I.14. Le forze conservative e l'energia potenziale

- ⌘ Riprendiamo la definizione di lavoro
- ⌘ Il lavoro di alcune forze speciali
- ⌘ Le forze conservative e la energia potenziale
- ⌘ L'energia potenziale per le forze costanti, elastica e gravitazionale
- ⌘ Quesiti di fine capitolo
- ⌘ Quesiti dalle Olimpiadi della Fisica

14.1 Riprendiamo la definizione di lavoro

14.1.1 IL LAVORO ELEMENTARE

Nel capitolo 11 abbiamo incontrato la *definizione di lavoro* come una grandezza che relaziona le forze con gli spostamenti e che si collega alla *energia cinetica*. In questo capitolo la nozione di lavoro verrà ripresa e collegata ad altre forme di energia.

Il *lavoro elementare* compiuto da una forza $\boldsymbol{F}$ durante uno spostamento infinitesimo $\delta \boldsymbol{l}$ è pari al prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo tra di essi (il prodotto scalare).

$$\delta\mathscr{L} = F\,\delta l \cos\alpha \qquad \text{(I.14.1)}$$

o, visto che moltiplicare per il coseno vuol dire calcolare la componente (proiezione), *il lavoro elementare è pari al prodotto della componente tangenziale della forza per il modulo dello spostamento.*

$$\delta\mathscr{L} = F_t\,\delta l \qquad \text{(I.14.2)}$$ [1]

A seconda che l'angolo α sia acuto od ottuso il lavoro elementare risulta positivo o negativo.

14.1.2 IL LAVORO COME SOMMA DEI LAVORI ELEMENTARI

Per calcolare il *lavoro* relativo ad uno spostamento finito, si divide il cammino in tanti spostamenti piccoli e si calcolano i lavori elementari relativi a ciascuno spostamento piccolo. Quindi si calcola il lavoro come somma di quelli elementari:

dalla definizione di lavoro elementare al lavoro come grandezza integrale

$$\mathscr{L} = \delta\mathscr{L}_1 + \delta\mathscr{L}_2 + \ldots + \delta\mathscr{L}_n = \sum\delta\mathscr{L}_i \qquad \text{(I.14.3)}$$

Il calcolo così eseguito fornisce un risultato esatto se si utilizzano gli strumenti rigorosi della analisi matematica, in caso contrario, operando con quantità finite e non infinitesime si ottiene un valore approssimato.

Ricordiamo che la ragione per cui si dà la definizione di lavoro come somma di tanti lavori elementari è legata al fatto che, così facendo, il teorema della energia cinetica può essere applicato, oltre che a spostamenti elementari, anche a spostamenti finiti.

14.1.3 IL SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL LAVORO

In generale la componente tangenziale della forza è una grandezza variabile. Per calcolare graficamente il *lavoro* si divide il percorso Δl in tanti spostamenti elementari δl lungo i quali si possa trattare la forza come

---

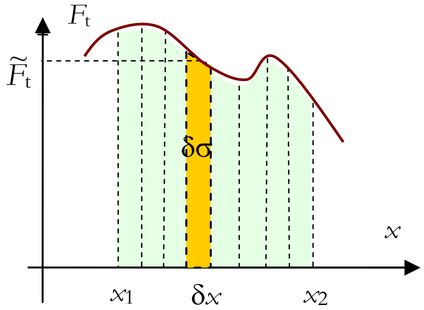
[1] Si osservi che $F \cos\alpha = F_t$ ma anche che $\delta l \cos\alpha = \delta l_F$ pertanto il *lavoro elementare* può essere espresso sia come *prodotto della proiezione della forza sullo spostamento per lo spostamento, sia come prodotto della forza per la proiezione dello spostamento sulla forza.* La prima formulazione è quella di uso più comune. Inoltre, per chi apprezza il calcolo vettoriale, si può parlare di prodotto scalare tra i due vettori e la cosa si rivela comoda quando la forza è espressa attraverso i versori degli assi e le componenti.

costante e lo spostamento come rettilineo. Quindi si moltiplica il valore della forza, relativo ad ogni intervallo, per il corrispondente spostamento e poi si sommano tutti i prodotti come previsto dalla (I.14.3). Il calcolo, così effettuato fornisce il valore dell'area della parte di figura a gradini (istogramma) che corrisponde all'area del diagramma tanto meglio quanto i valori di δl sono piccoli.

Il processo è stato più volte utilizzato in cinematica per trovare lo spazio percorso dal diagramma della velocità, e in dinamica per trovare l'impulso di una forza variabile e quindi non ci soffermiamo ulteriormente su di esso. Osserviamo che la grandezza che abbiamo calcolato contiene in un solo numero informazioni relative ad un intero percorso e che pertanto, in generale, se cambia il percorso, senza che mutino i punti di partenza e di arrivo, cambia anche il valore del lavoro.

In fisica si dice che le *grandezze* definite in questo modo hanno *natura integrale* per distinguerle da quelle definite come rapporti di incrementi che si dice abbiano *natura differenziale*. Appartengono al primo gruppo l'impulso di una forza, lo spazio percorso calcolato attraverso la velocità, il lavoro. Appartengono al secondo gruppo la velocità istantanea, la accelerazione, la intensità di corrente, il gradiente, la densità.

Nel corso di questo capitolo applicheremo la definizione generale di lavoro al calcolo relativo a forze variabili particolarmente importanti.



l'area del diagramma della forza tangenziale riferita allo spostamento fornisce il lavoro

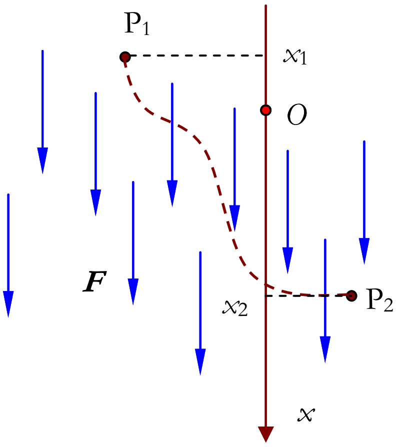
una importante riflessione sulle grandezze differenziali e su quelle integrali in fisica

14.2 Il lavoro di alcune forze speciali

14.2.1 LE FORZE COSTANTI

Le *forze costanti* sono quelle forze che in ogni punto dello spazio hanno la stessa direzione, verso e intensità. Esempi di forze costanti sono il peso, quando si considerano regioni spaziali piccole e, in elettricità, le forze prodotte dai campi uniformi.

Le forze costanti hanno la proprietà che il *lavoro* da esse compiuto non dipende dal particolare percorso seguito, ed è pari al *modulo della forza per la componente dello spostamento nella direzione della forza.*



Vogliamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza ***F*** per spostare il suo punto di applicazione dal punto P_1 a P_2 lungo un generico percorso curvilineo.

Poiché lungo un percorso curvilineo cambiano gli angoli tra forza e spostamento dividiamo il percorso in tanti percorsi elementari $\delta \boldsymbol{l}$ e calcoliamo il generico lavoro elementare. Se consideriamo un asse x orientato come la forza, possiamo osservare che il generico lavoro elementare:

$\delta\mathscr{L} = F\,\delta l \cos\alpha = F\,\delta x$ e pertanto:

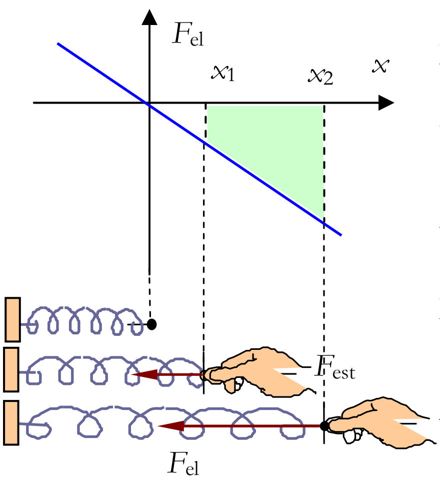
$$\mathscr{L} = \sum \delta\mathscr{L}_i = \sum F\,\delta x_i = F \sum \delta x_i = F\,\Delta x = F\,(x_2 - x_1)$$

Dunque, nel caso di forze costanti, in valore e segno, e per qualsiasi percorso seguito:

$$\mathscr{L}_{P_1 \to P_2} = F\,(x_2 - x_1) \qquad \text{(I.14.4)}$$

14.2.2 LA FORZA ELASTICA

La *forza elastica* è una forza di richiamo, cioè una forza che si oppone sempre agli spostamenti rispetto alla posizione di equilibrio.



il lavoro della forza elastica è caratterizzato dalla differenza di termini quadratici

Per questa ragione la si descrive solitamente attraverso una coordinata spaziale che descrive proprio quegli spostamenti.

$$F_{el} = -k\,x \qquad \text{(I.14.5)}$$

dove k rappresenta la costante elastica.

L'andamento di tale forza è rappresentato in Figura attraverso una retta di coefficiente angolare negativo passante per l'origine. Il *lavoro* eseguito da tale forza per lo spostamento $\Delta x = x_2 - x_1$ è pari all'area sotto la curva (area del trapezio tratteggiato con valore negativo):

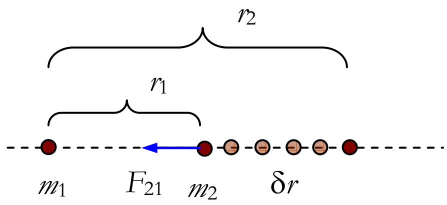
$$\mathscr{L}_{el} = \text{area trapezio} = \frac{F_1 + F_2}{2}\,\Delta x = -\frac{k\,x_1 + k\,x_2}{2}\,(x_2 - x_1)$$

$$\mathscr{L}_{el} = \frac{k\,x_1^2}{2} - \frac{k\,x_2^2}{2} \qquad \text{(I.14.6)}$$

Quando $x_2 > x_1$, cioè quando si allunga la molla, la forza elastica fa un lavoro negativo e viceversa. Si tratta di una proprietà generale. In effetti, quando aumenta la distanza tra corpi che si attirano, le forze di attrazione hanno proiezioni negative sugli spostamenti. Quindi una forza attrattiva compie un lavoro negativo mentre le forze repulsive agiscono nel verso degli spostamenti e quindi producono lavori positivi.

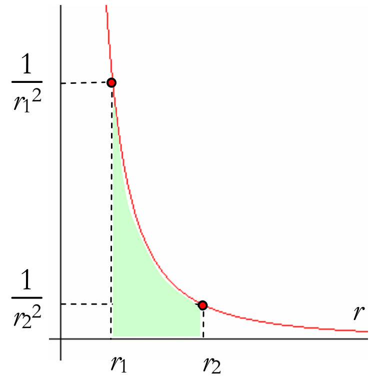
14.2.3 Il lavoro della forza gravitazionale nel caso di spostamento radiale

Nel ricavare il valore del lavoro di una forza elastica non ci sono state difficoltà perché l'area interessata era quella di un trapezio, ma calcolare il *lavoro* della *forza gravitazionale* presenta qualche difficoltà matematica in più.



Supponendo che due masse m_1 e m_2 poste a distanza r_1 vengano allontanate da r_1 a r_2 ci proponiamo di calcolare il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale (attrattiva) durante questo spostamento.

Le difficoltà derivano dal fatto che queste forze dipendono dall'inverso del quadrato della distanza, e pertanto il diagramma è curvilineo, come si vede in figura in cui si è rappresentato il diagramma della funzione $\frac{1}{r^2}$ che, a meno di una costante moltiplicativa, cioè di un cambiamento di scala, rappresenta anche l'andamento della forza gravitazionale (e come vedremo più avanti anche della forza elettrica) al variare della distanza tra le masse.



si dimostra tramite l'analisi matematica che l'area della funzione $\frac{1}{r^2}$ vale $\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}$ e ciò ci consente di calcolare il lavoro della forza gravitazionale e di quella elettrica

Attraverso conoscenze di *analisi matematica* si può dimostrare che l'*area* racchiusa dalla curva $y = \frac{1}{x^2}$ tra due suoi punti di ascissa x_1 e x_2 è pari a $\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$ e pertanto, poiché sia G che le masse sono delle costanti e possono essere portate fuori dal segno di sommatoria, si ha che il lavoro è dato da $G\, m_1\, m_2$ moltiplicato per l'area della funzione $\frac{1}{r^2}$

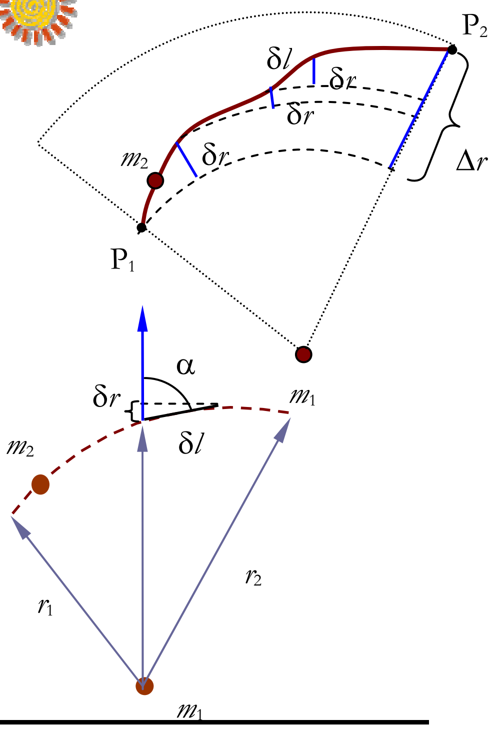
Possiamo dunque concludere che. nel caso in cui il percorso sia di tipo rettilineo e radiale, ci si muova cioè lungo la direzione di un raggio vettore:

$$\mathcal{L} = \sum \delta\mathcal{L}_i = \sum -G\,\frac{m_1\, m_2}{r^2}\,\delta r = -G\, m_1 m_2 \sum \frac{1}{r^2}\,\delta r = -G\, m_1 m_2 \times \text{area}$$

$$\mathcal{L} = -G\, m_1 m_2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \qquad \text{(I.14.7)}$$

Il segno del lavoro risulterà positivo nei processi di avvicinamento e negativo nei processi di allontanamento.

Osserviamo infine che il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale è del tutto indipendente dal fatto che si sposti il corpo 1 o il corpo 2, ciò che conta è solo il movimento relativo.



14.2.4 Se lo spostamento non è radiale, non cambia nulla

Calcoliamo ora il *lavoro* della forza gravitazionale nel caso in cui lo spostamento non sia rettilineo e la massa si muova lungo un percorso curvilineo qualsiasi, come in figura (da P_1 a P_2).

Il percorso viene suddiviso in tanti spostamenti infinitesimi δl e lungo ciascuno di questi spostamenti il lavoro compiuto, come si evince dalla figura, vale:

$$\delta\mathcal{L} = F\,\delta l \cos\alpha = F\,\delta r$$

Ma questa equazione è del tutto analoga a quella già applicata per gli spostamenti radiali e pertanto porta ancora al risultato (I.14.7).

Possiamo pertanto concludere che, *il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale durante uno spostamento curvilineo non dipende dalla forma della traiettoria, ma solo dai vettori posizione iniziale e finale* e ha l'espressione data dalla equazione (I.14.7).

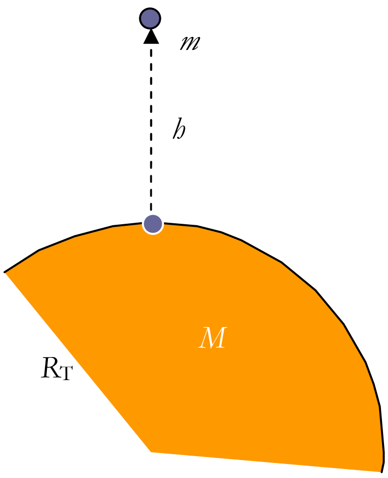
Se si presta attenzione alla deduzione della proprietà di indipendenza dal cammino si nota che essa è stata dedotta sfruttando il fatto che la forza ha direzione radiale e ciò ci porta a concludere che tutte le forze dirette verso un punto fisso (*forze centrali*) godono della proprietà che il *lavoro* è indipendente dal percorso indipendentemente dalla legge che ne governa la intensità.

14.2.5 QUANDO SI PUÒ CONSIDERARE COSTANTE LA FORZA PESO NEL CALCOLO DEL LAVORO?

Esercizio: Dato un errore prefissato stabilire entro quale dimensione spaziale si possa considerare costante la forza peso agli effetti del calcolo del lavoro.

Supponiamo che un corpo di massa m venga sollevata ad una quota h dalla superficie terrestre. Ponendo $m_1 = m$ e $m_2 = M_T$ (massa della terra), $r_1 = R_T$ (raggio terrestre) e $r_2 = R_T + h$ si ottiene l'espressione del lavoro compiuto dalla forza di gravità:

$$\mathscr{L}_{grav} = -G\frac{m\,M_T}{R_T} + G\frac{m\,M_T}{R_T + h} = -G\,m\,M_T\frac{h}{R_T(R_T + h)} \qquad \text{(I.14.8)}$$



Nel caso in cui l'altezza h sia molto minore del raggio terrestre si può assumere che sia $R_T + h \approx R_T$ e si arriva a:

$$\mathscr{L}_{grav} \approx -\frac{G\,m\,M_T\,h}{R_T^{2}} = -\,m\,g\,h \qquad \text{(I.14.9)}$$

La derivazione precedente è complicata, ma ha però il vantaggio di consentire la stima dell'errore che si commette usando l'equazione approssimata al posto di quella esatta.

Per esempio, se supponiamo che l'errore massimo debba essere inferiore all'1%, avremo (indicando con $\mathscr{L}_{app}$ e $\mathscr{L}_{esa}$ il valore esatto e quello approssimato del lavoro):

$$\frac{\mathscr{L}_{app} - \mathscr{L}_{esa}}{\mathscr{L}_{esa}} = \frac{\mathscr{L}_{app}}{\mathscr{L}_{esa}} - 1 = \frac{\dfrac{G\,m\,M_T\,h}{R_T^{2}}}{G\,m\,M_T\dfrac{h}{R_T(R_T + h)}} - 1 = \frac{R_T + h}{R_T} - 1 =$$

$$\frac{h}{R_T} \le 0.01$$

Dunque in calcoli relativi al lavoro compiuto dalla forza gravitazionale, sino ad una altezza $h = 0.01\times R_T = 0.01\times 6'371 \approx 64$ km, si può utilizzare l'espressione approssimata con un errore inferiore all'1 %.

14.3 Le forze conservative e l'energia potenziale

14.3.1 ESISTONO FORZE PER LE QUALI IL LAVORO NON DIPENDE DAL PERCORSO MA SOLO DAGLI ESTREMI

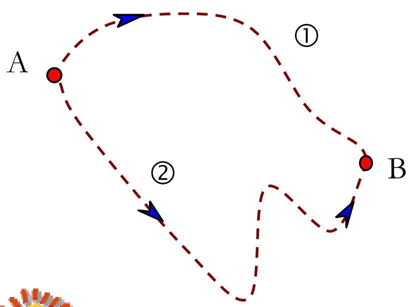
Nei paragrafi precedenti abbiamo visto che esistono delle forze (quelle costanti, quella elastica, quella gravitazionale e quella elettrica) per le quali il lavoro compiuto, nel caso di spostamenti qualsiasi, non dipende dalla forma della traiettoria percorsa dalla particella su cui si applica la forza, ma solo dalle coordinate iniziali e finali. Le forze che godono di una proprietà del genere sono dette *conservative*.[2]

forze conservative: il lavoro non dipende dal particolare percorso

forze conservative: il lavoro lungo un percorso chiuso è zero

Le *forze conservative* godono di un'altra proprietà del tutto equivalente a quelle appena enunciata: *il lavoro compiuto da una forza conservativa lungo una traiettoria chiusa è nullo.*

Per dimostrarlo consideriamo una traiettoria chiusa e su di essa due punti qualsiasi A e B. Indichiamo con $\mathcal{L}_{(1)}$ e $\mathcal{L}_{(2)}$ i lavori corrispondenti ai percorsi (1) e (2). Dalla definizione di forza conservativa segue che quando il corpo si muove da A a B il lavoro non dipende dal percorso seguito e pertanto $\mathcal{L}_{(1)} = \mathcal{L}_{(2)}$.



Cosa accade del lavoro quando si percorre uno stesso percorso in senso inverso? Poiché compiendo il percorso inverso si invertono tutti gli spostamenti elementari, mentre le forze non cambiano, si invertono anche tutti i lavori elementari e pertanto se indichiamo con $\mathcal{L}'$ il lavoro lungo il percorso inverso sarà $\mathcal{L}' = -\mathcal{L}$.

Se indichiamo con $\underset{O}{\mathcal{L}}$ il lavoro relativo alla generica traiettoria chiusa avremo che:

$$\underset{O}{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_{(1)} + \mathcal{L}'_{(2)} = \mathcal{L}_{(1)} - \mathcal{L}_{(2)} = \mathcal{L}_{(1)} - \mathcal{L}_{(1)} = 0 \qquad \text{(I.14.10)}$$

14.3.2 LE FORZE D'ATTRITO SONO DISSIPATIVE

Nel ragionamento precedente abbiamo ipotizzato che le forze non cambiassero al cambiare di verso dello spostamento; ma esiste una categoria di forze (quelle d'attrito) che hanno sempre la stessa direzione dello spostamento e verso opposto. Pertanto le *forze d'attrito* sono sicuramente *non conservative*. Anzi possiamo affermare che il lavoro da esse compiuto cresce al crescere dello spazio percorso ed è sempre negativo. Il valore minimo (in senso assoluto) si avrà per gli spostamenti di lunghezza minima, cioè per i percorsi rettilinei.

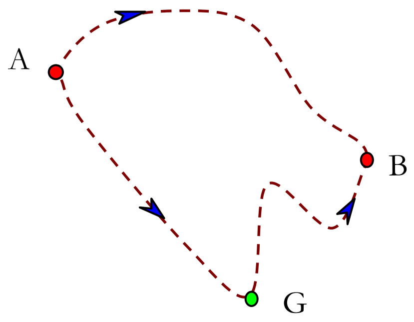
14.3.3 UNA PROPRIETÀ DELLE FORZE CONSERVATIVE: IL LAVORO SI PUÒ SEMPRE SCRIVERE COME DIFFERENZA

Le *forze conservative* godono di una terza proprietà molto importante che sarà utilizzata a fondo per definire la energia potenziale: *il lavoro compiuto per andare da un punto ad un altro qualsiasi dello spazio può sempre essere scritto come differenza di due grandezze dipendenti solo dal punto di partenza e dal punto di arrivo.*

il lavoro come differenza di due quantità dipendenti solo dal punto di partenza e di arrivo

[2] Il termine *conservativo* si riferisce al fatto che quando agiscono solo forze conservative, come vedremo, *l'energia si conserva.*

Indichiamo genericamente con A e B i punti di partenza e di arrivo e consideriamo un punto arbitrario, ma fissato, che sarà usato come punto riferimento per misurare la nuova grandezza che ci apprestiamo a definire. Indichiamo con G tale punto.



Poiché $\mathscr{L}_{A\to B}$ non dipende dal percorso potremo scrivere che:

$$\mathscr{L}_{A\to B} = \mathscr{L}_{A\to G} + \mathscr{L}_{G\to B} = \mathscr{L}_{A\to G} - \mathscr{L}_{B\to G} \qquad \text{(I.14.11)}$$

14.3.4 LA DEFINIZIONE DI ENERGIA POTENZIALE

Introduciamo ora una nuova grandezza fisica che chiameremo *energia potenziale* ponendo per definizione:

l'energia potenziale viene definita come il lavoro (lungo un percorso qualsiasi) compiuto da una forza conservativa che sposta il suo punto di applicazione dal punto considerato sino ad un riferimento prefissato

$$U_A = \mathscr{L}_{A\to G} \quad [3] \qquad \text{(I.14.12)}$$

La nuova grandezza U gode delle due seguenti proprietà:

- $$\mathscr{L}_{A\to B} = U_A - U_B = -\Delta U \qquad \text{(I.14.13)}$$

  il lavoro di una forza conservativa per andare da un punto ad un altro non dipende dal percorso e si può scrivere come variazione, cambiata di segno, di una nuova grandezza, detta energia potenziale, che dipende solo dal punto iniziale e finale.

- $$U_G = \mathscr{L}_{G\to G} = 0 \qquad \text{(I.14.14)}$$

  la energia potenziale vale zero nel punto preso come riferimento per la sua definizione

Perché energia? Perché potenziale? La nozione di energia è stata associata alla capacità di mettere in gioco del lavoro e in questo caso abbiamo una grandezza per la quale si ha a che fare con un lavoro (quello della forza conservativa) il cui valore dipende dalla posizione (per questa ragione la si chiama anche *energia posizionale*). Il termine potenziale fa riferimento al fatto che la energia potenziale si possa trasformare in energia cinetica grazie al lavoro della forza conservativa e ci rimanda alla distinzione aristotelica tra *atto* e *potenza*.

14.3.5 LA DIPENDENZA DELLA DEFINIZIONE DAL RIFERIMENTO

Cosa accade alla energia potenziale se si cambia il punto G di riferimento?

se cambia il riferimento tutte le energia cambiano di una stessa quantità e dunque le differenze di energia non cambiano

Ovviamente la energia potenziale cambia, ma cambia di una stessa quantità per tutti i punti dello spazio. Se infatti indichiamo con G' il nuovo punto di riferimento avremo che:

$$U'_A = \mathscr{L}_{A\to G'} = \mathscr{L}_{A\to G} + \mathscr{L}_{G\to G'} = U_A + \mathscr{L}_{G\to G'} \qquad \text{(I.14.15)}$$

Dunque, se si cambia il riferimento, la energia potenziale di un generico punto dello spazio cambia di una quantità costante pari al lavoro necessario per andare dal vecchio riferimento al nuovo riferimento.

---

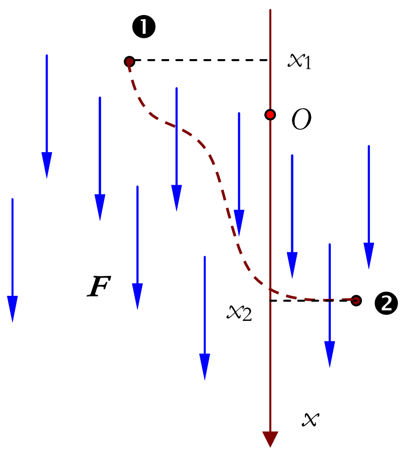
[3] Ci si potrebbe chiedere cosa c'entri la richiesta della *conservatività* con la definizione che abbiamo appena dato. La risposta è molto semplice, anche se non immediata: se la forza non fosse conservativa il lavoro dipenderebbe dal percorso e dunque U non sarebbe definita in maniera univoca, perché il suo valore dipenderebbe dal percorso seguito per andare dal punto al riferimento. Dunque la energia potenziale può essere definita solo per le forze conservative.

Con quale criterio si sceglierà il riferimento G ? La risposta è che *il problema non ha rilevanza* perché *nei calcoli sulla energia interessano sempre e solo le differenze di energia, e la differenza di energia potenziale non dipende dal riferimento.* Detto questo, il riferimento, per tradizione, viene preso nei punti di annullamento della forza, nel caso di forze variabili, mentre nel caso delle forze costanti lo si assume dove si è più comodi per lo svolgimento dei calcoli.

solitamente il riferimento dell'energia viene preso (per comodità) dove si annullano le forze

14.4 L'energia potenziale per le forze costanti, elastica e gravitazionale

14.4.1 L'ENERGIA POTENZIALE DELLE FORZE COSTANTI



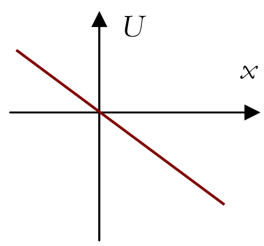
Le forze costanti hanno un certo interesse in fisica perché riguardano il caso della forza peso (quando gli spostamenti sono relativamente piccoli) e il caso di molte forze elettriche che vengono artificialmente create dall'uomo in modo di risultare invariabili nello spazio sia in intensità sia in direzione e verso.

Se la forza è costante è implicitamente assegnata una direzione privilegiata (quella della forza) ed è dunque opportuno riferire tutti gli spostamenti a quella direzione. Per la stessa ragione, solitamente, si assume il riferimento dell'energia nell'origine del riferimento cui si riferiscono gli spostamenti.

Abbiamo già dimostrato che il lavoro non dipende dal percorso e ne abbiamo trovato il valore (I.14.4). Possiamo dunque definire una energia potenziale:

Nel caso della forza costante, con le convenzioni dette circa la scelta del riferimento, la *energia potenziale* sarà:

$$U_P = \mathscr{L}_{P\to O} = -F\,x_P \qquad \text{(I.14.16)}$$



forza costante $U_P = \mathscr{L}_{P\to O} = -F\,x_P$

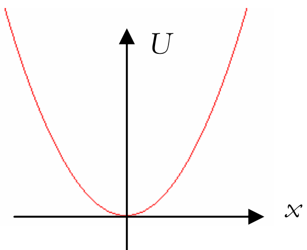
Se il sistema di riferimento viene preso antiparallelo rispetto alla forza si elimina il segno meno.

Il diagramma dell'energia è rappresentato da una retta di coefficiente angolare negativo passante per l'origine.

14.4.2 L'ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA ELASTICA

Nel caso della forza elastica, come si è accennato, il riferimento viene preso nel punto $x = 0$, cioè nel punto in cui la molla non risulta sollecitata. Pertanto la *energia potenziale* sarà:

$$U_{el} = \mathscr{L}_{x\to 0} = \frac{kx^2}{2} \qquad \text{(I.14.17)}$$



forza elastica $U = \mathscr{L}_{x\to 0} = \dfrac{kx^2}{2}$

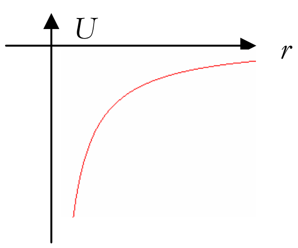
Il diagramma della energia è allora rappresentato da una parabola.

14.4.3 L'ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA DI GRAVITAZIONE

Nel caso della forza gravitazionale il riferimento viene preso all'infinito perché, visto che la forza decresce con l'inverso del quadrato della distanza, l'infinito sarà il punto di annullamento della forza.

Dunque prese due masse m_1 e m_2 poste a distanza r consideriamo un riferimento radiale con origine in m_1. In questo caso si ha che l'*energia potenziale* è il lavoro della forza gravitazionale necessario per spostare la massa m_2 da dove si trova all'infinito, cioè:

$$U = \mathscr{L}_{r\to\infty} = -G\,m_1 m_2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) = -\frac{G\,m_1 m_2}{r} \qquad \text{(I.14.18)}$$



forza gravitazionale $U = \mathscr{L}_{r\to\infty} = -\dfrac{G\,m_1 m_2}{r}$

Il fatto che l'energia sia sempre negativa è legato al fatto che per portare una massa all'infinito bisogna allontanare e per farlo la forza gravitazionale (che è attrattiva) compie sempre un lavoro negativo.

In questo caso la curva è rappresentata da una iperbole equilatera collocata nel quarto quadrante.

Si è già osservato che quando la forza riguarda una interazione, come nel caso della forza gravitazionale, il lavoro è identico sia che si muova l'una o l'altra delle due masse. A chi va allora riferita l'energia potenziale? La risposta è che l'energia riguarda il sistema e questo elemento va tenuto presente quando si ha a che fare con un sistema a più corpi (per esempio il sistema solare) in cui sono presenti molteplici forze di interazione.

La *energia potenziale* viene allora riferita ad ogni coppia di corpi interagenti e per evitare di calcolarla due volte quando si fa poi la somma di tutte le energie la si fa precedere da un fattore ½. La energia potenziale del sistema sarà allora la somma estesa a tutti i possibili valori degli indici di ½ dell'energia potenziale di ogni possibile coppia.

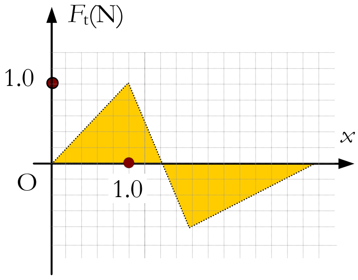
$$U = \frac{1}{2}\sum U_{\mathrm{ij}} \qquad \text{(I.14.19)}$$

Quando si vuole distinguere in una interazione tra la causa della forza e l'oggetto su cui la forza agisce si introducono in fisica i concetti di campo e di potenziale associati rispettivamente alla forza e alla energia potenziale gravitazionale.

Il campo è la forza divisa per la massa su cui agisce mentre il *potenziale* è l'energia divisa per la massa su cui si sta operando. L'argomento sarà ripreso nelle parti del corso in cui si opera regolarmente con ampi e potenziali (elettromagnetismo).

14.5 Quesiti di fine capitolo

1. Ricerca di *vero*: definizione di lavoro a) Il lavoro elementare di una forza $\vec{F}$ durante uno spostamento infinitesimo $\vec{\delta l}$ è pari *al prodotto della componente tangenziale della forza per il modulo dello spostamento* ovvero $\delta\mathscr{L} = F_t\,\delta l$; b) Il lavoro elementare è *sempre diverso da zero*; c) Il lavoro elementare *non può mai essere negativo*; d) Se il *lavoro elementare è nullo* vuol dire che *la forza in quello spostamento elementare è nulla.* [4]
2. Ricerca di *falso*: *definizione di lavoro.* a) Se la forza e lo spostamento elementare formano un *angolo ottuso* il lavoro è negativo. b) Il lavoro, relativamente ad uno spostamento finito, è pari alla *somma di quelli elementari* relativi a quello spostamento; c) Il lavoro svolto da una *forza costante* lungo una *porzione rettilinea* Δl di traiettoria può essere calcolato direttamente senza fare ricorso alla sommatoria dei lavori elementari; d) In generale, il *lavoro corrisponde all'area* sottesa dal diagramma con in ordinata il *modulo della forza* ed in ascissa lo *spostamento.* [5]



3. Ricerca di vero: definizione di lavoro; il diagramma qui a lato rappresenta la componente della forza nella direzione dello spostamento in funzione dello spostamento. Il *lavoro compiuto vale*: a) 1.5 J b) 1.0 J c) 0.1 J d) –0.1 J [6]
4. Ricerca di *vero: definizione di lavoro.* a) Il lavoro di una *forza costante* relativamente ad uno spostamento Δl vale $\mathscr{L} = F_t\,\Delta l = F\,\Delta l \cos\alpha$; b) Il lavoro compiuto da una forza *non dipende dalla traiettoria seguita*, ma solo dai punti di partenza e di arrivo; c) Il lavoro è una *grandezza di natura differenziale* perché nella sua definizione compaiono gli spostamenti elementari che sono dei differenziali; d) Quando l'angolo tra la forza e lo spostamento è *maggiore di 180° il lavoro è negativo* [7]
5. Dimostrare che il lavoro di una forza d'attrito costante di modulo F_a nel percorrere un quadrato di lato l vale $\mathscr{L} = -\,4\,F_a \cdot l$
6. Data una forza costante di modulo F orientata nel verso dell'asse y, dimostrare che il lavoro compiuto durante uno spostamento rettilineo dal punto A al punto B, vale $F\,(y_B - y_A)$ e viceversa nel caso in cui la forza abbia verso contrario.

---

[4] a) Vero, per definizione. b) Falso: è nullo quando la forza è perpendicolare allo spostamento. c) Falso: è negativo quando la forza forma un angolo ottuso con lo spostamento. d) Falso. Non necessariamente; basta che la forza sia perpendicolare allo spostamento.

[5] a) Vero b) Vero c) Vero. d) Falso. La affermazione è imprecisa; in ordinata deve esserci F_t cioè la componente tangenziale della forza e in ascissa la posizione misurata lungo la traiettoria.

[6] a) Falso b) Falso c) Falso d) Vero L'area è $\frac{1}{2}\cdot 1.4 \cdot 1.0 - \frac{1}{2}\cdot 2.0\cdot 0.8 = 0.7 - 0.8 = -0.1$ J

[7] a) Vero b) Falso: è vero per alcuni tipi particolari di forze. Controesempio: basta pensare al lavoro della forza d'attrito. Se percorro il lato AB di un rettangolo di lato a e indico con b la lunghezza dell'altro lato avrò per $\mathscr{L}$ il valore $-\,F\,a$. Se invece percorro i tre lati AD, DC, CB il lavoro sarà $-\,F\,b - F\,a - F\,b$ c) Falso: è una grandezza di tipo integrale come tutte le grandezze definite come somma di contributi elementari d) Falso. Se l'angolo è maggiore di 270° il lavoro è positivo

7. Stimare con riferimento ad una operazione di sollevamento di un peso, il lavoro di 10^5 Joule. [8]
8. Ricerca di *vero: il lavoro della forza elastica* a) Il lavoro compiuto da una forza elastica di costante k in un generico spostamento da x_1 a x_2 vale: $\mathscr{L}_{\mathrm{el}} = \frac{k x_1^2}{2} - \frac{k x_2^2}{2}$ dove x indica la *posizione dell'estremo mobile della molla rispetto all'estremo fisso*; b) Durante un *allungamento la molla compie un lavoro negativo*; c) Il lavoro compito dalla forza elastica è *proporzionale al quadrato dello spostamento*; d) Se in una forza elastica si quadruplica la costante elastica e si dimezza lo spostamento *il lavoro non cambia.* [9]
9. Ricerca di *vero: il lavoro della forza gravitazionale* a) si calcola stimando l'*area sottesa dalla iperbole equilatera*; b) durante uno *spostamento radiale* da r_1 a r_2 vale $\mathscr{L} = G\, m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$; c) in fase di *allontanamento delle masse* è *sempre negativo*; d) *è nullo quando lo spostamento avviene lungo archi di circonferenza.* [10]
10. Ricerca di *falso: lavoro della forza gravitazionale.* a) Quando un satellite si muove in orbita intorno ad un pianeta il *lavoro compiuto ad ogni giro* dalla forza che agisce sul satellite viene compensato da un piccolo rallentamento della rotazione del pianeta; b) nel caso di uno spostamento curvilineo *non dipende dalla forma della traiettoria*, ma solo dai vettori posizione iniziale e finale; c) Durante tutti i *processi di allontanamento le forze attrattive compiono sempre lavori negativi*; d) Si supponga di indicare con r e R le distanze tra la terra e il sole rispettivamente in perielio e in afelio. La *differenza di energia cinetica* della Terra nel passare da afelio a perielio vale: $G M_S M_T \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$ [11]
11. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza elastica utilizzando il significato geometrico del lavoro.
12. Spiegare il processo di calcolo del lavoro per la forza gravitazionale ipotizzando uno spostamento radiale.
13. Spiegare perché, se il lavoro della forza gravitazionale, nel caso di spostamenti radiali, vale $\mathscr{L} = -G\, m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ si ha ancora lo stesso risultato nel caso di spostamenti qualsiasi.

---

[8] Un kg peso equivale a circa 10 N. Pertanto il lavoro di 10^5 J equivale al sollevamento a 10^4 m di altezza del peso di 1 kg.

[9] a) Falso. Con x si indica la coordinata dell'estremo mobile misurata rispetto al punto di annullamento della forza b) Vero. La forza elastica è una forza di richiamo e pertanto durante gli allungamenti compie un lavoro negativo essendo in verso contrario allo spostamento. c) Falso è proporzionale alla differenza dei quadrati delle posizioni iniziale e finale d) Falso: vedi punto precedente

[10] a) Falso. La curva $1/r^2$ non corrisponde alla iperbole equilatera che varia come $1/r$ b) Falso vale $-G\, m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ c) vero: la forza gravitazionale è attrattiva e in fase di allontanamento compie lavori negativi d) Falso. Bisogna precisare che gli archi di circonferenza devono essere centrati sulla massa fissa in modo di dar luogo ad una forza perpendicolare allo spostamento.

[11] a) Falso: nel caso di orbita chiusa il lavoro è nullo b) Vero c) Vero d) Vero. Basta applicare a questo caso il calcolo del lavoro della forza gravitazionale e il teorema dell'energia cinetica.

14. Spiegare perché, nel calcolo del lavoro della forza gravitazionale interviene un segno meno. [12]
15. Stimare l'errore relativo che si compie nel calcolo del lavoro della forza gravitazionale se si ipotizza che la forza sia costante quando si compie uno spostamento di 2'000 m a partire dalla superficie terrestre. [13]
16. Spiegare perché per tutte le forze di tipo centrale (cioè dirette verso un punto fisso) il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e da quella finale e non dalla forma della traiettoria.
17. Ricerca di *vero*: forze conservative. a) Una forza si dice conservativa quando il lavoro compiuto da essa lungo una generica traiettoria dipende solo dai punti di partenza e di arrivo e non dalla particolare traiettoria. b) Quando agiscono forze conservative non si possono avere variazioni di energia cinetica. c) Nel caso della forza d'attrito vale la affermazione $\underset{A\to B}{\mathscr{L}} = -\underset{B\to A}{\mathscr{L}}$ ipotizzando che la traiettoria sia la stessa. d) Nel caso di una forza costante vale la affermazione $\underset{A\to B}{\mathscr{L}} = -\underset{B\to A}{\mathscr{L}}$ ma solo ipotizzando che la traiettoria sia la stessa. [14]
18. Energia potenziale; ricerca di *falso* a) Per una forza conservativa *il lavoro compiuto per andare da un punto ad un altro qualsiasi dello spazio può sempre essere scritto come differenza di due grandezze dipendenti solo dal punto di partenza e dal punto di arrivo*. b) Si chiama energia potenziale di una particella soggetta all'azione di una forza conservativa e collocata in un punto A il lavoro che la forza conservativa compie per spostare la particella dal punto A ad un punto di riferimento prefissato. c) Il riferimento che compare nella definizione di energia potenziale deve essere un sistema di riferimento inerziale. d) Il riferimento che compare nella definizione di energia potenziale corrisponde al punto zero della energia stessa. [15]
19. Definizione di energia potenziale; ricerca di *falso* a) Per la energia potenziale vale sempre la relazione $\underset{A\to B}{\mathscr{L}} = U_A - U_B = -\Delta U$ dove $\underset{A\to B}{\mathscr{L}}$ è il lavoro compiuto dalla risultante di tutte le forze applicate alla particella che viene spostata da A a B. b) Il valore di energia potenziale di un punto dipende oltre che dal punto considerato anche dal punto scelto come riferimento. c) La energia potenziale è una gran-

---

[12] La forza gravitazionale è una forza di richiamo

[13] Come si è dimostrato nel testo l'errore relativo vale $\frac{h}{R_T} = \frac{2}{6.37\times 10^3} \approx 3.14\times10^{-4}$

[14] a) Vero b) Falso: non si hanno per traiettorie chiuse c) Falso. Poiché quando si inverte lo spostamento elementare si inverte anche il verso della forza si ha che $\underset{A\to B}{\mathscr{L}} = \underset{B\to A}{\mathscr{L}}$ d) Falso. La proprietà è del tutto generale. Le forze costanti sono l'esempio più semplice di forze conservative.

[15] a) Vero b) Vero c) Falso. La domanda è quanto di più insensato si potesse porre. Il riferimento per la energia è un punto e non un sistema di di coordinate di riferimento. d) Vero per definizione visto che $U_{rif} = \underset{rif\to rif}{\mathscr{L}} = 0$

dezza relativa. d) Ciò che conta da un punto di vista energetico sono le differenze di energia e non il valore assoluto della energia. [16]

20. Definizione di energia potenziale; ricerca di falso. a) Quando si cambia il riferimento la energia potenziale di tutti i punti cambia in maniera imprevedibile. b) Quando si cambia riferimento il valore della energia cambia per tutti i punti di una stessa quantità. c) La energia potenziale è definita a meno di una costante additiva. d) Il riferimento per la energia potenziale, per le forze variabili, viene di solito preso in corrispondenza del punto di annullamento della forza. [17]
21. Dimostrare che è del tutto equivalente affermare che una forza è conservativa o che il lavoro lungo una traiettoria chiusa è nullo. Trattandosi di equivalenza, discutere le implicazioni in entrambi i versi. [18]
22. Dimostrare che se una forza è conservativa si può sempre scrivere $\underset{A\to B}{\mathcal{L}}$ come differenza di due grandezze f_A e f_B dipendenti solo dai due punti A e B oltre che da un opportuno riferimento.
23. Spiegare perché l'energia potenziale può essere definita solo per le forze conservative. [19]
24. Dimostrare che quando si cambia il riferimento da G a G' la energia potenziale cambia di una costante pari a $\underset{G\to G'}{\mathcal{L}}$
25. Ricerca di *vero*. Energia potenziale elastica; a) La energia potenziale per la forza elastica di costante k a distanza x dal punto di equilibrio vale $U_{el} = \frac{kx^2}{2}$. b) Nel definire la energia potenziale bisogna distinguere quando la molla lavora in allungamento da quando lavora in compressione c) Presa una molla di costante k e di lunghezza di riposo l si supponga di misurare con x la distanza dall'origine della molla. In questo caso la energia potenziale varrebbe $U_{el} = \frac{k(x^2 - l^2)}{2}$. d) La energia potenziale della forza elastica è positiva nei punti di distensione e negativa in quelli di compressione. [20]

---

[16] a) Falso. Il lavoro di cui si parla è quello compiuto dalla forza conservativa considerata. b) Vero. Ma le differenze di energia potenziale non dipendono, invece, dal riferimento. c) Vero: è relativa al riferimento d) Vero.

[17] a) Falso. Cambia per tutti i punti di una stessa quantità pari al lavoro per andare da un riferimento all'altro. b) Vero; vedi risposta precedente c) Vero d) Vero. La cosa non è obbligatoria ma, trattandosi di un punto da fissare arbitrariamente e la cui scelta non determina differenze significative in chiave operativa si è convenuto di scegliere il punto che corrisponde alla scomparsa della interazione.

[18] Si veda il testo. Si consiglia di soffermarsi con attenzione sulla definizione del contesto (chi sono i punti che intervengono nella dimostrazione).

[19] Se la forza di cui si parla non è conservativa, posto $U_P = \underset{P\to rif}{\mathcal{L}}$ non avremmo definito un bel nulla perché la grandezza appena definita avrebbe valore diverso a seconda della traiettoria seguita per andare da *P* al riferimento.

[20] a) Vero b) Falso; in entrambi i casi è positiva e vale ½ k x^2 c) Falso. Poiché la coordinata che entra nel calcolo della energia potenziale è la distanza dalla posizione di e-

26. Ricerca di *vero*; Energia potenziale di una forza costante; a) L'energia potenziale è data dal prodotto della forza per la distanza dall'origine del sistema di riferimento b) La energia potenziale non dipende dalla scelta del riferimento c) I punti con la stessa energia potenziale stanno su piani perpendicolari alla direzione della forza d) L'energia potenziale vale $F\,x$ dove x indica la quota misurata nella direzione e verso della forza. [21]
27. Ricerca di *vero*. Energia potenziale della interazione gravitazionale per due masse m_1 e m_2 poste a distanza r; a) vale $U = \mathscr{L}_{r\to\infty} = \frac{G\,m_1 m_2}{r}$ b) la energia potenziale è riferita ad entrambe le masse c) La energia potenziale può essere calcolata solo a condizione di assumere come riferimento di essa l'infinito d) Per un corpo alla superficie terrestre vale $U = \frac{G\,m\,m_T}{R_T}$ [22]
28. Spiegare perché la energia potenziale gravitazionale presenta un segno –.
29. Si supponga di misurare l'energia potenziale del campo gravitazionale assumendo come riferimento la superficie terrestre. Scrivere come cambia l'espressione della energia potenziale a distanza r dal centro della terra. [23]
30. Qual è il legame tra $\mathscr{L}_{1\to2}$ ed energia potenziale? Spiega la risposta [24]

---

quilibrio, la equazione rappresentativa è $U_{el} = \frac{k(x-l)^2}{2}$ d) Falso. È sempre positiva ed ha l'andamento di una parabola.

[21] a) Falso: semmai si deve parlare di distanza dal riferimento della energia potenziale, inoltre c'è una questione di segni b) Falso: dipende sempre dalla scelta del riferimento c) Vero: lungo tale piano la forza non compie lavoro d) Falso: in quel caso vale $-F\,x$

[22] a) Falso vale $-\frac{G\,m_1 m_2}{r}$ b) Vero c) Falso; la scelta dell'infinito è puramente convenzionale d) Falso vale $-\frac{G\,m\,m_T}{R_T}$

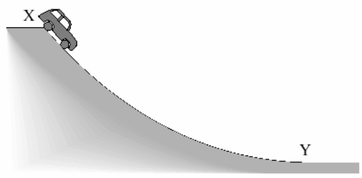
[23] Basta usare la espressione del lavoro e la definizione di energia potenziale.

[24] $\mathscr{L}_{1\to2} = \mathscr{L}_{1\to rif} + \mathscr{L}_{rif\to2}$ perché il lavoro non dipende dal percorso (forza conservativa) $= \mathscr{L}_{1\to rif} - \mathscr{L}_{2\to rif}$ perché se si invertono gli spostamenti il lavoro cambia segno = $U_1 - U_2 = -\Delta U$ per definizione di energia potenziale

14.6 Quesiti dalle Olimpiadi della Fisica

Quasi tutti i quesiti proposti riguardanti l'energia potenziale si risolvono in maniera semplice utilizzando la conservazione della energia e pertanto verranno proposti nel capitolo successivo. Lo stesso discorso può essere fatto per i problemi di fine capitolo che, pertanto, non vengono proposti qui.

1. *Olimpiadi 1999 I livello*: Due automobiline di massa M e $2M$ vengono lasciate da ferme nel punto X e si muovono lungo la guida mostrata in figura sino al punto Y. Tutti gli attriti sono trascurabili.

   Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

   I Entrambe le automobiline avranno acquistato la stessa energia cinetica quando saranno arrivate al punto Y.

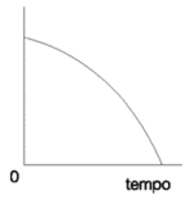
   II L'automobilina di massa $2M$ percorrerà il tratto XY più rapidamente dell'automobilina di massa M.

   III Nel punto Y la quantità di moto di un'automobilina è doppia di quella dell'altra.

   a) Tutte e tre b) Sia la I sia la II c) Sia la II sia la III d) Soltanto la I e) Soltanto la III. [25]

2. *Olimpiadi 1996* I livello; Una persona solleva una scatola da 2 kg dal pavimento fino ad un altezza di 1.5 m in 3s. Quale delle seguenti quantità cambierebbe se quella persona ripetesse la stessa operazione impiegando questa volta 5s? a) II lavoro fatto per sollevare la scatola. b) L'energia necessaria per sollevare la scatola. c) L'energia potenziale gravitazionale della scatola. d) Lo spostamento effettuato. e) La potenza media necessaria per sollevare la scatola.

3. *Olimpiadi 1995* I livello; Il grafico a destra è riferito al moto di un corpo che sta cadendo senza attrito per effetto della gravità. Quale delle seguenti quantità è stata riportata sull'asse delle ordinate? a) La distanza percorsa. b) La quantità di moto. c) L'energia totale. d) L'energia cinetica. e) L'energia potenziale.

4. *Olimpiadi 2003* I livello. Un oggetto è lanciato verticalmente verso l'alto a una data velocità. Trascurando la resistenza dell'aria e la variazione dell'accelerazione di gravità con l'altezza, quale delle seguenti affermazioni è corretta? a) L'energia cinetica dell'oggetto è massima alla massima altezza raggiunta. b) Se la velocità iniziale raddoppia, la massima altezza raggiunta è quattro volte maggiore. c) La quantità di moto dell'oggetto è costante durante il moto. d) L'oggetto percorre distanze uguali in tempi uguali sia durante la salita che durante la discesa. e) L'energia potenziale dell'oggetto cresce della stessa quantità ogni secondo durante la salita. [26]

5. *Olimpiadi 2003* I livello: Quando una sferetta di massa m cade sotto l'azione della gravità in un liquido viscoso, raggiunge una velocità limite v. Il moto viene riferito ad un asse positivo verso l'alto. Suc-

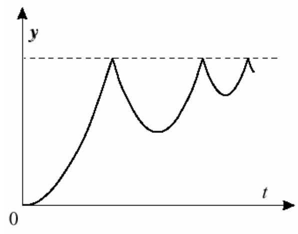
[25] In Y acquistano quanto perdono di energia potenziale e le due variazioni sono doppie (a causa della massa); in Y la velocità è la stessa perché dipende solo dal dislivello; in Y la quantità di moto è doppia perché è doppia la massa ed identica la velocità.

[26] L'energia potenziale cresce in modo lineare con la quota ma la quota è legata al tempo da una relazione quadratica.

cessivamente la variazione di energia potenziale della sferetta per unità di tempo è:

a) zero; b) mgv; c) mgv – ½ mv²;

d) ½ mv²; e) ½ mv² – mgv [27]



6. *Olimpiadi 2002* I livello: Una palla lasciata cadere da ferma a una certa altezza dal pavimento, rimbalza diverse volte. Il grafico mostra come varia nel tempo una grandezza (indicata con y) legata al moto della palla. Che cosa rappresenta la grandezza y? [28]

   a) L'accelerazione. b) Lo spostamento.

   c) L'Energia cinetica. d) La velocità.

   e) L'energia meccanica totale.

7. Un satellite con la massa di 1'000 kg è in un'orbita circolare di raggio R. All'altezza dell'orbita il potenziale gravitazionale della Terra è pari a –60 MJ/kg. Il satellite viene poi spostato su un'altra orbita il cui raggio è 2R. Quale fra i valori indicati di seguito rappresenta il guadagno di energia potenziale del satellite, espresso in joule, quando avviene questo cambiamento di orbita? … (I livello 2002) [29]

   A … $3.0 \cdot 10^7$ B … $6.0 \cdot 10^7$ C … $-1.2 \cdot 10^8$

   D … $3.0 \cdot 10^{10}$ E … $6.0 \cdot 10^{10}$

8. L'intensità del campo gravitazionale in un punto P della superficie terrestre è uguale …(I livello 2002)

   A … all'accelerazione di caduta libera nel punto P

   B … alla variazione dell'energia in uno spostamento unitario dal punto P

   C … alla forza che agisce su un corpo posto in P

   D … al lavoro fatto per portare una massa unitaria dall'infinito nel punto P

   E … al lavoro fatto per portare una massa unitaria dal centro della Terra nel punto P

9. Un satellite si muove intorno alla Terra descrivendo un'orbita ellittica al di fuori dell'atmosfera. Nel punto in cui si trova più vicino alla Terra, …(I livello 2003) [30]

   A … l'energia cinetica è massima e l'energia potenziale è minima.

   B … l'energia potenziale è massima e l'energia cinetica è minima.

---

27 $\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} = mgv$

28 A) La accelerazione è g con delle brusche variazioni nelle fasi di rimbalzo; B) lo spostamento dalla posizione iniziale con asse positivo verso il basso e origine nel punto di partenza segue l'andamento parabolico del mua con oscillazioni via decrescenti sino alla quiete C) L'energia cinetica cresce e decresce con andamento parabolico ma è zero all'inizio e zero alla fine D) la velocità segue un andamento rettilineo E) L'energia totale ad ogni rimbalzo decresce e viene completamente perduta nel processo

29 $V = -G\frac{M_T}{R}$ e $V' = -G\frac{M_T}{2R} = \frac{1}{2} V$. Dunque $\Delta U = M\,\Delta V = -M\,\frac{1}{2}\,\Delta V = 3 \cdot 10^4$ MJ

30 In fase di avvicinamento la forza gravitazionale compie lavori positivi e dunque l'energia cinetica aumenta. L'energia potenziale è espressa da un ramo di iperbole nel IV quadrante e il valore minimo si ha quando R ha il valore minimo.

C … sia l'energia cinetica che l'energia potenziale sono massime.

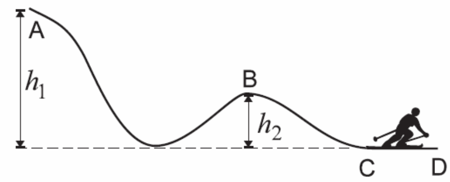
D … sia l'energia cinetica che l'energia potenziale sono minime.

E … l'energia totale o è massima o è minima.

10. Una forza di 5 N allunga una molla di 0.2 m. Quanto vale l'energia potenziale della molla allungata? …(I livello 2010) [31]

A … 1 J B … 0.5 J C … 0.1 J D … 0.02 J E … 0.05 J

11. Una sciatrice di 50 kg si lascia andare, dal fianco di una collinetta (punto A in figura), ad un'altezza h_1 = 20.4 m, superando un secondo rilievo alto h_2 = 8m ed arrivando in piano nel punto C. In tutto questo percorso l'attrito si può considerare trascurabile. Qual è la velocità della sciatrice nel punto più alto (B) del secondo rilievo? …(I livello 2011) [32]



A … 9.64m/s B … 11.2m/s C … 12.5m/s

D … 15.6m/s E … 23.6m/s

12. Con riferimento al quesito precedente, arrivata nel punto C, la sciatrice frena e si ferma dopo 48 m, nel punto D. Quanto vale il valor medio della forza frenante nel tratto CD? …(I livello 2011) [33]

A … 86.1N B … 208N C … 282N D … 328N

E … 490N

---

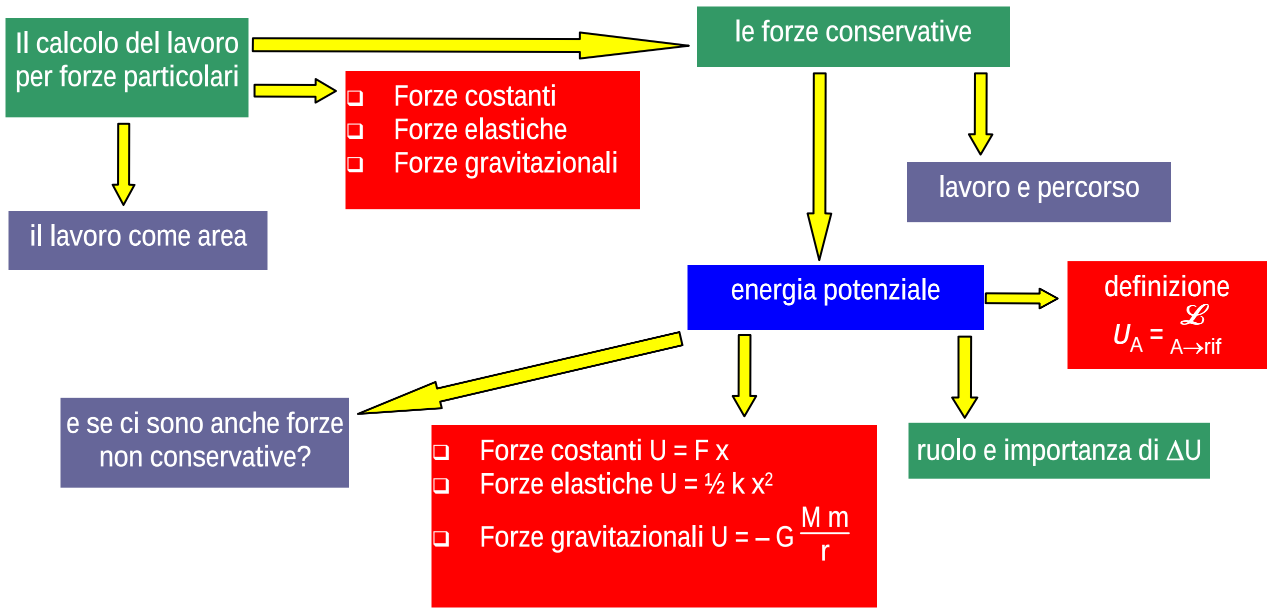
[31] Area

[32] Il lavoro della forza peso per andare da A a B è dato da $U_A - U_B = mg(h_1 - h_2)$. D'altra parte questo lavoro si trasforma in variazione di energia cinetica e dunque $\frac{1}{2}$ m $v^2 - 0 = mg(h_1 - h_2)$ da cui $v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = 15.6$ m/s

[33] Con ragionamenti analoghi a quelli svolti per il quesito precedente si ha:

$F \cdot CD = mgh_1$ da cui $F = \frac{mgh_1}{CD} = \frac{50 \cdot 9.81 \cdot 20.4}{48} = 208$ N

Indice analitico


Il calcolo del lavoro per forze particolari
le forze conservative
Forze costanti
Forze elastiche
Forze gravitazionali
il lavoro come area
lavoro e percorso
energia potenziale
definizione
$U_A = \mathscr{L}_{A\to rif}$
e se ci sono anche forze non conservative?
Forze costanti $U = F\,x$
Forze elastiche $U = \frac{1}{2}k\,x^2$
Forze gravitazionali $U = -G\,\frac{M\,m}{r}$
ruolo e importanza di ΔU