I.15. Il teorema di conservazione dell'energia nella meccanica classica

15.1 L'energia meccanica: conservazione e non conservazione

L'energia meccanica definita come somma di energia cinetica ed energia potenziale

15.1.1 Definizione: l'energia meccanica

Dato un sistema di corpi soggetti solo all'azione di forze conservative si chiama *energia meccanica totale del sistema la somma delle energie cinetiche e delle energie potenziali relative a ciascun componente del sistema*:

$$\mathcal{E} = U + \mathcal{E}_k \qquad U = \frac{1}{2}\sum U_{ij} \qquad \mathcal{E}_k = \sum \mathcal{E}_{k,i} \text{ [1]} \qquad \text{(I.15.1)}$$

Quando invece di un singolo corpo si considera un sistema fisico complesso sul quale agiscono sia forze interne al sistema, sia forze esterne al sistema, le problematiche energetiche richiedono alcune puntualizzazioni.

Il *teorema della energia cinetica* continua a valere a condizione di riferirlo a tutte le forze che agiscono sul sistema e di calcolare le energie cinetiche di tutti i componenti del sistema.

Abbiamo già osservato che la *energia potenziale* si riferisce sempre ad interazioni tra corpi e non è mai di proprietà del singolo corpo ma piuttosto del sistema di cui il corpo fa parte (persino la energia potenziale della forza peso appartiene egualmente al corpo pesante ed alla terra che lo attira).

Pertanto prima di ragionare in termini energetici per sistemi di più corpi dovremo aggiungere una ulteriore ipotesi: supponiamo che il *sistema* considerato sia *chiuso*, cioè che tutti i corpi che esercitano forze su corpi del sistema facciano, a loro volta, parte del sistema. In questo caso si può stabilire il *teorema di conservazione della energia meccanica e affermare che l'energia meccanica di un sistema chiuso conservativo rimane costante.*

Quando però la distinzione tra interno ed esterno non è eliminabile o conveniente saremo costretti, nel calcolo del lavoro, a tenere distinto il lavoro delle forze esterne e a valutare la capacità di tale lavoro di influenzare l'energia dei costituenti interni del sistema. Ciò ci porterà ad introdurre il concetto di *energia interna di un sistema* e alla nozione di *quantità di calore.*

15.1.2 Il lavoro delle forze non conservative è pari alla variazione di energia meccanica

La energia cinetica e la energia potenziale, sotto particolari condizioni, godono di una interessante ed utile proprietà di conservazione.

[1] Come si è osservato nel capitolo dedicato alla energia potenziale la energia potenziale di un sistema si calcola sommando tutte le energie potenziali delle coppie di corpi e prendendo la sua metà per evitare di conteggiarle due volte.

Consideriamo inizialmente un corpo soggetto all'azione di svariate forze che distingueremo in conservative e non conservative e indichiamo con $\boldsymbol{R}_c$ e $\boldsymbol{R}_{nc}$ le corrispondenti forze risultanti.

In base al teorema della energia cinetica, se indichiamo come al solito con $\mathcal{L}$ il lavoro e con $\mathcal{E}_k$ l'energia cinetica, potremo scrivere che:

$$\mathcal{L}_c + \mathcal{L}_{nc} = \Delta \mathcal{E}_k$$

D'altra parte per le forze conservative si possono definire una o più energie potenziali tali che:

$$\mathcal{L}_c = -\Delta U$$

dalla applicazione simultanea del teorema della energia cinetica e della definizione di energia potenziale si deduce che: *il lavoro delle forze non conservative è pari alla variazione di energia meccanica*

Se teniamo conto delle due relazioni richiamate avremo che:

$$\mathcal{L}_{nc} = \Delta \mathcal{E}_k - \mathcal{L}_c = \Delta \mathcal{E}_k + \Delta U = \Delta(\mathcal{E}_k + U) = \Delta \mathcal{E} \quad \text{(I.15.2)}$$

La variazione di energia meccanica di un corpo è pari al lavoro delle forze non conservative che agiscono su di esso.

15.1.3 Se agiscono solo forze conservative l'energia meccanica si conserva

Se sul corpo agiscono solo forze conservative si ha che $\mathcal{L}_{nc} = 0$ e dunque:

se agiscono solo forze conservative l'energia meccanica non cambia

$$\Delta \mathcal{E} = 0 \qquad \text{o anche} \qquad \mathcal{E} = \text{costante} \qquad \text{(I.15.3)}$$

L'energia meccanica di un corpo soggetto solo all'azione di forze conservative rimane costante. Questa è la ragione per la quale le forze conservative hanno avuto questo nome che, apparentemente, non ha a che fare con la definizione.

Se l'energia meccanica del corpo considerato si conserva ciò significa che le due componenti di cui è costituita variano mantenendo però costante la loro somma. Si avranno pertanto perdite di energia cinetica a favore dell'energia potenziale e viceversa.

15.1.4 Come si ragiona in presenza di attrito

La legge di conservazione dell'energia meccanica così come è stata enunciata è solo una idealizzazione perché le forze di attrito agiscono sempre ed esse sono forze non conservative. Dunque la legge di conservazione dell'energia meccanica è valida solo in prima approssimazione ed è tanto più accurata quanto più le forze d'attrito sono trascurabili rispetto alle forze elastiche, elettriche o gravitazionali in gioco.

Quando le forze d'attrito non possono essere trascurate il bilancio energetico del sistema può essere scritto tramite la (I.15.2): *la variazione di energia meccanica di un sistema chiuso soggetto a forze d'attrito è pari al lavoro compiuto dalle forze d'attrito*. Il *lavoro compiuto dalle forze d'attrito*, nella maggioranza dei casi, viene proprio misurato attraverso la determinazione della diminuzione di energia meccanica.

Si può dimostrare che *il lavoro compito dalle forze d'attrito che operano in un sistema dipende dal sistema di riferimento ma che esso è comunque sempre negativo.* Pertanto la *energia meccanica totale di un sistema nel quale agiscono forze non conservative diminuisce sempre*. Nel capitolo dedicato alla *energia interna* verrà ripresa questa questione facendo vedere che la quota di energia meccanica che sparisce può essere descritta come trasformazione in altre forme di energia e si possa dunque affermare una sorta di *conservazione generale dell'energia*.

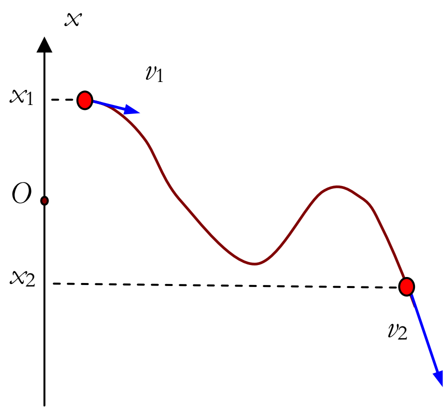
Passiamo ora ad una serie di esemplificazioni della conservazione della energia meccanica.

Il teorema verrà applicato allo studio di singoli corpi. Per essere completamente corretti nell'usare il concetto di energia potenziale ci si dovrebbe riferire al sistema costituito da tutti i corpi che interagiscono: per esempio, negli esempi gravitazionali ci si dovrebbe riferire al satellite ed al pianeta. Ma, come sappiamo, il centro di massa di questi sistemi coincide praticamente con il centro del pianeta e le accelerazioni subite dal pianeta durante gli spostamenti del satellite possono essere trascurate.

15.2 Conservazione dell'energia nel caso di forze costanti

15.2.1 La velocità finale non dipende dalla traiettoria ma solo dal dislivello

Consideriamo il movimento di un corpo di massa m soggetto alla sola azione del peso che, percorrendo una traiettoria qualsiasi, si muova di un dislivello $\Delta x = x_2 - x_1$. La presenza di eventuali reazioni vincolari non ha rilevanza perché tali reazioni non compiono lavoro essendo sempre perpendicolari allo spostamento.



nel caso di forze costanti la velocità finale dipende solo da quella iniziale e dal dislivello

La forza peso è conservativa e pertanto si può applicare ad essa il teorema di conservazione dell'energia:

$U_2 + \mathcal{E}_{k,2} = U_1 + \mathcal{E}_{k,1}$

Tenendo conto che quando il riferimento è orientato in verso opposto alla forza $U = F\,x$ si ha:

$$mgx_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = mgx_1 + \frac{1}{2}mv_1^2$$

da cui:

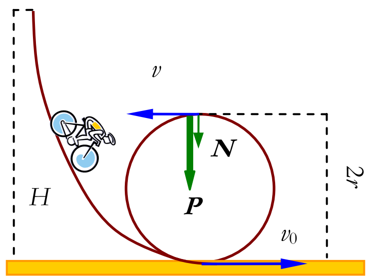
$$v_2^2 - v_1^2 = -2\,g\,\Delta x \qquad \text{(I.15.4)}$$

La *velocità finale* con cui un corpo cade lungo una traiettoria qualsiasi dipende esclusivamente dalla velocità iniziale e dal dislivello. Si tratta della generalizzazione di quanto aveva già ottenuto Galilei per il movimento sul piano inclinato.

15.2.2 Il *giro della morte*

Esercizio: Il problema che proponiamo costituisce un esempio di una catena numerosa di problemi che, con piccole diversità si pongono il problema di studiare moti circolari che, avvenendo in un piano verticale, sono di tipo non uniforme; infatti la velocità risulta variabile con la quota in base a quanto abbiamo appena visto nell'esempio precedente.

Supponiamo che un ciclista scenda senza pedalare lungo la parte semi verticale del *giro della morte* il cui modello è rappresentato in figura.



nel *giro della morte* la velocità riesce a vincere la gravità

Ci proponiamo di determinare l'altezza minima H da cui può partire senza correre il rischio di precipitare in corrispondenza del punto più pericoloso della traiettoria, che è il più alto.

Nel punto più alto il ciclista è soggetto all'azione di due forze: la forza di gravità $P = mg$ e la reazione vincolare N. La risultante di queste due forze fornisce al ciclista la necessaria accelerazione $a_n = \frac{v^2}{r}$. Se applichiamo la II legge della dinamica avremo che:

$$mg + N = m\frac{v^2}{r} \qquad (2)$$

[2] Si è preso il riferimento di U nel punto più basso della traiettoria e si è orientato l'asse del riferimento per le forze verso il basso. Si osservi che la reazione vincolare nel punto più alto della traiettoria può solo essere orientata verso il basso e pertanto, sotto queste ipotesi, può solo essere addizionata positivamente a mg.

Per trovare la velocità nel punto più alto dell'anello circolare utilizzeremo la legge di conservazione della energia meccanica: la energia potenziale nel punto di partenza (altezza H) dovrà essere uguale alla somma di energia cinetica e potenziale nel punto alto della traiettoria circolare (altezza $h = 2r$):

$$mgH = mg\,2r + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Leftrightarrow \quad H = 2r + \frac{v^2}{2g}$$

Come previsto esiste un legame semplice tra la quota da cui si parte e il valore della velocità ad un determinato livello.

Infine, se sostituiamo il valore di v^2, otteniamo una relazione che ci dice, fissato il punto di partenza, quanto vale la corrispondente reazione vincolare nel punto più alto della traiettoria:

$$H = \frac{5r}{2} + \frac{Nr}{2mg}$$

L'altezza minima, trascurando l'attrito, si ha quando il ciclista passa per il punto più alto sfiorando appena la pista (in quel caso la forza centripeta è dovuta al peso). Se $N = 0$ il corrispondente valore di H risulta:

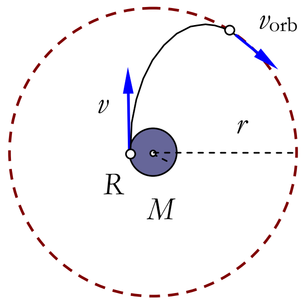
$$H_{\min} = \frac{5}{2}\,r.$$

Se il nostro ciclista parte da un punto più alto arriverà al culmine con una velocità superiore e una quota della forza centripeta sarà fornita dalla reazione vincolare. Se invece parte da un punto più basso arriva in punti della traiettoria nei quali non è fornito di sufficiente velocità e precipita rovinosamente a terra. Si consiglia di disegnare il diagramma del corpo libero in un punto intermedio e riflettere su cosa accade.

15.3 Conservazione dell'energia nel caso di sistemi orbitanti

15.3.1 La velocità necessaria a mettere in orbita un satellite

Applicando la II legge della dinamica nel capitolo sulla gravitazione siamo stati in grado di determinare le velocità orbitali di un qualunque satellite o pianeta in funzione della distanza dal centro di forza. Rimane un problema. Se si vuole mettere in orbita un satellite ad una distanza r da un pianeta, quale deve essere la *velocità* da impartire inizialmente al satellite per consentirgli di raggiungere la quota richiesta e, a quella quota, entrare in orbita?



È evidente che se ci si limita a fornire al satellite una velocità verticale pari a quella che dovrebbe possedere in orbita non si raggiungerà il risultato perché, salendo di quota, il satellite perderà velocità e si troverà alla distanza r con una velocità inferiore a quella richiesta.

La risposta a questa questione richiede l'uso combinato della II legge della dinamica e del teorema di conservazione della energia.

Cerchiamo dunque di determinare che velocità debba essere impartita ad un corpo lanciato lungo la tangente alla terra per consentirgli di entrare in orbita. Supponiamo di indicare con v_{orb} la velocità orbitale, con v la velocità di lancio e con r il raggio orbitale.

Un corpo che si muova in orbita circolare è soggetto alla accelerazione centripeta $a_n = \frac{v^2{}_{orb}}{r}$ e pertanto, applicando la II legge della dinamica, si ha:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2{}_{orb}}{r} \text{ da cui } \frac{GMm}{r} = mv^2{}_{orb}$$

Abbiamo trovato un primo risultato importante: il termine di sinistra rappresenta l'energia potenziale cambiata di segno mentre quello di destra è il doppio dell'energia cinetica. Dunque: *in un sistema orbitante l'energia cinetica è la metà, cambiata di segno, della energia potenziale:*

$$\mathcal{E}_{k,orb} = -\tfrac{1}{2}\, U_{orb} \qquad \text{(I.15.5)}$$

Il legame tra energia cinetica e potenziale nei sistemi orbitanti $\mathcal{E}_{k,orb} = -\tfrac{1}{2} U_{orb}$ fa sì che si possa indifferentemente ragionare sulla energia cinetica, su quella potenziale o su quella totale

Per determinare la velocità di lancio basta applicare la conservazione della energia: le somme della energia cinetica e di quella potenziale, sulla superficie terrestre e in orbita, sono identiche, cioè:

$$\mathcal{E}_{k,sup} + U_{sup} = \mathcal{E}_{k,orb} + U_{orb}$$

che si scrive anche come:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mv^2{}_{orb}}{2} - \frac{GMm}{r}$$

Questa equazione combinata con la (I.15.5) porta a:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{r}\right)} \qquad \text{(I.15.6)}$$

Si osservi che ci siamo completamente disinteressati di come faccia il satellite a modificare la sua traiettoria e a disporsi tangenzialmente nel momento giusto.

La cosa, in questa fase, non ci interessa perché ciò che conta è il valore di velocità ed esso, in virtù della conservatività della forza gravitazionale e del teorema della energia cinetica, non dipende dalla traiettoria seguita.

In questo calcolo non si è tenuto conto della resistenza dell'aria (forza non conservativa); la sua presenza determinerebbe un aumento nella velocità richiesta. I calcoli necessari per tenerne conto sono piuttosto complessi e non possono essere affrontati in questo tipo di trattazione.

15.3.2 LA VELOCITÀ DI FUGA

La velocità di fuga rappresenta la velocità necessaria a sfuggire da un sistema legato e corrisponde al caso di energia totale uguale a zero

Esercizio: La *velocità di fuga* è il minimo valore di velocità necessario ad un corpo per sfuggire alla attrazione terrestre e divenire pertanto un satellite del sole. Possiamo a questo scopo supporre che il nostro oggetto debba essere lanciato a distanza infinita e porre pertanto $r \to \infty$ nella equazione (I.15.6) il che ci porta a:

$$v_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \approx 11.2 \text{ km/s}.$$

Nel capitolo dedicato alla gravitazione si era già determinata la prima velocità cosmica (velocità orbitale a livello del suolo) e si era trovato che:

$$v_\mathrm{I} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

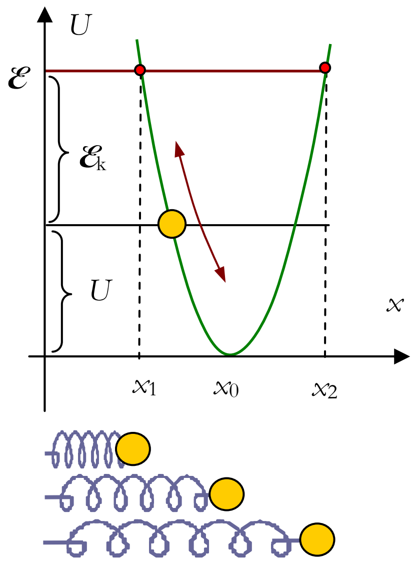
Dunque: $v_\mathrm{f} = \sqrt{2}\ v_\mathrm{I}$

La velocità di fuga è circa una volta e mezza la velocità di prima orbita ed è nota come *seconda velocità cosmica*.

15.4 I diagrammi dell'energia potenziale

15.4.1 LA BUCA DI POTENZIALE

Capita spesso che una particella sia vincolata a muoversi seguendo una curva determinata, per esempio lungo l'asse delle ascisse. In tale caso la sua energia potenziale viene a dipendere da una sola variabile e cioè la sua energia potenziale può essere scritta come $U = f(x)$. Il diagramma che illustra la dipendenza della energia potenziale dalla posizione è detto *diagramma dell'energia potenziale*. L'analisi di tale diagramma fornisce molte informazioni sul comportamento di una particella soggetta alla interazione descritta dalla energia potenziale.



La buca di potenziale della forza elastica corrisponde ad una parabola

Consideriamo, per esempio, il moto di una particella di massa m soggetta ad una forza elastica. Nella posizione x_0 la molla si trova in condizioni di riposo e la forza agente sulla particella è nulla. Quando la particella si sposta dalla posizione di riposo risulta soggetta ad una forza $F_x = -k(x - x_0)$. Si osservi che quando $x > x_0$ la forza è negativa (attrazione dovuta alla trazione), mentre quando $x < x_0$ la forza è positiva (repulsione dovuta alla compressione).

La energia potenziale della particella vale:

$$U = \frac{k\,(\Delta x)^2}{2} = \frac{k\,(x - x_0)^2}{2} \qquad \text{(I.15.7)}$$

Essa è rappresentata nel diagramma in figura da una parabola con il vertice in $x = x_0$. La energia meccanica della particella $\mathcal{E} = \mathcal{E}_k + U$ rimane costante ed è rappresentata da una retta parallela all'asse delle ascisse.

Dal diagramma, si osserva in primo luogo che la *energia cinetica* è pari alla lunghezza del segmento verticale che va dal generico punto della parabola alla retta dell'energia perché $\mathcal{E}_k = \mathcal{E} - U$. L'energia cinetica raggiunge il suo valore massimo in x_0 perché in quel punto si ha $U = 0$ e dunque $\mathcal{E}_{k,max} = \mathcal{E}$. Nei punti x_1 e x_2 la energia cinetica si annulla mentre si ha $U_{max} = \mathcal{E}$.

È ancora evidente dal diagramma che la particella è vincolata a muoversi tra x_1 e x_2 perché la energia cinetica non può diventare negativa e di conseguenza la energia potenziale deve sempre essere minore o eguale dell'energia meccanica totale. In una situazione come quella indicata si dice che la particella si trova in una *buca di potenziale* di coordinate comprese tra x_1 e x_2. [3]

15.4.2 IL LEGAME TRA FORZA ED ENERGIA POTENZIALE

I diagrammi della energia potenziale sono lo strumento correntemente utilizzato, non solo in fisica, per evidenziare i sistemi legati e per descrivere le caratteristiche del legame.

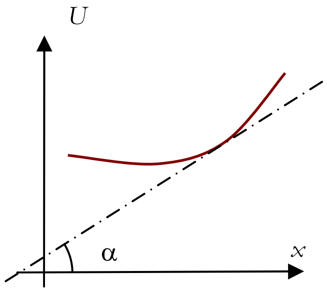
Supponiamo dunque che sia noto l'andamento della energia potenziale riferita ad una dimensione, cioè riferita ad una particolare coordinata spaziale.

[3] La meccanica quantistica modifica questa conclusione a causa della natura speciale delle microparticelle e del principio di indeterminazione e prevede il cosiddetto *effetto tunnel* grazie al quale una particella può uscire da una buca di potenziale anche quando la sua energia meccanica non lo consentirebbe.

Poiché il lavoro elementare vale $\delta\mathscr{L} = F_x\,\delta x$, mentre $\delta\mathscr{L} = -\delta U$ si ha: $F_x\,\delta x = -\delta U$, o anche:

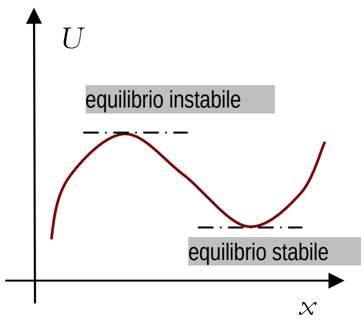
$$F_x = -\frac{\delta U}{\delta x} \qquad (I.15.8)$$

Dunque la *inclinazione della retta tangente al diagramma della energia, cambiata di segno, fornisce il valore della componente della forza in quel punto.*



la inclinazione della retta tangente ai diagrammi della energia potenziale è la misura della componente della forza cambiata di segno.

Pertanto i massimi e minimi corrispondono alle condizioni di equilibrio



Pertanto, preso un $\delta x > 0$ (allontanamento), possiamo affermare che la forza ha verso contrario al segno di δU il quale è positivo nei tratti in cui la funzione è crescente e negativo quando è decrescente.

- Quando la energia potenziale aumenta, $F_x < 0$ e la forza si oppone allo spostamento.
- Quando la energia potenziale diminuisce, $F_x > 0$ e la forza agevola lo spostamento.

Infine, in corrispondenza dei punti di massimo e minimo la forza si annulla perché in tal caso la retta tangente diventa orizzontale e la sua inclinazione è nulla.

Dunque i massimi e i minimi di energia potenziale sono dei punti di equilibrio. Che differenza c'è tra un massimo e un minimo? I massimi sono punti di *equilibrio* instabile mentre i minimi sono punti di equilibrio stabile.

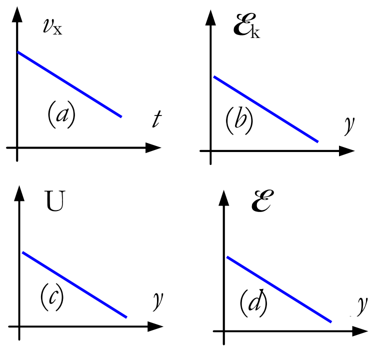
Un corpo si trova in equilibrio quando la risultante delle forze applicate ad esso è uguale a zero. I punti di equilibri corrisponderanno ai massimi e minimi della curva dell'energia potenziale perché, solo in corrispondenza di essi, la forza si annulla. Ma i punti di massimo non sono equivalenti a quelli di minimo.

In un punto di massimo lo spostamento verso destra corrisponde a inclinazione negativa cioè a forza positiva. Lo spostamento verso sinistra corrisponde invece a forze negative. In entrambi i casi la forza ha lo stesso segno dello spostamento e dunque lo agevola: pertanto l'equilibrio si distrugge permanentemente. Si tratta dunque di un punto di *equilibrio instabile.*

Nei punti di minimo accade il contrario e dunque, una particella collocata in un punto di minimo, quando subisce uno spostamento, tende a ritornare nel punto iniziale sospinta dalla forza. Se ne conclude che la *esistenza di un punto di minimo fa da condizione per l'equilibrio stabile.*

15.5 Quesiti di fine capitolo

1. *Energia meccanica; ricerca di vero*: a) La energia potenziale di un sistema composto da n corpi è data da $U = \sum U_{ij}$ dove la somma viene estesa a tutti le possibili coppie i,j con i≠j; b) Il lavoro compiuto dalla risultante delle forze conservative agenti su un sistema è pari alla variazione di energia cinetica del sistema; c) La energia meccanica di un sistema chiuso e conservativo rimane costante; d) La energia meccanica si conserva anche in presenza di forze non conservative perché il teorema della energia cinetica non distingue tra forze conservative e non conservative. [4]
2. *Energia meccanica: ricerca di vero*: a) Quando la energia meccanica si conserva la energia potenziale diminuisce; b) In presenza di attrito la energia cinetica di un sistema diminuisce sempre; c) La energia interna di un sistema viene introdotta per tener conto del lavoro delle forze interne; d) Attraverso il concetto di energia interna si può arrivare a generalizzare il teorema di conservazione della energia anche al caso in cui si debba tener conto del lavoro svolto da forze esterne al sistema per le quali non si possa utilizzare la nozione di energia potenziale. [5]
3. Dimostrare in maniera formale che la variazione di energia meccanica di un sistema è pari al lavoro delle forze non conservative agenti sul sistema. [6]
4. Spiegare come mai le *forze conservative* si chiamano così. [7]
5. Spiegare perché quando ci si riferisce a sistemi, per poter applicare il teorema di conservazione della energia bisogna richiedere che il sistema sia chiuso oltre che conservativo. [8]
6. Quale dei seguenti diagrammi relativi al moto di una particella materiale sottoposta all'azione di una forza costante diretta lungo l'asse y è compatibile con la conservazione dell'energia: a) b) c) d) [9]



[4] a) Falso. Bisogna prendere la metà del valore trovato per evitare di conteggiare due volte l'energia. Nella maggioranza degli esempi il problema non compare perché si sottace il fatto di calcolare per ogni coppia di elementi solo la energia potenziale dell'uno rispetto all'altro ignorando il viceversa. Per esempio si parla di energia potenziale della terra rispetto al sole ignorando la interazione sole terra. Il problema diventa significativo nel caso di sistemi complessi composti da molti oggetti. b) Falso. La variazione di energia cinetica è pari al lavoro della risultante di tutte le forze che agiscono sul sistema indipendentemente dal fatto che siano interne o esterne, conservative o non conservative. c) Vero d) Falso

[5] a) Falso: può aumentare a spese della energia cinetica b) Falso: dipende da cosa accade alla energia potenziale c) Falso (vedi punto successivo) d) Vero.

[6] Basta applicare il teorema dell'energia cinetica e distinguere il lavoro in lavoro delle forze conservative e delle forze non conservative. Vedi dettagli sul testo

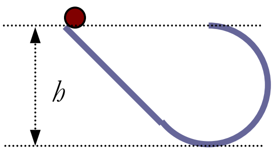
[7] Perché in presenza di sole forze conservative si conserva la energia meccanica

[8] Se il sistema non è chiuso diventa problematico stabilire quali siano i contributi di energia potenziale che, come è noto, si riferiscono alla interazione tra coppie di corpi.

[9] a) Falso perché v_x è costante visto che la forza agisce lungo y; b) Falso, al crescere di y la energia cinetica aumenta; c) Vero: la energia potenziale cambia in maniera lineare visto che $\Delta U = \mathcal{L}_{2\to1} = \pm F\,\Delta y$ d) Falso: la energia meccanica è costante

7. Con riferimento all'esercizio sul *giro della morte* discusso nel testo si discuta cosa accade quando il corpo viene lasciato cadere da una altezza maggiore di 5/2 *r*. [10]

8. Esprimere il risultato dell'esercizio sul *giro della morte* nel caso in cui il corpo venga lasciato cadere essendo dotato di velocità iniziale v_0 orientata verso il basso.



9. Un corpo puntiforme scivola in assenza di attrito lungo un piano inclinato di dislivello *h* e passa quindi entro una guida circolare di diametro *h* lungo la quale risale finché la velocità non raggiunge un valore inferiore a quello necessario a mantenerlo sulla guida. Determinare tale valore di velocità. [11]

10. *Sistemi orbitanti su traiettorie circolari: ricerca di vero*; a) Se si fa diminuire la energia totale la energia cinetica diminuisce; b) la energia cinetica è pari alla metà della energia potenziale; c) Per raggiungere la orbita prestabilita il corpo deve essere lanciato con una velocità pari alla velocità di fuga; d) Per determinare la velocità di lancio bisogna applicare la conservazione della energia tra la posizione di partenza e la posizione in orbita. [12]

11. *Sistemi orbitanti; Ricerca di vero*. Si consideri un corpo di massa *m* e velocità *v* orientata radialmente verso l'esterno a distanza *r* da un pianeta di massa $M >> m$.: a) La velocità di fuga è quel valore di velocità per cui l'energia totale del corpo è nulla; b) Nel caso della terra la velocità di fuga misurata al suolo vale circa 8 km/s; c) La velocità orbitale è metà della velocità di fuga; d) La velocità di fuga dalla terra è molto maggiore della velocità di prima orbita. [13]

12. *Velocità orbitali e velocità di fuga; ricerca di vero*; a) Per determinare la velocità orbitale è necessario applicare la conservazione della energia ; b) La velocità orbitale di un satellite in moto circolare uniforme è inversamente proporzionale al raggio dell'orbita; c) La energia cinetica di un satellite in moto circolare uniforme è inversamente proporzionale al raggio dell'orbita; d) La energia potenziale di un satellite in moto circolare uniforme è inversamente proporzionale alla quota del satellite rispetto alla superficie del pianeta. [14]

13. Dimostrare che se un oggetto viene lanciato verso l'alto con la velocità necessaria a porlo in orbita ad una distanza *r,* nel caso in cui non gli si fa piegare la traiettoria, esso raggiunge la distanza 2*r*.

---

[10] E' possibile determinare il valore della reazione vincolare esercitata dal sedile nel punto più alto della traiettoria.

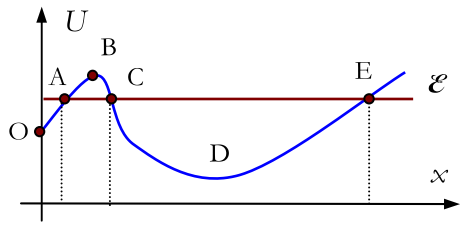
[11] Applicando congiuntamente la conservazione dell'energia e la seconda legge della dinamica si ottiene $v = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{g\,h}{3}}$

[12] a) Falso; la energia cinetica aumenta. Infatti quando $\mathcal{E}$ diminuisce si ha il passaggio verso un'orbita più interna e ad orbite più interne corrisponde una energia cinetica maggiore b) Falso è pari alla metà della energia potenziale cambiata di segno c) Falso: in quel caso il corpo abbandona il centro di forza d) Vero.

[13] a) Vero b) Falso: vale circa 11 km/s c) Falso d) Falso è pari a 1.41 volte

[14] a) Falso; basta applicare la II legge della dinamica b) Falso è inversamente proporzionale alla radice del raggio dell'orbita c) Vero d) Falso è inversamente proporzionale al raggio orbitale.

14. Dare la definizione di velocità orbitale e di velocità di fuga individuando le relazioni che consentono di determinarle.
15. Dato un pianeta di massa M e raggio R si determini la velocità con cui un corpo deve essere lanciato dalla superficie per entrare in orbita a distanza *r*. [15]
16. *Buca di potenziale; Ricerca di vero* a) La buca di potenziale è una voragine nella distribuzione dell'energia potenziale da cui un corpo non può più uscire una volta che vi sia entrato; b) In una buca di potenziale gli estremi entro cui può muoversi una particella dipendono esclusivamente dalla forma della buca; c) Una particella soggetta ad una forza elastica si trova in una buca di potenziale di tipo parabolico; d) In un diagramma della energia potenziale in funzione della posizione i punti di massimo corrispondono al massimo della forza. [16]
17. *Diagrammi della energia potenziale; ricerca di falso.* Si consideri la figura qui a lato. a) Con il valore dato di $\mathcal{E}$ il tratto AC è interdetto alla particella; b) La particella si trova sicuramente nel tratto CE; c) I punti B e D sono caratterizzati da annullamento della forza; d) Nel punto C la forza prende, in valore assoluto, il suo valore massimo. [17]



18. Nel perielio l'energia cinetica di un pianeta è massima come mai ? (rispondere usando il teorema dell'energia cinetica) [18]
19. Nel perielio l'energia potenziale è minima: dare due motivazioni [19]
20. In un sistema planetario (stella di massa *M* e pianeti di massa m_i posti a distanza r_i dal pianeta si ipotizza solitamente che i pianeti ruotino intorno alla stella trascurando la rotazione della stella intorno al pianeta. a) Come mai? b) Nella ipotesi che la traiettoria sia circolare come mai il moto è uniforme? c) Trova la relazione tra il periodo di rivoluzione e la distanza d) Questa relazione a cosa potrebbe servire? [20]

---

[15] Fissato il raggio orbitale è fissata anche la velocità (in base alla II legge della dinamica) e se è fissata la velocità basta scrivere la conservazione dell'energia tra il punto di partenza e quello di arrivo per avere una equazione che contiene come unica incognita la velocità iniziale.

[16] a) Falso b) Falso, dipendono anche dalla energia totale della particella c) Vero d) Falso; sono i punti di annullamento della forza

[17] a) Vero; la particella dovrebbe avere energia cinetica negativa b) Falso; potrebbe trovarsi nel tratto OA c) Vero d) Vero la retta di inclinazione presenta il valore massimo negativo.

[18] perché nel tratto da afelio a perielio i lavori elementari sono tutti positivi (la forza forma angoli acuti con il vettore spostamento) il lavoro complessivo è positivo e dunque l'energia cinetica cresce

[19] Per il punto precedente visto che la somma di energia cinetica e potenziale è costante. Perché $U = -G\dfrac{M\,m}{r}$ e se r è minimo 1/r è massimo e –1/r è minimo.

[20] A) Se $M >> m_i \Rightarrow a << a_i$ visto che le forze sono uguali.

B) Se la traiettoria è circolare la forza risulta perpendicolare alla velocità e dunque il lavoro elementare è sempre nullo;

C) la variazione di energia cinetica è nulla e dunque la v è costante. basta applicare la II legge della dinamica: $G\dfrac{Mm_i}{r_i^2} = \dfrac{v^2}{r_i}$ e dunque $G\dfrac{M}{r_i^2} = \dfrac{4\pi^2 r_i^2}{T^2\, r_i}$ da cui $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM}\, r_i^3$

D) A trovare la massa del pianeta dalla osservazione del moto dei suoi satelliti

21. Un corpo di massa *m* si trova sulla superficie di un pianeta di massa M e raggio R. a) Se gli viene impartita la velocità *v* a che distanza massima r dal centro del pianeta è in grado di arrivare? b) Cos'è la velocità di fuga? Rispondi con riferimento alla domanda precedente c) Usa il calcolo precedente per scrivere la velocità di fuga dal Sole. d) Scrivi simbolicamente il rapporto delle due velocità $\frac{v_{fS}}{v_{fT}}$ semplificando tutto ciò che si semplifica. [21]
22. Per un satellite in orbita il rapporto tra l'energia cinetica e il modulo dell'energia potenziale vale [22]
A…1 B…2 C…1/2
D…dipende da r E…1/3
23. Un sistema fisico è caratterizzato da $\mathcal{E}_k$ = 250 J e U = – 400 J e passa ad una configurazione con $\mathcal{E}_k$ = 300 J e U = – 500 J. Vengono fatte le seguenti affermazioni: a) l'energia meccanica è aumentata b) hanno agito forze per le quali non si può definire l'energia potenziale c) il lavoro delle forze non conservative è stato di –50 J. Quali sono vere? [23]
A…solo a) B…solo b) C…solo c)
D…solo a) e b) E…solo b) e c)
24. In un sistema fisico su cui agiscono solo forze conservative si cambia da rif a rif' il riferimento delle energie potenziali. Vengono fatte le seguenti affermazioni: a) tutte le energie potenziali cambiano in modo diverso a seconda della maggiore o minore vicinanza al nuovo riferimento b) tutte le energie potenziali cambiano di una stessa quantità c) per effetto di tale cambiamento cambiano le energie cinetiche. Quali sono vere? . [24]

---

[21] bisogna applicare la conservazione della energia

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v^2 - G\frac{M\,m}{R} = 0 - G\frac{M\,m}{r} \quad \text{da cui} \quad -\tfrac{1}{2}v^2 + G\frac{M}{R} = G\frac{M}{r}$$

e quindi: $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{v^2}{2GM}$ e infine $r = \dfrac{1}{\frac{1}{R} - \frac{v^2}{2GM}}$

La velocità di fuga è quel valore di velocità che consente al corpo di arrivare all'infinito (sfuggire all'attrazione gravitazionale); in quel caso 1/r = 0 e dunque

$$\frac{1}{R} - \frac{v^2}{2GM} = 0$$

La velocità di fuga dal Sole si ricava dalla equazione precedente e risulta

$$v_{fS} = \sqrt{\frac{2GM_S}{R_S}}$$

Vista la proporzionalità si ha: $\frac{v_{fS}}{v_{fT}} = \sqrt{\frac{M_S}{R_S}\cdot\frac{R_T}{M_T}} = \sqrt{\frac{M_S}{M_T}\cdot\frac{R_T}{R_S}}$

[22] Si vedano i diagrammi e comunque la deduzione si basa sul fatto che la velocità orbitale, in base alla II legge della dinamica, si connette univocamente con la distanza.

[23] L'energia meccanica iniziale è di – 150 J e quella finale – 200 J pertanto la prima affermazione è falsa. La seconda affermazione è vera perché se si ha una perdita di energia meccanica vuol dire che hanno agito forze dissipative e, per esse, l'energia potenziale non è definibile. Visto che l'energia meccanica è diminuita di 50 J si può affermare che tale lavoro sia appunto stato di – 50 J

[24] Quando si cambia il riferimento per l'energia potenziale da rif a rif' tutte le energie potenziali cambiano di una stessa quantità pari al lavoro per andare da rif a rif'. Le energie cinetiche non mutano perché esse si legano alle variazioni di energia potenziale

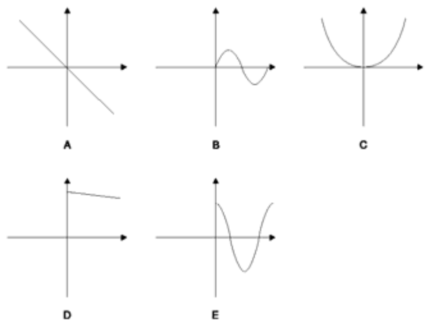
A…solo a) B…solo b) C…solo c)
D…solo a) e c) E…solo b) e c)

e poiché esse cambiano tutte della stessa quantità nel calcolare le variazioni si ottiene lo stesso risultato.

15.6 Quesiti dalle Olimpiadi della Fisica

1) *Olimpiadi 1995, I livello*; Nel tempo in cui un paracadutista si lancia dall'aereo e tocca terra: 1) la somma della sua energia cinetica e della sua energia potenziale gravitazionale è costante; 2) la sua energia cinetica dipende dalla sua velocità; 3) la sua energia potenziale è proporzionale all'altezza dal suolo. Quali delle precedenti affermazioni sono corrette?

   a) Tutte e tre. b) solo la 1 e la 2. c) solo la 2 e la 3. d) Solo la 1. e) Solo la 3.

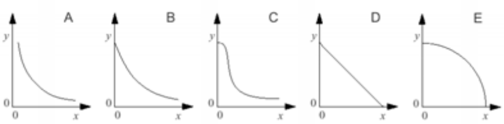


2) *Olimpiadi 1996, I livello*; In un'esperienza di laboratorio si studia il moto di una massa che oscilla verticalmente appesa ad una molla. Quale dei grafici in figura rappresenta nel modo migliore l'andamento dell'energia totale (asse verticale) in funzione del tempo (asse orizzontale)? [25]

   A B C D E

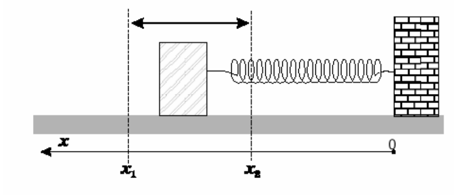
3) *Olimpiadi 1996, I livello*; In un'esperienza di laboratorio si studia il moto di una massa che oscilla verticalmente appesa ad una molla. Riferendosi alla figura del quesito precedente, quale grafico può rappresentare nel modo migliore l'energia potenziale complessiva (asse verticale) in funzione dello spostamento dalla posizione dell'equilibrio (asse orizzontale)? [26]

   A B C D E

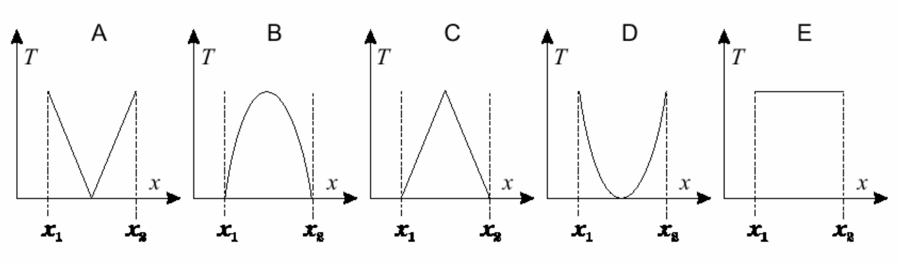


4) *Olimpiadi 1997 I livello:* I cinque grafici in figura mostrano come una certa grandezza y può dipendere da un'altra grandezza x. Dire quale di questi rappresenta meglio la relazione tra l'energia potenziale di un pendolo semplice che oscilla senza attrito (grandezza y) e la sua energia cinetica (grandezza x) allo stesso istante. [27]

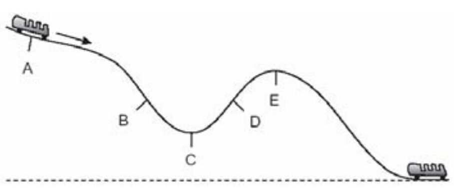
   A B C D E



5) Olimpiadi 1998 I livello. La figura mostra un oscillatore, di massa m e costante elastica k, che si muove su un piano senza attrito. Le posizioni estreme dell'oscillazione sono x_1 e x_2. Quale, tra i grafici seguenti rappresenta meglio come varia l'energia totale dell'oscillatore in funzione della posizione x?



   A B C D E



6) Nella figura è schematizzato un carrello delle montagne russe in partenza dalla posizione A. In quale dei punti indicati il carrello sta au-

---

[25] Non è costante per la presenza di fenomeni dissipativi (attrito con l'aria, non perfetta elasticità della molla)

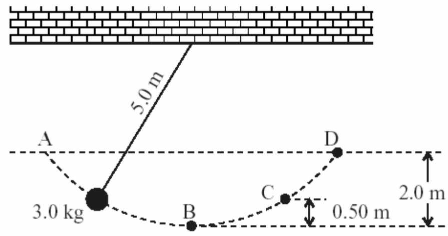
[26] Ricordare che U = ½ kx^2

[27] $\mathcal{E}_k$ + U = costante retta nel primo quadrante con coefficiente angolare -1

mentando la propria energia potenziale gravitazionale? … (Juniores 1996) [28]

A B C D E

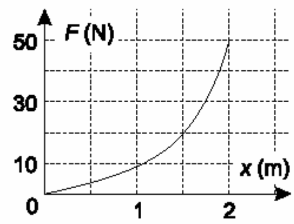
7) Nella figura a lato viene schematizzata una massa di 3.0 kg che, fissata ad un'estremità di un filo sospeso lungo 5.0 m, oscilla lungo un arco di cerchio AD in un piano verticale. Il punto B è il più basso della traiettoria, C si trova a 0.50 m al di sopra di B e D a 2.0 m al di sopra di B. Assumendo che la resistenza dell'aria sia trascurabile e che l'accelerazione di gravità valga g = 10 m/s², la velocità della massa quando passa per il punto C è, approssimativamente… (Juniores 1996) [29]



A …7.8 m/s B …3.9 m/s C …6.3 m/s

D …5.5 m/s E …3.2 m/s

8) Il grafico in figura mostra la forza F con cui viene tirato un cavo elastico in funzione del suo allungamento x. L'energia immagazzinata nel cavo elastico quando viene allungato di 2 m è… (Juniores 2000) [30]



A …100 J B …fra 50 e 100 J

C …50 J D …meno di 50 J

9) Romeo dal giardino vuole far arrivare a Giulietta, che si trova sul balcone, un foglietto di carta con un messaggio. Lo appallottola e lo lancia con tutta la sua forza, ma il foglietto non raggiunge l'altezza del balcone. Allora vi mette all'interno un piccolo sasso, lo lancia allo stesso modo di prima e ora il "*pacchetto*" raggiunge il balcone. Come mai il foglietto con il sasso arriva più in alto di quello senza sasso? … (Juniores 2001) [31]

A …Poiché, andando più veloce, incontra una minor forza di resistenza da parte dell'aria.

B …Poiché, avendo massa maggiore, ha acquistato maggior velocità nell'istante della partenza.

C …Poiché, avendo massa maggiore, viene rallentato di meno dalla forza di resistenza dell'aria.

D …Poiché ha massa maggiore e l'energia potenziale gravitazionale è direttamente proporzionale alla massa.

10) Si lascia cadere una palla da tennis su un pavimento orizzontale. Mentre la palla rimbalza su e giù, l'altezza di ogni rimbalzo via via diminuisce. Perché? … (Juniores 2002) [32]

A … E' costante l'energia cinetica della palla.

B … E' costante l'energia potenziale gravitazionale della palla.

---

[28] L'energia aumenta nei tratti di salita. Si osservi che C e E sono punti stazionari cioè punti in cui, istantaneamente, l'energia non sta cambiando.

[29] Basta applicare la conservazione dell'energia: 2mg = 0.5 mg + ½ mv² si ottiene v = 5.48 m/s

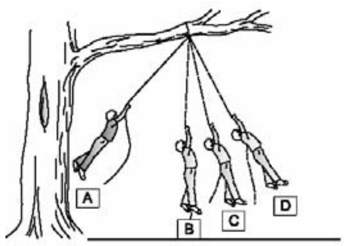
[30] Bisogna stimare l'area e rispetto alle risposte essa è certamente minore di 50J

[31] La pallina in entrambi i casi ha la stessa velocità iniziale; anche la forza d'attrito è uguale ma la accelerazione negativa è inversamente proporzionale alla massa.

[32] Durante i rimbalzi diminuisce l'energia totale della palla a spese di quella dell'aria e del pavimento.

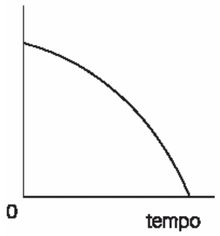
C … E' costante la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale della palla.

D … E' costante l'energia totale della palla, del pavimento e dell'aria.



11) Qui sotto sono raffigurate quattro successive posizioni di una bambina che si dondola aggrappandosi ad una corda appesa ad un ramo. In quale di esse è maggiore la sua energia cinetica? … (Juniores 2003)

A B C D

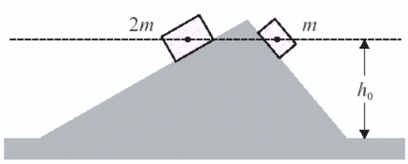


12) Il grafico a lato è riferito al moto di un corpo che sta cadendo senza attrito per effetto della gravità. Quale delle seguenti quantità è stata riportata sull'asse delle ordinate? …(I livello 1995) [33]

A … La distanza percorsa B … La quantità di moto

C … L'energia totale D … L'energia cinetica

E … L'energia potenziale



13) Due oggetti, di massa rispettivamente m e $2m$, inizialmente fermi, vengono lasciati scivolare lungo i due piani inclinati mostrati in figura, partendo dalla stessa altezza iniziale h_0. I due piani hanno inclinazioni diverse e l'attrito tra piani e oggetti è trascurabile. Quale delle seguenti affermazioni NON è corretta. …(I livello 1998)

A …Nella discesa un oggetto perde il doppio dell'energia potenziale dell'altro.

B …Entrambi gli oggetti hanno la stessa velocità in fondo ai piani inclinati

C …Entrambi gli oggetti impiegano lo stesso tempo a raggiungere il fondo dei piani inclinati

D …L'accelerazione dell'oggetto sul piano a destra è maggiore di quella dell'oggetto sul piano a sinistra

E …L'energia cinetica dei due oggetti in fondo ai piani inclinati è diversa

14) Una palla A di massa 0.1 kg è lanciata in alto verticalmente con una velocità di 5m/s, da un punto al livello del suolo. Simultaneamente un'altra palla B di massa 0.2kg viene lanciata dallo stesso punto con una velocità di 10 m/s ad un angolo di 30° con l'orizzontale. Se la resistenza dell'aria è trascurabile, si può affermare che … (I livello 2000) [34]

A … A raggiunge un'altezza maggiore di B
B … B raggiunge un'altezza maggiore di A
C … A e B cadono a terra simultaneamente
D … A resta in moto più a lungo di B
E … quando toccano il suolo l'energia cinetica di B è 4 volte quella di A

15) Una massa di 40 kg può essere fatta oscillare avanti e indietro lungo un binario orizzontale e liscio attaccandola ad una molla di costante elastica k = 500 N/m. Qual è l'energia totale di questo sistema oscil-

---

[33] $U = mgh = mg(h_0 - \frac{1}{2} gt^2)$. Parabola con concavità verso il basso e vertice in t= 0

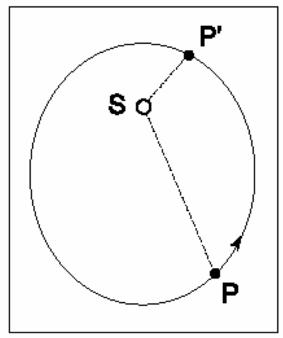
[34] Le velocità verticali sono uguali e dunque il tempo di volo è lo stesso

lante se la massa viene messa in oscillazione allontanandola di 20 cm dalla posizione di equilibrio lungo il binario? (I livello 2005) [35]

A … 10 J B … 20 J C … 50 J D … 4'000 J

E … 100'000 J

16) Un pianeta si muove intorno al sole S lungo un'orbita ellittica come mostrato in figura. Quando il pianeta si sposta dal punto P al punto P' come cambiano la sua energia cinetica e la sua energia potenziale? (I livello 2006)



A …L'energia cinetica diminuisce, l'energia potenziale diminuisce

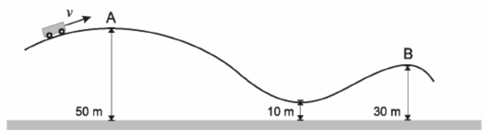
B …L'energia cinetica diminuisce, l'energia potenziale aumenta

C …L'energia cinetica aumenta, l'energia potenziale diminuisce

D …L'energia cinetica aumenta, l'energia potenziale aumenta

E …L'energia cinetica e l'energia potenziale non variano.

17) Un carrello si sta muovendo lungo il percorso di una montagna russa mostrato in figura. Nel punto A la sua velocità vale 10 m/s. Se l'attrito può essere trascurato, quale sarà la velocità del carrello nel punto B? … (I livello 2006)

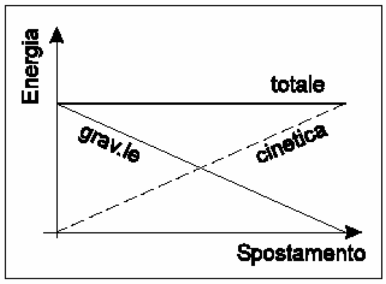


A … 14 m/s B …20 m/s C …22 m/s
D …26 m/s E … 31 m/s

18) La risultante di tutte le forze esterne che agiscono su un sistema di particelle è nulla. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera per il sistema di particelle?… (I livello 2007)

A …L'energia meccanica totale è costante.
B …L'energia potenziale totale è costante.
C …L'energia cinetica totale è costante.
D …La quantità di moto totale è costante.
E …II sistema di particelle si trova in una situazione di equilibrio statico.

19) Nel grafico a fianco sono rappresentate l'energia cinetica, l'energia potenziale gravitazionale e l'energia meccanica di un oggetto in moto. Quale delle seguenti affermazioni descrive meglio il moto dell'oggetto. (I livello 2008)



A …L'oggetto sta accelerando sopra una superficie orizzontale piana

B …L'oggetto si muove verso l'alto sopra un piano inclinato senza attrito

C … L'oggetto è in caduta libera

D … L'oggetto viene sollevato a velocità costante

E … L'oggetto si muove in basso, sopra un piano inclinato con attrito

[35] L'energia totale è pari alla energia potenziale iniziale

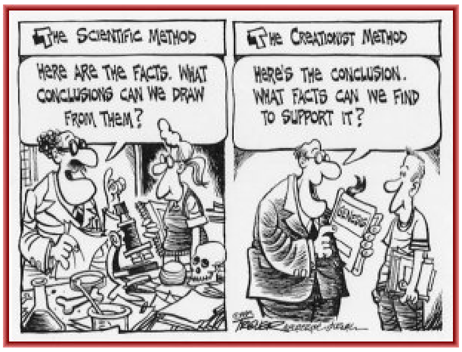
Problemi di fine capitolo

Per risolvere i problemi proposti tieni presenti anche le leggi e le definizioni dei capitoli sul lavoro e sulla energia potenziale.

per affrontare i problemi tieni presente che

- La definizione di lavoro elementare, quella di lavoro relativa ad uno spostamento finiti, la sua interpretazione geometrica (area del diagramma).
- La definizione di energia cinetica $\mathscr{E}_k$ ed il teorema della energia cinetica ricordando in particolare che esso si riferisce al lavoro di tutte le forze e che ha una validità generale.
- Si chiamano *forze conservative* le forze per le quali il lavoro compiuto per spostare il punto di applicazione da un generico punto 1 a un generico punto 2 non dipende dal percorso compiuto ma solo dalla posizione di partenza e di arrivo. Se si fissa un punto di riferimento (indicato d'ora in poi con rif) si può allora definire una nuova grandezza, tipica della posizione, e che sarà chiamata *energia potenziale del punto considerato,* $U_P = \mathscr{L}_{P\rightarrow rif}$
- Poiché il lavoro non dipende dal percorso $-\Delta U = U_1 - U_2 = \mathscr{L}_{1\rightarrow rif} - \mathscr{L}_{2\rightarrow rif} = \mathscr{L}_{1\rightarrow rif} + \mathscr{L}_{rif\rightarrow 2} = \mathscr{L}_{1\rightarrow 2}$
- $\Delta\mathscr{E}_k = \mathscr{L}_{fc} + \mathscr{L}_{fnc} = -\Delta U + \mathscr{L}_{fnc}$ da cui $\Delta\mathscr{E}_k + \Delta U = \mathscr{L}_{fnc}$ o anche $\Delta(\mathscr{E}_k + U) = \mathscr{L}_{fnc}$
  Alla quantità $\mathscr{E}_k + U = \mathscr{E}$ si dà il nome di energia meccanica e si può affermare che *in presenza di forze conservative la energia meccanica di un sistema resta costante* o, equivalentemente, *la variazione di energia meccaniva è uguale a zero*. Questo enunciato prende il nome di *teorema di conservazione della energia.*
- Sono conservative tutte le forze costanti (e quindi in particolare la forza peso), le forze elastiche, le forze gravitazionali e le forze elettriche. Non sono conservative le forze d'attrito e tutte le forze che inducono deformazioni permanenti

  Forze costanti: indicato con h il livello misurato su una retta orientata in verso contrario alla forza si ha U = mgh
  Forza elastica di costante k: si assume il riferimento nel punto di equilibrio e in tal caso, se si indica con x lo scostamento dalla posizione di equilibrio $U = ½\, k\, x^2$
  Forza gravitazionale: si assume il riferimento all'infinito e, in tal caso, per due masse m_1 e m_2 poste a distanza r, si ha $U_2 = -G\dfrac{m_1\, m_2}{r}$. Per la forza elettrica si ha, analogamente, $U_2 = K\dfrac{q_1\, q_2}{r}$, mentre il segno è già contenuto nelle cariche.



1. Relazioni tra energia e distanza per un oggetto in orbita

Esercizio: Si consideri un oggetto di massa m in orbita circolare intorno ad un oggetto di massa M >> m. Determinare la relazione tra energia cinetica ed energia potenziale e quella tra distanza ed energia. Determinare la relazione tra velocità di rotazione e distanza. Spiegare cosa accade se il corpo perde energia.

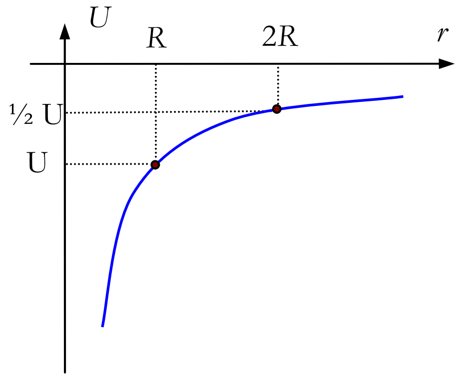
☹

Poiché il moto è circolare uniforme, applicando la II legge della dinamica avremo che:

$$G\frac{M\,m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r} \quad ①$$

Pertanto l'energia cinetica di un oggetto in orbita risulta essere:

$$\mathcal{E}_k = ½\, m\, v^2 = ½\, G\frac{m\,M}{r} = -\,½\, U \text{ ②}$$



e inoltre

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_k + U = ½\, U \text{ ③}.$$

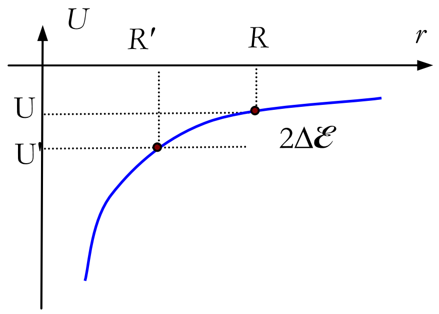
Da quest'ultima relazione possiamo vedere che, per un sistema orbitante, è indifferente rappresentare l'energia potenziale o quella totale perché i due diagrammi sono identici a meno di un fattore di scala.

Per determinare la relazione tra distanza ed energia basta utilizzare la ③:

$$2\,\mathcal{E} = -G\frac{M\,m}{r} \Rightarrow$$

$$r = -\frac{G\,M\,m}{2\,\mathcal{E}} \text{ ④}$$

Dalla ④ segue che la corrispondenza distanza - energia è di tipo biunivoco e che le due grandezze sono inversamente proporzionali. Questo risultato è particolarmente importante per lo studio delle configurazioni elettroniche negli atomi visto che la forza elettrica ha le stesse caratteristiche della forza gravitazionale.



Inoltre se si fissa il valore di $\mathcal{E}$ ad esso corrisponde, in base al teorema di conservazione della energia, un valore di *r* per il quale tutta l'energia diventa potenziale. Tale valore, che corrisponde alla quota massima, è doppio del valore del raggio orbitale (perché $\mathcal{E} = ½$ U).

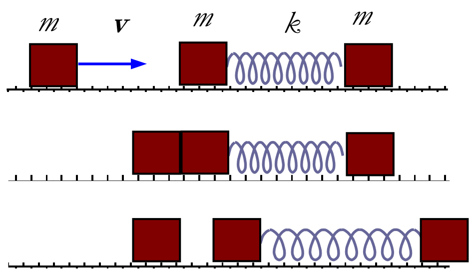
*Dunque fissata l'energia totale, un corpo può raggiungere la distanza massima di 2*R *oppure entrare in orbita a distanza* R.

Infine, considerato un corpo in orbita con energia $\mathcal{E}$ ed energia potenziale U = 2$\mathcal{E}$, se il corpo perde una quantità $\Delta\mathcal{E} > 0$ di energia si porta ad un valore $\mathcal{E}' = \mathcal{E} - \Delta\mathcal{E} < \mathcal{E}$ e pertanto $U' = 2\,\mathcal{E} = 2\,(\mathcal{E} - \Delta\mathcal{E}) = U - 2\Delta\mathcal{E} < U$.

Dunque il corpo si porta su una orbita più interna a cui corrisponde una minore energia potenziale e una maggiore energia cinetica. Paradossalmente, il corpo perde energia e aumenta la sua velocità. In effetti la fase di rientro nell'atmosfera dei satelliti è caratterizzata da una traiettoria a spirale con il satellite che ruota sempre più velocemente man mano che rientra nella atmosfera (negli strati più densi è maggiore la quota di energia perduta).

☺

2. Il moto di un sistema con una forza interna di tipo elastico



Esercizio: Un corpo di massa m, dotato di velocità v urta con urto totalmente elastico una coppia di corpi di massa m connessi da una molla di costante k. Sapendo che i due corpi sono inizialmente in quiete:

- si descriva il movimento del sistema dopo l'urto.
- si spieghi perché i due corpi si muovono sempre nello stesso verso
- si trovino la elongazione massima della molla e il valore delle velocità in quei punti.

☹

Poiché il processo d'urto ha una durata limitata si può ammette che il fenomeno sia costituito inizialmente da un urto elastico tra il corpo dotato di velocità *v* e il primo dei due corpi del sistema. Durante questo urto il corpo fermo riceve tutta la velocità di quello in moto.

Da qui in poi la situazione si presenta come in figura ed inizia il moto del sistema in accordo al teorema di conservazione della energia. Se indichiamo con Δx la compressione della molla e con v_1 e v_2 le due velocità avremo per la conservazione della quantità di moto e dell'energia:

$$\begin{cases} mv_1 + mv_2 = mv \\ \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} mv_2^2 + \frac{1}{2} k\Delta x^2 = \frac{1}{2} mv^2 \end{cases}$$

Il sistema trovato può essere scritto in una forma più elegante eliminando m dalla prima equazione e ponendo $\beta = \frac{k}{m}$

Si ottiene così: $\begin{cases} v_1 + v_2 = v \\ v_1^2 + v_2^2 + \beta\Delta x^2 = v^2 \end{cases}$ ①

Il sistema ① è simmetrico (d'e si risolve attraverso una equazione di II grado, dopo averlo ridotto a forma normale.

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = v \\ (v_1 + v_2)^2 - 2v_1v_2 + \beta\Delta x^2 = v^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = v \\ v^2 - 2v_1v_2 + \beta\Delta x^2 = v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 = v \\ v_1v_2 = \frac{\beta\Delta x^2}{2} \end{cases} ②$$

Le due velocità richieste sono le soluzioni della equazione:

$$z^2 - vz + \frac{\beta\Delta x^2}{2} = 0 \text{ ③.}$$

Questa equazione ammette soluzioni se:

$$\Delta' = v^2 - 2\beta\Delta x^2 \geq 0$$

il che equivale a richiedere $|\Delta x| \leq \frac{v}{2\beta} = \sqrt{\frac{m}{2k}}\, v$ (*)

Sotto la condizione data le soluzioni sono:

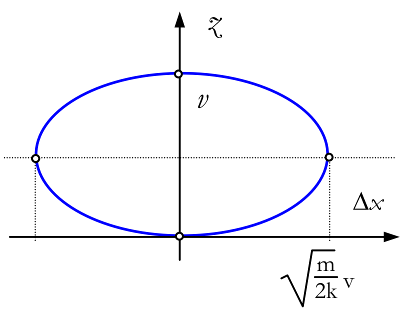
$$v_{1\text{-}2} = \frac{v \pm \sqrt{\Delta'}}{2} \text{ ④.}$$

Dal sistema ② sappiamo anche che la somma e il prodotto delle due velocità sono numeri positivi, pertanto le due velocità sono entrambe, sempre positive.

Inoltre la equazione ③ ci dice direttamente come variano le due velocità al variare di Δx; infatti:

$$z^2 - vz + \frac{\beta\Delta x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow (z^2 - vz + \frac{v^2}{4}) - \frac{v^2}{4} + \frac{\beta\Delta x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(z - \tfrac{1}{2} v)^2 + \frac{\beta\Delta x^2}{2} = \frac{v^2}{4} \text{ ⑤}$$



Si tratta di una ellisse con centro di simmetria nel punto (0,½ v) che taglia l'asse z ($\Delta x = 0$) nei punti: (0,0) e (0,v) e presenta semiassi di lunghezza ½ v e $\sqrt{\frac{m}{2k}}\, v$.

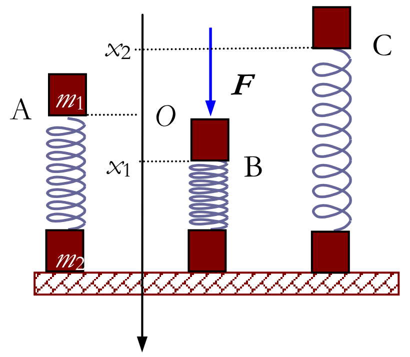
(*) La condizione trovata ci dice solamente che la molla non può assumere delle elongazioni qualsiasi ma che presenta una compressione e allungamento massimi nel rispetto della conservazione della energia.

Le due velocità variano da 0 a v alternativamente e sono massima e minima quando è nulla l'energia potenziale, mentre le elongazioni massime dipendono oltre che dal valore di v anche dalla massa e dalla costante della molla. Come è ovvio, se k è grande (molla dura) si hanno elongazioni minori.

Osserviamo infine che il centro di massa del sistema viaggia verso destra di moto rettilineo uniforme con velocità ½ v.

☺

3. Una molla che si solleva da sé



Esercizio: Un corpo di massa m_1 ne comprime un altro di massa m_2 appoggiato al pavimento attraverso una molla di costante k. Determinare la forza F diretta verso il basso che bisogna applicare al primo corpo affinché, quando si rimuove tale forza, il secondo corpo si sollevi da terra.

☹

Indichiamo con A, B e C le posizioni corrispondenti alla molla a riposo, alla molla compressa da F e dalla forza peso di m_1, alla molla nel momento in cui sta per sollevare m_2.

Quantifichiamo le sollecitazioni della molla attraverso il sistema di riferimento x orientato verso il basso e indichiamo le forze attraverso i loro valori assoluti.

Pertanto nella posizione B scriveremo:

$$F + m_1 g - kx_1 = 0 \quad ①$$

mentre nella posizione C (di sollevamento incipiente) sarà:

$$m_2 g + kx_2 \leq 0 \quad ②$$

(con $x_2 < 0$ i che vuol dire che la forza della molla deve essere, in valore assoluto più grande del peso che deve sollevare).

D'altra parte, per il teorema di conservazione della energia, applicato alle posizioni B e C (in cui l'energia cinetica è nulla) si ha che:

$½\, k\, x_1^2 - m_1 g\, x_1 + U_2 = ½\, k\, x_2^2 - m_1 g\, x_2 + U_2 \Leftrightarrow$

$½\, k(x_1^2 - x_2^2) = m_1\, g(x_1 - x_2)$ e poiché $x_1 - x_2 \neq 0$ (essendo x_1 e x_2 discordi) si ottiene $½\, k(x_1 + x_2) = m_1\, g$ e quindi

$$x_2 = \frac{2m_1 g}{k} - x_1 \quad ③$$

Se applichiamo la ③ alla ② avremo che: $k\,\frac{2m_1 g}{k} - kx_1 + m_2 g \leq 0$ e dunque: $kx_1 \geq g(2m_1 + m_2)$.

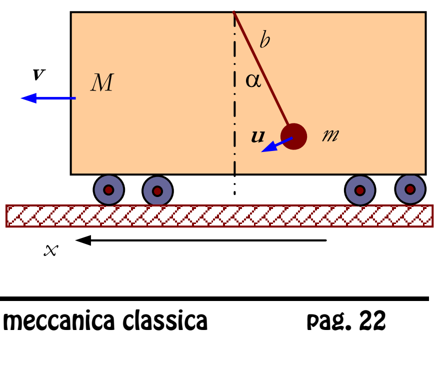
Ma per la ① $kx_1 = F + m_1\, g \geq g(2m_1 + m_2) \Leftrightarrow$

$$F \geq g(m_1 + m_2)$$

ovvero la forza di compressione deve essere superiore alla somma dei due pesi coinvolti, come si poteva intuire.

☺

4. Un pendolo che fa oscillare il carro a cui è sospeso



Esercizio: Un carro di massa M può muoversi lungo l'orizzontale senza attrito. Sul soffitto viene appeso un pendolo di lunghezza b, massa m e angolo iniziale α_0. Determinare la velocità v del vagone al variare di α.

☹

Osserviamo preliminarmente che il movimento del vagone è governato dalla legge di conservazione della quantità di moto riferita all'orizzontale. Infatti lungo l'orizzontale non agiscono forze esterne e dunque la quantità di moto iniziale del sistema pendolo + vagone che, inizialmente è nulla, rimane tale anche quando il pendolo comincia ad oscillare. Per effetto di tali oscillazioni anche il vagone inizia a muoversi.

La situazione è più complessa del solito perché si tratta di due movimenti con vincoli di natura diversa (il carrello si muove in linea retta lungo la orizzontale mentre il pendolo è vincolato ad una traiettoria circolare, vista dal vagone, e ciò ci costringe ad operare sulle componenti dei vettori) e perché intervengono problematiche di velocità relativa.

Indichiamo con $\boldsymbol{v}$ la velocità del vagone, con $\boldsymbol{u}$ quella del pendolo rispetto al vagone e con $\boldsymbol{u'}$ quella del pendolo rispetto alle rotaie sarà così: $\boldsymbol{u'} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ o anche $u'_x = u \cos \alpha + v_x$

Se applichiamo la conservazione della quantità di moto lungo la direzione di moto del vagone avremo che:

$m\, u'_x + M\, v_x = 0$

e pertanto

$$m(v_x + u \cos \alpha) + M\, v_x = 0 \quad ①$$

Se assumiamo come riferimento dell'energia potenziale il punto di quota minima avremo che:

$U = m\, g\, b\, (1 - \cos \alpha)$

e se applichiamo il teorema di conservazione della energia tra l'istante iniziale e un generico istante corrispondenti alle posizioni angolari α_0 e α:

$m\, g\, b\, (1 - \cos \alpha_0) + 0 = m\, g\, b\, (1 - \cos \alpha) + ½\, mu'^2 + ½\, Mv^2 \Leftrightarrow$

$$½\, mu'^2 + ½\, Mv^2 = mgb(\cos\alpha - \cos\alpha_0) \quad ②$$

Poiché nella equazione ② compare u'^2 dobbiamo utilizzare il teorema di Pitagora per determinarne il valore attraverso le componenti di **v** e **u**:

$$u'^2 = (v_x + u \cos\alpha)^2 + (u \sin\alpha)^2 \quad ③$$

Se indichiamo con $\beta = \dfrac{M}{m}$ dalla ① si ha che:

$$(v_x + u \cos\alpha) = -\, v_x\, \beta$$

e pertanto $u'^2 = v_x^{\,2}\, \beta^2 + (u \sin\alpha)^2$

La ② diventa [36]:

$u'^2 + \beta\, v_x^2 = 2g\, b(\cos\alpha - \cos\alpha_0) \Leftrightarrow$

$v_x^2\, \beta^2 + (u \sin\alpha)^2 + \beta\, v_x^{\,2} = 2gb(\cos\alpha - \cos\alpha_0) \Leftrightarrow$

$v_x^2\, (\beta^2 + \beta) + (u \sin\alpha)^2 = 2g\, b(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$

ma $u = -\, v_x \dfrac{\beta + 1}{\cos\alpha}$ e pertanto si ha:

$v_x^2\, (\beta^2 + \beta) + v_x^2\, \mathrm{tg}^2\alpha\, (\beta + 1)^2 = 2\mathrm{gb}(\cos\alpha - \cos\alpha_0) \Leftrightarrow$

[36] Si tenga presente che $v = |v_x|$

$v_x^2\,(\beta + 1)[\beta + \mathrm{tg}^2\alpha\,(\beta + 1)] = 2gb(\cos\alpha - \cos\alpha_0) \Leftrightarrow$

$$v_x^2 = \frac{2gb(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}{(\beta + 1)[\beta(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) + \mathrm{tg}^2\alpha]} = \frac{2gb(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}{(\beta + 1)\dfrac{\beta + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

$$v_x^2 = \frac{2gb\cos^2\alpha\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}{(\beta + 1)(\beta + \sin^2\alpha)}$$ e infine:

$$v_x = \pm\cos\alpha\sqrt{\frac{2gb(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}{(\beta + 1)(\beta + \sin^2\alpha)}}$$

Il valore massimo della velocità si ha per $\alpha = 0$ e vale

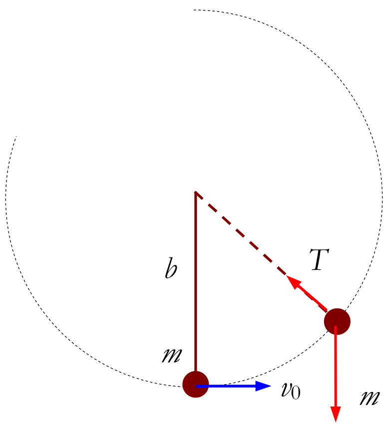
$$v_{max} = \sqrt{\frac{2gb(1 - \cos\alpha_0)}{(\beta + 1)\beta}}$$

se $M >> m$ cioè $\beta >> 1$ si può trascurare β rispetto a β^2 e, ricordando le formule di bisezione, si ha:

$$v_{max} = 2\,\frac{\sin\dfrac{\alpha_0}{2}\sqrt{gb}}{\beta}$$

☺

5. Traiettoria circolare di un corpo sospeso ad una fune e ad una sbarra: cosa cambia nei due casi?



Esercizio: Un corpo di massa m è sospeso ad una fune di massa trascurabile di lunghezza b. Determinare il valore di velocità che bisogna impartirgli nel punto più basso della traiettoria per fare in modo che il corpo possa compiere una rotazione completa intorno al punto di sospensione.

Discutere cosa accade se, invece che ad una fune il corpo è sospeso ad una sbarra rigida di massa trascurabile.

Infine si determini l'andamento della tensione nella fune al variare dell'angolo α formato tra la verticale orientata verso il basso e il raggio vettore.

☹

Il corpo, man mano che sale lungo la traiettoria circolare acquista energia potenziale e perde energia cinetica, muovendosi di moto circolare non uniforme. Affinché possa risalire lungo il quarto superiore bisogna però che arrivi nel punto più alto con $v \neq 0$ tale che la corrispondente accelerazione centripeta $\frac{v^2}{b}$ sia pari alla accelerazione fornita dalla risultante delle forze $T + mg$.

Abbiamo parlato di accelerazione centripeta perché, mentre negli altri punti della traiettoria si ha anche una accelerazione tangenziale, visto che la risultante non è perpendicolare alla circonferenza, nei due punti di quota massima e minima la risultante risulta radiale perché il peso è verticale e anche T lo è.

Avremo la velocità minima quando la fune non è costretta a fornire la forza necessaria a garantire la accelerazione necessaria, cioè quando $T = 0$ e ciò determina la condizione:

$$m\frac{v_{min}^{2}}{b} = m\,g \Leftrightarrow v_{min} = \sqrt{b\,g}.$$

D'altra parte v è legata a v_0 molto semplicemente tramite il teorema di conservazione della energia.

Se assumiamo il riferimento della energia potenziale nel punto più basso avremo che

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v_0^2 = m\, g\, 2b + \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 \Leftrightarrow v_0^2 = 4gb + v^2$$

pertanto applicando la condizione di minimo avremo:

$$v_{0min}^2 = g\,4b + b\,g \Rightarrow v_{0min} = \sqrt{5gb}$$

Se, al posto della fune c'è una sbarra, il corpo può raggiungere il punto più alto con velocità nulla e pertanto avremo che $v_{0min} = \sqrt{4gb}$.

Per quanto riguarda la determinazione della tensione nella fune osserviamo che in un generico punto della traiettoria la accelerazione centripeta (sempre presente nei moti circolari anche non uniformi) sarà uguale al rapporto tra la risultante delle forze in direzione radiale (componente del peso e tensione) e la massa.

$$\frac{v^2}{b} = \frac{T - mg\cos\alpha}{m} \Rightarrow v^2 = \frac{b}{m}(T - mg\cos\alpha) \quad ①$$

D'altra parte per il teorema di conservazione della energia sarà:

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v_0^2 = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 + mg\,(b - b\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow v^2 = -2gb\,(1 - \cos\alpha) + v_0^2 \quad ②$$

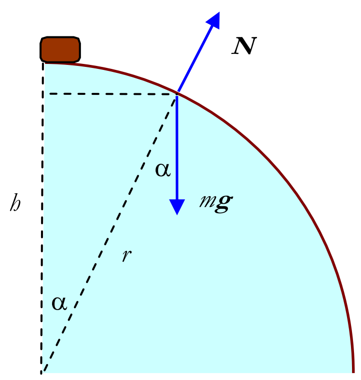
Confrontando la ① e la ② si ottiene T; infatti:

$$\frac{b}{m}(T - mg\cos\alpha) = -2gb\,(1 - \cos\alpha) + v_0^2 \Rightarrow$$

$$T = mg\cos\alpha + \frac{m}{b}[-2gb\,(1 - \cos\alpha) + v_0^2] = mg\,(-2 + 3\cos\alpha) - \frac{mv_0^2}{b}$$

☺

6. Un corpo che scivola lungo una sfera



Esercizio: Un disco di dimensioni trascurabili e di massa m parte si trova sulla sommità di una sfera di raggio r (equilibrio instabile).

Se riceve uno spostamento infinitesimo dalla posizione di equilibrio inizia a scivolare lungo la superficie acquistando progressivamente velocità. Supponendo che tra i due corpi non vi sia attrito, si determini al variare dell'angolo α formato tra la verticale e il raggio vettore, il valore della reazione vincolare della sfera e il punto in corrispondenza del quale il disco perde contatto con la sfera.

☹

Se consideriamo un generico punto della traiettoria (come indicato in figura) avremo che:

$R_n = ma_c$ con $a_c = \frac{v^2}{r}$ e $R_n = mg\cos\alpha - N$ da cui si ha:

$$mg\cos\alpha - N = m\frac{v^2}{r} \quad ①$$

Ma la velocità e la posizione sono correlate tramite il teorema di conservazione della energia: Assumendo come riferimento la quota del centro della sfera avremo che:

$mg\, r = mg\, h + \frac{1}{2}\, mv^2 = mg\, r \cos\alpha + \frac{1}{2}\, mv^2$ da cui:

$$mv^2 = 2mgr\,(1 - \cos\alpha) \text{ ②}$$

Se eliminiamo la velocità dalla ① e dalla ② avremo la relazione che correla la reazione vincolare alla posizione:

$$N = mg \cos\alpha - m\frac{v^2}{r} = mg\cos\alpha - 2mg\,(1 - \cos\alpha) \Leftrightarrow$$

$$N = mg\,(3\cos\alpha - 2) \text{ ③}$$

N diminuisce al crescere di α finché raggiunge valore 0 per:

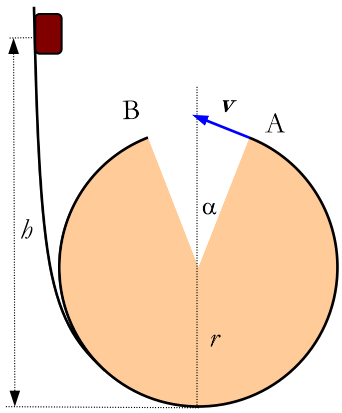
$$3\cos\alpha = 2 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3}$$

Nota Bene: in quel punto il corpo è dotato di velocità $v = \sqrt{\frac{1}{3}\,2gr}$ e da quell'istante cade con traiettoria parabolica con accelerazione g.

Si consiglia di descrivere il moto successivo individuando il punto di impatto con il terreno.

☺

7. Se si taglia un settore nel cerchio del *giro della morte* cosa accade?



Esercizio: Si consideri una configurazione tipo *montagne russe* in cui un oggetto dopo aver accelerato lungo una guida di dislivello h entra in una traiettoria circolare di raggio r (con $h > 2r$). Supponendo che dalla parte terminale della traiettoria circolare venga eliminato un settore di ampiezza 2α si trovino i valori di h che consentono al corpo dopo un volo parabolico di raggiungere nuovamente la guida circolare e si determini inoltre, fissato h, per quali valori di α il problema ammette soluzione.

☹

La condizione data dal problema $h > 2r$ serve semplicemente a garantire la condizione energetica per la raggiungibilità del punto culminante. Va inoltre precisato che deve essere $\alpha < 90°$ perché in caso contrario la direzione della velocità porta il corpo verso l'esterno e ciò richiederà che sia $\cos\alpha > 0$

Osserviamo inoltre che lungo l'arco AB il corpo si muove di moto parabolico uniformemente accelerato e possiamo pertanto, visto che la velocità $\mathbf{v}_A$ forma un angolo α con l'orizzontale, dovremo utilizzare la formula per il calcolo della gittata, già vista nelle parti di cinematica, per collegare l'angolo alla velocità.

$$AB = \frac{2\, v_A^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = 2\, r \sin\alpha \text{ da cui } v_A^2 = \frac{gr}{\cos\alpha} \text{ (*) ①}$$

(*) Si può arrivare direttamente al risultato trovato scomponendo v_A nelle sue due componenti e imponendo che mentre lungo la orizzontale si percorre il tratto AB con moto uniforme, determinabile tramite la definizione di seno o il teorema della corda, lungo la verticale viene percorso il doppio dello spazio $\Delta s = \frac{(v \sin\alpha)^2}{2g}$

Se l'oggetto possiede una velocità inferiore a quella trovata finisce il suo volo prima di B e cade all'interno, se invece possiede una velocità troppo alto finisce all'esterno della circonferenza.

D'altra parte la velocità v_A può essere messa in relazione facilmente alla quota h tramite il teorema di conservazione della energia:

$$mg\,h = mg\,(r + r\cos\alpha) + \tfrac{1}{2}\,m\,v_A^2 \Leftrightarrow gh = gr\,(1 + \cos\alpha) + \frac{gr}{2\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{h}{r} = \left(1 + \cos\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha}\right)$$

e se poniamo per comodità $k = \dfrac{h}{r}$ otterremo l'equazione di II grado:

$$2\cos^2\alpha - 2(k-1)\cos\alpha + 1 = 0 \quad ②$$

in cui, per le condizioni date all'inizio deve essere $k > 2$.

Si tratta ora di sapere cosa accade delle soluzioni al variare di k tenendo conto che, entro i limiti di natura geometrica posti, deve essere:

$0 < \alpha < 90°$.

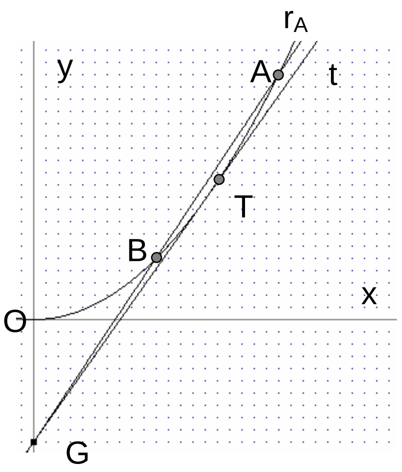
Si escludono gli estremi perché quando $\alpha = 0$ non si ha taglio e quando $\alpha = 90°$ la velocità è verticale e il corpo ritorna al punto di partenza.

Come in tutte le equazioni di II grado avremo soluzioni per

$$\frac{\Delta}{4} = (k-1)^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$k > 1 + \sqrt{2} \quad ③$$

(l'intervallo con k negativo non è accettabile fisicamente).



Per discutere l'equazione parametrica utilizzeremo una metodologia grafica basata sulla sostituzione $x = \cos\alpha$ e $y = x^2$. Con questa sostituzione la equazione ② diventa:

$$\begin{cases} 2y - 2(k-1)x + 1 = 0 \mid \text{Fascio di rette di centro } G \equiv (0, -\tfrac{1}{2}) \\ y = x^2 \mid \text{Parabola ad asse verticale con vertice nell'origine} \\ 0 < x < 1 \mid \text{Limitazione derivante da quelle sull'angolo} \end{cases}$$

Al variare di k le radici dell'equazione corrispondono ai punti di intersezione tra il fascio di rette e la parabola e risultano accettabili solo le soluzioni comprese nel tratto OA di curva.

Dobbiamo pertanto individuare la retta r_A passante per A e la retta r_T tangente alla parabola nel primo quadrante.

Per determinare r_A basta imporre il passaggio per A≡ (1,1); così facendo si ottiene per sostituzione: $k_A = \dfrac{5}{2}$

La condizione di esistenza di soluzioni reali corrisponde a:

$\dfrac{\Delta}{4} \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 1 + \sqrt{2}$ e il valore = corrisponde alla retta tangente r_T.

Per valori di k compresi tra la retta r_A e la retta r_T si hanno due soluzioni accettabili della forma:

$$\cos\alpha = \frac{(k-1) \pm \sqrt{(k-1)^2 - 2}}{2}$$

che corrispondono ai punti di intersezioni compresi nell'arco BA di parabola.

Ciò avviene per valori di k compresi in $1 + \sqrt{2} < k < \frac{5}{2}$

Per determinare il punto B che corrisponde alla intersezione di r_A con la parabola basta cercare le soluzioni corrispondenti a $k = \frac{5}{2}$ il che porta a:

$$x = \cos\alpha = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} = \begin{matrix} / \ 1 \\ \backslash \ ½ \end{matrix} \Leftrightarrow \alpha = \begin{matrix} / \ 0° \\ \backslash \ 60° \end{matrix}$$

Dunque il punto B ha coordinate (½,¼)

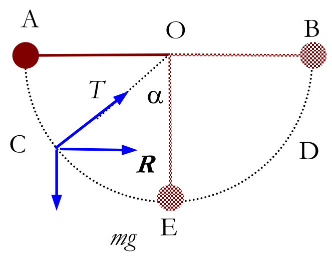
Per $k = 1 + \sqrt{2}$ si ha $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cioè $\alpha = 45°$ (che corrisponde, come è noto, a parità di condizioni, alla gittata massima)

Per $k > 5/2$ si ha una sola soluzione accettabile corrispondente a valori del coseno $< \frac{1}{2}$ e cioè angoli compresi tra 60° e 90°.

☺

8. La velocità di un pendolo al variare della posizione

Esercizio: Si consideri una fune di massa trascurabile cui viene appeso un corpo puntiforme di massa m. La fune viene fatta ruotare sino a formare un angolo di 90 gradi rispetto alla verticale e quindi rilasciata a partire dalla quiete. Si analizzino le caratteristiche del moto e si determinino i punti in cui la accelerazione risulta rispettivamente verticale od orizzontale.



☹

La accelerazione ha la stessa direzione e verso della risultante delle forze applicate e pertanto i punti A e B sono caratterizzati da accelerazione verticale verso il basso. In E la risultante è orientata verso l'alto (differenza tra la tensione e la forza peso).

Lungo la traiettoria si ha

$$T - mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{r}$$

e nei punti C e D in cui si ha accelerazione orizzontale deve essere

$$T\cos\alpha = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

Pertanto: $\frac{\mathrm{mg}}{\cos\alpha} - mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{r}$ ovvero

$$g\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) = \frac{v^2}{r} \quad ①$$

L'equazione trovata va associata alla conservazione dell'energia che ci consente di mettere in relazione angolo e velocità (riferimento di U in O):

$$0 = \frac{mv^2}{2} - mg\,r\cos\alpha \Rightarrow v^2 = 2\,g\,r\cos\alpha \ ②.$$

Dalla ① e la ② si ottiene infine:

$$\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha = 2\cos\alpha \Rightarrow 3\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha \approx 54° \; 45'$$

☺

9. Un pendolo bloccato da un piolo

Esercizio: Un pendolo semplice di lunghezza l viene lasciato libero di oscillare a partire dalla quiete in un punto che forma un angolo α con la verticale. Lungo la verticale si trova un piolo. Dimostrare che l'angolo che il pendolo formerà con la verticale dopo essere risalito per effetto del vincolo è pari a arc cos(2 cosα – 1).

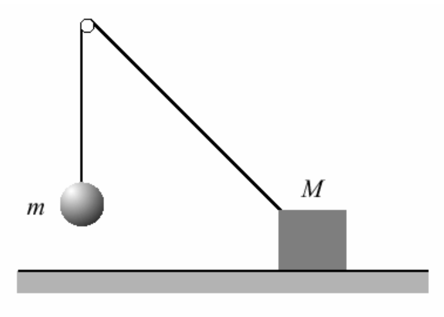
☹

10. Effetti dissipativi e variazione dell'energia meccanica

Esercizio: Un pattinatore dotato di velocità iniziale v risale liberamente lungo uno scivolo caratterizzato da un dislivello verticale h per ogni s metri percorsi. Stabilire sino a quale altezza h' risale supponendo che il coefficiente d'attrito tra il pattino e il ghiaccio valga μ. Risolvere il problema per il caso in cui v =8.50 m/s, h = 0.62 m, s = 10.0 m e μ = 1.90 × 10^{-2}. [37]

☹

11. Olimpiadi 2002 gara di II livello: carrucola, attrito, oscillazioni



Esercizio: Un blocco di massa M, appoggiato su un piano orizzontale scabro, è unito mediante un filo (inestensibile e di massa trascurabile) a un secondo corpo di massa m = ½ M. Il filo viene fatto passare su una carrucola posta a una certa altezza sopra il piano in modo che il secondo corpo resti sospeso mentre il tratto di filo che va dal blocco alla carrucola forma un angolo di 45° con la verticale. Dalla sola osservazione che il sistema è in equilibrio, si possono ricavare informazioni circa il coefficiente di attrito statico tra il blocco e il piano e sul rapporto delle due masse.

- Mostrare che l'equilibrio del sistema è possibile se il coefficiente d'attrito statico tra blocco e piano è maggiore di un certo valore μ_0 e determinare tale valore.
- L'equilibrio è possibile anche con un rapporto di masse maggiore di quello dato, ma fino ad un certo limite, oltre il quale i due corpi non possono rimanere fermi in quella posizione, qualunque sia il valore del coefficiente d'attrito statico.

  Quanto può valere al massimo il rapporto m/M tra le due masse perché il sistema resti in equilibrio nella posizione data?
- Successivamente si mette in oscillazione il corpo sospeso, con un'ampiezza θ (angolo massimo rispetto alla verticale) mentre il blocco rimane fermo sul piano. Ripetendo la prova con ampiezze di o-

---

[37] Il lavoro della forza d'attrito è pari alla variazione di energia meccanica. Si ottiene $h' = \dfrac{v^2}{2g\left(1 + \mu\frac{s}{h}\right)}$ e con i dati forniti si ha h' = 2.82 m

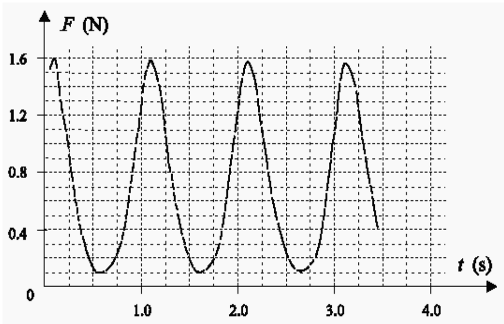
scillazione progressivamente crescenti, si osserva che per $\theta = 30°$ nell'istante in cui il corpo che oscilla passa nel punto più basso, il blocco inizia a muoversi sul piano.

Mostrare che è possibile adesso determinare il valore del coefficiente d'attrito statico (sempre nel caso $m = M/2$). [38]

☹

12. Olimpiadi 2002 gara nazionale: oscillazioni di un pendolo e componente verticale della tensione

Esercizio: Un sensore di forza collegato a un sistema di acquisizione automatica di dati consente di registrare valori di forze che variano rapidamente nel tempo.



Un pendolo è costituito da una sfera di massa m collegata a un'estremità di un filo di lunghezza t il quale è fissato, all'altra sua estremità, a un sostegno. Il pendolo viene deviato dalla verticale di un angolo α e quindi lasciato oscillare liberamente, mentre un sensore di forza misura la componente verticale della tensione del filo; i valori misurati di tale componente sono riportati nel grafico che segue.

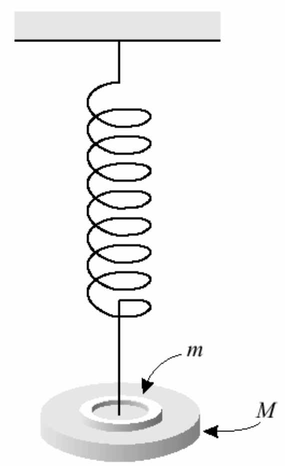
- Mettere in relazione l'andamento del grafico con le successive posizioni del pendolo, motivando l'asimmetria tra i massimi e i minimi della curva.
- Stimare il periodo del pendolo.
- Utilizzando i valori massimo e minimo delle misure riportate nel grafico, determinare l'angolo α e la massa del pendolo.

Note: Si tenga conto che non ci sono motivi per considerare piccolo l'angolo α. *Gli effetti di smorzamento sono da considerarsi trascurabili. Assumere* $g = 9.80$ m/s². [39]

☹

13. Olimpiadi 1998 gara nazionale: un pendolo a molla con un oggetto appoggiato sulla piattaforma

Esercizio: Una piattaforma di massa $M = 100$ g è fissata a una molla di costante elastica $k = 10$ N/m e di massa trascurabile. La molla a riposo ha le spire distanziate fra loro. Sulla piattaforma è appoggiato un anello di massa $m = 10$ g come mostrato in figura. Il sistema è libero di oscillare verticalmente.



---

[38] a) $\mu \geq \dfrac{1}{2\sqrt{2}-1}$ b) $m > \sqrt{2}\,M$ c) $\mu < \dfrac{mg(3-2\cos\theta)\sqrt{2}/2}{Mg - mg(3-2\cos\theta)\sqrt{2}/2}$; in corrispondenza dell'angolo θ_0 si ha $\mu = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-3+\sqrt{3}}$

[39] a) Il valore massimo della tensione si ha per $T' = mg + \dfrac{m\,v^2}{l}$ i massimi sono più stretti dei minimi perché quando passa per i massimi la velocità del pendolo è più elevata.

b) il periodo è il doppio di una semioscillazione (il sensore non è in grado di distinguere i due estremi) si ha $T \approx 2.0 \div 2.1$ s

c) Applicando la conservazione della energia si arriva alla equazione $16\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 3 = 0$ con $\alpha \approx 68°$ cui corrisponde $m \approx 73$ g

a) Determinare l'allungamento della molla quando il sistema è in equilibrio.

Il sistema è posto in oscillazione.

b) Determinare la forza esercitata dalla piattaforma sull'anello, durante l'oscillazione, in funzione della posizione.

c) Mostrare che l'anello potrebbe staccarsi dalla piattaforma e determinare la posizione in cui eventualmente avverrebbe il distacco.

Il sistema viene abbandonato fermo, con la molla allungata di 30 cm.

d) Verificare che l'anello si staccherà e determinare la velocità della piattaforma quando avviene il distacco.

e) Determinare la massima altezza raggiunta dalla piattaforma dopo il distacco.

f) Scrivere le leggi orarie che descrivono il moto dell'anello e della piattaforma, ponendo $t = 0$ nell'istante del distacco.

g) Determinare, usando eventualmente un grafico delle due funzioni trovate, il tempo necessario all'anello per ricadere sulla piattaforma dopo il distacco. [40]

---

[40] a) In condizione di equilibrio si ha: $y_0 = -\frac{(M+m)g}{k} = -0.108$ m

b) L'equazione richiesta è $F = -\frac{m}{M+m} k\, y$

c) Il distacco avviene per la condizione $F < 0$ e si ha pertanto quando $y = 0$. La condizione iniziale data garantisce che non avvenga il distacco.

d) Applicando la conservazione dell'energia si ha il distacco per $v^2 = \frac{k\, y_1^2}{M+m} + 2g\, y_1$ da cui $v = 1.52$ m/s

e) dopo il distacco si può applicare ancora la conservazione dell'energia al sistema molla piattaforma tra i due estremi di annullamento della energia cinetica e di quella potenziale ottenendo $\frac{k}{M} y_{max} + 2\, g\, y_{max} - v^2 = 0$ che porta alla soluzione = 0 che porta alla soluzione $y_{max} = 8.24 \cdot 10^{-2}$ m

f) l'anello si muove di m.u.a. mentre la piattaforma oscilla con *moto armonico* (si veda il primo capitolo della parte IV dedicata ai moti oscillatori).

L'ampiezza di oscillazione $R = y_{max} - y_0 = 0.181$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$ e la legge di oscillazione è del tipo:

$y = R \sin(\omega t + \varphi) - \frac{M\, g}{k}$ dove φ può essere determinato attraverso le consizioni iniziali e si ottiene $\varphi = \arcsin \frac{M\, g}{k\, R} \approx 0.573$

g) La legge oraria dell'anello risulta $y = 1.52\, t - 4.91\, t^2$ e quella della piattaforma:

$y = 0.181 \sin(10\, t + 0.573) - 0.0981$

Operando per via grafica si trova t = 0.438 s.

☹

14. Olimpiadi 1999 gara nazionale: fase di rientro di un satellite

Esercizio: Un satellite artificiale si muove su un'orbita circolare con velocità *v*.

a) Posto che l'energia potenziale gravitazionale abbia valore nullo a distanza infinita, calcolare i rapporti costanti tra le energie potenziali e cinetica e l'energia totale.

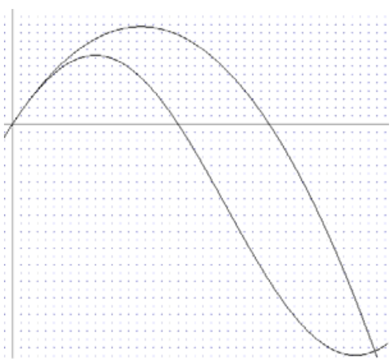
b) In presenza di una forza di frenamento $\boldsymbol{F}$ opposta al moto (per esempio dovuta all'alta atmosfera) l'orbita non è più esattamente circolare, ma il moto può ancora essere descritto in termini di un'orbita circolare il cui raggio diminuisce lentamente.

Mostrare che se il satellite perde una certa quantità di energia, la sua velocità aumenta e determinare la corrispondente variazione relativa della distanza dal centro della Terra quando $|\Delta\mathcal{E} / \mathcal{E}| << 1$, dove $\Delta\mathcal{E}$ rappresenta la variazione negativa di energia.

c) Stimare la forza di frenamento che agisce su un satellite la cui massa è 900 kg, in orbita a 600 km di altezza, se questo si abbassa di circa 50 m al giorno.

Nota: il quesito può essere risolto utilizzando, oltre ai dati precedenti, solo i seguenti dati: accelerazione di gravità al suolo g = 9.81 m/s^2 e raggio della Terra $R_T = 6.4 \cdot 10^6$ m.

d) Descrivendo più accuratamente l'orbita –almeno per un piccolo tratto per il quale la traiettoria si possa considerare rettilinea– mostrare, in termini di forze e facendo le dovute approssimazioni geometriche, come è possibile che la presenza di una forza d'attrito abbia come conseguenza un aumento della velocità del satellite. [41]



[41] a) La energia cinetica = – ½ U e la dimostrazione si fa molto facilmente utilizzando la II legge della dinamica ed il valore di U. Ne consegue che $\mathcal{E}_k = -\mathcal{E}$

b) Da $\mathcal{E}_k = -\mathcal{E}$ segue che $\Delta\mathcal{E}_k = -\Delta\mathcal{E}$ e da qui si arriva a $\Delta v \approx \dfrac{-\Delta\mathcal{E}}{m\,v}$ e a $\dfrac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = -\dfrac{\Delta r}{r}$

c) Nel tempo Δt si avrà uno spostamento $\Delta r = v\,\Delta t$ che per effetto della forza frenante determinerà una variazione di energia totale pari al lavoro compiuto.

Si ottiene così: $F = -\dfrac{1}{2}\dfrac{G\,M\,m}{v\,r^2}\dfrac{\Delta r}{\Delta t} = \dots = -\dfrac{1}{2} M \dfrac{R}{r}\sqrt{\dfrac{g}{r}}\dfrac{\Delta r}{\Delta t} \approx 2.8 \cdot 10^{-4}$ N

☹

15. Satellite geostazionario

Esercizio: Un satellite per telecomunicazioni con massa 6'500 Kg si trova in una orbita circolare. Calcolare a quale distanza dalla superficie della terra si trova. Calcolare quindi l'energia che bisogna spendere per ridurre alla metà il raggio dell'orbita. Quanto vale il rapporto tra la velocità dell'orbita geostazionaria e la nuova velocità?

☹

16. Moto di un satellite: effetti perturbativi

Esercizio: Un satellite artificiale di massa M = 750 kg, lanciato da un punto situato lungo l'equatore terrestre, viene posto in un'orbita circolare equatoriale all'altezza di 12'500 km. Determinare:

a) il lavoro che si deve compiere per mettere in orbita il satellite.

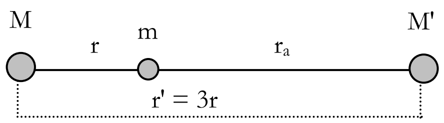
b) la velocità con cui il satellite arriverebbe al suolo se per un urto con un corpo si fermasse sulla sua orbita, (trascurare l'effetto di frenamento dovuto all'atmosfera).

c) la forma dell'orbita nel caso in cui a causa di un urto la velocità aumentasse improvvisamente del 10% con la medesima direzione, calcolando anche la minima e la massima distanza dalla Terra secondo la nuova traiettoria.

☹

17. Compito in classe 2003: energia potenziale di un sistema di pianeti

Esercizio: E' dato un sistema formato da un pianeta di massa M e da un corpo di massa m posto a distanza r da esso. Scrivere simbolicamente e poi calcolare il rapporto ε tra l'incremento di energia potenziale dovuta alla presenza di un secondo pianeta di massa M' a distanza r' dal primo pianeta e l'energia potenziale originaria nei due casi



a) in cui i 3 corpi siano allineati e si seguano nell'ordine MmM'

b) in cui l'angolo mMM' sia α .

Dati numerici r ' = 3 r, M' = 2.5 M, α = 47.5°. Si consiglia di indicare con r_a e r_b le distanze tra m e M' nei due casi.

☹

a) La situazione è illustrata dalla immagine qui a lato da cui si osserva che

$$r_a = r' - r = 2r \qquad U'_a = -G\frac{M'\,m}{r_a} \text{ mentre } U = -G\frac{M\,m}{r}$$

La energia potenziale del corpo di massa m passa da U a U + U' e l'incremento è dato da U'.

---

d) Utilizzando le relazioni precedenti ed indicando con F_a il modulo della forza d'attrito, con F_G quello della forza gravitazionale e con Δs lo spostamento lungo l'orbita si trova: $\Delta r = -\dfrac{2\,F_a\,\Delta s}{F_G}$

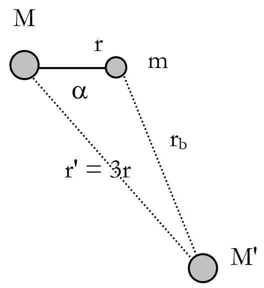
Per effetto della forza d'attrito la forza di gravitazione non è più ortogonale alla traiettoria e presenta una componente tangenziale F tale che $F/F_G = \Delta r\,/\Delta s$ (costruire la figura).

Tenuto conto della relazione precedente si ottiene $F = 2F_a$. E' questa la causa dell'incremento di velocità.

Pertanto $\varepsilon_a = \frac{U'_a}{U} = \frac{M'}{r_a}\cdot\frac{r}{M} = \frac{M'}{M}\cdot\frac{r}{r_a} = \frac{2.5}{2} = 1.25$

Note di correzione: le energie potenziali si intendevano riferite al corpo di massa m e non all'intero sistema (il che avrebbe comportato di esaminare anche la interazione tra M e M'). Il calcolo simbolico richiedeva di scrivere il risultato generale $\varepsilon_a = \frac{M'}{M}\cdot\frac{r}{r_a}$ che poteva poi essere utilizzato anche per il caso b nel quale cambiava solo il valore di r_b.

b) Nel caso di non allineamento dovremo ricorrere a considerazioni di carattere goniometrico per il calcolo di r_b. In effetti con riferimento alla figura qui a lato si ha (applicando il teorema del coseno) che:



$r_b = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r\,r'\cos\alpha} = \sqrt{r^2 + 9r^2 - 6r^2\cos\alpha}$

$= \sqrt{10 - 6\cos 47.5}\ r = 2.44\ r$

Le relazioni sono le stesse del caso precedente salvo il mutato valore di r.

Pertanto $\varepsilon_b = \frac{U'_b}{U} = \frac{M'}{M}\cdot\frac{r}{r_b} = \frac{2.5}{2.44} = 1.02$

☺

18. Compito in classe aprile 2004: urti, molle e attrito

Esercizio: Una particella di massa m dotata di velocità v_1 ne urta elasticamente un'altra in quiete e di massa $2m$. Indicare con v'_1 e v'_2 le proiezioni della velocità dopo l'urto nella direzione del moto. Al di là del punto in cui avviene l'urto si trova un tratto piano di lunghezza Δl caratterizzato da coefficiente d'attrito μ ed al suo estremo un molla a riposo di costante elastica k e di massa trascurabile che consente di trovare la velocità v_1 attraverso la deformazione massima Δx subita dalla molla.

a) dimostrare che $v_2' = \frac{2}{3}v_1$ e che $v_1' = -\frac{1}{3}v_1$

b) determinare la energia cinetica finale $\mathcal{E}_{kf}$ della seconda particella immediatamente prima di urtare la molla.

c) scrivere la relazione che collega Δx e v_1

d) determinare $v_1 = f(\Delta x)$

e) come mai, affinchè la molla possa contrarsi, deve essere $v_1 \geq \sqrt{\frac{9}{2}\mu\,g\,\Delta l}$

☹

19. Compito in classe aprile 2004: una sonda lunare deve uscire dal sistema solare

Esercizio: Siamo nel 2100; il sistema solare è stato colonizzato e una squadra spaziale dell'ONU che si trova sull'altra faccia della Luna (quella invisibile dalla Terra) deve mandare una sonda di massa m fuori dal sistema solare.

a) Determinare l'energia potenziale della sonda in funzione di M_T, R_{TL}, R_L, M_L

b) Calcolare tale valore sapendo che $m = 2.50\cdot10^3$ kg, $M_T = 5.974\cdot10^{24}$ kg, $R_{TL} = 3.84\cdot10^8$ m, $R_L = 1.74\cdot10^6$ m, $M_L = 7.35\cdot10^{22}$ kg

c) Quanto vale la velocità di fuga?

☹

20. Compito in classe aprile 2004: lo Sputnik e l'Explorer 1

Esercizio: Il primo satellite artificiale terrestre (Sputnik) fu lanciato dall'URSS il 4/10/1957 ed aveva un periodo di 96'.

L'Explorer 1 fu lanciato dagli USA il 1/2/1958 ed aveva un periodo di 115'.

a) A che altezza *h*, dalla superficie, orbitava lo Sputnik?

b) Determinare il rapporto R_E/R_S tra i due raggi orbitali.

☹

21. Compito in classe aprile 2004: qualche calcolo sul Sole

Esercizio: La massa del Sole vale $M_\odot = 1.989 \cdot 10^{30}$ kg, e si assume un raggio medio $R_\odot = 6.96 \cdot 10^8$ m.

Il Sole ruota intorno al proprio asse con un periodo $T_\odot = 25.4$ giorni terrestri. Determinare:

a) La densità media $\delta_\odot$ del Sole

b) Il campo gravitazionale $g_\odot$ alla superficie

c) Il decremento di accelerazione di gravità $\Delta g_\odot$ dovuto alla rotazione

d) La velocità di fuga dal Sole $v_\odot$

☹

22. Compito in classe 2006: energia potenziale elastica

Esercizio: Una molla di costante elastica k = 20.5 N/cm viene compressa di $\Delta s = 4.50$ cm e l'energia potenziale accumulata viene utilizzata per lanciare un oggetto di massa $m = 0.250$ con un angolo di inclinazione $\alpha = 36.0°$.

a) Prestando attenzione alle unità determinare l'energia cinetica $\mathcal{E}_{k0}$ e la velocità iniziale v_0 dell'oggetto.

b) L'oggetto si muove sotto l'azione del peso ($g = 9.81$ m/s²) e percorre uno spazio ΔX_1 prima di rimbalzare. Trovare ΔX_1.

c) L'urto contro il terreno è parzialmente elastico con un fattore di restituzione energetica $\mu = 0.800$. Ipotizzare che l'angolo di inclinazione non venga modificato dall'urto. Quanto vale l'energia cinetica $\mathcal{E}_{k4}$ dopo il quarto rimbalzo?

d) Dopo aver analizzato la dipendenza della gittata dalla energia cinetica calcolare lo spazio percorso complessivo $\Delta X = \Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3 + \Delta X_4$

☹

$k = 20.5$ N/cm $= 2.05 \cdot 10^3$ N/m $\qquad \Delta s = 4.50 \cdot 10^{-2}$m

La energia potenziale della molla si trasforma tutta in energia cinetica dell'oggetto e pertanto

$\mathcal{E}_{k0} = U = ½\, k\, \Delta s^2 = 2.076$ J mentre $v_0 = \sqrt{\dfrac{2\,\mathcal{E}_{k0}}{m}} = 4.075$ m/s

Si tratta di un classico calcolo della gittata

$\Delta X_1 = v_{0x}\, \Delta t_v$ mentre il tempo di volo (mua) è pari a $2\,\dfrac{v_{0y}}{g}$ e pertanto

$\Delta X_1 = v_{0x}\, 2\,\frac{v_{0y}}{g} = 2\, v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha\, /g = \frac{2\cdot 16.6\cdot \sin 36\cdot \cos 36}{9.81} = 1.61$ m

Dopo ogni rimbalzo l'energia cinetica va moltiplicata per α

$\mathcal{E}_{k1} = \alpha\, \mathcal{E}_{k0}$ $\mathcal{E}_{k2} = \alpha\, \mathcal{E}_{k1} = \alpha^2\, \mathcal{E}_{k0}$ …

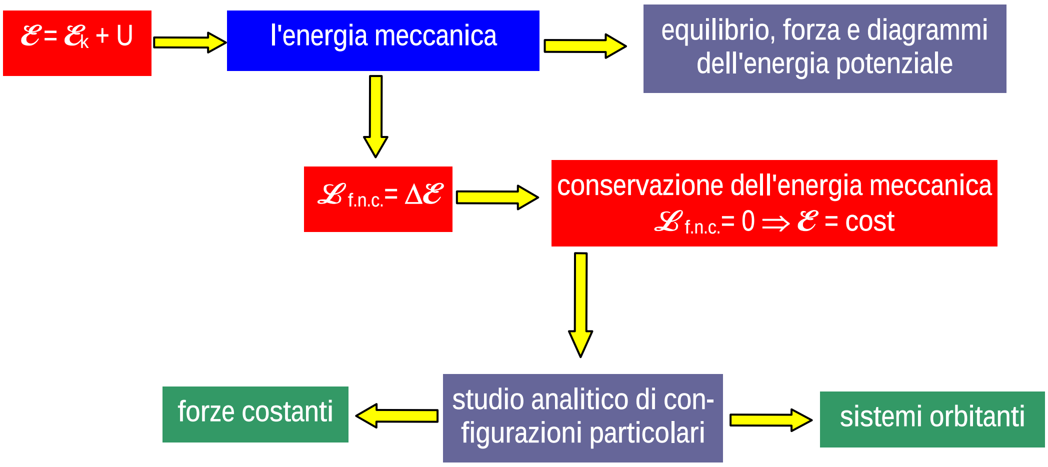
$\mathcal{E}_{k4} = \alpha^4\, \mathcal{E}_{k0} = 0.800^4\cdot 2.076 = 0.850$ J

Come si è già visto la gittata è proporzionale al quadrato della velocità e dunque $\Delta X \propto \mathcal{E}_k$ ad ogni salto

$\Delta X = \Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3 + \Delta X_4 = \Delta X_1 + \alpha\Delta X_1 + \alpha^2\Delta X_1 + \alpha^3\Delta X_1 = \Delta X_1 (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3) = 1.61\cdot 2.952 = 4.75$ m

☹

Indice analitico



$\mathcal{E} = \mathcal{E}_k + U$
l'energia meccanica
equilibrio, forza e diagrammi dell'energia potenziale
$\mathcal{L}_{f.n.c.} = \Delta\mathcal{E}$
conservazione dell'energia meccanica
$\mathcal{L}_{f.n.c.} = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = cost$
forze costanti
studio analitico di configurazioni particolari
sistemi orbitanti