano l'astronomia e molti processi cosmologici; essi *diventano significativi solo in presenza di masse molto grandi*. L'universo ha le caratteristiche che conosciamo perché G ha il valore che conosciamo e se G avesse un valore anche leggermente diverso le caratteristiche del nostro universo sarebbero diverse.

13.2.5 IL SIGNIFICATO DELLA COSTANTE DELLA III LEGGE DI KEPLER

Una volta accettata la legge di gravitazione universale, essa può essere applicata alla spiegazione delle diverse leggi osservative da cui è stata originariamente inferita. Per esempio, è possibile dedurre la *III legge di Kepler*, ma la deduzione, avvenendo in un contesto più generale, ci consente di interpretare il significato delle costanti che in essa compaiono.

La forza di gravitazione esercitata dal Sole, la cui massa sia M , su di un pianeta di massa m posto a distanza r e dotato di un periodo T di rivoluzione intorno al Sole, determina una accelerazione normale $a_n = \frac{F}{m} =$

$$\frac{GM}{r^2}.$$

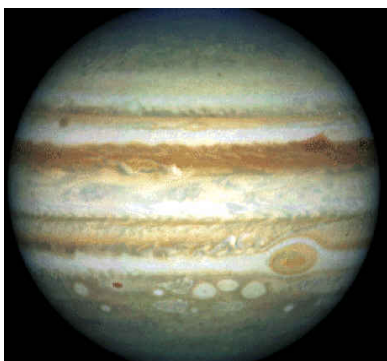
$$\text{Ma poiché } a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \text{ si ha che: } \frac{GM}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

e quindi:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{costante} \quad (I.13.7)$$

Dunque le distanze al cubo dei pianeti dal Sole sono proporzionali al quadrato dei periodi di rotazione e la costante della III legge di Kepler dipende dal prodotto della costante di gravitazione universale con la massa del Sole (che in questo caso fa da centro della forza).

La *III legge di Kepler* può essere utilizzata per determinare le distanze dei pianeti lontani. Infatti il periodo di rivoluzione dei pianeti può essere misurato con grande precisione, la corrispondente distanza può essere misurata altrettanto bene attraverso una proporzione fondata sulla legge



Giove ripreso dal telescopio Hubble



Newton attraverso la legge di gravitazione spiega il significato della costante della III legge di Kepler

di Kepler a condizione di determinare con precisione la distanza di un particolare pianeta.

Nel sistema solare si è adottata come distanza di riferimento quella tra Terra e Sole. Essa viene chiamata *unità astronomica* (UA) e vale 1.495×10^{11} m.

L'accordo eccellente oggi esistente tra le misurazioni astronomiche e quelle dirette via radar costituisce una prova indiretta della validità della legge di gravitazione universale.

Riportiamo per completezza e per agevolare lo svolgimento di considerazioni critiche personali un prospetto di dati relativi al *sistema solare*.



Caratteristica fisica	Sole	Mercurio	Venere	Terra	Marte	Giove	Saturno	Urano	Nettuno	Plutone
Raggio equatoriale in km	696'000	2'439	6'052	6'378	3'396	70'850	60'000	25'400	24'300	1'100
Massa relativa (Terra = $5,9742 \times 10^{24}$ kg)	333'000	0.055	0.815	1	0.107	317.8	95.1	14.6	17.2	0.002
Volume relativo (Terra = $1,083 \times 10^{21}$ m ³)	1'300'000	0.06	0.88	1	0.15	1'316	755	67	57	0.1
Densità δ in kg/dm ³	1.4	5.4	5.2	5.5	3.9	1.4	0.7	1.3	1.8	1
Temperatura media in K	6'000	623÷103	240÷753	295	250	123	93	63	53	43
p atmosferica relativa		10^{-12}	90	1	0.006					
g superficiale relativa	27.9	0.37	0.88	1	0.38	2.64	1.15	1.17	1.18	
Schiacciamento polare		0	0	0.003	0.005	0.061	0.109	0.03	0.03	
Distanza media dal Sole in milioni di km		57.9	108.2	149.6	227.9	778.3	1427	2870	4497	5900
Periodo di rotazione in ore	600	1407	5832	23.93	24.62	9.84	10.24	15.6	18.5	153
Periodo di rivoluzione		88g	224.7g	365.26g	687g	11.86a	29.46a	84.01a	164.8a	247.7a
Eccentricità dell'orbita		0.206	0.007	0.017	0.093	0.048	0.056	0.047	0.009	0.25
Velocità orbitale in km/s		47.9	35	29.8	24.1	13.1	9.6	6.8	5.4	4.7
Inclinazione dell'orbita rispetto all'eclittica		7°	3.4°	0°	1.9°	1.3°	2.5°	0.8°	1.8°	17.2°
Inclinazione dell'equatore sull'orbita		28°	3°	23.4°	24°	3.1°	26.7°	82.1°	28.8°	
Numero di satelliti noti		0	0	1	2	15	23	15	1	1
Composizione Atmosfera	H, He, O ₂		CO ₂	N ₂ , O ₂	CO ₂	H, He	H ₂ , He	H ₂ , He, CH ₄	H ₂ , He, CH ₄	
Tabella I.13.1										

13.3 Cos'è la accelerazione di gravità?

13.3.1 DA DOVE VIENE LA GRAVITAZIONE?

Una delle *dispute filosofiche* sorte immediatamente dopo l'affermarsi della teoria newtoniana della gravitazione riguardò la modalità di trasmissione della *interazione gravitazionale*. Il panorama scientifico europeo, prima di Newton, era propenso ad accettare la *teoria cartesiana dei vortici* secondo la quale l'universo è composto da materia sottile che trasmette movimento attraverso una complessa azione di vortici.

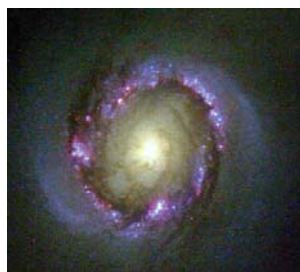
La teoria della gravitazione newtoniana per un verso distrugge l'idea dei vortici cartesiani (incompatibili con alcune conseguenze della gravitazione), ma per l'altro non si pronuncia sulla origine della gravitazione e sulla modalità di trasmissione della interazione.



Non immagino alcuna ipotesi: descrivere, osservare e ridurre al minimo ipotesi di natura metafisica

Newton nello Scolio Generale ai Principia afferma, dopo aver descritto la gravità come un fenomeno che riguarda ogni singola particella di materia, *non ho ancora potuto dedurre dai fenomeni la ragione di tali proprietà della gravità, e non immagino alcuna ipotesi. Perché tutto ciò che non può essere dedotto dai fenomeni è una ipotesi: e le ipotesi, siano esse metafisiche, fisiche, meccaniche o di qualità occulte, non devono essere accettate dalla filosofia sperimentale. In questo genere di filosofia le proposizioni si deducono dai fenomeni naturali generalizzando in seguito per induzione. In tal modo abbiamo potuto conoscere l'impenetrabilità, la mobilità, la forza dei corpi, le leggi del movimento e della gravità. Ed è sufficiente che la gravità esista, che agisca secondo le leggi da noi enunciate, e che possa spiegare tutti i movimenti dei corpi celesti e del mare.*

La teoria newtoniana si rivela vincente e spazzerà via nel giro di una cinquantina d'anni le ipotesi cartesiane che tendevano a spiegare l'azione a distanza come una azione che si propagava per contiguità. In questo quadro tutta la fisica, compresa l'ottica verrà interpretata in chiave corpuscolare.



Non ci si chiederà, in mancanza di fenomeni che pongano il problema, se la gravitazione si propaga a velocità infinita; cosa accade cioè ad una data massa quando in un punto diverso appare istantaneamente una seconda massa. L'interazione gravitazionale si propaga con una velocità infinita oppure no?

quando inizia a manifestarsi la interazione gravitazionale? La interazione si propaga in un tempo finito? Si apre la discussione su azione a distanza e azione per contatto che porterà alla introduzione del concetto di campo

Nel modello newtoniano il problema sembra insensato perché la massa *esiste da sempre*. Così il *modello newtoniano* basato sul non chiedersi cosa sia la gravità ma sul prendere atto della sua esistenza con determinate caratteristiche, si fa strada e con esso si fa strada l'idea di interazioni che si propagano a velocità infinita e che sono sempre l'effetto di interazioni tra corpuscoli.



Eppure esistono in fisica, e sono già ben noti ai tempi di Newton, fenomeni che si propagano per contiguità: il suono, le onde sull'acqua. In questi fenomeni la perturbazione ondosa si trasmette attraverso un mezzo attraverso l'azione delle particelle di un mezzo su quelle contigue e che non richiede l'azione a distanza ma semmai il suo opposto e cioè l'azione per contatto.

Sul lungo periodo hanno avuto ragione entrambe le ipotesi: la gravitazione per propagarsi non ha bisogno di un mezzo materiale che trasmetta per contiguità i suoi effetti, ma è anche vero che la propagazione della gravitazione, così come di qualsiasi altro fenomeno non avviene istanta-

neamente e le equazioni che descrivono la propagazione del fenomeno assomigliano a quelle della propagazione ondosa (con una differenza non banale: il mezzo non serve e la propagazione può avvenire nel vuoto).

13.3.2 DA DOVE VIENE E COME CAMBIA LA ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ?

Man mano che un corpo si allontana dalla superficie terrestre diminuiscono sia la forza di gravità, sia la accelerazione di caduta libera.

In effetti se indichiamo con P la forza di gravitazione e con g la *accelerazione di gravità* avremo, applicando contemporaneamente la legge di gravitazione universale, la II legge della dinamica e la identità tra massa inerziale e massa gravitazionale:

$$P = mg = G \frac{mM}{R^2}$$

Pertanto:

$$g = G \frac{M}{R^2} \quad (\text{I.13.8})$$

l'accelerazione di gravità dipende dalla massa e dalle dimensioni del pianeta

Dunque la *accelerazione di gravità* dipende dalla massa della Terra e dalla distanza tra il punto considerato e il centro della Terra. Lo stesso fenomeno si darà per un pianeta qualsiasi e dunque si potrà parlare di accelerazione di gravità per un qualsiasi sistema legato dalla gravitazione.

Le variazioni locali di *accelerazione di gravità* sono dovute a due ragioni: da punto a punto cambia la distanza dal centro della Terra e cambia anche la distribuzione di massa per disomogeneità o irregolarità di forma.

A piccole altezze, molto minori del raggio terrestre, queste variazioni possono essere trascurate e si possono considerare costanti sia la accelerazione sia la forza di gravità. In effetti, poiché il raggio medio della Terra è di 6'371 km, anche a diverse centinaia di km sul livello del mare, solo strumenti molto sensibili possono registrare le variazioni di queste grandezze.

Se, per esempio, si assume $h = 300$ km si ha:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{(R + h)^2} = \left(\frac{6371}{6671} \right)^2 = 0.912$$

Dunque a 300 km di altezza il valore di g è pari al 91.2% di quello a livello del suolo.

Ad una altezza di 30 km:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{(R + h)^2} = \left(\frac{6371}{6401} \right)^2 = 0.991 \text{ pari al } 99.1\% \text{ del valore originario.}$$

Riprenderemo questo argomento trattando, a fine capitolo, dei fenomeni che influenzano la accelerazione di gravità.

Osserviamo per concludere che a determinare la *gravità di un pianeta* concorrono sia la massa, sia le sue dimensioni. La massa, a parità di *densità*, è proporzionale a R^3 e pertanto, a parità di densità la gravità cresce proporzionalmente alle dimensioni.

Ma la ipotesi che la densità rimanga costante non è corretta almeno per due ragioni:

- non è detto che i corpi celesti abbiano avuto la stessa origine e siano dunque fatti delle stesse cose
- al crescere delle dimensioni l'effetto gravitazionale tende a comprimere sempre di più gli strati interni facendone crescere la densità.

Così Giove, che ha un diametro circa 12 volte quello terrestre ha una gravità superficiale pari a 2.64 volte quella terrestre. Si consiglia di svolgere qualche semplice esercizio di confronto su densità, dimensioni e gravità usando i dati della tabella I.13.1.

13.4 Pesiamo la Terra, il Sole e i pianeti

13.4.1 MA CHI HA PESATO LA TERRA E IL SOLE? CAVENDISH!

Dalla conoscenza della costante di gravitazione universale e della accelerazione di caduta libera si può determinare la *massa della Terra*. In effetti, in base alla equazione (I.13.9) si può scrivere:

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} \text{ e dunque la massa della Terra vale:}$$

$$M = \frac{g_0 R^2}{G} = \frac{9.8 \times 6.37^2 \times 10^{12}}{6.67 \times 10^{-11}} = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg} \quad (\text{I.13.9})$$

In maniera analoga si può determinare la *massa del Sole*. Sapendo che il raggio dell'orbita terrestre $R_{TS} = 149.5 \times 10^9 \text{ m}$ e che il periodo della rivoluzione terrestre intorno al Sole è $T = 1 \text{ anno} = 31.56 \times 10^6 \text{ s}$, possiamo calcolare la accelerazione centripeta della Terra. Pertanto:

$$a_T = \frac{4\pi^2 R_{TS}}{T^2} = 5.9 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

e, per analogia con l'equazione (9.17) si ha:

$$M_S = \frac{a_T R_{TS}^2}{G} = \frac{5.9 \times 10^{-3} \times 149.5^2 \times 10^{18}}{6.67 \times 10^{-11}} = 1.98 \times 10^{30} \text{ kg} \quad (\text{I.13.10})$$

Dunque, la massa del Sole è circa 330'000 volte quella terrestre.

Una volta determinata la *massa del Sole* ci si è posti la domanda relativa alla origine della sua energia. Infatti, stando sulla Terra e misurando quanta energia arriva al secondo su 1 m^2 di superficie terrestre è facile risalire a quanta sia la energia emessa ad ogni secondo dal Sole.

Ipotizzando che tale energia venga da processi di combustione si può calcolare che il Sole avrebbe già dovuto spegnersi ed è ciò che hanno fatto i fisici del primo 800. C'era qualcosa che non quadrava e oggi lo sappiamo: l'origine della energia delle stelle non è chimica e il calcolo su quanto tempo avrebbe impiegato il Sole a bruciare come un cerino era sbagliato.

Per determinare la *massa di un pianeta* si procede analogamente a quanto fatto per il Sole considerando la accelerazione di uno dei suoi satelliti.

13.4.2 E SE VOLESSIMO PESARE LA LUNA?

La *Luna* non ha satelliti e dunque non possiamo utilizzare il metodo precedente. Rimangono solo due possibilità, la prima è stata utilizzata per determinare anche la massa dei pianeti del sistema solare che non possiedono satelliti (Mercurio, Venere e Plutone) oltre che della Luna, la seconda si basa su una misura diretta, ma ha l'inconveniente di richiedere un viaggio sulla Luna.

- In virtù della III legge della dinamica non è solo la Luna ad orbitare intorno alla Terra, ma è il sistema Terra-Luna ad orbitare intorno al *centro di massa comune*. La Terra è influenzata dalla Luna così come i pianeti si influenzano reciprocamente. Dagli *effetti perturbativi* di queste interazioni è possibile (ma non elementare) risalire alla massa cercata.
- Il secondo metodo è analogo a quello usato per misurare la massa della Terra: basta misurare la accelerazione di gravità al suolo; è quan-



una pesata della Terra: ma senza bilance!



Apollo 11 lascia la Luna; sullo sfondo la Terra

to hanno fatto gli astronauti americani quando sono andati sulla Luna nel 1969.

13.4.3 PERCHÉ NON CI POSSIAMO FIDARE DELLE INFORMAZIONI PROVENIENTI DALLA CROSTA TERRESTRE?

Dalla conoscenza del raggio e della massa è possibile determinare la densità media della Terra:

l'interno della Terra deve essere più denso della crosta per spiegare il fatto che la densità media è molto maggiore di quella superficiale

$$\langle \rho \rangle = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3 \times 5.97 \times 10^{24}}{4\pi \times 6.37^3 \times 10^{18}} = 5.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad (\text{I.13.11})$$

Poiché le rocce che compongono la crosta terrestre hanno una *densità* pari alla metà di questo valore, si deve concludere che non ci possiamo fidare della crosta terrestre: *la Terra deve avere un nucleo centrale di densità almeno doppia di quella media* e ciò ci fa concludere che tale nucleo debba essere composto da metalli di tipo ferroso.

La *Terra* si sarebbe formata da una nube di meteoriti. I meteoriti si sarebbero riscaldati per effetto degli urti reciproci e del decadimento di materiale radioattivo e, come risultato la Terra avrebbe assunto una consistenza plastica. Le sostanze più dense si sarebbero concentrate al centro costituendo il nucleo, mentre le meno dense sarebbero salite in superficie formando le rocce e la crosta chiamata *litosfera*.

Tuttavia, nella litosfera si trovano anche grandi giacimenti di sostanze più dense (minerali metallici). In vicinanza di tali depositi l'accelerazione di gravità risulta maggiore e, di conseguenza, accurate misure di gravità possono aiutare i geologi nella individuazione di tali giacimenti. Tale metodologia, nota come *indagine gravimetrica* è ampiamente utilizzata nella pratica di ricerca.

13.5 Applicazioni astronomiche

13.5.1 LA VELOCITÀ DEI CORPI IN ORBITA

Poiché la forza di gravitazione ha natura centripeta un sistema formato da due corpi di masse M e m è soggetto a due forze di eguale intensità che determinano a loro volta due accelerazioni A e a di intensità diverse e inversamente proporzionali alle masse su cui agiscono.

Pertanto se $M \gg m$ ne consegue che $A \ll a$ e si può ragionare come se il primo corpo fosse immobile e il secondo gli girasse intorno. È questo il caso dei satelliti naturali e artificiali di un pianeta.

Consideriamo dunque un oggetto di massa m posto a distanza r dal centro della Terra, soggetto alla azione del campo gravitazionale terrestre e supponiamo che questo corpo sia dotato di una velocità v perpendicolare alla congiungente con il centro della Terra. In queste condizioni il corpo si muoverà di moto circolare uniforme se la accelerazione centripeta corrispondente $a_n = \frac{v^2}{r}$ potrà essere fornita dalla forza che agisce su di esso (forza di gravitazione). Scriveremo dunque:

$$F = G \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Se si semplifica per m e per r si ottiene la relazione tra la *velocità orbitale* e la distanza dal centro:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{gR} \quad (I.13.12)$$

La velocità orbitale diminuisce dunque al crescere della distanza dal centro (è inversamente proporzionale alla radice della distanza) e ad ogni distanza dal centro corrisponde univocamente una velocità orbitale e viceversa.

Esercizio: Dato un ipotetico satellite in orbita al livello del suolo determinare la sua velocità orbitale (detta prima velocità cosmica) e trovare inoltre la relazione che fornisce il periodo di rotazione al variare della distanza dal centro. Stabilire quanto vale il periodo di rotazione corrispondente alla prima velocità cosmica.



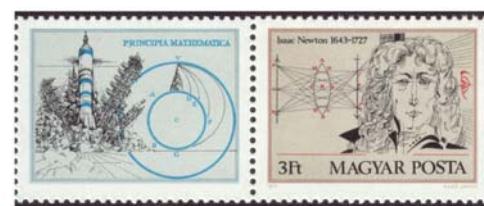
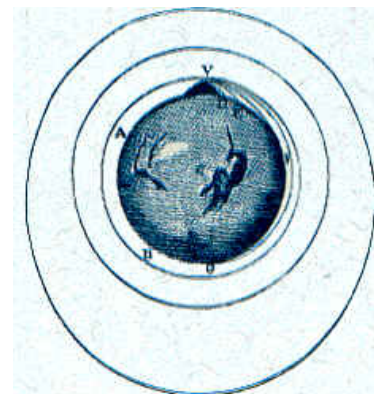
Sulla Terra il satellite di ipotetica ⁽¹⁰⁾ velocità massima è quello messo in orbita a livello del suolo e la sua velocità sarebbe:

$$v_1 = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}{6.378 \times 10^6}} = 7.91 \times 10^3 \text{ m/s} \quad (I.13.13)$$

Lo studente confronti questo valore con la velocità periferica dovuta alla rotazione terrestre e con quella dovuta alla rivoluzione della Terra intorno al Sole.

Per determinare il periodo di rotazione, se non è nota la velocità, basta ricordare la III legge di Kepler e applicarla alla Terra invece che al Sole

¹⁰ Si è scritto ipotetica sia per le asperità del terreno (edifici montagne, ...) che rendono impossibile un lancio a bassa quota, sia perché la presenza della atmosfera renderebbe impossibile il mantenimento in orbita del satellite a causa della resistenza al moto dovuta alla presenza dell'aria. In effetti i satelliti più vicini orbitano ad almeno 200 km di altezza.



Newton per primo ipotizza i satelliti artificiali come nuovo tipo di caduta libera; in alto il suo disegno originario che descrive il passaggio dalle orbite paraboliche a quelle ellittiche

il legame tra distanza e velocità orbitale



la prima velocità cosmica



senza bisogno di ripartire dalla velocità orbitale; dalla (9.12) $\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} =$ costante e pertanto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

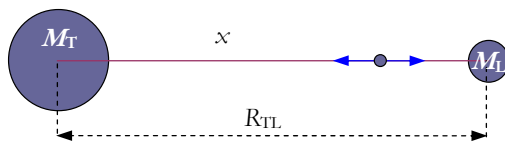
Nel caso di un satellite in orbita a livello del suolo si ottiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(6.378 \times 10^6)^3}{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}} \approx 5'067 \text{ s} \approx 84'$$



13.5.2 ESEMPIO: IN VIAGGIO VERSO LA LUNA

Esercizio: Supponiamo di partire dalla Terra per un ipotetico viaggio verso la Luna e chiediamoci in quale punto del nostro viaggio la attrazione gravitazionale terrestre è esattamente equilibrata da quella Lunare



Indichiamo con x la distanza tra il centro della Terra e il punto di equilibrio delle due attrazioni.

Se eguagliamo le due forze gravitazionali esercitate dalla Terra e dalla Luna avremo che:

$$G \frac{M_T m}{x^2} = G \frac{M_L m}{(R_{TL} - x)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{M_T}{M_L} = \frac{x^2}{(R_{TL} - x)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{M_L}{M_T} = \frac{(R_{TL} - x)^2}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{M_L}{M_T} = \left(\frac{R_{TL}}{x} - 1 \right)^2$$

Indichiamo, per comodità di espressione, con α il rapporto tra le masse e con β quello tra la distanza Terra Luna e la distanza ignota; l'espressione precedente si scriverà allora:

$$\alpha = (\beta - 1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{\alpha} = \beta - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 1 \pm \sqrt{\alpha}$$

Delle due radici ci interessa solo $1 + \sqrt{\alpha}$ perché l'altra soluzione corrisponde a $\beta < 1$ cioè a $x > R_{TL}$.

Pertanto si ha (tenendo conto che la massa della Terra è 81.3 volte quella della Luna)

$$\beta = 1 + \sqrt{\alpha} = 1 + \sqrt{\frac{1}{81.3}} \approx 1.11 \quad x = \frac{1}{\beta} R_{TL} = 0.90 R_{TL}$$

Se sostituiamo il valore di $R_{TL} = 384.4 \times 10^3 \text{ km}$ otteniamo che:

$$x \approx 3.46 \times 10^5 \text{ km}$$



13.5.3 UN TWIST DEGLI ANNI 60: IL PESO SULLA LUNA È LA METÀ DELLA METÀ.

Negli anni 60 era in voga una canzone di *Modugno* ballata a ritmo di twist ed intitolata *Selene* e il ritornello diceva tra l'altro *con un salto arrivo là... perché il peso sulla Luna è la metà della metà*.

Esercizio: La Luna ha un raggio $R_L = 1738 \text{ km}$ mentre il rapporto tra massa terrestre e Lunare vale 81.3. Quanto valgono la accelerazione di gravità e la densità della Luna?



Domenico Modugno: mister volare ha cantato anche *il peso sulla Luna è la metà della metà*





Il valore della accelerazione di gravità si calcola attraverso la legge di gravitazione universale e vale:

$$g_L = G \frac{M_L}{R_L^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{5.98 \times 10^{24}}{81.3 \times 1.738^2 \times 10^{12}} = 1.62 \text{ m/s}^2$$

La accelerazione di gravità sulla Luna è circa 1/6 di quella terrestre (non 1/4 come dice la canzone di Modugno piegata ad esigenze di rima) e ciò significa un corrispondente calo di peso.

Ne hanno fatto esperienza per primi gli astronauti americani all'Lunati nel 1969. Dalla Luna è relativamente facile sfuggire ma in compenso ci sono notevoli problemi nel camminare perché basta una piccola pressione sul terreno per saltare e, in effetti, più che camminare si sobbalza.

La presenza di una accelerazione di gravità bassa ha fatto sì che la Luna non abbia una atmosfera, perché non è stata in grado di trattenere i gas formati durante il raffreddamento.

Calcoliamo infine la densità del nostro satellite:

$$\rho_L = \frac{m_L}{V_L} = \frac{5.98 \times 10^{24} \times 3}{81.3 \times 4 \times \pi \times 1.738^3 \times 10^{18}} = 3.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Poiché la densità media della Terra è di $5.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ da questo dato possiamo concludere che la Luna non possiede, o possiede in misura molto minore della Terra, un nucleo centrale metallico. Questo dato consente inoltre di ipotizzare che la Luna sia nata dalla Terra staccandone una parte relativamente esterna o comunque in un momento in cui il nucleo era già largamente formato.



13.5.4 I SATELLITI PER TELECOMUNICAZIONI

Esercizio: I satelliti per telecomunicazioni sono satelliti artificiali messi in orbita ad altissima quota in modo che il loro periodo di rotazione sia esattamente uguale a quello della Terra (satelliti sincroni). In questo modo la loro posizione rispetto alla Terra non cambia mai ed è possibile utilizzarli come stazioni di riflessione delle onde radio che possono così raggiungere zone altrimenti irraggiungibili. Determinare a quale quota devono essere messi in orbita i satelliti sincroni.



Dalla III legge di Kepler $\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$ e pertanto:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4 \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(24 \times 3'600)^2 \cdot 6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}{4 \pi^2}} \approx 4.225 \times 10^7 \text{ m}$$

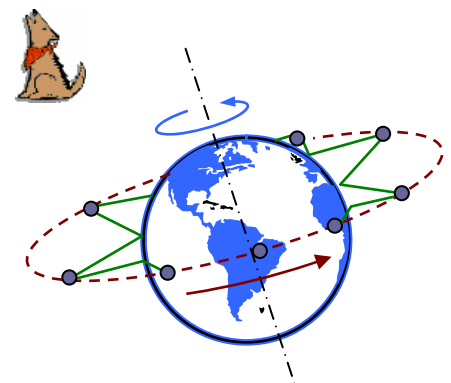
Poiché il raggio terrestre è di 6.37×10^6 i satelliti vengono posti in orbita ad una quota di $4.225 \times 10^7 - 6.37 \times 10^6 \approx 3.59 \times 10^7 \text{ m}$ cioè circa 36'000 km.



Cara ti parlo dalla Luna
vieni vieni
Selene ene ah
com'è bello stare qua
Selene ene ah
con un salto arrivo là
Selene ene ah
è un mistero e non si sa
ma il peso sulla Luna è la metà della metà
Selene ene ah
com'è facile ballar
Selene ene ah
con un salto arrivo là
Selene ene ah
è un mistero e non si sa
ma il peso sulla Luna è la metà della metà



la Luna è meno densa della Terra: la minor gravità ha determinato la assenza di atmosfera



i satelliti sincroni ruotano con la Terra e vengono messi in orbita a circa 36'000 km di altezza

13.6 Effetti della rotazione terrestre sulla accelerazione di caduta libera

13.6.1 LA ROTAZIONE TERRESTRE INFLUENZA IL PESO IN DUE MODI

Attraverso lo studio della gravitazione siamo riusciti a dare una spiegazione della accelerazione di gravità come rapporto tra la forza gravitazionale e la massa del corpo secondo la relazione:

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

ma nel farlo non abbiamo preso in considerazione l'effetto della rotazione terrestre sulla accelerazione di caduta dei gravi.

Se la Terra non ruotasse intorno al proprio asse la *forza peso* coinciderebbe esattamente con la forza gravitazionale, ma le cose non stanno così perché una parte della forza di gravitazione viene utilizzata per far ruotare il corpo intorno all'asse di rotazione terrestre e questa forza, essendo dipendente dalla distanza dall'asse di rotazione, viene a dipendere dalla latitudine.

Supponiamo che un corpo di massa m si trovi in un punto A di latitudine φ . Tale corpo è soggetto alla forza di gravitazione universale F e tale forza potrà essere scomposta in due componenti: la forza centripeta F_n perpendicolare all'asse di rotazione (responsabile della rotazione del corpo) ed il peso P (responsabile della caduta dei gravi). Poiché la forza di gravitazione è diretta verso il centro della Terra, il peso non lo è e risulta leggermente spostato rispetto alla verticale in modo che:

$$F = P + F_n$$

Dunque il peso risulta determinato dalla differenza vettoriale di due forze note:

$$P = F - F_n$$

Dalla figura possiamo vedere che in tutti i punti della Terra con l'eccezione dei poli, la forza peso risulta sempre minore della forza di attrazione gravitazionale. Inoltre, tranne che ai poli e all'equatore la forza peso non risulta diretta verso il centro della Terra ma un po' spostata.

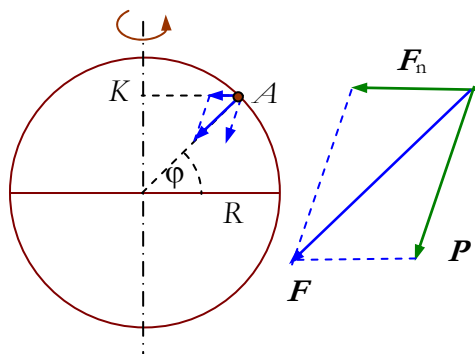
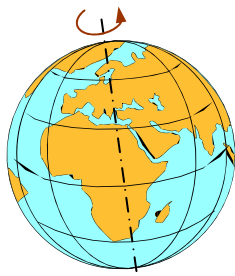
Poiché il corpo partecipa alla rotazione diurna esso si muove di moto circolare uniforme su di una circonferenza di raggio $AK = r = R \cos \varphi$, dove R rappresenta il raggio terrestre e la sua accelerazione centripeta vale:

$$a_n = \omega^2 r = \frac{4\pi^2 R \cos \varphi}{T^2} \quad (I.13.14)$$

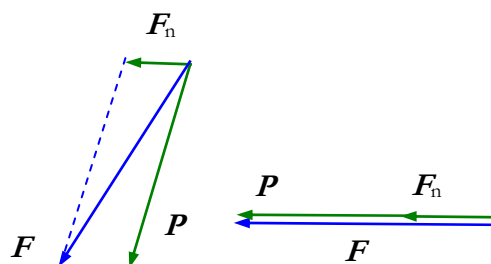
dove T rappresenta il periodo di rotazione terrestre.

Inoltre per effetto della rotazione la forma della Terra non è esattamente sferica, ma un po' schiacciata ai poli e allargata all'equatore.

Il suo *raggio polare* vale 6356.9 km e quello equatoriale vale 6378.4 km e questo fatto determina una ulteriore asimmetria nella forza di gravità che risulta leggermente superiore ai poli che sono più vicini al centro della Terra.



Il peso come differenza tra la forza gravitazionale e la forza di rotazione



Il peso cambia con la latitudine in direzione ed intensità; a sinistra situazione vicino ai poli e a destra all'equatore; la terra si è schiacciata



13.6.2 LE RAGIONI DELLA VARIABILITÀ DA PUNTO A PUNTO DELLA ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ

Dunque la *accelerazione di gravità* g , pari al peso diviso la massa risulta variabile con la latitudine per due ragioni: per effetto dello schiacciamento della Terra e per effetto della rotazione terrestre.

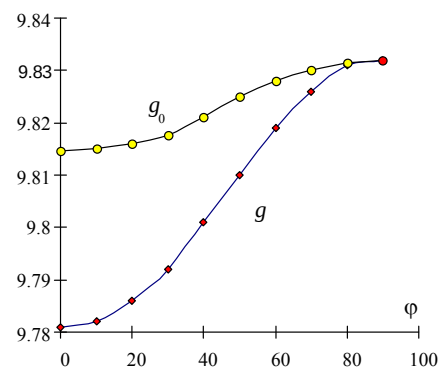
Il primo effetto viene descritto dal diagramma $g_0 = G \frac{M}{R^2} = f(\varphi)$ nel quale al variare della latitudine cambia il valore di R e cambia conseguentemente g_0 da un valore minimo appena superiore a 9.814 a un valore massimo di 9.832 m/s².

A questo effetto (di natura statica), si sovrappone l'effetto dovuto alla rotazione terrestre per cui:

$$g = g_0 - a_n \quad (I.13.15)$$

e in base ad esso la accelerazione di gravità risulta deflessa rispetto alla verticale e variabile da un valore minimo di 9.781 ad uno massimo di 9.832 m/s².

Il valore comunemente adottato di 9.81 m/s² corrisponde ad una latitudine di circa 50°



l'andamento di g con la latitudine determinato dallo schiacciamento e dalla rotazione

13.7 Quesiti di fine capitolo

1. Ricerca di *falso*: a) I lavori di Descartes e quelli di Galilei sono *coevi*; b) La teoria eliocentrica di Copernico si avvale per la sua formulazione delle *ricerche di Tycho Brahe*; c) Le principali *ricerche di Kepler sono coeve a quelle di Galilei*; d) Le leggi formulate da Kepler sono *leggi astronomiche di tipo osservativo*, cioè non si deducono da teorie ma si basano sulla organizzazione e lettura di dati astronomici.¹¹
2. Ricerca di *vero*: a) La attività di Kepler si limita alla *rielaborazione matematica di dati osservativi senza alcuna ipotesi di natura cosmologica*; b) Tra le ipotesi di Copernico e le teorie newtoniane della gravitazione passano oltre due secoli; c) I lavori di *Newton sono una diretta conseguenza* dei risultati di Kepler; d) La legge di gravitazione universale costituisce una delle conferme di *validità della III legge della dinamica*.¹²
3. Ricerca di *vero*: a) Le ipotesi di *Kepler sul carattere ellittico* delle orbite dei pianeti sono *conseguenza delle osservazioni galileiane* sulle fasi di Venere; b) Tra i lavori di Kepler e *Galilei e quelli di Newton* passa circa 1 secolo; c) Nella teoria newtoniana la legge con cui il Sole attira la Terra *ha natura diversa* da quella con cui la Terra attira la Luna perché *il Sole costituisce comunque il centro dell'intero sistema*; d) *Le tre leggi di Kepler precedono di oltre 10 anni* la pubblicazione del Dialogo sui Massimi Sistemi di Galilei.¹³
4. Ricerca di *vero*: a) Newton si è posto il problema di *costruire una teoria in accordo con le leggi di Kepler*; b) Newton dimostra la *legge delle aree nel contesto della legge di gravitazione*; c) Newton si limita ad esaminare un modello di sistema solare in cui *si trascurano le interazioni tra i pianeti* e si esaminano solo quelle tra pianeti e Sole; d) *La III legge di Kepler spinge Newton sulla strada della ricerca di una forza unitaria* in grado di spiegare le regolarità nel moto dei pianeti.¹⁴
5. Ricerca di *vero*: a) La massa del Sole è di oltre *due ordini di grandezza superiore alla massa delle restanti parti* del sistema solare; b) *I pianeti interni* del sistema solare hanno *orbite praticamente circolari*; c) Il *periodo di rivoluzione lunare* espresso con due cifre significative ha una durata di 28 giorni; d) La distanza *Terra Luna corrisponde a 1000 volte* il raggio terrestre.¹⁵

¹¹ Ricerca di falso: a) Vero. b) Falso: Tycho Brahe è nato 3 anni dopo la morte di Copernico c) Vero d) Vero

¹² a) Falso: Kepler ha tentato di realizzare una propria cosmologia di tipo *numerologico*. b) Falso: ci sono di mezzo circa 150 anni. c) Falso: è vero invece che Newton spiega, anche se in forma più generale, le leggi di Kepler. d) Vero

¹³ a) Falso: fanno riferimento ad anomalie riscontrate dallo stesso Kepler sull'orbita di Marte b) Falso: circa 1/2 secolo c) Falso: la legge è la stessa; è vero invece che quando si studia l'intero sistema non sempre è lecito trascurare gli effetti gravitazionali secondari che riguardano singoli costituenti del sistema. d) Vero: sono del 1609 e 1619 mentre l'opera di Galilei è del 1632.

¹⁴ a) Falso: usa in parte le conoscenze kepleriane; b) Falso: la dimostra in un contesto ancora più generale; quello degli effetti delle forze centrali; c) Falso, si occupa, dato il carattere generale della legge anche delle perturbazioni indotte dai pianeti d) Vero

¹⁵ a) Vero il rapporto è circa 700. b) Falso: Mercurio è uno dei pianeti in cui la ellitticità dell'orbita è significativa c) Falso: 27 d) Falso è pari a circa 60

6. Ricerca di *falso*: a) La *legge delle aree* di Kepler dipende dal fatto che la *forza di gravitazione* ha *carattere centrale* e non dalla proporzionalità inversa dal quadrato della distanza; b) Assumendo la *validità della III legge di Kepler* si deduce che $F \propto 1 / r^2$; c) La *accelerazione centripeta della Luna* ha un *ordine di grandezza* di 10^{-3} m/s^2 ; d) Per *verificare l'ipotesi* che la *forza di gravitazione* dipenda dall'inverso del quadrato della distanza Newton *confronta la accelerazione di gravità sulla Terra con la accelerazione di gravità sulla Luna*.¹⁶
7. Delineare il processo che porta Newton ad ipotizzare che la forza gravitazionale con cui la Terra attira la Luna è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza tra le due masse interagenti.
8. Spiegare sulla base di quale ragionamento Newton decide di effettuare il confronto tra i valori della accelerazione di gravità e della accelerazione centripeta della Luna rispetto alla Terra.
9. In 20 righe delineare le tappe delle ricerche astronomico-cosmologiche prima di Newton.
10. Indicare quale sia stato il contributo principale di Tycho Brahe allo sviluppo della moderna astronomia.¹⁷
11. In un famoso brano del Saggiatore Galilei afferma che: *la filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intender se prima non si impara ad intender la lingua, a conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto*. Alla luce di quanto si è compreso dei contributi di Galilei alla scienza moderna si commenti in 30 righe questo brano.¹⁸
12. Si considerino le figure di Kepler e di Galilei; le determinazioni che seguono si attribuiscono all'uno, all'altro o ad entrambi. Associarle alla figura cui corrispondono: astronomo, fisico, filosofo, cosmologo, pitagorico, matematico, sperimentatore, calcolatore, divulgatore, costruttore di strumenti. In caso di dubbio motivare il proprio dubbio, chiedere al docente e proseguire la ricerca.¹⁹
13. La Luna piena e il Sole presentano visti dalla Terra le stesse dimensioni apparenti (vengono visti dall'occhio umano sotto uno stesso angolo). Quale conclusione si può trarre circa le distanze e le dimensioni di questi due corpi celesti?²⁰
14. I dati sul periodo della rivoluzione lunare riportati nel testo (27.3 giorni) sono relativi alle stelle fisse e definiscono il *mese siderale*. Per

¹⁶ a) Vero b) Vero c) Vero: vale $2.72 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ d) Falso: confronta la accelerazione di gravità sulla Terra con la accelerazione centripeta della Luna.

¹⁷ Misurazioni accurate pur in assenza di telescopi, raccolta di grandi masse di dati sulle posizioni dei pianeti rispetto alle stelle

¹⁸ Idea platonica della cosmologia galileiana, presente anche in Kepler; importanza della matematica come strumento per descrivere e capire il mondo.

¹⁹ astronomo (G, K), fisico (G), filosofo (G, K), cosmologo (K), pitagorico (K), matematico (K, G), sperimentatore (G), calcolatore (K), divulgatore (G), costruttore di strumenti (G).

²⁰ Il rapporto tra il diametro e la distanza rispetto alla Terra è lo stesso.

un osservatore terrestre che vede l'alternarsi delle fasi lunari guardando le posizioni della luna rispetto al Sole è molto più importante il *mese sinodico* che dura 29.53 giorni. Spiegare come mai il mese sinodico è più lungo del mese siderale.²¹

15. Ricerca di *vero*: *Legge di gravitazione universale*. a) La massa di cui si parla nella legge di gravitazione universale è la *massa inerziale*; b) Ammessa per valida la relazione per l'accelerazione centripeta di un pianeta intorno al Sole $a \propto \frac{1}{r^2}$ si può affermare che la costante di proporzionalità dipende dalla massa del pianeta; c) La legge di gravitazione universale si riferisce *esclusivamente* al caso di *masse puntiformi* e quando la si applica alla attrazione tra corpi di *dimensioni finite* porta in generale a risultati diversi; d) La *costante di gravitazione universale* è stata determinata da Newton attraverso l'analisi dei dati astronomici elaborati da Kepler.²²
16. Ricerca di *vero*; *Legge di gravitazione universale*. a) Le *forze di interazione* tra due masse puntiformi m_1 e m_2 sono diverse perché ciascuna di esse è *proporzionale alla massa del corpo su cui agisce*; b) Nella *misurazione della costante G* si utilizzano masse puntiformi; c) La *costante di gravitazione universale*, essendo universale, *non dipende dal sistema di unità di misura scelto*; d) Attraverso la legge di gravitazione universale si può *spiegare il significato della costante della III legge di Kepler* e affermare che tale costante è *proporzionale alla massa del Sole*.²³
17. Ricerca di *vero*: *legge di gravitazione universale*. a) Se la costante di gravitazione universale *diventasse improvvisamente più grande* non ci sarebbe modo di *rendersene conto* perché l'effetto riguarderebbe contemporaneamente tutti i corpi dell'universo; b) L'apparato sperimentale per la determinazione di *G* quando viene usato con masse dell'ordine del kg a distanze di 10^{-1} m richiede di stimare forze dell'ordine di 10^{-10} N; c) La *costante di gravitazione universale con 1 cifra significativa* vale $G = 10^{-10} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$; d) Nell'esperienza con la bilancia di torsione la forza di interazione viene determinata *attraverso un dinamometro a molla molto sensibile*.²⁴

²¹ Mentre la Luna ruota intorno alla Terra, la Terra ruota insieme alla Luna intorno al Sole e pertanto deve continuare il suo moto di altri due giorni e mezzo circa per recuperare la stessa posizione apparente rispetto al Sole (deve fare più di 360° per fare un giro perché il riferimento si è spostato in avanti). Si consiglia di aiutarsi con un disegno. Nel dubbio consultare un testo di geografia astronomica.

²² Falso: si tratta della massa gravitazionale, anche se la cosa non produce differenze osservabili data la identità dei due concetti. b) Falso: dipende dalla massa del Sole. c) Vero: si ritorna ad una formulazione analoga a quella delle masse puntiformi esclusivamente per i corpi di densità costante e di simmetria sferica. d) Falso: la costante di gravitazione universale può essere determinata esclusivamente attraverso una misurazione diretta della forza che si esercita tra due masse.

²³ a) Falso: la forza è proporzionale ad entrambe le masse b) Falso: le dimensioni delle sfere sono assolutamente comparabili alle distanze in gioco. c) Falso: non dipende dalle masse dei corpi che interagiscono, dalla loro distanza e dalla loro collocazione nello spazio (uniformità ed isotropia dello spazio) ma, come tutte le costanti dimensionali ha un valore dipendente dal sistema di unità di misura scelto. d) Vero.

²⁴ a) Falso: cambierebbero i valori di tutte le accelerazioni di origine gravitazionale. b) Falso: la forza ha un ordine di grandezza di 10^{-8} N c) Vero: $6.67 \cdot 10^{-11} \approx 10^{-10}$ d) Falso: la determinazione della forza avviene attraverso la misura del momento resistente alla rotazione di un filo sottile di quarzo.

18. Ricerca di *falso*: *ordini di grandezza*. a) La costante di gravitazione universale con 3 cifre significative vale $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$; b) La distanza Terra Luna è circa 60 volte il raggio terrestre; c) La distanza Terra Sole vale $1.5 \times 10^8 \text{ m}$ e corrisponde alla unità astronomica; d) Tra due masse puntiformi di 1.2 kg poste alla distanza di 10 cm si esercita una forza $\approx 10^{-8} \text{ N}$.²⁵
19. Ricerca di *vero*. Costante G a) La costante della III legge di Kepler dipende solo dalla massa del Sole e dalla costante di gravitazione universale; b) Se un pianeta venisse spostato ad una distanza doppia di quella attuale, il suo periodo dovrebbe crescere di $\sqrt{2}$ volte; c) Nella misura di G da parte di Cavendish il suo valore fu determinato con una precisione sino di due cifre; d) Il valore di G è oggi noto con 10 cifre significative.²⁶
20. Ricerca di *vero*: a) Poiché la legge di gravitazione è universale la forza con cui una massa è attirata dal Sole è la stessa con cui la stessa massa è attirata dalla Terra; b) La determinazione di G da parte di Cavendish era precisa solo sulla prima cifra significativa; c) Dalla conoscenza di G si può risalire alla massa di qualsiasi pianeta del sistema solare; d) La legge di gravitazione si può scrivere in forma vettoriale come: $\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$ ²⁷
21. Delineare il processo che porta Newton a scrivere la relazione $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ a partire dalla assunzione che la accelerazione centripeta con cui la Luna orbita intorno alla Terra $a \propto \frac{1}{r^2}$
22. Enunciare in forma completa la legge di gravitazione universale senza trascurare alcuno dei suoi aspetti.²⁸
23. Calcolare l'ordine di grandezza della forza misurata da Cavendish nella sua apparecchiatura di torsione.²⁹
24. Ricerca di *vero*. La teoria newtoniana della gravitazione. a) L'idea newtoniana della gravitazione si basa sulle idee cartesiane della azione per contatto; b) Il motto newtoniano *hypotheses non fingo* significa che nella scienza non si devono avanzare ipotesi ma basarsi esclusivamente sui fat-

²⁵ a) Vero. b) Vero. c) Falso: è sbagliata di 3 ordini di grandezza $1 \text{ UA} \approx 1.49 \cdot 10^{11} \text{ m}$ d) Vero.

²⁶ a) Vero. b) Falso $T \propto \sqrt{r^3}$ e pertanto il periodo diventerebbe pari a $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. c) Falso. La determinazione era precisa alla III cifra. d) Falso: si tratta di una precisione impensabile per leggi di questo tipo. G è noto con 6 cifre significative.

²⁷ a) Falso: del tutto errata la forza dipende anche dalla massa del centro di forza; b) Falso, l'errore incideva sulla terza cifra c) Falso: bisogna conoscere la accelerazione di un corpo che cade su di esso e ciò richiede l'esistenza di almeno un satellite d) Vero: il

rapporto $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$ è un vettore unitario che consente di indicare sia la direzione sia il verso della forza

²⁸ Carattere vettoriale, validità della III legge della dinamica, carattere universale, valore di G , proporzionalità con la massa, dipendenza dall'inverso del quadrato della distanza.

²⁹ Procurarsi il valore della densità del piombo e ipotizzare una distanza tra i centri pari alla somma dei raggi più 1 cm.

- ti; c) Lo *spazio fisico* ha proprietà che sono influenzate dalla *presenza*, nella zona considerata, di *altre masse*. d) Newton nello Scolio ai Principia *avanza una sua spiegazione* in termini meccanici del fenomeno della gravitazione.³⁰
25. Ricerca di *vero*. Il *campo gravitazionale* (rapporto tra forza e massa su cui agisce): a) *dipende dalla massa del corpo di prova* su cui si esercita la forza che lo rivela. b) Il *campo gravitazionale terrestre è la accelerazione di gravità*; c) Il *campo è uno scalare* d) Il concetto di campo è stato *introdotto in fisica come effetto della scoperta della legge di gravitazione*.³¹
26. Ricerca di *falso*. Il *campo gravitazionale* (rapporto tra forza e massa su cui agisce): a) descrive gli effetti gravitazionali come *proprietà dello spazio* nel quale il corpo di prova si viene a trovare. b) consente di *determinare la forza gravitazionale* che agisce su quel corpo. c) contiene in sé l'*idea di propagazione a velocità finita* delle interazioni. d) permette di determinare la *accelerazione di gravità* alla superficie di un pianeta di massa m e raggio r che vale $\frac{Gm}{r}$ ³²
27. Ricerca di *vero*: *accelerazione di gravità* a) Quando *raddoppia la quota* rispetto alla superficie di un pianeta, la corrispondente *accelerazione* di gravità si riduce a *un quarto*; b) Il *pianeta* che, per dimensioni, gravità, massa *meglio si avvicina alla Terra è Marte*; c) Sulla Terra si ottiene un *dimezzamento della accelerazione* di gravità portandosi ad una altezza di circa 2'640 km. d) Se sulla Terra ci si porta ad una *altezza di 64 km* la accelerazione di gravità si porta a circa l'80% del valore originario.³³

³⁰ a) Falso: l'atteggiamento di Newton è polemico ed alternativo a quello dei cartesiani. Anzi il titolo stesso dei principia si richiama ai *principia* di Cartesio ma il riferimento alla matematica è polemico. b) Falso: significa che non si devono avanzare *ipotesi ad hoc* cioè ipotesi ingiustificate che non abbiano altro scopo che non sia quello di spiegare una precedente ipotesi; significa anche che il primo obiettivo della fisica è quello di cercare leggi generali la cui giustificazione potrebbe anche essere che una certa legge è vera perché il mondo in cui viviamo è fatto così. c) Vero; la presenza di masse determina la comparsa di forze che possono anche essere pensate come violazioni di isotropia ed omogeneità d) Falso: chiarisce anzi che non ne ha trovate di plausibili.

³¹ a) Falso: il campo gravitazionale, ed in genere qualsiasi campo della fisica classica, è definito prendendo atto della proporzionalità tra la forza e una particolare grandezza fisica tipica del corpo su cui si esercita (in questo caso la massa) e definendolo come rapporto tra la forza e quella grandezza. Per questa ragione il campo gravitazionale non dipende dalla massa del corpo su cui agisce la forza che lo rivela. b) Vero; in virtù della identità di massa inerziale e gravitazionale c) Falso: è un vettore d) Falso: la sua introduzione in fisica si ha nella II metà dell'ottocento nell'ambito degli studi finali sull'elettromagnetismo.

³² a) Vero b) Vero, basta moltiplicarlo per la massa su cui agisce; c) Vero d) Falso, vale $\frac{Gm}{r^2}$

³³ a) Falso: quella che deve raddoppiare non è la quota ma la distanza dal centro del pianeta b) Falso: è Venere che ha quasi la stessa massa, la stessa gravità e le stesse dimensioni. Differenza rilevante è il periodo di rotazione su se stesso. Un giorno venereo dura 243 giorni terrestri. c) Vero: se $g'/g = 1/2$ allora $(r'/r)^2 = 2$ e quindi $r' = \sqrt{2}r \approx 9'010$ km pertanto $h = r' - r \approx 2'639$ km d) Falso: la variazione su r è circa dell'1% e pertanto il rapporto vale 1.01 il cui quadrato è circa 1.02 e ciò comporta un valore finale pari al suo inverso che è circa 0.98. Si è volutamente data una risposta basata sulla proporzionalità perché lo studente si abitui a queste stime da eseguire a mente.

28. Si prenda spunto dal brano di Newton riportato nel testo e si discuta la differenza di significato del termine *ipotesi* nel senso usato da Newton e nel senso attuale.
29. Riassumere in 20 righe il significato del concetto di campo per la fisica attuale.
30. Riassumere in 20 righe la differenza tra azione a distanza ed azione per contatto.
31. Esercitarsi, utilizzando i dati sul sistema solare, a calcolare i valori di g per i diversi pianeti.
32. Ricerca di *vero: fenomeni* che influenzano la accelerazione di gravità; In punti della superficie terrestre posti *su uno stesso parallelo* a) la accelerazione di gravità presenta sempre *lo stesso valore* perché ci si trova alla *stessa distanza* dal centro della Terra. b) la accelerazione di gravità presenta sempre *lo stesso valore* perché le *variazioni dovute alla rotazione terrestre* sono identiche c) la accelerazione di gravità presenta sempre lo stesso valore perché ci si trova alla *stessa distanza dal centro della Terra e gli effetti dovuti alla rotazione terrestre sono identici* d) In punti della superficie terrestre posti su uno stesso parallelo la accelerazione di gravità subisce *scostamenti misurabili* per la presenza di giacimenti di materiali più densi in alcuni punti della litosfera. ³⁴
33. Ricerca di *falso: massa dei corpi interni* al sistema solare. a) La determinazione della costante G ha consentito di *pesare* la Terra; b) La determinazione della costante G ha consentito di *pesare* il Sole; c) La massa della Luna si determina con le stesse tecniche usate per determinare la massa della Terra; d) La densità della Terra si determina attraverso la conoscenza della costante G . ³⁵
34. Ricerca di *vero: densità dei corpi celesti* a) La densità della Terra vale $2\div 3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. b) La massa terrestre vale circa $6 \times 10^{23} \text{ kg}$; c) L'ordine di grandezza della massa del Sole è 10^{31} kg ; d) La massa di Giove si può determinare con la stessa tecnica usata per determinare la massa del Sole. ³⁶
35. Si spieghi come dalla conoscenza di G si possa dedurre il valore della massa terrestre. ³⁷
36. Si spieghi come, dalla conoscenza di G si possa dedurre il valore della massa del Sole. ³⁸

³⁴ a) Falso, cambia per il punto d anche se la spiegazione data è parzialmente vera. b) Falso, cambia per il punto d anche se la spiegazione data è parzialmente vera. c) Falso, cambia per il punto d anche se la spiegazione data è parzialmente vera. d) Vero: e le indagini gravimetriche sono normalmente utilizzate per la indagine geologica.

³⁵ a) Vero: basta scrivere la accelerazione di gravità in funzione delle grandezze che la determinano. b) Vero: basta scrivere la accelerazione centripeta di un qualsiasi pianeta (ad esempio la Terra) in funzione delle grandezze che la determinano) Falso: si possono usare o metodi perturbativi o la sola misurazione diretta (esplorazione della Luna). d) Vero: perché attraverso G si determina la massa e il volume è noto.

³⁶ a) Falso: è compresa tra 5 e 6 b) Falso: è sbagliata di 1 ordine di grandezza c) Falso: è 10^{30} kg . d) Vero: Giove ha un sistema di satelliti che furono osservati e studiati da Galilei (*Sidereus Nuncius*).

³⁷ Basta eguagliare il valore noto della accelerazione di gravità alla corrispondente relazione prevista dalla legge di gravitazione

37. Si spieghi perché la massa lunare non può essere determinata tramite la conoscenza di G .³⁹
38. Determinare il valore di h per il quale il peso di un corpo si riduce a metà sulla Terra.⁴⁰
39. Discutere la dipendenza del peso dalla quota.⁴¹
40. Ricerca di *vero: velocità orbitali* a) La *velocità orbitale* di un satellite posto a distanza r dal centro di un pianeta di massa M è proporzionale a $\sqrt{\frac{M}{r}}$; b) La velocità orbitale di un satellite, fissata la distanza, è *proporzionale alla massa del pianeta*. c) Giove ha una massa di oltre 300 volte la massa terrestre pertanto i suoi satelliti hanno velocità $\sqrt{300} \approx 17$ volte superiore a un satellite terrestre; d) Due satelliti posti a distanze l'una doppia dell'altra dal centro del pianeta viaggiano con velocità dimezzate l'uno rispetto all'altro.⁴²
41. Ricerca di *vero: velocità orbitali* a) La *prima velocità cosmica* è la velocità che deve avere un razzo per sfuggire alla attrazione del sistema Terra Luna; b) La *prima velocità cosmica* è di circa 1 km/s ; c) La *prima velocità cosmica* ha lo stesso valore della *velocità periferica della Terra* e per questa ragione è semplice mettere in orbita i satelliti usando una specie di *effetto frusta* d) La prima velocità cosmica può anche essere scritta nella forma $v_1 = \sqrt{gR_T}$.⁴³
42. Ricerca di *vero: il punto in cui la attrazione terrestre e quella lunare si bilanciano* a) Si trova nel centro di massa del sistema; b) Si trova a circa l'80% della distanza Terra Luna c) Si trova ad una distanza dalla Terra *proporzionale al rapporto tra le due masse* d) Non è determinabile se non si conosce la densità della Luna.⁴⁴
43. Ricerca di *vero: i satelliti per telecomunicazioni*: a) sono posti in orbita ad altezze diverse a seconda della inclinazione del loro piano orbitale rispetto al piano equatoriale; b) si trovano in orbita a distanze non superiori ai 200 o 300 km per evitare ritardi nella trasmissione dei segnali;

³⁸ Come sopra, ma la accelerazione viene riferita ad un corpo orbitante intorno al Sole e tale accelerazione è calcolabile dalla conoscenza della distanza e del periodo

³⁹ Perché non si riesce ad osservare g dall'esterno (la Luna non ha satelliti)

⁴⁰ Basta scrivere le relazioni e si ottiene $\frac{h}{R_T} = \sqrt{2} - 1$

⁴¹ Soffermarsi sul fatto che è determinante non h ma h/R_T

⁴² a) Vero: la deduzione, molto semplice, si trova sul testo. b) Falso: è proporzionale alla radice della massa. c) Falso: l'affermazione non ha senso perché non viene specificato a quale distanza si operi d) Falso se la distanza è doppia la velocità è pari a $1/\sqrt{2} \approx 0.707$

⁴³ a) Falso: è la velocità orbitale a livello del suolo b) Falso è circa 8 km/s . c) Falso la velocità periferica della Terra è di circa 460 m/s molto inferiore alla prima velocità cosmica e si può calcolare semplicemente dal rapporto tra circonferenza terrestre e periodo di rotazione (1 giorno). d) Vero: si dimostra utilizzando la relazione che fornisce la velocità orbitale nel caso $r = R_T$ e usando la relazione che fornisce il valore di g

⁴⁴ a) Falso: del tutto non pertinente; il centro di massa si trova tra l'altro sotto la crosta terrestre b) Vero: bisogna eseguire il calcolo c) Falso: a causa della dipendenza delle forze dal quadrato della distanza interviene il rapporto delle radici delle masse d) Falso: non pertinente.

- c) si trovano in orbita ad una *quota proporzionale alla massa della Terra*
 d) si trovano in orbita ad una *quota di circa 36'000 km.* ⁴⁵
44. Ricerca di *vero*: il *peso sulla Luna* a) Sulla Luna *si cammina più facilmente* perché gli oggetti hanno un peso minore b) come dice una canzone di Modugno *la accelerazione di gravità sulla Luna è 1/4 del valore sulla Terra*; c) La determinazione teorica della accelerazione di gravità sulla Luna *richiede la conoscenza della massa della Luna*; d) La densità lunare è *circa uguale alla densità terrestre* in accordo con il fatto che la Luna si è formata dalla Terra. ⁴⁶
45. Dimostrare che la velocità orbitale si può scrivere in funzione della prima velocità cosmica secondo la relazione: $v = v_1 \sqrt{\frac{R_T}{r}}$
46. Si determini a quale altezza h va posto in orbita un satellite affinché ruoti con un periodo T assegnato. ⁴⁷
47. Dimostrare che la velocità orbitale di un satellite che orbiti intorno ad un pianeta di massa M e raggio R ad una altezza h vale:

$$v = \sqrt{G \frac{M}{R + h}}$$
 ⁴⁸
48. Determinare la relazione che fornisce la accelerazioni di gravità di un pianeta in funzione del suo raggio r supposta costante la densità ρ . ⁴⁹
49. Dimostrare che la III legge di Kepler può essere scritta nella forma:

$$T^2 = \frac{3 \pi}{G \rho} \left(\frac{R}{R_s} \right)^3$$
 ⁵⁰
50. Supponiamo di costruire un modello in scala del sistema solare (indichiamo con α il rapporto tra una dimensione reale e la corrispondente dimensione nel nostro modello). Supponendo di utilizzare materiali con la stessa densità media degli originali come cambieranno i periodi di rivoluzione dei pianeti? ⁵¹
51. Due satelliti sono posti in orbita intorno alla Terra a distanze r e r' in uno stesso piano. Indichiamo con α il rapporto r' / r e sia $\alpha > 1$. I

⁴⁵ a) Falso: il raggio orbitale è sempre lo stesso b) Falso il raggio orbitale è molto più grande perché la loro accelerazione deve essere pari a quella della rotazione terrestre. A 200 km si hanno accelerazioni quasi uguali a g . c) Falso: la distanza dal centro è data

dalla relazione $\sqrt{\frac{T^2 GM}{4 \pi^2}}$ d) Vero

⁴⁶ a) Falso si cammina male perché la muscolatura umana si è evoluta nel campo gravitazionale terrestre (si salta più che camminare) b) Falso: è 1/6 c) Vero: anche se nel 69 dopo aver misurato la gravità si è usata essa per trovare la massa della Luna d) Falso è molto più simile alla densità superficiale.

⁴⁷ si ottiene $h = \sqrt[3]{\frac{G M T^2}{4 \pi^2}} - R_T$

⁴⁸ Basta applicare la definizione di densità.

⁴⁹ Si trova $g = \frac{4}{3} \pi \rho g r$

⁵⁰ Basta applicare la definizione di densità.

⁵¹ In base alla relazione del quesito precedente non cambiano. Infatti nel modello sia R che R_s cambiano di α e pertanto il loro rapporto non cambia. La densità non cambia per ipotesi e pertanto non cambiano nemmeno i periodi di rivoluzione.

due satelliti ruoteranno con periodi $T' < T$ e pertanto se ad un certo istante si trovano sulla stessa verticale rispetto alla Terra essi si ritroveranno ancora sulla stessa verticale dopo un certo numero n di rotazioni del più lento. a) Scrivere la relazione tra n , T , T' . b) Dimostrare che il tempo trascorso tra il primo e il secondo incontro vale

$$\frac{2\pi}{\sqrt{GM_T}} \frac{\sqrt{r'^3}}{\sqrt{\alpha^3 - 1}}. \quad 52$$

52. Ricerca di *vero*: effetti dovuti alla rotazione terrestre. a) Un corpo, alla

latitudine φ ruota con una *velocità periferica* pari a $\frac{2\pi}{T} r \cos \varphi$ dove r indica la distanza dall'asse di rotazione; b) Un corpo di latitudine φ è

soggetto, per effetto della rotazione terrestre, ad una *accelerazione centripeta* pari a $\frac{4\pi^2 R \cos \varphi}{T^2}$; c) Per effetto del moto di rotazione terrestre

la forza peso è *leggermente superiore* alla forza di gravitazione perché ad essa si somma la forza centripeta. d) La differenza tra raggio equatoriale e raggio polare è di circa 21 km. ⁵³

53. Ricerca di *vero*: *accelerazione di gravità e rotazione terrestre* a) La forza peso e la forza gravitazionale *hanno la stessa direzione solo ai poli e all'equatore*; b) La forza peso e la forza di gravitazione *coincidono all'equatore*; c) La accelerazione di gravità all'equatore è *inferiore a quella al polo principalmente per effetto della diversità di raggio*; d) Gli effetti dovuti alla rotazione agiscono sulla *quarta cifra significativa* della gravità. ⁵⁴

54. Dimostrare che la variazione di accelerazione di gravità tra polo ed equatore è di circa 5 parti su 1000. ⁵⁵

55. Determinare con quale periodo dovrebbe ruotare un pianeta su se stesso perché all'equatore si determini la condizione di assenza di peso. Esprimere il risultato in funzione della accelerazione di gravità. Si trovi il corrispondente valore nel caso della Terra. ⁵⁶

⁵² a) La prima relazione è molto semplice $n T' = (n + 1) T$. Da essa si può ricavare il valore di n in funzione del rapporto dei periodi. b) Per la III legge di Kepler ciascun periodo ha come espressione $T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_T}} \sqrt{r^3} = k \sqrt{r^3} >$ Di qui con un po' di pazienza si arriva al risultato richiesto.

⁵³ a) Falso la relazione corretta $v = \omega r = \frac{2\pi}{T} R \cos \varphi$ contiene il raggio equatoriale e non la distanza dall'asse di rotazione b) Falso: la accelerazione vale $\omega^2 r = \frac{4\pi^2 R \cos \varphi}{T^2}$ c)

Falso: la forza peso è leggermente inferiore alla forza di gravità: la risultante della forza di gravità e dell'opposto del peso deve dar luogo alla forza centripeta. d) Vero.

⁵⁴ a) Vero b) Falso: hanno la stessa direzione, ma differiscono della quantità pari alla forza centripeta necessaria a far ruotare il corpo solidalmente alla Terra. c) Falso: l'effetto predominante è quello di origine centripeta. d) Falso, incidono già sulla III

⁵⁵ $(9.832 - 9.781) / 9.781 \approx 0.005$

⁵⁶ Dovrà essere: $g = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R$ e quindi $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$ Nel caso della Terra si ottiene

$T = 2\pi \sqrt{\frac{6.371 \times 10^6}{9.81}} \approx 5'063 \text{ s}$

56. Calcolare il rapporto tra la accelerazione centripeta dovuta alla rotazione terrestre e quella gravitazionale. Calcolare quindi il rapporto tra la accelerazione centripeta dovuta alla rivoluzione terrestre e quella gravitazionale.⁵⁷
57. La costante di gravitazione universale G vale in unità del Sistema Internazionale
- A... $6.67 \cdot 10^{-11}$ B... $6.63 \cdot 10^{-34}$
C...dipende dal pianeta D... $6.67 \cdot 10^{-34}$ E... $5.98 \cdot 10^{24}$
58. Come mai un corpo che cade nel campo gravitazionale terrestre può raggiungere una velocità costante? ...
- A ...Perché l'energia si conserva.
B ...Perché il campo gravitazionale terrestre diminuisce a mano a mano che il corpo cade.
C ...Perché la massa del corpo rimane costante.
D ...Perché il peso del corpo cresce mentre questo cade.
E ...Perché la resistenza dell'aria cresce al crescere della velocità.

⁵⁷ Si ottiene rispettivamente 0.0034 e 0.0006.

13.8 Quesiti dalle Olimpiadi della Fisica

1. Un astronauta si trova in una navicella, in orbita attorno alla Terra alla distanza di circa 500 km dal suolo. Perché l'astronauta percepisce di essere privo di peso? ... (Juniores 1995)⁵⁸

A ...Se un oggetto si muove abbastanza velocemente la gravità non ha più effetto.

B ...Non c'è gravità a tanta distanza dalla Terra.

C ...A un'altezza di 500 km non c'è più aria.

D ...Il peso dell'astronauta lo mantiene in rotazione nell'orbita.

E ...A così grande altezza la massa del satellite basta ad annullare l'effetto della gravità.

2. Quale proprietà di un corpo si modifica cambiando il campo gravitazionale? ... (Juniores 2001)

A ...La massa B ...La temperatura C ...Il volume

D ...Il peso

3. Sulla superficie della Luna il campo gravitazionale vale 1.6N/kg. Quale coppia di valori può andar bene per un oggetto che si trova sulla superficie della Luna? ... (Juniores 2002)

	Massa (kg)	Peso (N)
A ...	10	1.6
B ...	10	16
C ...	16	10
D ...	16	160

4. La Terra determina un campo gravitazionale la cui intensità (ovvero il rapporto tra la forza agente su una certa massa e il valore della massa stessa: $g = F/m$) al centro della Luna sia g' . Si indichino con M_T ed M_L : rispettivamente, le masse della Terra e della Luna. Quanto vale l'intensità del campo di gravità dovuto alla Luna, al centro della Terra? ... (I livello 1997)⁵⁹

A ... g' **B** ... $g' (M_L / M_T)$ C ... $g' (M_T / M_L)$

D ... $g' (M_L / M_T)^{1/2}$ E ... $g' (M_T / M_L)^{1/2}$

5. Tra due oggetti, posti ad una certa distanza uno dall'altro, agisce la forza di gravità. Se vengono raddoppiate sia la massa di ciascun oggetto che la distanza alla quale si trovano, la forza gravitazionale risulta moltiplicata per un fattore pari a... (I livello 1998)

A ...1/4 B ...1/2 **C** ...1 D ...2

E ... 4

6. Quale, tra le formule scritte qui sotto, rappresenta meglio la relazione tra il periodo, y , di un satellite in orbita circolare ed il raggio, R ,

⁵⁸ La forza di gravità lo mantiene in orbita circolare intorno alla terra insieme al satellite. Pertanto si ha la cosiddetta *mananza di peso* come si può verificare ponendo una bilancia da pavimento sotto i piedi. Qualcosa di simile (ma con aumento o diminuzione) si ha in un ascensore che accelera. Si avrebbe l'assenza di peso in caso di caduta libera.

⁵⁹ Se $g' = F/M_L$ si ha, poiché la forza gravitazionale è la stessa, $g'' = F/M_T = g' M_L/M_T$

dell'orbita stessa, se la costante b può essere eventualmente nulla? ...
(I livello 1998) ⁶⁰

A ... $y = ax + b$

B ... $y^2 = ax^3 + b$

C ... $y = ax^2 + b$

D ... $y^{-1} = ax + b$

E ... $y^{-1} = ax^2 + b$

7. Un satellite percorre un'orbita circolare di raggio R in un periodo di 4 ore. Un secondo satellite, con orbita di raggio $4R$ intorno allo stesso pianeta, ha un periodo di ... (I livello 2000) ⁶¹

A ... 4 h

B ... 8 h

C ... 16 h

D ... **32** h

E ... 64 h

8. Un satellite si muove di moto uniforme intorno alla Terra, in orbita circolare. Un osservatore che analizza il moto del satellite in un riferimento inerziale con origine nel centro della Terra deve concludere che la forza agente sul satellite è ... (I livello 2000)

A solo centripeta, dovuta all'attrazione gravitazionale.

B solo centrifuga, dovuta al moto orbitale.

C zero, perché la forza centripeta e quella centrifuga si bilanciano.

D tangente all'orbita, dovuta all'azione dei motori del satellite.

E la risultante della forza centripeta dovuta all'attrazione della Terra e di una forza tangenziale dovuta ai motori.

9. Quale delle seguenti grandezze fisiche non necessariamente ha lo stesso valore per tutti i satelliti che sono in orbita geostazionaria intorno alla Terra. ... (I livello 2002)

A ... La velocità angolare

B ... L'accelerazione centripeta

C ... L'energia cinetica

D ... Il periodo orbitale

E ... La distanza dal centro della Terra

10. Una massa è sospesa a una molla. La reazione alla forza di gravità terrestre agente sulla massa è la forza esercitata dalla ... (I livello 2003)

A ... massa sulla Terra

B ... massa sulla molla

C ... molla sulla massa

D ... molla sulla Terra

E ... Terra sulla massa.

11. La figura rappresenta l'orbita ellittica di una cometa nel suo moto intorno al Sole. Il modulo dell'accelerazione centripeta è massimo nel punto (I livello 2004) ⁶²

A ... A

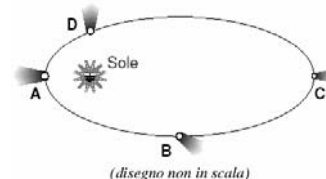
B ... B

C ... C

D ... D

E ... In tutti i punti l'accelerazione ha lo stesso modulo.

12. La forza gravitazionale esercitata dalla Terra su un grosso libro che si trova sulla cima del Gran Sasso (altezza 2900m s.l.m.) ha un'intensità di 20 N. Quale sarebbe approssimativamente l'intensità della forza gravitazionale della Terra sullo stesso libro se questo fosse ad un'altezza doppia rispetto al livello del mare? Nota: Si consideri la Terra come una sfera omogenea di raggio $R_T = 6370\text{km}$. (I livello 2005)



⁶⁰ III legge di Kepler

⁶¹ $T' = T \sqrt{\frac{R'}{R}} = 8 T$ cioè 32h III legge di Kepler

⁶² Nel punto più vicino è massima la forza e dunque anche la accelerazione

- A ... 2.5N B ... 5.0N C ... 10N **D ... 20N**
E ... 40N ⁶³

13. Due leggere buste di plastica da supermercato, di massa trascurabile, distano 2 m. Ciascuna busta contiene 15 arance uguali. Assumendo che le buste con le arance abbiano una forma approssimativamente sferica, se 10 arance vengono spostate da una busta all'altra, la forza di attrazione gravitazionale tra le due buste dovrebbe ... (I livello 2005)

⁶⁴

- A ... aumentare fino a raggiungere i $3/2$ del valore originale.
B ... diminuire fino a raggiungere i $2/5$ del valore originale.
C ... aumentare fino a raggiungere i $5/3$ del valore originale.
D ... diminuire fino a raggiungere i $5/9$ del valore originale.
E ... rimanere la stessa.

14. Un satellite di massa m è in orbita circolare di raggio R , attorno ad un pianeta di massa M (con $M \gg m$). Il tempo necessario per compiere una rivoluzione è ... (I livello 2006) ⁶⁵

- A ... indipendente da M B ... proporzionale a $\sqrt{m}$
C ... lineare in R **D ... proporzionale a $R^{3/2}$**
E ... proporzionale a R^2

15. In un episodio di Star Trek un oggetto di peso P sulla terra viene teletrasportato dal capitano Kirk su un pianeta il cui raggio e la cui massa sono esattamente la metà di quelli terrestri. Se il capitano pesasse l'oggetto troverebbe un peso P_x pari a ... (I livello 2008) ⁶⁶

- A ... $4P$ **B ... $2P$** C ... P D ... $P/2$
E ... $P/4$

16. Un satellite artificiale di massa molto piccola e trascurabile rispetto a quella del pianeta intorno al quale sta ruotando, viene osservato da un astronomo. Vengono misurate la minima e la massima distanza del satellite dal pianeta e la massima velocità orbitale del satellite. Quale delle seguenti quantità non può essere ottenuta a partire dai dati misurati. (I livello 2010) ⁶⁷

⁶³ $F'/F = \frac{(R_T + h)^2}{(R_T + 2h)^2} \approx \frac{R_T^2 + 2hR_T}{R_T^2 + 4hR_T} = \frac{R_T + 2h}{R_T + 4h} = 0.9995$ e dunque, come si poteva osservare anche "a spanne" il valore, entro i limiti di precisione dati, non cambia

⁶⁴ Ipotizzando che non cambino significativamente le distanze dei due centri di massa si ha che $F'/F = (25 \cdot 5)/(15 \cdot 15) = 5/9$

⁶⁵ II legge di Kepler

⁶⁶ $P \propto M_p/R^2$ e dunque $P'/P = 1/2 / (1/4) = 2$

⁶⁷ Ipotizzando di poter analizzare le cose come se il pianeta fosse un riferimento inerziale, dalla legge di gravitazione e dalla II legge della dinamica si ha che:

$GM/R^2 \frac{\vec{R}}{R} = \vec{a}$ dopo semplificazione della massa del satellite che non potrà essere determinata da dati osservativi.

Le altre grandezze possono essere determinate con una analisi più complessa che richiede l'uso della conservazione del momento angolare di cui si tratterà alla fine della I parte. Infatti, la conoscenza delle due distanze consente di risalire alle caratteristiche

- A ... La massa del satellite
 B ... La massa del pianeta
 C ... La minima velocità orbitale del satellite
 D ... Il semiasse maggiore dell'orbita del satellite
 E ... Il periodo dell'orbita del satellite
17. Un satellite di massa m orbita attorno alla Terra. L'orbita è circolare ed ha raggio R . Se al satellite è applicata solo la forza gravitazionale F_g , la sua velocità è data da: ... (I livello 2011)
- A ... $\sqrt{\frac{F_g R}{m}}$ B ... $\frac{F_g R}{m}$ **C** ... $\sqrt{\frac{F_g m}{R}}$
- D ... $\frac{F_g m}{R}$ E ... $F_g m R$
18. La tabella contiene i valori di massa e periodo orbitale di 5 satelliti artificiali, che si muovono su orbite circolari attorno alla Terra. Quale di questi è più vicino alla Terra? ... (I livello 2013) ⁶⁸
- A **B** C D E
19. Una palla viene lanciata dalla superficie della Terra verso l'alto con una velocità di 50m/s e raggiunge la massima altezza dopo un certo intervallo di tempo. La stessa palla, lanciata dalla superficie del pianeta X nello stesso modo e con la stessa velocità, trascorso lo stesso tempo, si muove ancora verso l'alto alla velocità di 31m/s. Qual è il rapporto tra l'accelerazione di gravità sul pianeta X e quella sulla Terra? ... (I livello 2013) ⁶⁹
- A ... 0.16 **B** ... 0.38 C ... 0.53 D ... 1.59
 E ... 2.63
20. Un oggetto pesa 100N a livello del suolo. Se viene portato ad un'altezza pari a due raggi terrestri sopra il livello del suolo, il suo peso diventa ... (I livello 2014) ⁷⁰
- A ... 0 **B** ... 11N C ... 25N D ... 50N E ... 300N

Satellite	Massa [kg]	Periodo [ore]
A	500	4
B	500	2
C	100	6
D	100	3
E	700	6

dell'ellisse; la massima velocità orbitale consente grazie alla conservazione del momento angolare di trovare la velocità aureolare, la velocità minima e il periodo.

⁶⁸ Non occorre fare dei conti; basta applicare la III legge di Kepler che ci dice che il periodo cresce con la distanza. Come è noto la massa è del tutto irrilevante.

⁶⁹ Il quesito è impropriamente collocato tra quelli sulla gravitazione. Si tratta di una questione di mia risoluzione semplicemente dopo aver tracciato i diagrammi delle velocità in funzione del tempo (rette). Si ha allora $50/\tau = g$ e $a = \frac{50-31}{\tau}$ da cui $a = \frac{19}{50} g$

⁷⁰ $\frac{g'}{g} = \left(\frac{R_T}{3R_T}\right)^2 = 1/9$

13.9 Problemi di fine capitolo

Per risolvere i problemi proposti tieni presenti le leggi dei capitoli precedenti ed inoltre:

per affrontare i problemi tieni presente che



- La legge di gravitazione universale afferma che due masse puntiformi m_1 e m_2 poste a distanza r si attraggono reciprocamente con forze identiche, dirette lungo la congiungente, e con una intensità $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$.

La costante G detta costante di gravitazione universale vale $6.67 \cdot 10^{-11}$ unità del S.I. ed è stata misurata direttamente per la prima volta alla fine del 700 dopo la misura della costante della forza elettrica.

- Prima che Newton enunciasse la legge di gravitazione per via induttiva sulla base di conoscenze astronomiche note e di considerazioni originali relative al moto lunare, erano accettate tre leggi di natura osservativa note come leggi di Kepler: 1) le orbite dei pianeti sono ellittiche con il sole in uno dei fuochi. 2) La *velocità areolare* (cioè il rapporto tra area spazzata dal raggio vettore ed intervallo di tempo) di un pianeta è costante 3) Il rapporto tra il quadrato dei tempi di rivoluzione dei pianeti e il cubo del semiasse maggiore dell'orbita è costante per tutti i pianeti
- Si chiamano *prima e seconda velocità cosmiche* le velocità minime che devono possedere degli oggetti per sfuggire rispettivamente alla attrazione terrestre e a quella solare.
- Molti problemi sulla gravitazione richiedono l'utilizzo delle leggi di conservazione della energia (compreso il concetto di energia potenziale) e della conservazione del momento angolare; dunque queste tematiche saranno riprese anche nei capitoli successivi.

1. In una sfera cava non si hanno effetti gravitazionali

Esercizio: Spiegare perché all'interno di una sfera cava omogenea non si possono avere effetti di natura gravitazionale.

⊗

Riusciremo a dimostrare l'affermazione se, scelto un generico punto all'interno della cavità e, individuate le masse m_1 e m_2 che sono viste sotto due angoli solidi elementari ed opposti al vertice, le interazioni gravitazionali $m \leftrightarrow m_1$ e $m \leftrightarrow m_2$ risulteranno oltre che opposte (il che è già evidente dalla figura), anche della stessa intensità.

Infatti, in quel caso, tutte le coppie di masse viste dal punto considerato annulleranno reciprocamente i loro effetti e dunque non si avranno mai effetti gravitazionali che non siano nulli.

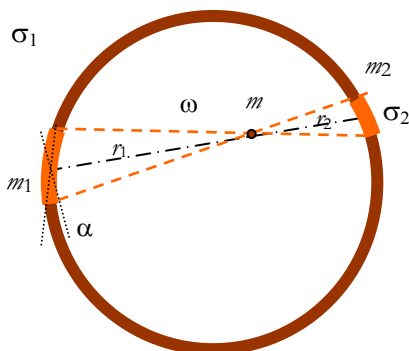
A questo scopo, disegniamo gli angoli solidi ω che individuano le masse, indichiamo con ρ la densità superficiale, con σ_1 e σ_2 le due superfici individuate dai due coni opposti al vertice (angoli solidi), con r_1 e r_2 le distanze dal punto interno alla sfera alle due superfici.

Per definizione di angolo solido avremo che^(*):

$$\omega = \frac{\sigma_2 \cos \alpha}{r_2^2} = \frac{\sigma_1 \cos \alpha}{r_1^2}.$$

$$\text{Inoltre: } m_1 = \rho \sigma_1 = \rho \frac{\omega r_1^2}{\cos \alpha} \text{ e, analogamente: } m_2 = \rho \sigma_2 = \rho \frac{\omega r_2^2}{\cos \alpha}$$

^(*) La misura di un angolo solido è data dal rapporto tra la superficie in direzione normale individuata dal cono e il quadrato della altezza del cono stesso.



Pertanto $F_1 = G \frac{m_1 m}{r_1^2} = G m \frac{\omega r_1^2}{\cos \alpha r_1^2} = \frac{G m \rho \omega}{\cos \alpha} = F_2$ perché α e ω sono identici per le due superfici considerate.

- Se anche la sfera non è costituita da uno strato di spessore trascurabile, si può ripetere lo stesso ragionamento dividendo lo spessore finito in tanti strati superficiali.
- La situazione cambia se, invece, la distribuzione di massa non è uniforme.
- Questa proprietà è una diretta conseguenza della dipendenza della forza dall'inverso del quadrato della distanza e trova delle importanti applicazioni nel caso delle forze elettriche che presentano la stessa dipendenza dalla distanza.

☺

2. Andamento degli effetti gravitazionali in una sfera omogenea

Esercizio: Supponendo che la densità di una sfera sia costante determinare l'andamento della forza gravitazionale al variare della distanza r dal centro.

☹

Se si considera una massa m collocata a distanza r dal centro di una sfera di densità ρ e raggio R avremo due situazioni diverse a seconda che sia $r < R$, o $r > R$.

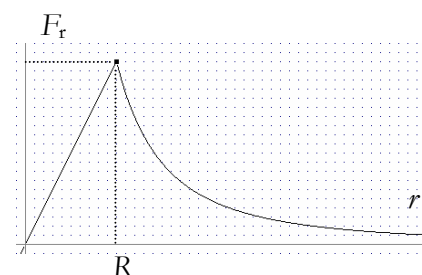
- Nel primo caso gli strati esterni alla sfera di raggio r (per quanto visto nel problema precedente) non producono effetti gravitazionali e pertanto la forza F è determinata dalla interazione tra una sfera di raggio r e massa $M = \frac{4 \pi r^3}{3} \rho$ ed una massa puntiforme m posta a distanza r ; si ha dunque $F = G \frac{4 \pi r^3 \rho m}{3 r^2} = \frac{4 \pi \rho m}{3} r$
- Nel secondo caso la sfera di raggio R si comporta come un corpo puntiforme (in caso contrario si avrebbe una violazione della simmetria dello spazio) e pertanto $F = G \frac{M m}{r^2} = G \frac{4 \pi R^3 \rho m}{3 r^2}$.

Si osservi che, ovviamente, per $r = R$ le due espressioni trovate coincidono.

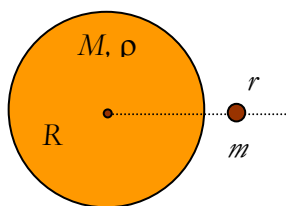
L'andamento della forza al variare di r è dunque costituito da un tratto crescente in linea retta seguito da un tratto decrescente con legge iperbolica di II grado.

Visto che $g = \frac{F}{m} = \frac{4 \pi R^3 \rho}{3 r^2}$, la accelerazione di gravità dovrebbe diminuire muovendosi dalla crosta terrestre verso l'interno nella ipotesi che la Terra sia una sfera omogenea. I dati sperimentali, relativi ai primi 5 km di profondità affermano l'esatto contrario: l'argomento sarà ripreso nei problemi successivi.

☺



3. Quota e accelerazione di gravità



Esercizio: Si determini come varia la accelerazione di gravità con l'altezza per valori di $h \ll R_T$ e si trovi sino a che altezza l'approssimazione trovata fa prevedere una variazione di g del 10%.

☹

Indichiamo $\frac{h}{R_T}$ con x . Poiché $h \ll R_T \Rightarrow x \ll 1$ e pertanto le potenze di grado superiore al primo sono trascurabili rispetto ad x .

$$g = G \frac{M_T}{(b + R_T)^2} = \frac{GM_T}{R_T^2} \frac{1}{(x + 1)^2} = g_0 \frac{1}{x^2 + 2x + 1} \approx g_0 \frac{1}{2x + 1} \approx g_0 (1 - 2x)$$

La variazione percentuale di g è data da $\frac{\Delta g}{g_0} = 2x$

Affinché sia $\frac{\Delta g}{g_0} \% = 10 \%$ deve essere $2x = 0.01$ e quindi $x = 0.005$ il che porta per h a un valore di $h = x R_T \approx 6.35 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \approx 3 \cdot 10^4 \text{ m}$

☺

4. Le maree come effetto della interazione terra luna

Esercizio: Analizzare alla luce della legge di gravitazione universale il fenomeno delle maree spiegando in particolare i seguenti elementi:

- perché si hanno 2 *maree* giornaliere a distanza di 6 ore
- da dove si origini l'energia delle *maree*
- quale fenomeno fisico dia conto della trasformazione continua di energia delle maree in energia dispersa per attrito negli oceani
- quale sia l'incidenza delle *maree* solari
- quanto sia l'innalzamento teorico di *marea* in mare aperto.

☹

a) Come si originano le maree

Il fenomeno delle *maree* è dovuto alla esistenza di una accelerazione relativa tra i mari e il globo terrestre dovuta alla interazione Terra Luna. Più precisamente mentre la interazione globo terrestre Luna dipende dalla distanza Terra Luna R_{TL} , la interazione tra i mari e la Luna dipende da una distanza R variabile a seconda della posizione e che può oscillare tra $R_{TL} + R_T$ e $R_{TL} - R_T$ per i diversi punti collocati sulla superficie terrestre.

Il sistema Terra Luna, per effetto della reciproca interazione gravitazionale ruota intorno al proprio centro di massa.^(*) La Terra, rispetto alla Luna è soggetta ad una accelerazione $\mathbf{a}_{TL}$ mentre un generico punto non vincolato rigidamente al globo terrestre quale è, per e-

^(*) che si trova all'interno della Terra ad una distanza di circa 1600 km di profondità, infatti se indichiamo con $R_{TL} \approx 384.4 \cdot 10^3 \text{ km}$ la distanza media Terra Luna con x la distanza tra il centro della Terra e il centro di massa e con M_T e M_L le masse della Terra e della Luna ($\frac{M_T}{M_L} = 81.3$) avremo che: $M_T x = M_L (R_{TL} - x) \Rightarrow x = \frac{M_L}{M_L + M_T} R_{TL} = \frac{1}{1 + 81.3} 384.4 \cdot 10^3 = 4.67 \cdot 10^3 \text{ km}$

sempio un tratto di mare, avrà una accelerazione $\mathbf{a}_{CT}$ aggiuntiva a quella di gravità e calcolabile attraverso la composizione vettoriale delle accelerazioni:

$$\mathbf{a}_{CT} = \mathbf{a}_{CL} + \mathbf{a}_{LT} = \mathbf{a}_{CL} - \mathbf{a}_{TL}$$

Ovviamente, trattandosi di grandezze vettoriali si ha anche:

$$\mathbf{a}_{CT} = -\mathbf{a}_{TC} \text{ e } \mathbf{a}_{LT} = -\mathbf{a}_{TL}$$

Il valore di a_{TC} dipende fortemente dalla posizione del corpo C e, per esempio, se consideriamo l'equatore terrestre, troveremo una accelerazione in verso contrario alla accelerazione di gravità nei due punti allineati con la Luna (è come se si verificasse una diminuzione di peso) mentre nei punti in quadratura si trova una accelerazione nel verso di quella di gravità (è come se si verificasse un incremento di peso).

Con riferimento alla figura (in cui sono state esagerate le differenze tra i vettori per facilitare la lettura) osserviamo che in A è $a_{CL} > a_{TL}$ perché è minore la distanza dalla Luna, mentre in B accade il contrario.

Infine in C le due accelerazioni non sono molto diverse, ma ciò che determina la accelerazione orientata verso il centro della Terra è la diversità di direzione.

Quanto alle intensità di a_{CT} in A avremo che:

$$a_{CT} = \frac{GM_L}{(R_{TL} - R_T)^2} - \frac{GM_L}{R_{TL}^2} = G M_L \left(\frac{1}{(R_{TL} - R_T)^2} - \frac{1}{R_{TL}^2} \right) =$$

$$G M_L \left(\frac{2R_T R_{TL} - R_T^2}{R_{TL}^2 (R_{TL} - R_T)^2} \right) \approx 2G M_L \left(\frac{R_T R_{TL}}{R_{TL}^2 (R_{TL} - R_T)^2} \right) \approx \frac{2G M_L R_T}{R_{TL}^3} \quad (**)$$

Il calcolo in B (eseguito in valore assoluto) porta a:

$$a_{CT} = \frac{GM_L}{R_{TL}^2} - \frac{GM_L}{(R_{TL} + R_T)^2} = G M_L \left(\frac{1}{R_{TL}^2} - \frac{1}{(R_{TL} + R_T)^2} \right) \dots \approx$$

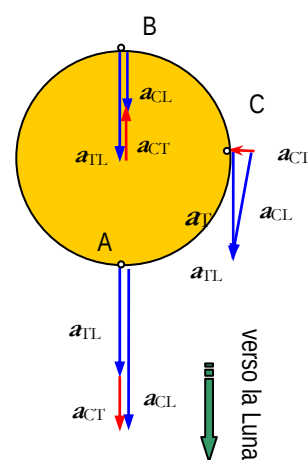
$$\frac{2G M_L R_T}{R_{TL}^3}$$

Infine, per quanto riguarda il calcolo in C basta osservare che il triangolo delle accelerazioni e quello determinato dalle distanze di C dal centro della Terra e della Luna sono simili e pertanto:

$$a_{CT} : a_{TL} = R_T : R_{TL} \Rightarrow a_{TC} = a_{LT} \frac{R_T}{R_{TL}} = \frac{GM_L}{R_{TL}^2} \frac{R_T}{R_{TL}} = \frac{G M_L R_T}{R_{TL}^3} \text{ cioè la metà dei valori precedentemente trovati.}$$

Dunque se consideriamo l'equatore, l'effetto della presenza della Luna si caratterizza come diminuzione del peso dei corpi allineati con i centri dei due corpi celesti e per un aumento di peso di quelli in quadratura.

L'aumento del peso è circa la metà della diminuzione. Negli altri punti si verifica una condizione variabile al variare dell'angolo θ da 0 a π . Poiché la Terra ruota intorno al proprio asse questo effetto di diminuzione ed aumento del peso si tradurrà, in mare aperto in una



la composizione vettoriale delle accelerazioni nei punti con vettori paralleli e con vettori in quadratura

(**) si è trascurato R_T rispetto a R_{TL} tenuto conto che $R_{TL} / R_T \approx 60$

onda di marea caratterizzata da una fase crescente ed una decrescente che durano 6 ore.



b) Di quanto la Luna fa variare la gravità?

Se confrontiamo a_{CT} con la accelerazione di *gravità* avremo che:

$$\frac{\Delta g}{g} \approx \frac{2G M_T R_T}{R_{TL}^3} \frac{R_T^2}{G M_T} \approx \frac{M_T}{M_T} \left(\frac{R_T}{R_{TL}} \right)^3 \approx 2 \cdot \frac{1}{81.3 \cdot 60^3} \approx 10^{-7}$$

il valore trovato è molto piccolo ed è pari a circa un decimilionesimo della accelerazione di gravità. Un corpo di 1 kg massa, per effetto della Luna cambia il suo peso da 1 kg peso a 0.9999999 kg peso.

Si tratta certamente di una quantità piccolissima, soprattutto se si confronta questa variazione con le variazioni di accelerazione di gravità dovute a fenomeni più rilevanti quali: le variazioni di densità superficiale, le variazioni di distanza dal centro della Terra, l'effetto centrifugo dovuto alla rotazione terrestre. Eppure tale variazione in termini energetici mette in moto grandi masse d'acqua ed è responsabile del lento allungamento del periodo di rotazione terrestre.



c) Anche il Sole determina le maree terrestri

Ci si potrebbe chiedere se altri corpi, oltre la Luna, determinino perturbazioni nel moto terrestre. Per questo ipotetico corpo di massa m e distanza r dalla Terra, in base alla relazione già trovata per la Luna si avrà che il fenomeno è proporzionale a $\frac{m}{r^3}$. Nel caso del Sole che si trova a distanza molto maggiore della Luna la massa compensa la diminuzione dovuta alla distanza. Inserendo i dati relativi al Sole si ha:

$$\frac{\Delta g_S}{\Delta g_L} = \frac{M_S}{M_L} \left(\frac{R_{TL}}{R_{TS}} \right)^3 \approx 0.46 \text{ (*)}$$

Le *maree solari* contribuiscono dunque al fenomeno della marea durante le cosiddette *fasi sigiziali*, quando il Sole, la Terra e la Luna risultano allineate (Luna piena e Luna nuova) mentre l'effetto si riduce gradualmente e diventa minimo in condizione di quadratura quando la marea solare determina un effetto opposto a quella lunare.



d) Le onde di marea rallentano la rotazione terrestre

L'energia connessa ai fenomeni di marea, come si è accennato precedentemente, deriva dalla produzione di un'onda di marea di lunghezza d'onda molto elevata (pari ad una semicirconferenza terrestre) che si sposta negli oceani e disperde energia per attrito.

Poiché l'aspetto dinamico del fenomeno è dovuto alla rotazione terrestre, è lecito attendersi che, dalla dissipazione di questa energia cinetica per attrito, derivi una perdita di energia del motore del fenomeno (la rotazione terrestre) e che si verifichi su scala multisecolare un aumento nel periodo di rotazione della Terra (una stima relativa

(*) la massa del Sole è $3.3 \cdot 10^5$ la massa terrestre mentre quella terrestre è 81 volte quella lunare mentre la distanza Terra Sole è circa 390 volte quella Terra Luna.

agli ultimi 20 secoli fornisce un aumento di circa $2.3 \cdot 10^{-3}$ s/secolo, mentre sembra che, relativamente ai secoli più recenti, si debba stimare il rallentamento in $1.4 \cdot 10^{-3}$ s/secolo).

Anche in questo caso abbiamo a che fare con un numero estremamente piccolo, ma poiché la Terra ha una età stimata in $4.5 \cdot 10^9$ anni $= 4.5 \cdot 10^7$ secoli, nella ipotesi di una diminuzione al tasso stimato negli ultimi 20 secoli avremmo un rallentamento del periodo di rotazione $\Delta t = 4.5 \cdot 10^7 \cdot 2.3 \cdot 10^{-3} \approx 10^5$ s ≈ 27 ore. Dunque i 2 ms al secolo diventano una enormità: in base alla stima fatta.

Questo stesso fenomeno, visto dalla Luna, è stato storicamente più rilevante sia perché Δg è più grande, sia perché g è più piccola ed ha probabilmente determinato, durante la fase di raffreddamento del nostro satellite, quella *sincronia tra moto di rotazione e di rivoluzione lunare* per cui la Luna presenta sempre la stessa faccia rivolta verso la Terra.



e) Di quanto si alzano gli oceani per effetto della marea?

Cerchiamo ora di stimare, da un punto di vista statico, cioè prescindendo da problematiche dovute alla rotazione terrestre ed alla presenza delle coste, la variazione Δg a che *innalzamento* Δb dovrebbe corrispondere.

Poiché $g = GM_T \frac{1}{r^2}$ dove r rappresenta la distanza dal centro della Terra avremo che, indicata con R_T la posizione dell'oceano in assenza della Luna, sarà:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\frac{1}{R_T^2} - \frac{1}{(R_T + \Delta b)^2}}{\frac{1}{R_T^2}} \approx \frac{2\Delta b}{R_T}$$

Ma poiché abbiamo già visto che $\frac{\Delta g}{g} \approx 10^{-7}$ sarà anche $\frac{2\Delta b}{R_T} \approx 10^{-7}$ da cui $\Delta b \approx \frac{R_T}{2} 10^{-7} \approx 30$ cm

Per le stesse ragioni possiamo parlare di un abbassamento di circa 15 cm nelle zone di aumento della accelerazione. Il calcolo, condotto tenendo conto non solo delle due soluzioni estreme, darebbe un innalzamento teorico di una cinquantina di centimetri.



5. Olimpiadi 2002: gara regionale – satellite in orbita polare

Esercizio: Un satellite in orbita polare circolare compie un giro in un giorno. Ad un certo istante, mentre sorvola il Polo Nord, si muove sul piano del meridiano di Roma (longitudine: 12° E, circa), provenendo dall'emisfero opposto al nostro. Motivando adeguatamente la risposta, dire se,

ed eventualmente dopo quanto tempo, il satellite si troverà sulla verticale di Roma (latitudine: 42° N, circa). ⁷¹

6. Olimpiadi 2003: gara regionale – la sonda SOHO

Esercizio: La sonda SOHO è stata mandata in orbita solare per studiare la struttura interna del Sole, la sua atmosfera ed il vento solare. In prima approssimazione si può affermare che essa staziona costantemente in un punto lungo la linea che congiunge la Terra al Sole.



Quanto dista SOHO dalla Terra?

Nota: assumere l'orbita della Terra come circolare. Possono essere utili i seguenti dati: distanza Sole Terra $R_{TS} = 149.6 \cdot 10^9$ m; $\alpha = m_T / m_S = 3.00 \cdot 10^{-6}$

Suggerimento: può essere utile ricordare che $(1 + x)^n \approx 1 + n x$ per $x \ll 1$ e tenere presente che la sonda si muove sotto l'azione simultanea della forza gravitazionale terrestre e solare. ⁷²

⊗

7. Campo gravitazionale in una sfera con zone a densità diversa

Esercizio: Si consideri una sfera di raggio R realizzata con materiale di densità ρ . All'interno della sfera viene realizzata una cavità di raggio $R/3$ centrata in un punto a distanza $R/2$ dal centro della sfera. Tale cavità viene riempita con materiale di densità ρ' . Determinare il valore del campo gravitazionale:

- In un punto a distanza $2R$ dal centro sulla retta che unisce i due centri dalla parte della cavità
- La variazione relativa di campo rispetto a quello prodotto da una sfera omogenea

Suggerimento: la cavità può essere interpretata come aggiunta e sottrazione di opportune sfere. ⁷³

⊗

⁷¹ Il problema non ammette soluzione perché quando il satellite raggiunge la latitudine di Roma la terra ha ruotato di un angolo di 48° (calcolare il tempo impiegato che risulta di 3.2 h).

D'altra parte il piano orbitale del satellite e il piano del meridiano di Roma coincidono di nuovo solo dopo 12 h quando il satellite è al polo sud e dunque il satellite non passerà mai sul cielo di Roma.

⁷² Dopo aver indicato con $k = x / R_{TS}$ si arriva alla equazione $1 - k = \frac{1}{(1 - k)^2} - \frac{\alpha}{k^2}$ e da qui in poi bisogna applicare la approssimazione per risolvere la corrispondente equazione di V grado.

Si trova così $k = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}}$ e quindi $x = 1.496 \cdot 10^9$ m

⁷³ Il campo di una sfera omogenea ha intensità $g = G \frac{M}{r^2} = \frac{4}{3} G \pi \rho \frac{R^3}{r^2}$ e se lo si applica al caso considerato si ottiene:

$$g = \frac{4}{3} G \pi \left(\rho \frac{R^3}{4R^2} + (\rho' - \rho) \frac{(R/3)^3}{(3/2R)^2} \right) = \frac{4}{3} G \pi \left(\rho \frac{R}{4} + (\rho' - \rho) \frac{4}{243} R \right)$$

8. Esperimenti gravitazionali in una astronave

Esercizio: Una astronave che transita nelle vicinanze di un pianeta di raggio R si sta muovendo di moto inerziale rispetto al Sole. Al suo interno si effettuano esperimenti di caduta dei gravi e si osserva che un corpo, lasciato cadere da fermo, acquista velocità al ritmo di 0.2 m/s ogni 0.2 s . Determinare a che distanza l'astronave si trova dalla superficie del pianeta esprimendo il risultato R' in frazioni di R sapendo che la accelerazione di gravità alla superficie del pianeta vale $2.64 g$.⁷⁴

⊗

9. Variazioni di gravità dovute alla rotazione del pianeta

Esercizio: In un pianeta sferico di densità $\rho = 2.8 \text{ kg/dm}^3$ si osserva che il peso dei corpi si riduce del 30% quando la misura viene effettuata all'equatore anziché ai poli. Determinare il periodo di rotazione del pianeta.

⊗

Esercizio: In un pianeta simile alla Terra per composizione e dimensioni si osserva che il peso, nel passare dai poli all'equatore, si dimezza. Quanto dura una giornata in questo pianeta?

⊗

10. Stella, pianeta e satellite

Esercizio: Un pianeta di massa M ruota intorno ad una stella M_S con periodo T . Il pianeta è dotato di un satellite di massa ignota che ruota intorno al pianeta con periodo $T' = \alpha T$. Sapendo che il rapporto delle due distanze dal pianeta vale β quanto vale la massa della stella misurata in unità di massa del pianeta?

⊗

11. Stella doppia

Esercizio: Una stella doppia di massa complessiva M ruota intorno al centro di massa con periodo T . Trovare la distanza tra le due stelle. Le due stelle non hanno necessariamente la stessa massa.

⊗

12. Satelliti in moto simultaneo: allineamento

Esercizio: Due satelliti artificiali della terra si muovono su orbite circolari giacenti in uno stesso piano. Il primo satellite si trova su un'orbita di raggio r mentre il secondo su una di raggio $r' = r + \Delta r$. Determinare l'intervallo temporale minimo che intercorre tra due istanti successivi in cui i due satelliti si trovano sulla stessa verticale rispetto alla terra. Eseguire il calcolo per il caso in cui $r = 12'500 \text{ km}$ e $\Delta r = 230 \text{ km}$

Suggerimento: a partire da un istante in cui si verifica la sovrapposizione trascorre un tempo t durante il quale il satellite più vicino (periodo minore) compie $n+1$ rotazioni mentre quello più lontano ne compie n . Poiché $\Delta r/r \ll 1$ è conveniente utilizzare per la semplificazione dei conti la relazione secondo cui $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$

⁷⁴ Il corpo è soggetto ad una accelerazione di gravità g' pari a 1 m/s^2 e poiché la accelerazione di gravità è inversamente proporzionale al quadrato della distanza si ha:

$$g'/(2.64g) = (R/R')^2 \text{ e dunque: } R'/R = \sqrt{\frac{2.64g}{g'}} = 5.08. \text{ Pertanto } h = R' - R = 4.08 R$$



13. Incidenza della crosta sulla gravità terrestre

Esercizio: La crosta terrestre è formata da uno strato di spessore variabile da una decina di chilometri nelle zone oceaniche sino ad alcune decine nelle zone montagnose. Si assume solitamente uno spessore medio di circa 35 km ed una densità di 2.9 kg/dm^3 (valore medio tra il 2.8 dei graniti ed il 3.0 dei basalti).

Determinare il contributo dato dalla crosta alla accelerazione di gravità ipotizzando un raggio medio terrestre di 6370 km.

Suggerimento: poiché la profondità della crosta è piccola rispetto al raggio della sfera il volume della crosta può essere calcolato calcolando l'area di una sfera di raggio pari al raggio interno e moltiplicandola per lo spessore.⁷⁵



14. Incidenza del mantello sulla gravità terrestre

Esercizio: Al di sotto della crosta terrestre inizia una zona detta *mantello* costituita da silicati caratterizzata da un progressivo aumento di densità, sino alla profondità di 2'900 km; tale zona si interrompe bruscamente (discontinuità di Mohorovic), in corrispondenza dell'inizio del nucleo. Determinare il contributo del mantello alla accelerazione di gravità in superficie assumendo un valore medio di densità di 5.6 kg/dm^3 .⁷⁶



15. Dalla gravità alla densità del nucleo metallico della Terra

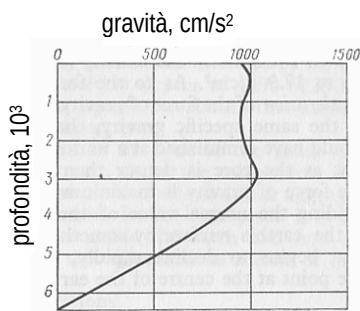
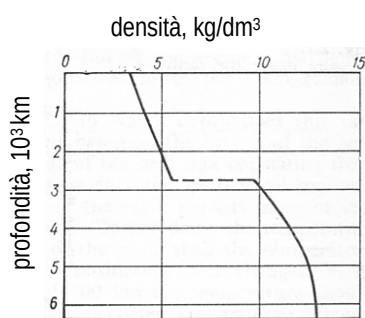
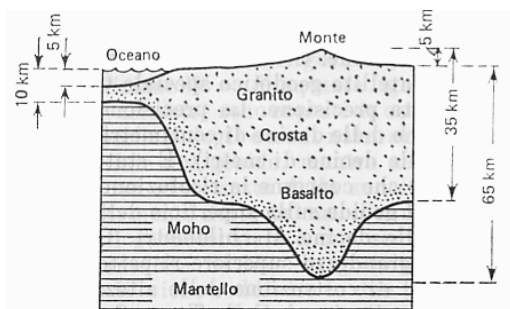
Esercizio: Sulla base dei dati emersi dai problemi precedenti ed assumendo per la accelerazione di gravità il valore medio di 9.807 m/s^2 si determini la densità del nucleo metallico della terra.⁷⁷



16. Andamento della gravità terrestre con la profondità: interpretazione

Esercizio: Come si osserva dalla immagine qui a lato la accelerazione di gravità ha un andamento irregolare con la profondità. Si cerchi di dare una interpretazione di questi tre elementi:

- nella crosta si ha una debole crescita di g con la profondità
- nel mantello la accelerazione di gravità cambia molto poco
- nella zona del nucleo si ha una decrescita di tipo lineare.



⁷⁵ Si tratta di determinare la massa della crosta e calcolarne l'effetto in termini di accelerazione assimilandola ad una massa puntiforme collocata nel centro. Si ottiene circa 0.085 m/s^2

⁷⁶ Con i valori forniti (la massa si trova sottraendo i contributi di due sfere opportune) si trova $g_m = 8.195 \text{ m/s}^2$

⁷⁷ In base ai risultati dei due problemi precedenti si ha (per differenza) $g_n = 1.527 \text{ m/s}^2$. Se si calcola tale valore come dovuto ad una sfera di densità pari al valore medio richiesto si trova $\delta_n = 9.09 \text{ kg/dm}^3$. Il valore trovato risulta piccolo rispetto a quanto indicato nel diagramma che accompagna il problema ma si tenga conto che gli strati più interni contano progressivamente di meno.

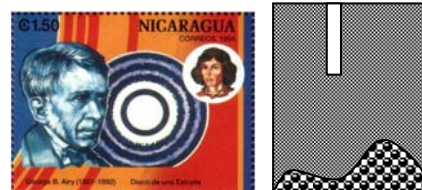
17. Misure di gravità in una miniera

Esercizio: Nella prima metà dell'800 il fisico ed astronomo George Airy propose di misurare la densità media della Terra δ con un metodo diretto basato sulla misura della variazione di g con la profondità. Il metodo consisteva nel confrontare il valore della accelerazione di gravità g_0 a livello del suolo con il valore g misurato in una miniera a profondità b supponendo che la densità δ_0 della crosta terrestre fosse lo stesso di quello riscontrato nella miniera.

La misurazione effettuata in una miniera profonda 398 m diede come risultato sperimentale $g/g_0 = 1.000'052$ mentre il valore stimato per δ_0 era di 2.5 kg/dm^3 .

- Spiegare come mai la accelerazione di gravità nella zona della crosta aumenta con la profondità al contrario di quanto previsto nel caso di pianeta con densità costante.
- Dimostrare che si ha
$$= \frac{3}{2 - \frac{R}{b} \left(\frac{g}{g_0} - 1 \right)}$$
- Calcolare il valore che si dedusse per la densità media. ⁷⁸

⊗



⁷⁸ Alla profondità b si ha in meno il contributo dovuto alla crosta ma in più l'effetto della zona interna di densità maggiore (si è più vicini al centro).

Il contributo aggiuntivo va come $GM \left(\frac{1}{(R-b)^2} - \frac{1}{R^2} \right) \approx GM \frac{2b}{R^3} = g_0 \frac{2b}{R^3}$

Il decremento può essere calcolato attraverso il contributo di una porzione di crosta di profondità b a distanza $R - b$ dal centro; tenuto conto della relazione che fornisce g_0 si

ottiene $\frac{3b g_0 \delta_0}{\delta R}$.

Da qui con qualche semplice calcolo si arriva al risultato e ad una densità di 6.5 kg/dm^3

Indice analitico

- accelerazione di gravità*: massa della Terra e distanza dal centro - 12;
spiegazione gravitazionale - 12; variabilità statica e dinamica - 20;
variazioni locali - 12
- azione a distanza*: versus azione per contatto - 11
- calcolo delle flussioni*: si crea una matematica funzionale alla fisica - 8
- carattere ellittico delle orbite*: moti di Marte; Kepler - 2
- Cavendish*: bilancia di torsione, misura di G - 8; misura di G ; precisione dell'1% - 8
- centro di massa del sistema solare* - 4
- coniglio della gravitazione* - 1
- Copernicus*: De revolutionibus orbium coelestium - 1
- costante di gravitazione universale*: richiede una misura diretta - 8
- densità*: superficiale e densità media; nucleo più denso - 15
- densità dei pianeti*: dato variabile - 12
- effetti perturbativi* - 14
- Esercizio*: Andamento della gravità terrestre con la profondità; interpretazione - 43; andamento di g con la quota per $h \ll R$ - 37; bilancio tra attrazione terrestre e lunare - 17; Campo gravitazionale in una sfera con zone a densità diversa - 41; Dalla gravità alla densità del nucleo metallico della Terra - 43; effetti gravitazionali in una sfera omogenea di raggio r ; all'interno e all'esterno - 36; Esperimenti gravitazionali in una astronave - 42; In una sfera cava il campo gravitazionale si annulla; teorema di Gauss per la gravitazione(?) - 35; Incidenza del mantello sulla gravità terrestre - 43; Incidenza della crosta sulla gravità terrestre - 43; l'accelerazione di gravità sulla Luna - 17; Misure di gravità in una miniera - 44; prima velocità cosmica; relazione tra periodo e distanza - 16; Satelliti in moto simultaneo; allineamento - 42; satelliti sincroni - 18; Sonda SOHO - 41; Stella doppia - 42; Stella, pianeta e satellite - 42; Studio delle maree - 37; Variazioni di gravità dovute alla rotazione del pianeta - 42
- forza che fa girare i pianeti*: fa girare anche la Luna - 5
- forza di gravitazione*: carattere universale - 5; proporzionalità con le masse - 7
- forza peso*: forza gravitazionale; il ruolo della rotazione - 19
- Galilei*: Dialogo sui massimi sistemi - 3; Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze - 3; Sidereus Nuncius - 3
- gravità*: variazioni dovute alla presenza della Luna - 39
- gravità di un pianeta*: massa e dimensioni - 12
- III legge di Kepler*: deduzione e interpretazione delle costanti - 9; distanza dei pianeti lontani - 9
- indagine gravimetrica* - 15
- interazione gravitazionale*: disputa sulla modalità di trasmissione - 11
- inverso del quadrato della distanza*: annullamento effetti gravitazionali - 36
- Kepler*: Astronomia nova - 2

L'esponente della distanza: $\alpha = 2$ - 6

legge delle aree: Kepler - 2

legge delle orbite: Kepler - 2

legge di gravitazione universale: enunciato - 7

Luna: come la pesiamo? - 14

maree: aspetti energetici - 37; come si originano; aspetti quantitativi in opposizione e in quadratura - 37; effetto della rotazione della Terra intorno al centro di massa Terra-Luna - 5; frequenza - 37; innalzamento in mare aperto - 40; innalzamento teorico in mare aperto - 37; solari e lunari - 37

maree solari - 39

massa del Sole: determinazione; valore - 14; domande sul consumo di energia - 14

massa della Terra: determinazione; valore; densità media - 14

massa di un pianeta: accelerazione di un satellite - 14

modello newtoniano: prendere atto dell'azione a distanza; vortici di Cartesio - 11

Modugno: un twist degli anni 60 - 17

Newton: afera e massa puntiforme; pausa di riflessione - 7; metodo delle flussioni - 3; non avanza ipotesi sull'origine della gravitazione; citazione - 11; orizzonte culturale più vasto di Kepler - 3; *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* - 1, 3

onda di marea - 39

Problemi di fine capitolo - 35–44

quantità: qualità - 2

Quesiti dalle Olimpiadi della Fisica - 31–34

Quesiti di fine capitolo - 21–30

raggio polare: raggio equatoriale - 19

ragionamenti condotti da Newton: la legge dell'inverso quadrato - 4

ripudio della forma circolare nei moti celesti: Kepler - 2

Selene: il peso sulla Luna è la metà della metà - 17

sincronia tra moto di rotazione e di rivoluzione lunare - 40

sistema solare: dati osservativi e sperimentali - 10

Terra: ipotesi sulla formazione - 15

Tycho Brahe: la prima supernova - 2

unificazione di terra e cielo - 1

unità astronomica: definizione e valore - 10

valore di G: misura più accurata - 9

