

II.3. La teoria della relatività ristretta

- ⌘ **Genesi della teoria**
- ⌘ **I postulati della teoria**
- ⌘ **La simultaneità degli eventi**
- ⌘ **La legge di composizione relativistica delle velocità**
- ⌘ **Le trasformazioni di Lorentz**
- ⌘ **Contrazione delle lunghezze e dilatazione del tempo**
- ⌘ **L'intervallo spazio-temporale**
- ⌘ **Fenomeni e paradossi relativistici**
- ⌘ **Relazione tra meccanica newtoniana e relativistica**
- ⌘ **Esercizi**

3.1 Genesi della teoria

3.1.1 IL VALORE DELLA VELOCITÀ DELLA LUCE NEL VUOTO

Dalla metà del 19° secolo in avanti sono stati approntati metodi accurati di misura della *velocità della luce*¹ e si è trovato che $c \approx 3 \times 10^8$ m/s nel vuoto, o, con maggiore accuratezza:

$$c = 299'792'458 \text{ m/s}$$



L'accuratezza raggiunta è stata tale che nel Sistema Internazionale delle unità di misura questo valore viene assunto come *vero per definizione* e lo si utilizza per definire il metro come $1/299'792'458$ dello spazio percorso dalla luce nel tempo di 1 s.

Ma qual è il sistema di riferimento a cui si riferisce tale valore? Infatti non ha senso parlare di velocità senza aver specificato il sistema di riferimento a cui ci si riferisce.

In base alla legge classica di composizione delle velocità ci aspetteremmo che la velocità della luce risulti diversa nei diversi sistemi di riferimento e di conseguenza, il valore che è stato indicato dovrebbe valere per un particolare sistema di riferimento. Questa ipotesi può essere verificata con il seguente esperimento ideale.

Supponiamo che uno strumento di misura, sufficientemente accurato, sia a riposo rispetto alla sorgente di luce che si trova nell'origine del sistema $x y z$. Lo strumento registrerà per la luce una velocità che indicheremo con c .

Successivamente poniamo lo strumento di misura in quiete in un altro sistema di riferimento che si muova con velocità $\vec{v}$ rispetto a $x y z$ ed esaminiamo le velocità previste in base alla composizione vettoriale delle velocità secondo cui $\vec{c} = \vec{c}' + \vec{v}$ o anche $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}$

- se il movimento avviene nella direzione e verso dell'asse x si ha $c' = c - v$
- se il movimento avviene lungo x ma in verso opposto si ha $c'' = c + v$
- se il movimento avviene nella direzione di y si ha in base al teorema di Pitagora $c''' = \sqrt{c^2 + v^2}$

Ma gli esperimenti non confermano questo tipo di previsione.



Le velocità macroscopiche v a cui ci si riferisce nelle espressioni citate sono sempre molto piccole rispetto alla velocità della luce. In effetti, se anche ci si riferisce alla più grande velocità macroscopica di cui disponiamo e cioè alla velocità orbitale della terra intorno al sole, si otterranno valori di qualche decina di km/s che andranno confrontati con 300'000 km/s.

¹ Tali metodi sono descritti nei capitoli dedicati all'ottica nella parte quarta di questo testo.

Il rapporto tra i due valori, nella migliore delle situazioni, ha un ordine di grandezza di 10^{-4} e pertanto può risultare difficile percepire la differenza tra c' , c'' e c''' che dipende dal quadrato di tale rapporto come si può vedere eseguendo il corrispondente calcolo algebrico.

Per esempio, nel caso di velocità parallele, se indichiamo con Δt il tempo impiegato dal sistema in moto con velocità v a percorrere lo spazio su cui si effettua la misurazione, si ha:

$$t' - t'' = \Delta x \left(\frac{1}{c - v} - \frac{1}{c + v} \right) = \Delta x \frac{2v}{c^2 - v^2} = \frac{\Delta x}{v} \frac{2v^2}{c^2 - v^2} = \Delta t \frac{2\beta^2}{1 - \beta^2}$$

$$t' - t'' \approx \Delta t \cdot 2\beta^2(1 + \beta^2) \approx 2\beta^2 \cdot \Delta t$$

dove con β si indica il rapporto $v/c \approx 10^{-4}$. Stiamo dunque parlando di misurazioni che per apprezzare le differenze devono essere accurate sino alla ottava cifra significativa.

3.1.2 I PROBLEMI ALLA BASE DELLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ

La necessità di eseguire misure accurate della velocità della luce che evidenziassero la composizione di essa con la velocità del sistema di riferimento terrestre trae origine da un problema interno all'elettromagnetismo di fine 800.

Nella seconda metà del secolo si era giunti ad una sintesi delle leggi dell'elettromagnetismo in poche equazioni che faceva pensare all'elettromagnetismo come al nuovo modello di conoscenza cui si doveva uniformare la fisica. Il nuovo elettromagnetismo era caratterizzato dalla sostituzione della nozione di azione a distanza, tipica della fisica newtoniana, con quella di azione per contiguità, tipica della concezione dei campi.

In effetti, a parte le ragioni di natura estetica legate alla semplicità, eleganza e simmetria delle equazioni, i successi dell'elettromagnetismo erano stati notevoli: scoperta di numerosi fenomeni già applicati dall'industria di fine secolo (primo tra essi l'induzione elettromagnetica che aprì la strada all'era della elettricità), previsione e scoperta delle onde elettromagnetiche (che di lì a poco avrebbero aperto la strada alle telecomunicazioni), scoperta del carattere unitario di elettricità e magnetismo, scoperta che la luce era una particolare onda elettromagnetica.

C'era però nelle equazioni che descrivevano i fenomeni elettromagnetici una *zona oscura*: in queste equazioni compariva una velocità privilegiata (quella delle onde elettromagnetiche e quindi anche della luce) deducibile dalla teoria e che sembrava indicare la presenza di un sistema di riferimento privilegiato (quello in cui la velocità della luce assumeva il valore previsto dalla teoria).

Era come se la scienza fisica indicasse la esistenza di una sorta di *spazio assoluto* nel quale avvenissero i fenomeni fisici e tale spazio assoluto doveva avere una qualche caratteristica materiale visto che consentiva il movimento delle onde, ma contemporaneamente doveva essere impalpabile per garantire la capacità delle onde elettromagnetiche e della luce di propagarsi nel vuoto.

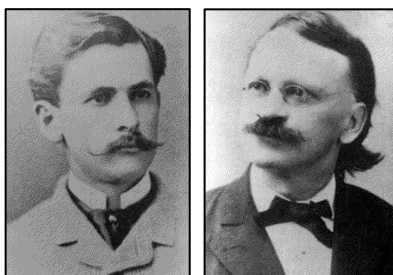
La teoria di *Maxwell* prevedeva l'esistenza delle onde elettromagnetiche, onde trasversali del campo elettromagnetico con una velocità di propagazione prevista dalla teoria e pari a $1/\sqrt{\epsilon \mu}$ dove ϵ e μ erano le due co-

Si incontrano **difficoltà sperimentali** per misurare la composizione delle velocità quando c'è di mezzo la luce a causa della mancanza di sistemi di riferimento con velocità relative comparabili a c ; ciò richiede la **invenzione di metodologie indirette** come per esempio quelle che sfruttano la **interferenza delle onde luminose**. La **differenza dei tempi di percorrenza**, dovuta alla composizione delle velocità, si trasforma in una **differenza di fase osservabile** mediante interferenza

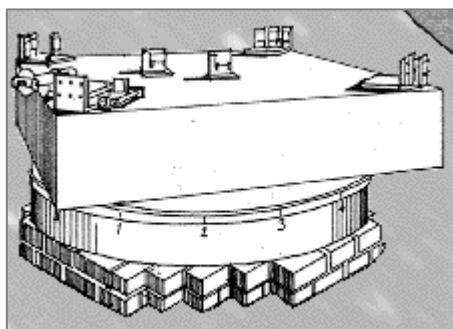


tutto inizia dalle **previsioni delle equazioni di Maxwell** secondo cui sembra esistere un sistema di riferimento privilegiato, quello dell'etere, in cui si propagano le onde elettromagnetiche con **velocità prevista dalla teoria** e dipendente solo dalle due **costanti ϵ e μ dell'elettromagnetismo**; se l'etere esiste deve essere possibile evidenziare il moto del sistema di riferimento nell'etere





Albert Michelson ed Edward Morley effettuarono numerose versioni dell'esperimento **raffinato** basato sulla interferenza di raggi che seguivano cammini ortogonali in modo di evidenziare il *vento d'etere*



L'interferometro di Michelson era montato su una solida base in pietra **galleggiante nel mercurio** per **minimizzare le vibrazioni**; la piattaforma poteva essere ruotata in modo di osservare gli effetti di quadratura in due condizioni di moto

stanti su cui si basavano la definizione della forza elettrica e di quella magnetica.

Era ben noto dalla teoria delle onde che le onde trasversali si propagano solo nei solidi e che la velocità di propagazione è legata al *modulo di elasticità*. Quanto più tale valore è elevato, cioè quanto più il solido ci appare rigido, tanto più elevata è la velocità.

Dunque il mezzo in cui si propagano le onde elettromagnetiche doveva essere un solido *molto duro* (molto più duro dell'acciaio) e perfettamente permeabile ai corpi solidi. Oggi ci stupiamo della insistenza tipicamente meccanicistica sulla esistenza di un mezzo, ma le equazioni differenziali che descrivono il campo elettromagnetico prevedono una propagazione per contiguità ed essa fa subito pensare a qualcosa che sia in grado di trasmettere le variazioni del campo (cioè ad un *mezzo materiale*).

A tale mezzo fu dato il nome di *etere elettromagnetico* e i fisici, vaccinati dalle battaglie, iniziate con Galilei, contro la pretesa di mettere la terra al centro dell'universo, pur prendendo atto della presenza di questo sistema di riferimento privilegiato, si misero alla ricerca di esperimenti che evidenziassero almeno il moto della Terra nell'*etere*.

3.1.3 L'ESPERIMENTO DI MICHELSON E MORLEY

Il primo *esperimento* sufficientemente accurato per misurare la velocità della luce in un sistema di riferimento in moto fu condotto da *Albert A. Michelson* (1852-1931) nel 1881 e successivamente perfezionato in collaborazione con *Edward W. Morley* nel 1887.

L'esperimento consiste nel far passare due raggi di luce attraverso percorsi diversi che dovrebbero essere influenzati dal moto relativo e nell'andare poi ad osservare gli effetti di sovrapposizione dei due raggi (frange di interferenza).

In particolare se si ruota lo strumento di 90° , comunque esso sia disposto rispetto all'ipotetico moto nell'*etere*, dovrebbe aversi una inversione di ruolo dei due cammini ottici e dunque un corrispondente spostamento delle frange di interferenza.

Lo strumento risulta sensibile ad effetti sino alla nona cifra significativa e dovrebbe pertanto evidenziare il *vento d'etere* dovuto al moto della Terra nell'*etere*.

Altri esperimenti dello stesso genere sono poi stati condotti da molti altri scienziati sino ai giorni nostri e, naturalmente, l'accuratezza delle misure è andata via crescendo. Nella tabella qui a lato si riporta un elenco degli *esperimenti di tipo Michelson* effettuati sino agli anni 30 del 900.

Tutti gli esperimenti condotti hanno portato a risultati negativi. Con un altissimo grado di precisione, in tutti i sistemi di riferimento, indipendentemente dal valore e dalla direzione delle loro velocità, la velocità della luce nel vuoto risulta essere sempre uguale a quella misurata dallo strumento in quiete con la sorgente di luce, e cioè:

$$c' = c'' = c''' = c.$$

Ai tempi dell'esperimento di Michelson la comunità scientifica reagì con sconcerto e si avanzarono diverse ipotesi per spiegare il risultato negativo dell'esperimento. Si suggerì per esempio che la Terra trascinasse parzialmente l'*etere* nel suo moto, oppure che lo stru-

Esperimento	Anno di effettuazione	Lunghezza bracci dell'interferometro	Spostamento atteso delle frange	Spostamento misurato
Michelson	1881	1.2	0.04	0.02
Michelson + Morley	1887	11.0	0.4	0.01
Morley + Morley	1902-04	32.2	1.13	0.015
Miller	1921	32.0	1.12	0.08
Miller	1923-24	32.0	1.12	0.03
Miller (Sunlight)	1924	32.0	1.12	0.014
Tomascheck (Starlight)	1924	8.6	0.3	0.02
Miller	1925-26	32.0	1.12	0.088
Kennedy (Mt. Wilson)	1926	2.0	0.07	0.002
Ilingworth	1927	2.0	0.07	0.0002
Piccard + Stahl (Mt. Rigi)	1927	2.8	0.13	0.006
Michelson et al.	1929	25.9	0.9	0.01
Joos	1930	21.0	0.75	0.002
Ripetizioni dell'esperimento di Michelson				

mento subisse delle deformazioni diverse nelle due direzioni per effetto del moto della Terra e ciò impedisse la registrazione degli effetti attesi.

Michelson ricevette il premio Nobel nel 1907 per la invenzione del suo strumento che, nel frattempo, aveva consentito applicazioni esterne al problema da cui era nato e la comunità scientifica si accontentò di *ipotesi ad hoc* introdotte nella teoria classica per spiegare i risultati degli esperimenti.

3.1.4 LE TRASFORMAZIONI DI GALILEO E IL PUNTO DI VISTA DI EINSTEIN

Visto con gli occhi di oggi il risultato negativo dell'esperimento di Michelson ci dice che *la legge classica di addizione delle velocità ha un campo di applicazione limitato*.

In particolare, essa non sembra valere per descrivere fenomeni associati alla propagazione della luce. La luce è un'onda elettromagnetica e nel caso delle onde elastiche esiste un sistema di riferimento privilegiato: quello in quiete nel mezzo entro cui l'onda si propaga.

La velocità del suono in aria non dipende dal moto della sorgente, ma se un osservatore si muove nel mezzo egli percepisce una composizione delle velocità tra il suo moto nel mezzo e il moto dell'onda nel mezzo.

La luce si propaga nel vuoto e ci si aspetta di poter evidenziare almeno una composizione tra velocità della luce e velocità degli osservatori in base alla legge di composizione classica delle velocità.

Ma la legge classica di composizione delle velocità è basata sulle definizioni classiche di tempo e di velocità e sulle cosiddette *trasformazioni di Galileo* cioè sulle equazioni che consentono di determinare il legame tra le coordinate di uno stesso punto materiale in sistemi di riferimento diversi (capitolo I.2).

Pertanto se si riscontra l'insuccesso nell'evidenziare il moto attraverso l'etere si deve ammettere che anche le trasformazioni di Galilei sembrerebbero avere un limitato campo di applicazione e noi vedremo nei prossimi paragrafi dove e perché entrano in crisi.

Poiché l'invarianza della velocità della luce in tutti i sistemi di riferimento inerziale costituisce un fatto sperimentale ben stabilito, e poiché ciò è in contrasto con le *trasformazioni di Galileo*, nasce la necessità di una revisione critica delle idee su cui si basano queste trasformazioni.

Tale revisione fu condotta da *Einstein* nel 1905 e si basa su una completa riconsiderazione dei nostri concetti di spazio e di tempo.

La genesi della teoria della relatività è piuttosto complessa e può essere compresa in tutte le sue sfaccettature solo all'interno di una solida conoscenza delle problematiche dell'elettromagnetismo. Lo stesso esperimento di Michelson ha giocato al suo interno un ruolo sicuramente non decisivo ed esso non viene nemmeno citato nell'articolo originale di Einstein del 1905.

Tra gli storici della scienza è prevalente l'ipotesi che gli elementi decisivi nel determinare la radicalità delle idee di Einstein su spazio e tempo siano stati di ordine metodologico generale (ricerca di *principi unificatori*, *criteri di semplicità*, ...) piuttosto che l'adeguamento delle previsioni teoriche alla esperienza tramite una nuova teoria.



la mancata osservazione del vento d'etere trascina nella disfatta la legge di composizione classica delle velocità



Einstein, papà, ai primi del 900, con la prima moglie Mileva Maric

Einstein sarebbe cioè rimasto influenzato più dalla insoddisfazione per i difetti epistemologici della meccanica e dell'elettromagnetismo classici piuttosto che dalla necessità di far fronte a risultati sperimentali poco convincenti. ⁽²⁾

² Su queste questioni la bibliografia è ricchissima e vale comunque la pena di citare: ♦ Robert Resnick *Introduzione alla relatività ristretta*; Ambrosiana ♦ Max Born *La sintesi einsteiniana*; Boringhieri ♦ Albert Einstein *Autobiografia scientifica*; Boringhieri ♦ Silvio Bergia *Einstein e la relatività*; Laterza ♦ Albert Einstein *La relatività: esposizione divulgativa*; Boringhieri ♦ Silvio Bergia *Einstein* Collana i Grandi della Scienza ed. Le Scienze

3.2 I postulati della teoria

La teoria *speciale o ristretta* della *relatività* è il fondamento della meccanica relativistica. Essa si basa su due principi che vengono postulati e che si sono rivelati particolarmente fecondi per la costruzione delle teorie scientifiche, oltre che confermati dai dati sperimentali.

Dopo l'affermarsi della teoria della relatività ha preso piede nelle teorie scientifiche la scelta di dare alle *teorie* una struttura assiomatica perché con tale struttura, grazie ai progressi della logica, è diventato possibile sottoporre la teoria a tutti i possibili controlli formali tesi ad eliminare eventuali contraddizioni interne e a dedurre tutte le previsioni da sottoporre ad indagine sperimentale. Anche in questo settore Einstein si è rivelato un grande innovatore.

- **I postulato:** *Principio di relatività: tutti i sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti; tutti i fenomeni naturali, e non solo quelli meccanici, obbediscono alle stesse leggi fondamentali in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.*

Il *principio di relatività* costituisce una sorta di requisito che la conoscenza scientifica pone a sé stessa. La scienza, se vuole puntare alla oggettività, deve saper uscire dal relativismo delle descrizioni.

Osservatori diversi, collocati in sistemi di riferimento diversi, devono poter osservare le stesse cose fondamentali e devono descriverle attraverso leggi che abbiano la stessa forma.

Ciò era già vero per la meccanica ma a fine 800 il grande protagonista della fisica è l'elettromagnetismo di *Maxwell* e quando Einstein formula questo postulato l'elettromagnetismo ottocentesco si trova alle prese con la variabilità delle sue equazioni al variare del sistema di riferimento.

Per la teoria di Maxwell esiste un *sistema di riferimento privilegiato*, quello dell'*etere elettromagnetico*.

Einstein non mette in discussione la validità delle equazioni di Maxwell e dà invece una *risposta molto radicale* al fatto che esse abbiano una forma particolare solo nel sistema di riferimento dell'*etere*: le equazioni di Maxwell devono valere in ogni riferimento e se occorre bisogna essere pronti a rivedere le nostre idee di spazio e di tempo.

Come si vede si tratta di una sorta di *principio metafisico* (nel senso etimologico, cioè al di là della fisica) che Einstein pone come prerequisito alla conoscenza e che lo costringerà sulla base di una logica stringente a *demolire le ordinarie nozioni di spazio e di tempo*.

- **Il postulato:** *Principio di invarianza della velocità della luce: la velocità della luce nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

Il principio della costanza della velocità della luce nel vuoto ha invece natura strettamente sperimentale. Mezzo secolo di tentativi di misurare composizioni di c con altre velocità hanno costantemente dato come risultato ancora c .

Applicando questi principi Einstein costruisce una teoria che, non solo spiega in maniera semplice la stranezza dei risultati sulla misura della velocità della luce vista dalla Terra, ma contemporaneamente chiude la discussione sullo *spazio assoluto* (i sistemi inerziali sono di nuovo tutti equivalenti e dell'*etere* non abbiamo alcun bisogno). Inoltre la *teoria della relatività* apre la strada ad alcune *previsioni inattese* ed estranee alla fisica precedente quali la *dipendenza della massa dalla velocità* o la *equivalenza tra massa ed*

EINSTEIN SIMPLIFIED



il principio di relatività è una sorta di **principio metafisico** che detta le caratteristiche di universalità che assegniamo alla conoscenza scientifica



l'invarianza della velocità della luce ha natura sperimentale; per Einstein ciò costituisce una presa d'atto: l'idea che la velocità della luce prevista dalla teoria di Maxwell sia costante in ogni riferimento trascina con sé la fine di ogni sistema di riferimento privilegiato e d'altra parte gli esperimenti non hanno consentito di osservare il vento d'*etere*.

energia, che troveranno conferme in fisica atomica e nucleare solo qualche decennio dopo la loro formulazione.

In sintesi: lo spazio assoluto non esiste; le equazioni di Maxwell non sono valide in un sistema di riferimento particolare, ma in una classe di infiniti sistemi di riferimento entro i quali risultano invarianti, se le *trasformazioni di Galileo* lo negano sono esse ad essere sbagliate e con esse sono sbagliate le ordinarie nozioni di spazio e di tempo oltre che la legge classica di composizione delle velocità.

3.3 La simultaneità degli eventi

3.3.1 EVENTI E COORDINATE TEMPORALI

Solitamente parlando di un fatto siamo abituati a pensare a qualche cosa che accade in un determinato punto dello spazio ad un certo istante. Mentre siamo abituati a pensare alla coordinata spaziale come a qualcosa che dipende dal sistema di riferimento non siamo invece abituati a chiederci quale sia il significato da dare alla coordinata temporale.

Quando si dice che un certo treno arriva alla stazione di Monza alle 12.15, nessuno si chiede di quale orologio si stia parlando. La ragione di ciò risiede nella abitudine a ritenere che le 12.15 di Monza siano tali per qualsiasi osservatore (semmai si accetta, per comodità, la esistenza dei fusi orari, ma non si discute la possibilità di ragionare in termini di *tempo assoluto*).

Quando però si passa ad analizzare fenomeni che coinvolgono grandi distanze, così grandi da rendere non trascurabile il tempo impiegato da un segnale di luce a portarci la informazione relativa ad un dato evento, ci si rende conto della necessità di riferire i tempi di un evento al valore della coordinata temporale di un orologio collocato nelle vicinanze del punto in cui l'evento ha luogo.

Per determinare l'istante in cui un certo evento avviene in un dato punto *A* dello spazio è necessario leggere il tempo su di un orologio collocato nelle immediate vicinanze del punto considerato.

Lo stesso deve avvenire per un evento che avviene in un altro punto *B*. Ovviamente, non ha senso confrontare il tempo indicato da questi due orologi se essi non siano stati preventivamente sincronizzati.

Questa affermazione sembra così ovvia che per molti anni nessuno si è interrogato sul significato da dare alla questione della *sincronizzazione degli orologi*.

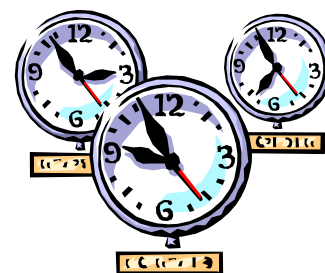
I protagonisti della nuova meccanica saranno gli *eventi*. L'evento è un neologismo e con esso intendiamo un *fatto* che accade *nello spazio e nel tempo* (con certe coordinate spaziali e ad un certo istante), precisando che, dato il carattere relativo delle coordinate spaziali e delle coordinate temporali, la descrizione di un evento è sempre riferita ad un certo sistema di riferimento spazio temporale; ovvero un evento è un insieme di 4 numeri (tre coordinate spaziali ed una coordinata temporale) riferiti ad un dato sistema di riferimento fatto di coordinate spaziali ma anche di orologi sincronizzati in grado di leggere quelle temporali.

3.3.2 IL PROBLEMA DELLA SINCRONIZZAZIONE DEGLI OROLOGI

La riflessione di Einstein parte dal problema della sincronizzazione, un punto considerato talmente ovvio da essere stato trascurato nelle precedenti discussioni intorno al concetto di tempo.

Nell'affrontare la questione della sincronizzazione si suppone che sia già stato affrontato e risolto il problema della costruzione di orologi identici, cioè di orologi che, dopo essere stati *sincronizzati in uno stesso punto*, continuano a conservare nel tempo la loro sincronia se non vengono spostati.

3

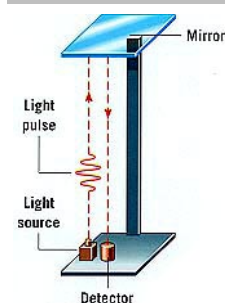


se entrano in gioco grandi distanze diviene necessario riferire il tempo ad un ambito locale perché nasce il problema della sincronizzazione degli orologi che può essere fatta a distanza solo presupponendo nota la velocità di propagazione dei segnali che useremo per la sincronizzazione

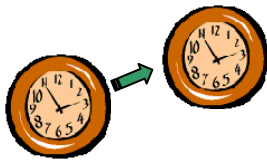
dai fatti agli eventi: una distinzione terminologica densa di significato perché l'esperienza inizia ad essere riferita allo spazio-tempo visto come unità indissolubile

si considerano **non problematiche la riproducibilità e la sincronizzazione locale** degli orologi; si pensa cioè che si possano fabbricare orologi completamente identici e che non sia un problema fargli indicare la stessa ora se sono in uno stesso punto.

Gli **orologi a luce** sono un esempio di orologi identici e costruttivamente semplici: essi si basano sulle ripetute riflessioni di un impulso di luce che percorre una lunghezza data



³ Stiamo ammettendo una sorta di *regolarità e riproducibilità della natura*.



Nessuno ci garantisce che orologi sincronizzati localmente non perdano il ritmo quando vengono spostati e d'altra parte la **sincronizzazione a distanza appare problematica** perché presuppone conoscenze sul modo di propagarsi dei segnali usati per la sincronizzazione

Quando però dalla *sincronizzazione locale* si passa alla *sincronizzazione a distanza* bisogna fornire un metodo che consenta di operare tale sincronizzazione.

Si potrebbe proporre di sincronizzare localmente gli orologi e poi di spostarli, ma *nessuna legge fisica*, precedente le nozioni di spazio e di tempo può garantirci che, dopo la *sincronizzazione locale*, gli orologi non perdano tale proprietà durante il trasporto. Anzi, uno dei risultati della teoria della relatività riguarda proprio il fenomeno, confermato sperimentalmente, del rallentamento degli orologi in movimento.

Pare dunque sensato prendere come definizione operativa di sincronizzazione quella della *sincronizzazione a distanza* che consiste nel mettere in sincronia gli orologi senza muoverli dal punto in cui misureranno il tempo. Allo scopo si useranno segnali di luce destinati a trasmettere le informazioni e si ipotizzerà che la luce impieghi lo stesso intervallo di tempo ad andare e tornare.

Questa definizione contiene dentro di sé l'assunto che la luce viaggi alla stessa velocità in entrambi i versi e che questa proprietà sia vera in ogni sistema di riferimento. In altri termini *Einstein prende atto* dell'esito negativo dei tentativi di misurare le variazioni di velocità della luce entro sistemi di riferimento in moto e *fonda* la sua definizione di sincronizzazione su questo punto.

3.3.3 LA METODOLOGIA PROPOSTA DA EINSTEIN

Einstein propone che la sincronizzazione possa avvenire attraverso segnali di luce sulla base del seguente esperimento mentale.



la **sincronizzazione proposta da Einstein** si basa sulla ipotesi che la luce abbia una velocità indipendente dal verso



Supponiamo che nel punto A dello spazio sia stato collocato un orologio: in A un osservatore può effettuare determinazioni di tempo, per eventi che si verifichino nelle immediate vicinanze del punto, controllando le posizioni delle lancette dell'orologio negli istanti stessi in cui quegli eventi si producono. Parimenti un osservatore che si trovi nel punto B e che dispone di un orologio - e qui diciamo strutturalmente identico al precedente - potrà stabilire i valori di tempo di eventi nell'immediato intorno di B. Ma non è possibile senza ulteriori convenzioni, confrontare rispetto al tempo un evento in A e un evento in B; noi abbiamo finora definito un tempo A e un tempo B, ma non un tempo comune ad A e B. Per questo occorre stabilire, per definizione, che il tempo che la luce impiega nel percorso da A a B è uguale al tempo che la luce impiega nel percorso da B ad A.

Supponiamo cioè che un raggio di luce parta da A, diretto verso B, al tempo t_A , venga in B riflesso verso A al tempo t_B e giunga nuovamente in A al tempo t'_A . Per definizione diremo i due orologi sincronizzati quando:

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$

...

Supporremo ancora in conformità con i dati dell'esperienza che la quantità:

$$\frac{2 \overline{AB}}{t'_A - t_A} = c$$

sia una costante universale, la velocità della luce nello spazio vuoto.⁴

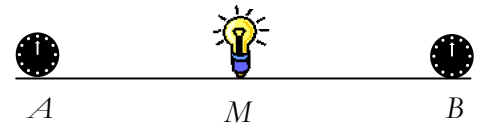
Dunque per Einstein la *sincronizzazione degli orologi* avviene facendo in modo che l'orologio in B, quando viene colpito dal raggio di luce, indichi il tempo:

⁴ Albert Einstein; *l'elettrodinamica dei corpi in movimento*, 1905. Ripreso da Opere Scelte edizioni Boringhieri

$$t_B = \frac{t'_A + t_A}{2}$$

Esistono altre definizioni di sincronizzazione o di simultaneità equivalenti a quella data:

- dati gli orologi in A e B considero una sorgente di luce collocata nel punto medio M del segmento AB, stabilisco un'ora convenzionale e assegno questa ora ai due orologi quando un raggio di luce partito da M li raggiunge
- due eventi che avvengono nei punti A e B sono simultanei se due raggi di luce inviati da A e da B contestualmente agli eventi raggiungono il punto medio di AB allo stesso istante.
- visto che conosco la velocità della luce e ho preventivamente misurato le distanze dall'origine invio da essa raggi in tutte le direzioni al tempo 0 e assegno agli orologi il tempo $t = d/c$ quando essi vengono raggiunti dai raggi di luce



definizioni equivalenti della sincronizzazione si basano sulla collocazione della sorgente nel punto medio tra i due orologi da sincronizzare

3.3.4 LA SIMULTANEITÀ DI DUE EVENTI È RELATIVA

Le definizioni appena date, dall'apparenza ovvie e innocue, nascondono una novità rivoluzionaria che deriva dai postulati della teoria. *La simultaneità è un concetto relativo.* Orologi sincronizzati in un sistema di riferimento non lo sono in un altro; eventi simultanei in un sistema non lo sono in un altro.

Per dimostrare questa affermazione che, a prima vista, sembra paradossale, consideriamo il seguente *esperimento*.⁽⁵⁾

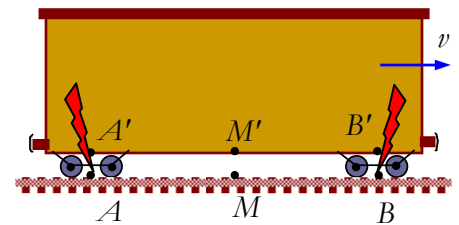
Supponiamo che un sistema di riferimento sia fissato alla superficie terrestre e che un altro sia su un carro ferroviario che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto alla terra con velocità v .

Due fulmini colpiscono le estremità del vagone lasciando i segni A, A', B, B' sul vagone e sul punto della rotaia corrispondente.

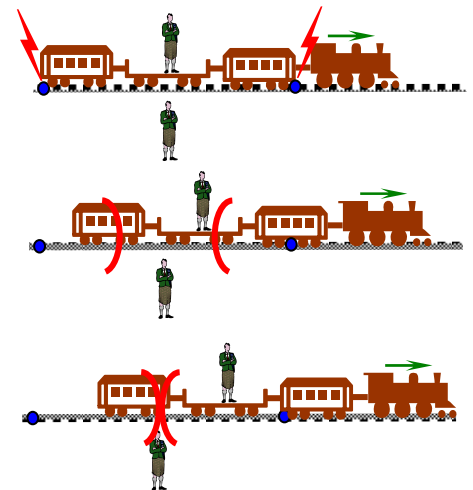
Indichiamo con M e M' i punti medi dei segmenti AB e A'B' e supponiamo che i due lampi di luce dei fulmini giungano in M simultaneamente.

Per definizione i due eventi sono simultanei nel sistema di riferimento delle rotaie. Ma quando i due lampi arrivano in M il punto M' si trova un po' più a destra e pertanto, nel sistema di riferimento del treno il lampo di destra ha già raggiunto M' mentre quello di sinistra è ancora in viaggio. Pertanto nel sistema di riferimento del vagone i due eventi non sono simultanei e B' precede A'. Se il carro avesse viaggiato da destra a sinistra, sarebbe avvenuto l'opposto; l'evento B' sarebbe avvenuto dopo quello in A'.

Se invece supponiamo che B' sia simultaneo ad A' troveremo con un ragionamento analogo che A precede B. *Il concetto di simultaneità è relativo al sistema di riferimento.*



la simultaneità è relativa: il famoso esperimento mentale dei fulmini e del treno di Einstein



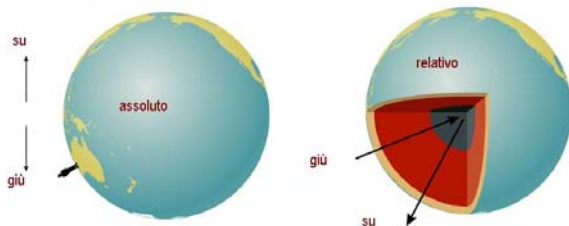
Se i fulmini sono simultanei visti da terra non lo sono visti dal treno e viceversa. Nella figura l'osservatore sul treno dirà che il fulmine di destra ha colpito prima

⁵ Abbiamo preferito conservare il tipo di esempi della cultura dell'epoca di Einstein. Anche se da noi si parla di razzi, di acceleratori, etc., Einstein parla dei treni che sono i razzi della sua epoca, così come ne parla il padre del *realismo francese* Emile Zola, nei suoi romanzi vent'anni prima del 1905. Per capire un po' meglio la II rivoluzione industriale e le problematiche sociali connesse si veda, per esempio *La bestia umana* ed. Newton Compton. I *classici sono quasi sempre i moderni* della loro epoca.

Nella discussione precedente abbiamo utilizzato solo i due postulati: abbiamo considerato i due sistemi di riferimento come equivalenti (principio di relatività) e abbiamo considerato la velocità della luce identica in entrambi i versi (principio di invarianza della velocità della luce). Non abbiamo introdotto altre ipotesi.

3.3.5 UN ASSOLUTO DURO A MORIRE

Gli studenti, spesso, chiedono: ma gli eventi in A e B , sono realmente simultanei, oppure no? La questione è priva di significato. Rispondere alla questione su cosa *capiti realmente* significherebbe privilegiare un particolare sistema di riferimento. Ma un tale sistema non esiste in natura.



non bisogna stupirsi della esistenza di **fenomeni e concetti relativi**; ad alcuni siamo molto abituati e non ce ne stupiamo su altri scatta invece lo spirito conservatore detto anche *sensu comune* che ci portiamo dentro da bambini

In generale non è sempre possibile rispondere alla domanda su *cosa capiti realmente*. Quando è mattina a Milano, è notte a New York e pomeriggio a San Francisco e non ha senso chiedersi, in senso assoluto, in che momento del giorno ci si trovi: mattina, notte o pomeriggio? Si tratta di concetti relativi e la risposta dipende da dove si trova l'osservatore.

I concetti di *sopra* e quello di *sotto* sono relativi per persone che vivono in punti opposti del globo. Il concetto di *simultaneità* è *relativo esattamente nello stesso senso*. È impossibile rispondere alla domanda se due eventi avvengano simultaneamente oppure no senza specificare il sistema di riferimento rispetto al quale si fornisce la risposta.

3.3.6 COME È NATO L'EQUIVOCO ?

Ma perché nella fisica classica si è trascurato il *carattere non assoluto del tempo* e si è considerato il *tempo come un invariante*, cioè come una proprietà indipendente dal sistema di riferimento? Da questo assunto, come abbiamo visto nel capitolo I.2 si sono poi fatte derivare le trasformazioni di Galilei da cui è infine derivata la legge classica di composizione delle velocità.



la relatività della simultaneità è una **conseguenza del carattere finito della velocità della luce**

La risposta alla domanda è che in fisica classica si opera con velocità molto minori della velocità della luce e, pertanto, si possono trascurare i ritardi nella trasmissione dei segnali e assumere che la luce si propaghi istantaneamente e con una velocità pressoché infinita. In questo caso gli osservatori sulla terra e quelli sul carro ferroviario non rileveranno nessuna differenza nei tempi di arrivo dei segnali provenienti da A e da B . Quindi essi arriveranno alle stesse conclusioni circa la simultaneità, o non simultaneità, degli eventi.

La relatività della *simultaneità* è una conseguenza del carattere finito della velocità della luce e, più in generale, della velocità finita di propagazione di qualsiasi interazione. Einstein ha basato la sua teoria della relatività sul dato sperimentale che nessun processo, di qualunque genere, si propaghi ad una velocità infinita.

Se esistesse un fenomeno in grado di trasmettere informazione a velocità superiore a quella della luce nel vuoto assumeremmo tale fenomeno come nuovo strumento della definizione del tempo e si ricomincerebbe da capo.

Consigliamo a chi si senta *inquieto* o *stupito* di fronte a problematiche del genere la lettura del primo capitolo de *La logica della fisica moderna* del premio Nobel americano *Percy Bridgman*, edizioni Boringhieri. Bridgman

ha ottenuto il premio Nobel nel 1946 per gli studi e le applicazioni nel campo delle alte pressioni.

Newton nei *Principia Mathematica* afferma: io non definisco Tempo, Spazio, Luogo e Movimento, in quanto sono ben noti a tutti. Osservo soltanto che il profano non concepisce queste grandezze altro che in termini delle loro relazioni con gli oggetti sensibili. Da ciò il sorgere di certi pregiudizi, per rimuovere i quali è conveniente distinguerle in Assolute e Relative, Vere e Apparenti, Matematiche e Comuni. Il tempo Assoluto, Vero, Matematico, in sé e per sua natura scorre uniformemente senza riferimento a nulla di esterno, e con altro nome viene detto Durata.

E Bridgman replica, alla luce della rivoluzione einsteiniana: ora nulla ci garantisce che in natura esista qualcosa avente proprietà simili a quelle indicate in tale definizione e la fisica, ridotta a concetti di questo genere diventa una scienza astratta e lontana dalla realtà quanto la geometria astratta dei matematici costruita su postulati. È compito dell'esperienza stabilire se concetti così definiti corrispondano a qualcosa di esistente in natura; noi dobbiamo sempre essere preparati a constatare che questi concetti non corrispondono a nulla, o solo in parte corrispondono a qualcosa. In particolare se esaminiamo la definizione di tempo assoluto alla luce dell'esperienza, non troviamo in natura nulla che abbia tali proprietà ... Il nuovo atteggiamento verso i concetti è del tutto differente ... in generale, per concetto noi non intendiamo altro che un gruppo di operazioni.

Applichiamo questa idea al concetto di *tempo assoluto*: non comprendiamo il significato del tempo assoluto a meno che non ci mettiamo in grado di determinare il tempo assoluto di qualunque evento concreto; cioè, a meno che non misuriamo il tempo assoluto. Ora, basta che noi esaminiamo una delle operazioni con cui possiamo misurare il tempo per vedere che tutte le operazioni di questo genere sono operazioni relative. Pertanto, la precedente affermazione che il tempo assoluto non esiste, viene sostituita dalla affermazione che il tempo assoluto è privo di significato ... È evidente che se noi adottiamo nei riguardi dei concetti questo punto di vista, che cioè la definizione propria di un concetto va data non in termini di proprietà, ma in termini di operazioni effettive, evitiamo il pericolo di dover rivedere il nostro atteggiamento nei confronti della natura. Infatti se l'esperienza viene sempre descritta in termini di esperienza, vi sarà sempre corrispondenza tra l'esperienza e la nostra descrizione di essa e noi non ci troveremo mai imbarazzati come ci è capitato cercando di rintracciare in natura il prototipo del Tempo Assoluto di Newton.

3.3.7 SIMULTANEITÀ E LUNGHEZZA: PRIME CONSIDERAZIONI

La mancata riflessione sulla relatività della simultaneità ne trascina con sé una seconda, ancora più rilevante, relativa al concetto di lunghezza. Quando misuriamo la *distanza* tra due punti facciamo *coincidere simultaneamente* i due punti con le tacche di un righello graduato (o con le coordinate di un sistema di riferimento, se vogliamo essere più raffinati).

Di solito la specificazione della simultaneità viene sottintesa, ma *se qualcuno bara*, ci può dire che il banco dell'aula scolastica è lungo 20 cm operando così: legge prima la coordinata di sinistra e poi, mentre muove il righello, quella di destra. Di fronte ad un comportamento del genere siamo tutti d'accordo nel sostenere che si tratti di uno scherzo. Così pure la misura della lunghezza di una matita effettuata da un treno in moto, con proiezione degli estremi sulle rotaie, può risultare di un centinaio di metri se non si fa attenzione ad eseguire la proiezione simultaneamente.

Ma se la simultaneità non è più assoluta cosa succede? Aspettiamoci che succeda quella che accade alla matita dell'esempio precedente.

Non ha senso parlare di lunghezza di una sbarra senza specificare il sistema di riferimento rispetto al quale questa lunghezza viene misurata. Farlo è insensa-

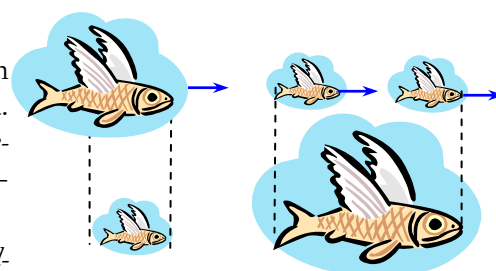


il tempo assoluto e lo spazio assoluto che Newton aveva posto in premessa ai Principia **non** hanno realtà fisica. Newton aveva torto



Percy Bridgman **padre dell'operazionismo** 1882-1961

il carattere relativo della simultaneità porta con sé quello di lunghezza perché la distanza si misura come differenza di coordinate spaziali riferite ad uno stesso istante



quanto era lungo il pesce? È **importante** misurare la posizione della testa e della coda **allo stesso istante**. Se fisso testa e poi coda il pesce si accorcia e viceversa se parto dalla coda

to tanto quanto parlare di velocità di un passeggero senza specificare il riferimento; la sua velocità rispetto a terra è ben diversa da quella rispetto al treno.

Così, se mi trovo su un treno con in mano un libro misurerò la sua lunghezza come differenza delle coordinate degli estremi riferite allo stesso istante. Per un osservatore lungo le rotaie vale la stessa definizione, ma i due eventi con cui ho fatto la misura precedente non sono più simultanei.

Se indico con x_1 e x_1' le coordinate dell'estremo sinistro e con x_2 e x_2' quelle dell'estremo destro riferite ad uno stesso istante (rispetto al treno) sarà $l = x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$. Chi sta sulle rotaie dice però che x_1' e x_2' non si riferiscono ad eventi simultanei perché x_1' sarà simultaneo a $x_2'' \neq x_2'$. Sarà dunque $l' = x_2'' - x_1' \neq l$.

Non solo la simultaneità è relativa, anche la distanza lo è.

3.4 La legge di composizione relativistica delle velocità

3.4.1 IL POSTULATO PER CUI $c \oplus v = c$ CREA QUALCHE PROBLEMA PER LA LEGGE CLASSICA DI COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ

Abbiamo già fatto notare all'inizio del capitolo che qualcosa non funziona nella legge di composizione delle velocità della fisica classica. Siamo abituati a pensare che quando due velocità u e v si compongono nella stessa direzione si abbia:

$$u \oplus v = u \pm v^6$$

a seconda che le due velocità abbiano lo stesso verso o verso contrario. Questa relazione si generalizza poi al caso di direzioni diverse dando luogo alla composizione vettoriale.

Invece sappiamo già, e lo abbiamo fatto assurgere a postulato, che:

$$c \oplus v = c$$

Come si è visto in precedenza, le *trasformazioni di Galileo* mal si accordano con il risultato sperimentale della costanza della velocità della luce. È quindi necessario trovare nuove trasformazioni delle coordinate per il cambio di sistema di riferimento.

Consideriamo due insiemi di coordinate, o sistemi di riferimento, $K(Ox)$ legato alla terra e $K'(O'x')$ legato al carro ferroviario e sia v la velocità relativa dei due sistemi. Poiché lungo gli assi y e z non si ha movimento sarà $y = y'$ e $z = z'$.

Se un oggetto si muove lungo l'asse x' con velocità u' quale sarà la sua velocità u nell'altro sistema?

Secondo la relazione classica di sovrapposizione delle velocità:

$$u = u' \oplus v = u' + v$$

cioè la sovrapposizione fisica delle velocità corrisponde alla loro sovrapposizione numerica.

3.4.2 LA NUOVA LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ

Riprendiamo la dimostrazione della *legge classica di composizione delle velocità* esposte in maniera acritica nel capitolo I.2. Il risultato deriva dalla definizione di velocità unita a semplici considerazioni di geometria analitica.

Se indichiamo con x_1 e x_2 le coordinate di un punto mobile a due istanti t_1 e t_2 diversi avremo che:

$$x_1 = x_1' + OO' = x_1' + v t_1 \quad x_2 = x_2' + OO' = x_2' + v t_2$$

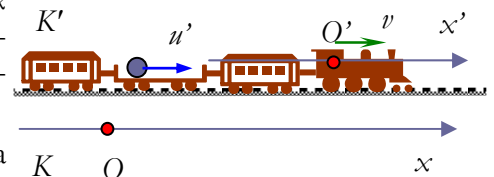
e pertanto

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x_2' - x_1' + v(t_2 - t_1)$$

Ne consegue, dividendo per Δt e sfruttando il fatto che l'intervallo temporale è lo stesso nei due sistemi di riferimento,

$$u = u' + v$$

Ma in teoria della relatività viene a cadere la eguaglianza degli intervalli temporali e, come vedremo nei punti successivi di questo paragrafo, si



I due sistemi di riferimento K e K' che ci accompagneranno nei nostri primi passi di cinematica relativistica

⁶ Con il simbolo $\oplus$ intendiamo la *somma fisica* e cioè la sovrapposizione di fenomeni

ottiene una relazione di composizione delle velocità più complessa detta *composizione relativistica delle velocità*, precisamente:



$$u = u' \oplus v = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' v}{c^2}} \quad u' = u \oplus (-v) = \frac{u - v}{1 - \frac{u v}{c^2}} \quad (\text{II.3.1})$$

la composizione relativistica delle velocità

$$u = u' \oplus v = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' v}{c^2}} \quad u' = u \oplus (-v) = \frac{u - v}{1 - \frac{u v}{c^2}}$$

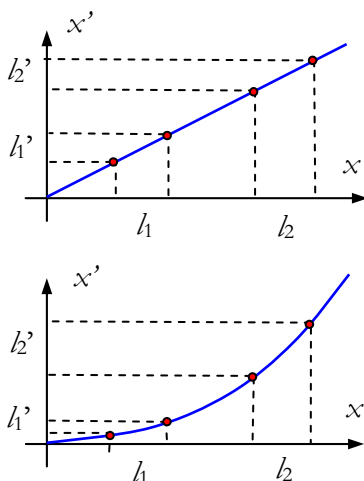
La legge di composizione relativistica delle velocità è in accordo con il principio di inerzia perché in base alla (II.3.1) se u è costante lo è anche u' e viceversa.

Nel prossimo paragrafo la relazione (II.3.1) verrà dedotta dai postulati della teoria. La deduzione va considerata alla stregua di un esercizio interessante che aiuta a riflettere sulla *logica stringente* delle teorie assiomatiche. Si tratta inoltre del primo passo per ricavare anche le trasformazioni delle coordinate spaziali e temporali nei due sistemi di riferimento. Se ne consiglia pertanto la lettura senza perdersi sugli aspetti di tecnica algebrica, ma soffermandosi invece sulla *eleganza e semplicità dei ragionamenti*.

3.4.3 PROPRIETÀ DELLO SPAZIO E LINEARITÀ DELLE TRASFORMAZIONI

Abbiamo ripetutamente affermato che lo spazio vuoto è omogeneo ed isotropo; non si tratta di una petizione di principio, ma di un dato di esperienza; in effetti non abbiamo mai osservato proprietà del mondo fisico che derivino dal particolare punto dello spazio in cui un ipotetico laboratorio viene collocato nello spazio vuoto e lontano da altri corpi e nemmeno in analoghe condizioni si è riscontrata l'esistenza di direzioni privilegiate.

Orbene, se vogliamo che la scienza rispetti questa proprietà dello spazio bisogna che le *trasformazioni di coordinate* al variare del riferimento siano di tipo lineare. In effetti se le trasformazioni di coordinate non fossero di tipo lineare si avrebbe una violazione del principio di omogeneità. Basta osservare i due diagrammi qui a lato per rendersene conto. In essi la trasformazione $x' = f(x, t)$ viene proiettata nel piano $t = \text{costante}$ e si esaminano i casi della trasformazione lineare e di quella non lineare.



come un principio generale fissa il tipo di trasformazione: le **trasformazioni delle coordinate** devono essere di tipo lineare per rispettare la omogeneità di spazio e tempo

Nel primo caso due oggetti identici in un sistema di riferimento lo sono anche nell'altro; nel secondo caso no. Dunque se le trasformazioni non fossero lineari allora da $l_1 = l_2$ seguirebbe che $l'_1 \neq l'_2$ cioè la lunghezza di una sbarra verrebbe a dipendere dalla sua posizione nello spazio e ciò sarebbe in contrasto con la omogeneità dello spazio fisico.

Naturalmente un argomento analogo può essere utilizzato per il tempo.

Pertanto cercheremo una trasformazione della forma della funzione lineare:

$$x' = A x + B t \quad t' = C x + D t \quad (\text{II.3.2})$$

in cui A, B, C, D sono delle costanti da determinare. Poiché si tratta di quantità costanti la loro determinazione potrà avvenire particolarizzando le relazioni in contesti per i quali, alla luce dei postulati, conosciamo a priori i risultati.

Incominciamo con lo stabilire la definizione di u e u' per arrivare poi al legame tra esse:

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = A (x_2 - x_1) + B (t_2 - t_1) = A \Delta x + B \Delta t$$

e analogamente

$$\Delta t' = C \Delta x + D \Delta t$$

Se dividiamo tra loro le equazioni e teniamo conto che la velocità del punto materiale riferito al sistema di riferimento K' è $u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$ mentre la velocità rispetto a K è $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ otterremo la legge di addizione delle velocità lungo l'asse delle ascisse:

$$u' = \frac{A \Delta x + B \Delta t}{C \Delta x + D \Delta t} = \frac{A \frac{\Delta x}{\Delta t} + B}{C \frac{\Delta x}{\Delta t} + D} = \frac{Au + B}{Cu + D} \quad (\text{II.3.3})$$

3.4.4 DAI DUE POSTULATI ALLA NUOVA LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ

Utilizziamo ora questo risultato intermedio per trovare le costanti introdotte nella (II.3.2). A questo scopo basta considerare dei casi particolari per i quali sia noto il legame tra le variabili:

la legge di composizione delle velocità viene dedotta solo **dai due postulati** della teoria che ci consentono di conoscere a priori i risultati di esperimenti ideali

- punto materiale a riposo nel carro ferroviario: $u' = 0$ e $u = v$ dalla (II.3.3) si ottiene:

$$B = -Av$$

- punto materiale a riposo rispetto alla terra (per il principio di relatività): $u' = -v$ e $u = 0$; dalla (II.3.3) si ha: $-v = \frac{B}{D}$

Da qui tenendo conto del fatto che $B = -Av$ si ottiene

$$D = A$$

- supponendo che al posto della punto materiale si propaghi la luce, in base al 2° postulato sulla invarianza della velocità della luce in tutti i sistemi inerziali avremo:

$$u' = u = c$$

Sostituendo nella (II.3.3) otteniamo $c = \frac{Ac + B}{Cc + D}$ e da qui sfruttando i

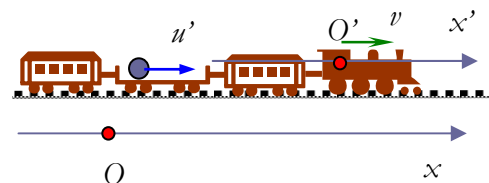
due risultati precedenti $c = \frac{Ac - Av}{Cc + A}$; si elimina il denominatore e si ha: $Cc^2 + Ac = Ac + B$ e quindi: $Cc^2 = B = -Av$

$$C = -\frac{Av}{c^2}$$

I tre valori ottenuti per B , C e D sono tutti proporzionali ad A e pertanto sostituendoli in una frazione omogenea di I grado si elimina anche A ottenendo così la *nuova legge di composizione relativistica* delle velocità (lungo l'asse delle ascisse):

$$u' = \frac{Au - Av}{-\frac{Av}{c^2}u + A} \quad \text{da cui, semplificando per } A:$$

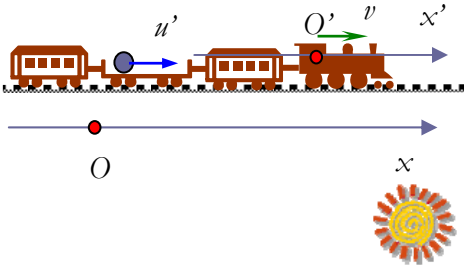
$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$



che è la relazione cercata (II.3.1).

Se si vuole invertire la relazione non occorrono altri calcoli; basta infatti osservare che quando si scambiano i due sistemi di riferimento la velocità v diventa $-v$ mentre la legge non deve cambiare per il principio di relatività. Pertanto:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$



3.4.5 LA VELOCITÀ DELLA LUCE COME VELOCITÀ LIMITE

Il *carattere limite della velocità della luce* non fa parte dei postulati ma ne è una conseguenza. €

Consideriamo due moti che avvengano in maniera di comporsi costruttivamente (l'uno con velocità v e l'altro con velocità u' entrambe inferiori a c). Ci apprestiamo a dimostrare che in tale ipotesi è sempre $u < c$.

Infatti:

non possono esistere velocità macroscopiche maggiori di c : si tratta di una conseguenza della legge relativistica di composizione

$$c - u = c - \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{c + \frac{u'v}{c} - u' - v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{c^2 + u'(v - c) - v c}{c \left(1 + \frac{u'v}{c^2} \right)}$$

$$c - u = \frac{(c - v)(c - u')}{c \left(1 + \frac{u'v}{c^2} \right)}$$

ma poiché $(c - v) > 0$ e $(c - u') > 0$ anche $(c - u) > 0$ e dunque $u < c$.

Questo risultato è incondizionatamente vero per le particelle materiali. Infatti esiste sempre un sistema di riferimento in cui il punto materiale si muove ad una velocità inferiore alla velocità della luce nel vuoto (per esempio quando è a riposo, e in questo caso $u' = 0$).

Ma allora, in ogni altro riferimento essa si muoverà ad una velocità inferiore a c .

Per affermare quanto si è appena detto non è stata avanzata alcuna ipotesi sulle proprietà e sulla struttura delle particelle materiali. Di conseguenza il risultato è del tutto generale e vale per qualsiasi particella di materia e per qualsiasi corpo. Quindi, *la velocità della luce nel vuoto è la più alta velocità possibile in natura*.

Per completare l'opera (ma questa è pura algebraccia e non fisica) osserviamo che, se applichiamo la (II.3.1) al caso in cui $u = c$, cioè al caso in cui viene osservato il movimento della luce da due sistemi di riferimento diversi si ha:

$$c \oplus v = c \text{ e anche } c \oplus c = c$$

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{c(c - v)}{c - v} = c$$

e cioè $c \oplus v = c$. Se si sostituisce c sia a u sia a v si ha addirittura che $c \oplus c = c$.



È evidente che se scopriremo un nuovo fenomeno per il quale risultasse una violazione di quanto affermato, dovremmo assumere tale fenomeno come nuovo strumento di definizione della simultaneità e di sincronizzazione degli orologi ed esso sarebbe il nuovo valore limite per le velocità.

Insomma il nocciolo della teoria della relatività non sta in una *particolare proprietà della luce ma piuttosto nella esistenza di velocità finite per la trasmissione delle informazioni* e nel fatto che ciò ci costringe ad assumerle, con i loro limiti, come strumento per la misura del tempo.

3.5 Le trasformazioni di Lorentz

3.5.1 COSA SONO E COSA AFFERMANO?



Le *trasformazioni di Lorentz* sono le leggi che, in meccanica relativistica, ci dicono *come cambiano le coordinate di un evento al cambiare del sistema di riferimento*.

Esse si deducono dai due postulati della teoria della relatività e furono ottenute per la prima volta da *Hendrik Antoon Lorentz* (1853-1928) anche se, nella deduzione che ne diede Lorentz, esse conservavano ancora un aspetto di *finzione*.

Lorentz dedusse infatti le relazioni che consentono di spiegare il risultato negativo dell'esperimento di Michelson, ma lo fece all'interno di una *teoria continuista* con le teorie precedenti e nella quale le trasformazioni non discendevano da una revisione delle nozioni di tempo e di spazio come accade, invece, con la teoria della relatività.

Le *trasformazioni di Lorentz* nel caso dei due sistemi K e K' già più volte utilizzati assumono la forma:



$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{II.3.4})$$

o, nella forma simmetrica rispetto allo scambio dei sistemi di riferimento:

Le trasformazioni di Lorentz

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad t' = \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \frac{t' + \beta x'/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{II.3.5})$$

Le quantità $\beta = \frac{v}{c}$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ intervengono nella maggior parte delle relazioni relativistiche e, per questa ragione sono indicate con dei simboli universalmente conosciuti ed utilizzati.

Le trasformazioni riguardano *sia lo spazio sia il tempo* e in ciò compare la prima differenza rilevante rispetto alla meccanica classica. Inoltre è sempre presente a denominatore il termine $\sqrt{1 - \beta^2}$ che vedremo presente costantemente nelle formule relativistiche.

Lo spazio ed il tempo in meccanica classica sono considerati dei concetti indipendenti mentre le trasformazioni di Lorentz rivelano la stretta correlazione di queste due grandezze: *non solo le coordinate temporali dipendono dal tempo, ma anche il tempo dipende da quelle spaziali e dalla velocità del sistema di riferimento*.



Il continuo spazio-temporale: lo spazio e il tempo si trasformano entrambi e in modo correlato al cambiare del sistema di riferimento

Il tempo che prima veniva visto come una variabile indipendente dallo spazio, con una sua autonomia valida in ogni sistema di riferimento, diventa una grandezza legata indissolubilmente allo spazio (e tutto ciò per via della relatività della nozione di simultaneità).

3.5.2 LA DEDUZIONE DELLE TRASFORMAZIONI

Per ottenere le trasformazioni richieste osserviamo che abbiamo già ottenuto 3 dei 4 parametri presenti nelle trasformazioni nel paragrafo in cui abbiamo dedotto la legge di composizione delle velocità. Se sostituiamo i valori trovati per le costanti B , C e D nella equazione (II.3.2) otteniamo:

$$x' = A(x - vt) \quad t' = A\left(t - \frac{v x}{c^2}\right) \quad (\text{II.3.6})$$

Ma in accordo con il principio di relatività i due sistemi di riferimento devono essere ugualmente validi e possiamo pertanto assumere che il riferimento del vagone sia in quiete; allora il sistema legato alla terra dovrà muoversi con la velocità $v' = -v$ (*reciprocità delle trasformazioni di Lorentz*).

Le trasformazioni assumeranno pertanto la forma:

$$x = A(x' + vt') \quad t = A\left(t' + \frac{v x'}{c^2}\right) \quad (\text{II.3.7})$$

Sostituendo le equazioni (II.3.7) nelle (II.3.6) otteniamo:

$$x' = A A(x' + vt') - A v A\left(t' + \frac{v x'}{c^2}\right) = A^2 \left(x' + v t' - v t' - \frac{v^2 x'}{c^2}\right) = A^2 (x' - \beta^2 x') = A^2 (1 - \beta^2) x'$$

E dunque semplificando per x' si ottiene:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \quad (\text{II.3.8})$$

Basta ora tornare alla (II.3.6) e sostituire il valore di A per ottenere le trasformazioni richieste.

3.5.3 LA SINCRONIZZAZIONE DEGLI OROLOGI IN SISTEMI DI RIFERIMENTO DIVERSI

Riprendiamo in considerazione la questione della simultaneità alla luce delle trasformazioni di Lorentz e consideriamo due eventi $A_1(x_1, t_1)$ e $A_2(x_2, t_2)$ relativi al sistema di riferimento K . Questi stessi eventi saranno rappresentati in K' da coordinate diverse.

Per esempio, quanto vale l'intervallo di tempo in K' ? Se applichiamo le trasformazioni Lorentz avremo che:

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1)v/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{II.3.9})$$



Dalla relazione trovata si vede che *se due eventi sono simultanei in K [$(t_2 - t_1) = 0$] in genere non lo sono in K'* ; quanto più i due eventi simultanei sono lontani nello spazio tanto più risultano essere disallineati anche nel tempo e il disallineamento temporale risulta, per due sistemi di riferimento dati, proporzionale alla distanza spaziale tra i due eventi.

Una situazione analoga accade agli orologi che, se sono sincronizzati in un sistema di riferimento, non lo sono nell'altro come si è rappresentato nella figura dove si vede il risultato della equazione (II.3.9) riferita al confronto tra orologi in due sistemi di riferimento.

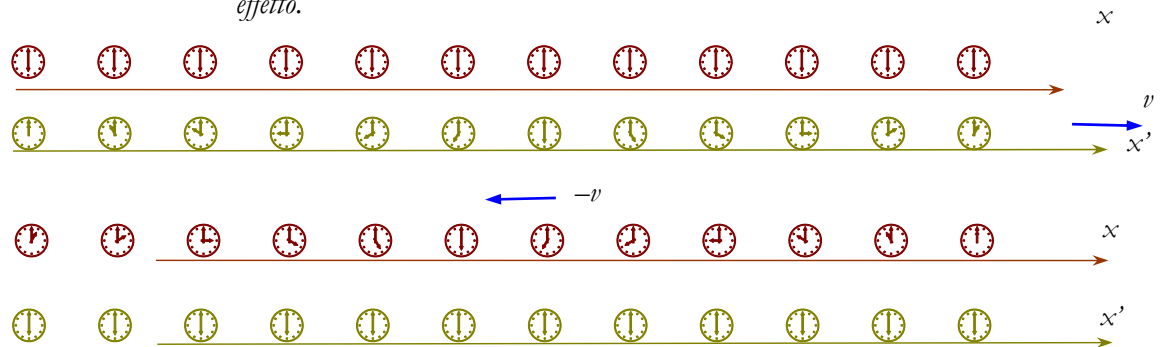
Nel sistema K tutti gli orologi sono sincronizzati ($t_2 = t_1$) ⁽⁷⁾ mentre per quelli in K' se $t_1' = t_2 = t_1$ (orologio centrale) quelli con coordinata spaziale diversa risultano in anticipo o in ritardo. Lo stesso accade quando da K' si guarda la situazione in K .

la desincronizzazione reciproca degli orologi in moto

⁷ Si assume cioè come coppia di eventi A e B quelli che sincronizzano gli orologi del sistema di riferimento

Osserviamo infine che la quantità $(t_2' - t_1')$ può essere sia positiva sia negativa a seconda del valore delle coordinate spaziali. Possono pertanto esistere coppie di eventi simultanei in un sistema di riferimento che, in un altro sistema, *rovescino la catena temporale*, appartengano cioè sia alla catena *passato futuro* che alla *futuro passato*.

Come vedremo nel paragrafo dedicato agli intervalli spazio temporali la inversione temporale *non può però accadere per eventi legati da un nesso di causa-effetto*.



3.6 Contrazione delle lunghezze e dilatazione del tempo

3.6.1 COME CAMBIA LA DISTANZA SPAZIALE TRA EVENTI SIMULTANEI AL MUTARE DEL RIFERIMENTO

Come abbiamo già avuto modo di osservare, se cade l'*assolutezza della definizione di simultaneità*, deve cadere con essa anche la *assolutezza di distanza spaziale* tra due eventi al cambiare del sistema di riferimento perché la *distanza spaziale viene definita come differenza delle coordinate degli estremi misurate ad uno stesso istante*.

Supponiamo che una sbarra rigida sia disposta in quiete parallelamente all'asse delle ascisse in un sistema di riferimento inerziale, per esempio il sistema K' . Indicheremo con $l_0 = x_2' - x_1'$ la lunghezza della sbarra nel sistema di riferimento in cui la sbarra risulta a riposo. Poiché la sbarra è a riposo in K' rispetto ad essa non si pongono questioni di simultaneità.

Nel sistema K la sbarra risulta dotata di velocità v e pertanto la sua lunghezza l sarà determinata misurandone la differenza di coordinate allo stesso istante $[(t_2 - t_1) = 0]$.

Se applichiamo le trasformazioni di Lorentz avremo che:

$$x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

da cui:

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - vt_2) - (x_1 - vt_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Pertanto:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (\text{II.3.10})$$

3.6.2 LUNGHEZZA E LUNGHEZZA PROPRIA

La lunghezza di una sbarra in quiete in un sistema di riferimento è chiamata *lunghezza di riposo o lunghezza propria*. In base alla equazione (II.3.10) possiamo affermare che la *lunghezza di una sbarra in un sistema di riferimento in moto rispetto alla sbarra è sempre minore della lunghezza propria*.

In sistemi di riferimento dotati di velocità diverse la sbarra assume lunghezze diverse e da ciò si deduce che la *contrazione relativistica non è dovuta ad una deformazione della sbarra o a processi simili*. La contrazione relativistica è dovuta alla costruzione di una nuova cinematica e non all'apparire di qualche strana forza che deforma i corpi in movimento.

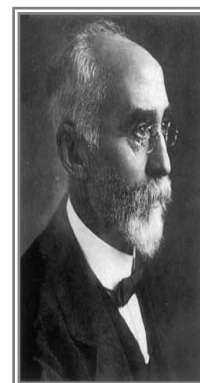
Lorentz aveva ammesso la *contrazione delle lunghezze*, come ipotesi necessaria a spiegare il *risultato negativo dell'esperimento di Michelson*, e aveva cercato di dare una giustificazione a tale contrazione ipotizzando l'esistenza di una forza dipendente dalla velocità che agisse a livello atomico. Le trasformazioni venivano poi dedotte dalla necessità di rispettare la contrazione. La contrazione delle lunghezze, per questa ragione, è ancora nota come *contrazione di Lorentz*.

Con Einstein, invece, si ammettono come validi due principi generali: uno di *natura empirica* (la costanza della velocità della luce) e l'altro di *natura euristica* (il principio di relatività). Da questi due principi e da niente

la definizione di distanza spaziale è legata alla simultaneità e ciò determina la relatività delle lunghezze

si chiama **lunghezza di riposo** di un corpo rigido quella misurata in un sistema di riferimento in cui l'oggetto si trova in quiete
si chiama **lunghezza** quella misurata in un sistema di riferimento in moto rispetto all'oggetto e che richiede la istantanea effettuata da due orologi sincronizzati

in generale $l < l_0$ secondo la relazione: $l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$



la contrazione delle lunghezze di Lorentz ...

la relatività ristretta è incompatibile con l'idea di corpo rigido



altro si costruiscono una nuova meccanica ed un nuovo elettromagnetismo.

Ci si potrebbe chiedere come sia possibile conciliare la relatività della lunghezza di un oggetto con il concetto di *corpo rigido*: se un corpo è rigido è assoluta la sua lunghezza e dunque l'idea di contrazione sarebbe un non senso. La risposta sul piano logico è piuttosto semplice: la relatività della simultaneità si basa sulla esistenza di una velocità limite per la trasmissione dei segnali e l'esistenza di questa velocità limite trascina con sé anche il concetto di corpo rigido; infatti, se esistessero corpi perfettamente rigidi, cioè corpi in grado di trasmettere sollecitazioni a distanza in un tempo nullo (e non in un tempo finito e attraverso una sollecitazione elastica) non esisterebbe una velocità limite ed useremmo questa proprietà per trasmettere i segnali.

3.6.3 OSSERVAZIONE DELLA CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

Come ci appare un corpo in moto soggetto alla contrazione di Lorentz? La risposta, abbastanza sconcertante, è che *la deformazione della larghezza rispetto alla altezza dovuta alla contrazione nel verso del moto non si vede ma l'oggetto ci appare invece ruotato e deformato*.

Questo risultato fu anticipato nel 1924 dal fisico austriaco Anton Lampa e successivamente ripreso e discusso in maniera indipendente nel 1959 da James Terrel dei laboratori di Los Alamos sulla Physical Review e da Roger Penrose sui Proceedings della università di Cambridge.

Consideriamo infatti il solito vagone ferroviario e supponiamo, per semplificare calcolo e risultati, di osservarlo di fronte e da lontano.

I raggi che ci invia e che formano l'immagine sulla retina sono all'incirca paralleli, ma non sono stati emessi simultaneamente; infatti essi giungono simultaneamente sulla retina dopo aver percorso spazi diversi. Quelli che arrivano da più lontano (nel nostro caso quelli che arrivano dal lato posteriore) devono essere partiti prima e pertanto, senza tenere conto della contrazione, il vagone che si muove lungo l'asse x apparirà ruotato nel piano xy .

Se si tiene poi conto della contrazione delle lunghezze si scopre che gli effetti sono tali per cui un ipotetico vagone (visto dall'alto) di lati l_x e l_y risulta ruotato di un angolo α tale che $\sin \alpha = v/c$.

L'osservatore vede lungo l'asse x due segmenti $l_x \cos \alpha$ e $l_y \sin \alpha$ proprio come se il vagone avesse ruotato di α senza contrarsi.

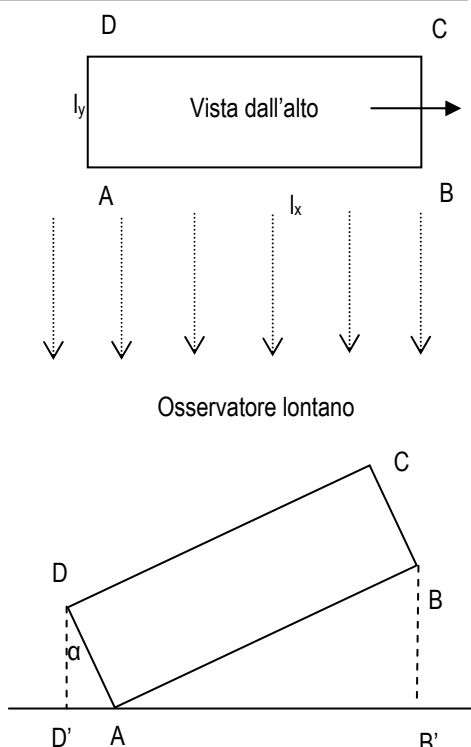
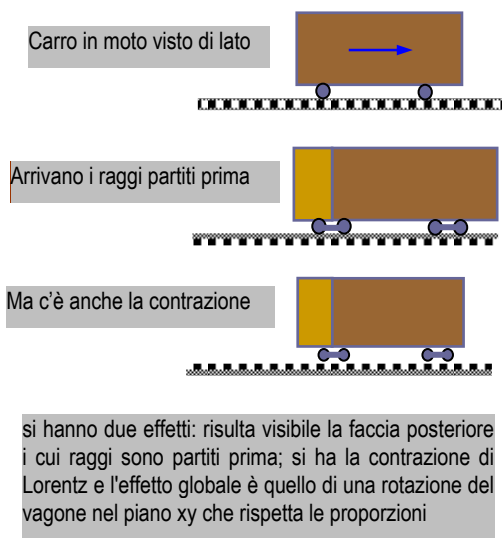
Eseguiamo dapprima un calcolo geometrico relativo alla lunghezza del segmento $D'A$ proiezione della rotazione del rettangolo $ABCD$ di un angolo α e che corrisponde alla visione frontale di un ipotetico osservatore lontano.

$$D'A = l_y \sin \alpha \text{ mentre } AB' = l_x \cos \alpha$$

Dunque se troveremo che l'osservatore, per gli effetti relativistici, vede $l_y \sin \alpha + l_x \cos \alpha$ potremo affermare che il vagone ferroviario viene visto come non deformato ma ruotato di α nel piano xy .

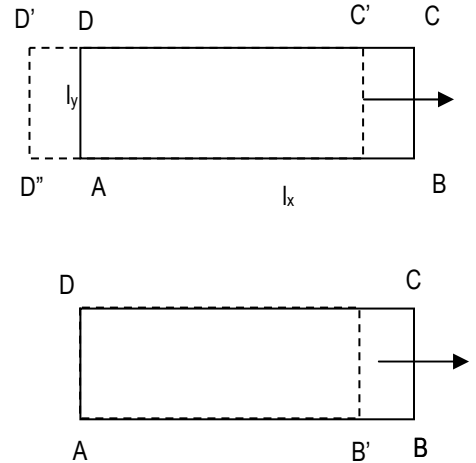
Gli effetti relativistici da considerare sono due.

1. I raggi luminosi emessi dal punto D per arrivare simultanei a quelli di A devono essere stati emessi in precedenza con un intervallo



temporale $\Delta t = l_y / c$ e in quel intervallo di tempo il vagone si è spostato verso destra di $D'D = \Delta t v = v l_y / c = \beta l_y$.

Se indichiamo con α l'angolo $D'AD$ avremo che $D'A = l_y \tan \alpha \approx l_y \sin \alpha = \beta l_y$ nella approssimazione dei raggi paralleli. Dunque $\sin \alpha = \beta$. Il punto C che si trovava in C' risulterà coperto dalla sagoma del vagone



2. Ma mentre lungo gli assi y e z non si hanno contrazioni perché si tratta di direzioni ortogonali al moto la contrazione si ha lungo l'asse x e dunque il punto B viene visto in B' con $AB' = l_x \sqrt{1 - \beta^2} = l_x \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = l_x \cos \alpha$

Concludendo l'osservatore lontano vede il segmento $D'AB' = l_y \sin \alpha + l_x \cos \alpha$ e cioè proprio l'effetto di una rotazione di α con $\tan \alpha = \beta$ nel piano xy.

Nel caso di osservatore vicino hanno luogo una serie di deformazioni oltre alla rotazione. L'effetto Terrell Penrose è stato ampiamente studiato e sul sito della università di Toronto è visionabile una interessante animazione di cui viene fornito il [link ipertestuale](#).

3.6.4 INTERVALLO TEMPORALE ED INTERVALLO PROPRIO

Abbiamo già osservato che a causa del legame reciproco tra coordinate spaziali e coordinate temporali in teoria della relatività la descrizione del mondo avviene attraverso gli *eventi*, cioè attraverso una esplicitazione di entrambe le coordinate spaziali e temporali.

Eravamo già abituati ad accettare il criterio del *dove e quando* che valeva anche in meccanica classica, ma in quel contesto, per un evento dato (un fatto), il tempo era lo stesso in ogni sistema di riferimento. In *teoria della relatività* un fatto è descritto da un *dove e quando* intimamente collegati e diversi nei diversi sistemi di riferimento.

Lo spazio tempo di Einstein e il corrispondente sistema di riferimento è una sorta di retinatura dello spazio entro il quale sono collocati punto a punto degli orologi sincronizzati.

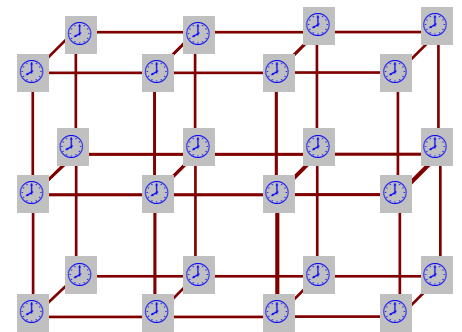
Consideriamo ora due eventi $A_1 \equiv (x, y, z, t_1)$ e $A_2 \equiv (x, y, z, t_2)$ che avvengono in uno stesso punto del sistema di riferimento considerato e indichiamo il tempo trascorso tra i due eventi con $\Delta t_0 = t_2 - t_1$. Questo intervallo di tempo, che è misurato nel sistema di riferimento in quiete con gli eventi viene chiamato *tempo proprio*.

Il *tempo proprio* è l'intervallo di tempo tra due eventi *misurato da uno stesso orologio*, misurato cioè in un sistema di riferimento nel quale i due eventi hanno luogo alla stessa coordinata spaziale. Dati due eventi qualsiasi non è detto che esista sempre un sistema di riferimento nel quale gli eventi avvengono nello stesso punto ovvero non sempre è possibile, dati due eventi, definirne l'intervallo proprio.

Vedremo tra poco che *quando gli stessi eventi vengono osservati in un altro sistema di riferimento l'intervallo di tempo risulterà sempre superiore al tempo proprio*.

3.6.5 DILATAZIONE DEL TEMPO E RALLENTAMENTO DEGLI OROLOGI

Definito il tempo proprio tra due eventi troviamo ora *l'intervallo di tempo tra i due eventi* misurato in un sistema di riferimento (x', y', z') in moto lungo l'asse delle ascisse con velocità v . Dalla equazione (II.3.4) e dalla con-

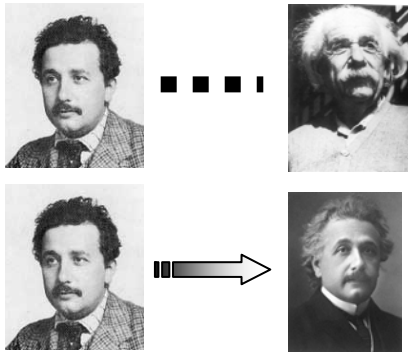


Lo spazio tempo di Einstein

regoli rigidi per le coordinate spaziali ed orologi sincronizzati per le coordinate temporali degli eventi

intervallo temporale proprio è quello misurato da uno **stesso orologio** cioè caratterizzato da eventi che hanno luogo in uno stesso punto (del sistema di riferimento)





l'intervallo temporale proprio è il tempo minimo tra due eventi

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

dizione che i due eventi accadano nello stesso punto, cioè che sia $x_1 = x_2$, si ha:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - (\beta x_2) / c - t_1 + (\beta x_1) / c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Dunque l'intervallo di tempo tra i due eventi nel sistema di riferimento in moto (rispetto agli eventi) è:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{(II.3.11)}$$



Poiché la quantità $\sqrt{1 - \beta^2} < 1$ ne segue che $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} > 1$ e pertanto:

$$\Delta t' > \Delta t_0$$

Si tratta di un risultato fondamentale: *l'intervallo di tempo tra due eventi acquista un suo valore minimo nel sistema di riferimento in cui gli eventi hanno luogo in uno stesso punto*. In qualunque altro sistema di riferimento l'intervallo di tempo è più lungo. Come si è già detto l'intervallo di tempo Δt_0 è detto *tempo proprio*.

L'abuso dei termini *dilatazione del tempo* e *rallentamento del tempo* o *rallentamento degli orologi* richiede una messa a punto.

Se consideriamo un sistema $K(x, y, z)$ con i suoi orologi sincronizzati e un oggetto in moto con velocità v (con il suo orologio in moto) una coppia di eventi che avvengono sul corpo in moto sono caratterizzati da un *intervallo di tempo minimo* (perché l'intervallo è misurato da uno stesso orologio) e per questa ragione si dice che *gli orologi in moto (quello del corpo) rallentano rispetto a quelli di K: se l'orologio solidale al corpo in moto segna un intervallo temporale più breve si può affermare che rallenti*. Contestualmente gli orologi di K segnano un intervallo tra gli eventi maggiore e si dice che si ha una *dilatazione del tempo*.

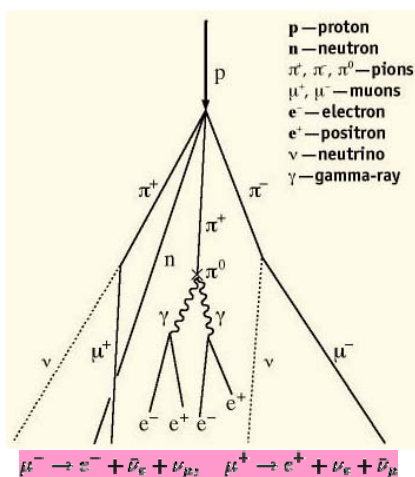
Si parla di orologi in moto nel senso che quando si è in un sistema di riferimento e si osservano eventi spazialmente distinti è possibile trovare⁽⁸⁾ un sistema di riferimento nel quale i due eventi avvengono nello stesso punto; tale sistema di riferimento che è in moto rispetto a quello precedente è quello il cui orologio (coincidente con i due eventi) subisce il cosiddetto *rallentamento*.

3.6.6 LA STRANA STORIA DEI MUONI

Il rallentamento degli orologi (dilatazione del tempo) nei sistemi di riferimento in moto ci consente di spiegare un fenomeno interessante osservato per la prima volta negli anni 40 e successivamente simulato anche in laboratorio utilizzando gli acceleratori di particelle.

L'azione dei raggi cosmici ai confini superiori della atmosfera (circa 20 km) produce delle particelle fondamentali appartenenti alla famiglia dei *leptoni* dette *muoni*.

Queste particelle decadono spontaneamente producendo un elettrone e due neutrini e la loro esistenza, anche se variabile, come accade a tutte le particelle instabili, è caratterizzata da un *tempo di dimezzamento* di 1.5 μ s.



⁸ a condizione che $\Delta x < c \Delta t$

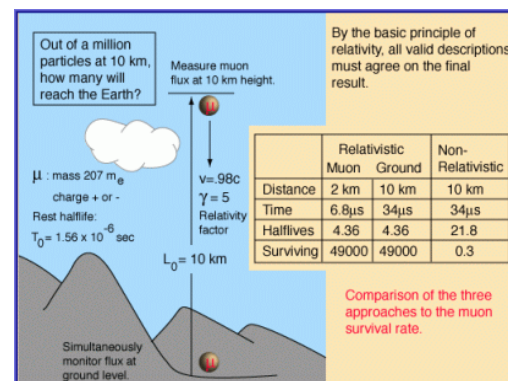
Ciò significa che se si hanno per esempio 10'000 muoni, dopo $1.5 \mu\text{s}$ ce ne sono 5'000, dopo $3 \mu\text{s}$ ne rimangono 2500 e dopo $10 \times 1.5 \mu\text{s}$ ne rimangono $10'000 \times \frac{1}{2}^{10} \approx 9.8$.⁹

Ora i muoni prodotti dai raggi cosmici viaggiano quasi alla velocità della luce con velocità $v = 0.999887 c$ e pertanto a percorrere 20 km impiedi dimezzamento. Se le cose stanno così alla superficie terrestre non dovrebbero arrivare praticamente muoni perché $(1/2)^{50} \approx 10^{-15}$. In un intervallo pari ad un tempo di dimezzamento un muone percorre $3 \times 10^8 \times 1.5 \times 10^{-6} = 450 \text{ m}$ e ogni 450 m la popolazione si riduce a metà!

Ma i dati di laboratorio indicano che sulla terra viene rivelato quasi l'80% dei muoni prodotti a 20 km di altezza. Questo dato sperimentale può essere spiegato in due modi:

- dal punto di vista del laboratorio terrestre è trascorso un tempo di $7 \times 10^{-5} \text{ s}$, ma l'orologio del muone che viaggia quasi alla velocità della luce misura il *tempo proprio* che risulta essere decisamente minore di $7 \times 10^{-5} \text{ s}$. Per il muone in moto con velocità $v = 0.999887 c$ si ha, in base alla (12.21), $t_0 = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2} = 7 \times 10^{-5} \times \sqrt{1 - 0.999887^2} \approx 10^{-6} \text{ s}$ e dunque è trascorso meno di un tempo di dimezzamento.
- dal punto di vista del muone la distanza percorsa non è di 20 km ma, in base alla contrazione delle lunghezze è pari a $20 \times \sqrt{1 - 0.999887^2} \approx 0.3 \text{ km}$

Gli esperimenti sul decadimento dei muoni sono stati tra le prime *conferme sperimentali* delle previsioni relativistiche sulla *contrazione delle lunghezze* e sul *rallentamento degli orologi*.

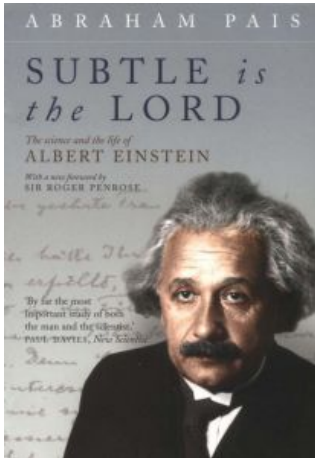


Previsione classica e previsione alla luce della contrazione delle lunghezze o della dilatazione del tempo

⁹ Tutti fenomeni di decadimento radioattivo hanno natura probabilistica e sono descrivibili attraverso un *tempo di dimezzamento* tipico del materiale o del fenomeno considerato

L'intervallo spazio temporale

3.6.7 DAL RELATIVO ALL'ASSOLUTO



Sottile è il Signore, ma non malizioso

La teoria della relatività è il contrario del relativismo conoscitivo. L'intervallo spaziale e quello temporale sono relativi ma quello spazio temporale è assoluto

Secondo lo stesso Einstein la peggiore sfortuna della sua teoria stava nel nome *relatività*, che per altro non gli aveva dato lui. La teoria della relatività è infatti una *teoria che cerca l'assoluto* (per quanto possibile entro l'impianto antidogmatico della fisica) e consiste nell'operare una serrata critica al *senso comune*¹⁰ per farne emergere le contraddizioni e per determinare ciò che non cambia dietro l'apparenza dei cambiamenti.

Ma il programma di ricerca non si ferma qui: consiste nello scoprire *nuovi elementi* caratterizzati da una *reale invarianza*.

Lo scopo della teoria fisica è quello di scoprire questi invarianti, o verità generali dietro cui si nasconde la *semplicità della natura*. Come disse Einstein al suo biografo A. Pais *Sottile è il Signore, ma non malizioso* che potremmo tradurre dicendo: *conoscere il mondo non è banale, ma è possibile*.

Dal punto di vista teorico, la *teoria degli invarianti* costituisce uno degli elementi fondamentali della teoria della relatività; per la precisione la ricerca degli invarianti si è rivelata un *principio secondo dal punto di vista euristico* al punto che, dopo la cinematica, la dinamica della relatività e la sua applicazione al campo elettromagnetico sono costruite usando l'*invarianza come strumento di costruzione dei nuovi concetti* e delle nuove leggi come si è già osservato nel capitolo dedicato alla simmetria (messa in relazione con la conservazione di qualche entità o grandezza fisica).

Con la teoria della relatività ristretta abbiamo demolito i due principali assoluti (invarianti) della fisica classica: la distanza tra due punti nello spazio e la distanza tra due eventi nel tempo. *Due concetti che ritenevamo assoluti risultano essere relativi*. Cosa si salva in termini assoluti dalla critica relativistica? La velocità della luce nel vuoto è stata addirittura assunta come postulato, ma c'è un altro invariante che prende il posto della distanza spaziale e dell'intervallo temporale: *l'intervallo spazio-temporale*.

3.6.8 L'INTERVALLO SPAZIO TEMPORALE

L'utilizzo dell'intervallo spazio temporale si presta ad una rappresentazione degli eventi completamente geometrizzata in cui il cambio del sistema di riferimento equivale al passaggio da un sistema di coordinate cartesiane ad uno di coordinate oblique e in cui sono ben visibili le interazioni tra spazio e tempo.

In questo tipo di ragionamenti si rivela particolarmente utile la introduzione di una coordinata temporale con le dimensioni spaziali $\tau = ct$ che corrisponde allo spazio percorso dalla luce nel tempo t .

Se la si introduce le trasformazioni di Lorentz assumono una particolare forma simmetrica. Si ha infatti:

$$x' = \frac{x - \beta\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad y' = y \quad z' = z \quad \tau' = \frac{\tau - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{II.3.13})$$

¹⁰ Secondo Einstein il *senso comune* è l'insieme di quelle certezze che noi acquisiamo prima dei 5 anni sulla base di abitudini ed esperienze ripetute senza mai interrogarci sul significato di esse.

Il tempo e lo spazio appaiono ora intimamente e simmetricamente legati. Come scrisse *Minkowski* presentando il suo lavoro intitolato *Spazio e tempo* (Gottingen 1908):

le idee sullo spazio e sul tempo che io vi svilupperò sono derivate da radici fisiche sperimentali. In ciò sta la loro forza. La loro tendenza è radicale. Da ora lo spazio per conto suo ed il tempo per conto suo dovranno calare completamente nell'ombra e solo una sorta di unione di entrambi conserverà esistenza autonoma.

Ma non si tratta solo di una simmetria. Le trasformazioni di Lorentz contengono un legame diretto tra coordinate spaziali e temporali e questo legame, dato un evento $E(x, \tau)$, non dipende dal sistema di riferimento.

$$\tau'^2 - x'^2 = \frac{(\tau - \beta x)^2}{1 - \beta^2} - \frac{(x - \beta \tau)^2}{1 - \beta^2} = \frac{\tau^2(1 - \beta^2) - x^2(1 - \beta^2)}{1 - \beta^2} = \tau^2 - x^2$$

La *proprietà di invarianza* per cui

$$\tau^2 - x^2 = \text{costante} \quad (\text{II.3.14})$$

oltre che riguardare gli eventi riguarda le differenze di coppie di eventi cioè gli intervalli (basta riflettere sul fatto che le trasformazioni di Lorentz sono lineari e non c'è neanche bisogno di svolgere il conto):

$$(\Delta\tau)^2 - (\Delta x)^2 = \text{costante} \quad (\text{II.3.15})$$

Dunque: *mentre l'intervallo spaziale e quello temporale sono relativi risulta essere un assoluto* (cioè non dipendente dal sistema di riferimento) una nuova quantità detta *intervallo spazio temporale* e relativa a due eventi $P_1 \equiv (x_1, t_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, t_2)$:¹¹

$$\mathcal{I} = (\Delta\tau)^2 - (\Delta x)^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = \text{costante} \quad (\text{II.3.16})$$

La quantità $|\Delta\tau| = |c \Delta t|$ rappresenta la distanza percorsa da un segnale luminoso nell'intervallo temporale dato e quindi l'intervallo spazio temporale risulterà positivo o negativo a seconda che i due eventi risultino più o meno vicini nello spazio quando vengono confrontati con lo spazio percorso da un segnale luminoso.

A seconda che la quantità $\mathcal{I}$ relativa a due eventi risulti positiva, negativa o nulla *gli eventi vengono diversamente classificati* in termini di influenza reciproca in maniera del tutto indipendente dal sistema di riferimento nel quale gli eventi stessi vengono descritti ($\mathcal{I}$ è costante).

- Si chiamano *intervalli di tipo spazio* quelli negativi e dunque

$$\mathcal{I} < 0 \Leftrightarrow |c \Delta t| < |\Delta x|$$

per essi può accadere, senza contraddizioni, che sia $\Delta t = 0$. Pertanto per queste coppie di eventi esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi sono simultanei.

Gli *eventi di tipo spazio non si possono influenzare reciprocamente* perché nemmeno la luce riesce a superare la distanza spaziale tra i due eventi nel tempo Δt che li separa.

- Si chiamano *intervalli di tipo tempo* quelli positivi e dunque:

$$\mathcal{I} > 0 \Leftrightarrow |\Delta x| < |c \Delta t|$$



l'intervallo spazio temporale non dipende dal sistema di riferimento, cioè è assoluto

intervalli di tipo spazio
tra i due eventi non c'è nesso causale

intervalli di tipo tempo
non possono essere simultanei ma in compenso per essi si può definire il tempo proprio e si determina un sistema di riferimento nel quale i due eventi accadono nello stesso punto

¹¹ La questione si generalizza in maniera naturale al caso in cui si utilizzino anche le altre due coordinate spaziali.

In questo caso non può mai essere $\Delta t = 0$ perché sarebbe $|\Delta x| < 0$. In compenso può accadere che sia $\Delta x = 0$ cioè esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi avvengono nello stesso punto e *per essi è definibile il tempo proprio*. Gli eventi di questo genere possono essere in relazione di *causa-effetto* perché un segnale che parte dall'evento 1 è in grado di raggiungere l'evento 2 prima che esso accada.

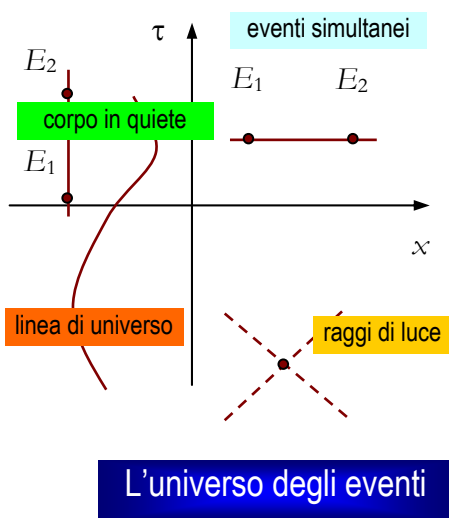
- Ovviamente gli intervalli per i quali $\mathcal{I} = 0$ si diranno *intervalli di tipo luce* perché corrispondono alla partenza e all'arrivo di un raggio di luce.

3.6.9 LA RAPPRESENTAZIONE DEGLI EVENTI AL CAMBIARE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

L'*invariante spazio temporale* ha consentito di interpretare, dal punto di vista matematico, la realtà fisica collocandola in uno spazio a 4 dimensioni entro il quale la distanza tra due eventi viene definita attraverso l'intervallo. In questo spazio però le coordinate spaziali e quelle temporali non hanno una perfetta specularità per via del segno ¹².

La teoria matematica dovuta al matematico svizzero Hermann Minkowski (1864-1909) consente di collocare l'esperienza entro un quadro statico di spazio a 4 dimensioni (*universo degli eventi*).

Se, per esigenze di rappresentazione visiva, ci poniamo in un universo con una sola coordinata spaziale e consideriamo un sistema d'assi di coordinate x e τ un evento corrisponderà ad un punto del piano (*universo degli eventi*) mentre il moto di una particella corrisponderà ad una particolare linea nel piano (*linea di universo*). In questo sistema i raggi di luce emessi da un punto del piano (evento iniziale) sono rappresentate da rette parallele alle bisettrici dei quadranti.



Consideriamo ora due eventi: un evento A collocato nell'origine e un secondo evento collocato nel piano. Il piano risulta diviso dai raggi di luce in due zone: i punti che si trovano entro la zona blu determinano con l'origine gli *intervalli di tipo tempo* (per esempio AB) mentre quelli nella zona bianca sono *intervalli di tipo spazio* (per esempio AC).

Il movimento di un corpo che al tempo zero è nell'origine sarà rappresentato da una traiettoria entro la zona blu. Se generalizziamo a coppie non necessariamente nell'origine avremo situazioni simili con coni di luce diversi nei diversi punti.

La legge oraria del moto di una particella sarà rappresentata da una linea la cui retta tangente ha sempre coefficiente angolare > 1 o < -1 perché in caso contrario si avrebbe a che fare con un fenomeno *superluminale* (cioè con velocità $> c$).

La rappresentazione che abbiamo proposto consente di *geometrizzare* tutte le proprietà della teoria della relatività. In particolare, al cambiare del sistema di riferimento, se si applicano le trasformazioni di Lorentz, si

¹² Per ottenere una perfetta simmetria di significato delle coordinate bisognerebbe porre $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ e $x_4 = ict$ dove $i = \sqrt{-1}$ ed operare nell'insieme dei numeri complessi. Con questo sistema di coordinate l'intervallo presenterebbe la forma:

$\mathcal{I} = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2$ che è la generalizzazione della ordinaria formula della distanza allo spazio a 4 dimensioni.

passa da un sistema ortogonale ad un sistema non ortogonale i cui assi si allontanano da quelli originari di un angolo $\theta = \arctan \beta$.

Tracciamo dunque le coordinate di un sistema di riferimento $xO\tau$ e sovrapponiamo ad esso il sistema $x'O\tau'$.

Se consideriamo le (II.3.13) avremo che:

- l'asse x' la cui equazione è $\tau' = 0$ corrisponderà alla equazione $\tau - \beta x = 0 \Rightarrow \tau = \beta x$. Si tratta di una retta di coefficiente angolare β che corrisponde ad un angolo $\theta = \arctan \beta$
- l'asse τ' la cui equazione è $x' = 0$ corrisponderà alla equazione $x - \beta \tau = 0 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta} x$. Si tratta di una retta di coefficiente angolare $\frac{1}{\beta}$ che corrisponde ad un angolo $\pi/2 - \theta$

Ora che sono state determinate le leggi di trasformazione degli assi rimane da fissare l'unità di misura sui due sistemi. Allo scopo basta sfruttare l'invarianza dell'intervallo:

$$\mathcal{I} = (\tau)^2 - (x)^2 = (\tau')^2 - (x')^2$$

La unità di misura dell'asse τ corrisponde all'evento $A \equiv (0,1)$. Se ora consideriamo il luogo geometrico dei punti con lo stesso intervallo avremo che: $(\tau)^2 - (x)^2 = 1$

e questa iperbole intersecherà l'asse τ' nel punto $A' \equiv (0',1')$. Infatti se $(\tau)^2 - (x)^2 = 1$ anche $(\tau')^2 - (x')^2 = 1$ e quando $x' = 0$ si ha $\tau' = 1$

Le coordinate di A' nel sistema K si trovano come intersezione di

$$\tau^2 - x^2 = 1 \text{ con la retta che descrive l'asse } \tau' \text{ e cioè con la retta } \tau = \frac{1}{\beta} x.$$

Se si fa il conto si troverà:

$$\tau_{E'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ e } x_{E'} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ e il segmento } OA' \text{ avrà una lunghezza}$$

$$OA'^2 = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} > OA = 1$$

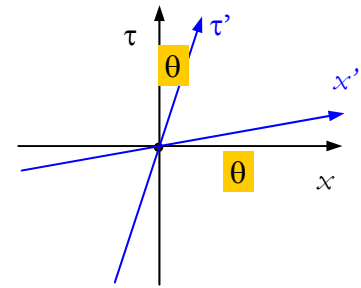
La stessa cosa accade per l'asse x considerando l'iperbole:

$$(\tau)^2 - (x)^2 = -1 \text{ che consente di definire il punto } X \equiv (1,0) \text{ e il punto } X' \equiv (1',0') \text{ tramite la intersezione con la retta } \tau = \beta x.$$

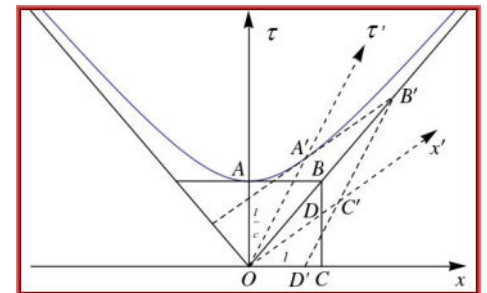
Possiamo dunque affermare che la trasformazione di Lorentz corrisponde ad una rotazione dell'asse e ad una dilatazione della unità di misura di rapporto $\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}$. E' questa dilatazione delle unità di misura la responsabile della contrazione delle lunghezze e della dilatazione del tempo.

3.6.10 IMPARIAMO A LEGGERE I DIAGRAMMI

Consideriamo due eventi A e B simultanei e spazialmente distinti nel sistema K e vediamo come si presenta la situazione in due sistemi K' e K'' caratterizzati da due valori di β opposti. I sistemi di riferimento risultano ruotati di angoli opposti e le coordinate temporali τ che si ottengono tracciando le rette parallele al corrispondente asse delle x non sono solo

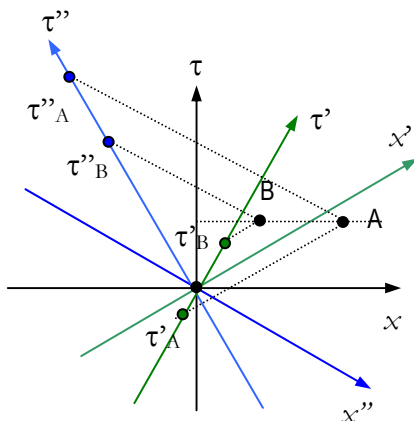


Il cambio di sistema di riferimento corrisponde al passaggio da coordinate ortogonali a coordinate non ortogonali con gli assi ruotati rispettivamente di $\theta = \arctan \beta$. Al crescere di β i due assi x' e τ' tendono a sovrapporsi.

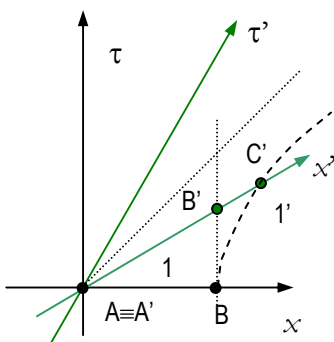


Tramite le curve di calibrazione (iperboli equilateri) si osserva che la rotazione degli assi si accompagna ad una dilatazione delle unità di misura di rapporto

$$\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}$$

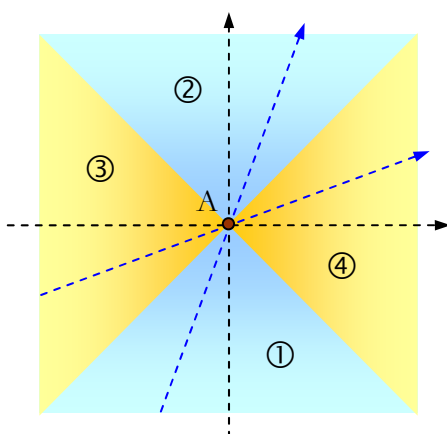


In un intervallo negativo si può realizzare la inversione temporale ma non la inversione causale



La contrazione delle lunghezze rappresentata nei diagrammi di Minkowsky

L'universo degli eventi si divide in 4 zone



diverse ma, nei due sistemi di riferimento, si invertono rispetto alla relazione di ordine.

L'evento A precede l'evento B in K' ma lo segue in K'' . La inversione dell'intervallo temporale potrebbe aprire la strada ad interessanti disquisizioni filosofiche *circa la possibilità di andare nel passato* e modificare il corso degli avvenimenti ma non è così.

Se si osserva criticamente la figura si nota che i due eventi A e B corrispondono ad intervalli $\mathcal{I} < 0$ e per questi intervalli, come si è già osservato, non può esistere una connessione causale perché in nessun sistema di riferimento nessun segnale di luce è in grado di andare da A a B prima che B accada.

Vediamo ora come si presenta graficamente la contrazione delle lunghezze. Supponiamo di disporre in quiete un regolo unitario lungo l'asse x ; le linee di universo dei due estremi saranno due rette verticali parallele all'asse τ . Per migliorare la leggibilità della figura disporremo il regolo nei punti $A \equiv (0,0)$ e $B \equiv (1,0)$.

Per determinarne la lunghezza in K' sarà necessario determinare le coordinate spaziali su x' misurate allo stesso istante. Poiché la scelta del valore di τ' da prendere per la misura è libera prenderemo $\tau'_A = 0$. In queste condizioni la misura del regolo in K' corrisponde alla misura del segmento $A'B'$ dove B' è dato dalla intersezione della linea di universo di B con l'asse x' .

D'altra parte l'iperbole di calibrazione taglia l'asse x' in C' con $1' = A'C' > A'B'$ e pertanto il regolo in moto appare contratto.

Lasciamo al lettore il compito di rappresentare un esempio di intervallo temporale e di intervallo proprio.

Per finire supponiamo di metterci in un generico punto dello spazio tempo di coordinate x_A, τ_A . Se da questo punto tracciamo le linee di universo dei due raggi di luce possibili il piano viene diviso in quattro zone ①②③④ (vedi figura).

Per i punti delle zone ① e ② si ha $|\Delta\tau| > |\Delta x|$ e dunque $\mathcal{I} > 0$: si tratta di intervalli di tipo tempo che possono essere connessi da una catena causale con A. Tra essi rientra la linea di universo di un punto materiale in moto. In particolare se consideriamo il punto A come il *qui ed ora* della particella la zona ① corrisponderà al suo passato e la zona ② al suo futuro.

Per i punti delle zone ③ e ④ si ha $|\Delta\tau| < |\Delta x|$ e dunque $\mathcal{I} < 0$: si tratta di intervalli di tipo spazio che non possono essere connessi da una catena causale con A: ciò che accade in ③ e ④ non è in grado di influenzare ciò che accade in ① e ②.

Nulla cambia se si cambia il sistema di riferimento tranne per il fatto che le zone diventano asimmetriche rispetto agli assi.

Quanto abbiamo descritto per uno spazio a 1 coordinata spaziale e 1 temporale si può generalizzare all'ordinario spazio fisico e si otterrà al posto di due angoli opposti al vertice un doppio ipercono.

3.7 Fenomeni e paradossi relativistici

3.7.1 L'EFFETTO DOPPLER PER LA LUCE

L'effetto Doppler è un fenomeno originariamente studiato in acustica e viene ampiamente discusso nella quarta parte dedicata ai fenomeni ondulatori; in base ad esso *quando esiste moto relativo tra una sorgente di onde e un osservatore si ha una variazione nella frequenza del suono percepito*. Tale variazione corrisponde ad un aumento in caso di avvicinamento e ad una diminuzione in caso di allontanamento. Si tratta del fenomeno ben noto nelle gare di Formula 1 quando si sente quasi un sibilo se le auto si stanno avvicinando e un brusco calo di tono dopo che la macchina ci ha superato.

La spiegazione del fenomeno può essere compresa semplicemente con l'apologo dei *mattoni e del nastro trasportatore* in cui i mattoni rappresentano (per esempio) la cresta di un'onda. Ad un estremo di un nastro trasportatore si trova una persona che deposita sul nastro ad eguali intervalli di tempo dei mattoni. Se all'altro estremo un osservatore si mette in moto con velocità opposta a quella del nastro esso incontrerà i mattoni più frequentemente di quanto gli accada quando sta fermo. La stessa cosa accade se chi colloca i mattoni sul nastro si muove nello stesso verso del nastro mentre l'osservatore sta fermo.

Nel primo caso i mattoni sono ad una ben definita distanza e l'osservatore li incontra più frequentemente perché corre loro incontro. Nel secondo caso i mattoni sono (spazialmente) più ravvicinati e l'osservatore ne incontra di più per questa ragione. Si potrebbe dimostrare che, in entrambi i casi, si ha una variazione di frequenza, ma che il risultato è, nei due casi, leggermente diverso (si vedano i capitoli dedicati all'effetto Doppler nella teoria delle onde elastiche).

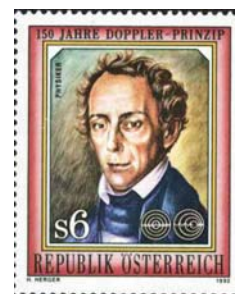
La ragione della *asimmetria nei risultati* non costituisce una violazione del principio di relatività galileiana perché quando si muove la sorgente o l'osservatore c'è *asimmetria nei comportamenti* rispetto ad un mezzo assoluto (il nastro trasportatore). L'esperienza conferma le previsioni, sia nel caso dei mattoni, sia nel caso delle onde sonore che, come è noto, hanno bisogno di un mezzo per propagarsi.

L'effetto Doppler è utilizzato, per esempio in medicina, per determinare la velocità del flusso arterioso e venoso utilizzando una sorgente di ultrasuoni ed una apparecchiatura in grado di registrare la differenza di frequenza tra l'onda inviata e quella riflessa dal sangue in movimento.

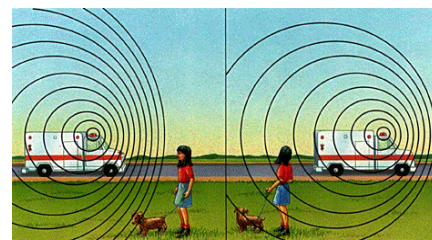
Quando si passa dalle onde sonore alla luce (che si propaga anche nel vuoto) le cose (concettualmente) si complicano perché la asimmetria tra moto della sorgente e moto dell'osservatore sparisce: *i moti sono relativi e dunque le leggi dell'effetto Doppler devono riferirsi solo al moto relativo tra sorgente ed osservatore*.

In tale contesto la spiegazione del fenomeno viene data dalla teoria della relatività con una legge che si riferisce al solo moto relativo tra sorgente ed osservatore. Se la sorgente emette della luce con frequenza ν_0 questa viene ricevuta dall'osservatore con una frequenza ν tale che:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (\text{II.3.14})$$



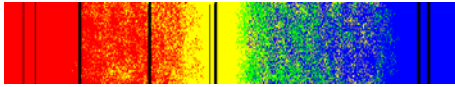
Christian Andreas Doppler 1803-1853



L'effetto Doppler in acustica caratterizzato da diminuzione di lunghezza d'onda in avvicinamento e aumento in allontanamento

L'effetto Doppler relativistico

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$



Le righe nere presenti nello spettro di una stella ne individuano i componenti; ma se si confronta lo spettro di più stelle si osserva uno spostamento verso il rosso delle righe tipiche dell'idrogeno e ciò indica un processo di allontanamento della stella

dove la quantità β viene presa positiva in caso di avvicinamento e negativa in caso di allontanamento tra sorgente ed osservatore. Si parla di *effetto Doppler relativistico*.

Si tratta di un fenomeno ben noto in astronomia, e che ha consentito, a partire dalla osservazione degli spettri di luce emessi dalle galassie (*red shift* o *spostamento verso il rosso*), di affermare che le galassie sono in costante allontanamento reciproco e che la velocità di recessione dipende dalla distanza relativa (ipotesi di espansione dell'universo).

Come si spiega tutto ciò?

Supponiamo che la sorgente coincida con K' e l'osservatore con K . Il periodo della luce emessa in K' è l'inverso della frequenza ν_0 e corrisponde ad un tempo proprio T_0 . Se K' si muove con velocità v in base alla dilatazione del tempo tale intervallo sarà recepito dall'osservatore K come:

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

La lunghezza d'onda, cioè la distanza tra due picchi consecutivi dell'onda, nel sistema K si trova sottraendo dallo spazio percorso dall'onda in un periodo, quello percorso dalla sorgente che la segue:

$$\lambda = c T - v T = (c - v) T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Ma poiché l'onda viaggia con velocità c essa viene ricevuta con una frequenza:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c \sqrt{1 - \beta^2}}{(c - v) T_0} = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

3.7.2 IL TUBO E LA SBARRA

La relatività della simultaneità e gli effetti ad essa collegati si prestano ad illustrare abbastanza bene un paradosso apparente (*paradosso del tubo e della sbarra*) che aiuta ad affinare le capacità critiche.

Consideriamo un tubo trasparente di plexiglas e una sbarra metallica dotata della stessa lunghezza quando i due corpi vengono confrontati in quiete relativa e indichiamo con l la lunghezza così individuata.

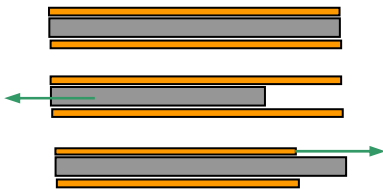
Supponiamo ora che la sbarra si sposti da destra verso sinistra con velocità v abbastanza prossima alla velocità della luce per esempio con $\beta = 0.6$; con questo valore di β la quantità $\sqrt{1 - \beta^2} = 0.8$ e pertanto dal punto di vista del tubo la sbarra verrà vista con una lunghezza pari a $0.8 l$.

Ma, lo stesso ragionamento si può fare per il tubo in moto rispetto alla sbarra e di nuovo si può concludere che il tubo presenta rispetto alla sbarra una lunghezza pari a $0.8 l$.

Sembra esserci una contraddizione: *il tubo è più lungo e più corto della sbarra*.

Non c'è nulla di strano in tutto questo: il confronto viene eseguito con riferimento ad esperimenti diversi e basterebbe mettere degli orologi agli estremi del tubo e della sbarra per rendersi conto di cosa accade.

Nel primo caso gli orologi della sbarra indicano lo stesso valore ma quelli del tubo no. Nel secondo caso sono gli orologi del tubo ad indicare lo stesso valore mentre quelli della sbarra indicano valori diversi.



il paradosso del tubo e della sbarra a seconda di come la si guardi la sbarra è più lunga e più corta del tubo che la contiene esattamente quando i due sono in quiete; la contraddizione è solo apparente se si ragiona su cosa si intende con lunghezza



In un contesto del genere non è lecito fare un confronto di lunghezze ulteriore perché si metterebbero in relazione grandezze non confrontabili (come nella vignetta del pesce di qualche pagina fa).

3.8 La relazione tra meccanica newtoniana e relativistica

3.8.1 LA CINEMATICA RELATIVISTICA AMMETTE COME CASO LIMITE LA CINEMATICA CLASSICA

La meccanica newtoniana e, in particolare, le trasformazioni di Galileo, sono basate sull'idea che il tempo scorra uniformemente in tutti i sistemi di riferimento. Poiché abbiamo dimostrato che tale ipotesi è sbagliata, risulta naturale chiedersi come mai questa teoria abbia potuto essere applicata con successo per diversi secoli. E ancora: come mai la continuiamo ad utilizzare per calcolare il moto dei corpi celesti, delle astronavi, delle automobili, delle navi, etc. ottenendo risultati eccellenti. Non c'è una contraddizione in tutto ciò?

Il fatto è che i corpi citati hanno velocità nettamente inferiori alla velocità della luce nel vuoto. In questi casi le equazioni relativistiche si riducono a quelle di Newton con un livello di precisione accettabile a tutti gli effetti pratici.

Abbiamo ormai sperimentato scorrendo i diversi paragrafi che le differenze tra cinematica classica e relativistica sono connesse al termine $\sqrt{1 - \beta^2}$ o al suo inverso.

Consideriamo allora la velocità macroscopica più elevata di cui disponiamo (quella di un razzo che è pari a $v = 10 \text{ km/s}$). In questo caso $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{10^4}{3 \times 10^8}\right)^2 \approx 10^{-9}$

Pertanto per distinguere il valore di $\sqrt{1 - \beta^2}$ dalla unità dovremmo avere degli strumenti con una accuratezza sino a nove cifre significative mentre, di solito, gli strumenti che utilizziamo hanno un livello di accuratezza nettamente inferiore.

Siamo dunque arrivati alla seguente conclusione: *la teoria della relatività include la meccanica newtoniana come proprio caso limite nel caso in cui la velocità dei corpi coinvolti sia molto inferiore alla velocità della luce nel vuoto.*

3.8.2 UNA TABELLA UTILE PER I CONFRONTI

Come si è visto sia dalle equazioni sulla dilatazione del tempo e contrazione delle lunghezze, sia dalle trasformazioni di Lorentz in teoria della relatività è cruciale valutare la quantità $\sqrt{1 - \beta^2}$ per distinguere la portata dell'effetto relativistico.

Per questa ragione abbiamo riportato in tabella alcuni valori tipici che ci danno una immediata visione del peso degli effetti relativistici. Nella prima colonna β varia ogni volta del 10 %. Raggiunto un valore prossimo a $\beta = 1$ gli incrementi vengono ulteriormente ridotti.

A causa della presenza di espressioni del tipo citato si rivelano particolarmente utili alcune uguaglianze approssimate deducibili con considerazioni di algebra elementare che conviene tenere presenti quando si opera con espressioni di quel tipo.

Le espressioni si basano sul fatto che, se x è piccolo, x^2 è trascurabile rispetto a x o rispetto all'unità:

β	$\sqrt{1 - \beta^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$
0.1	0.99499	1.00504
0.2	0.97980	1.02062
0.3	0.95394	1.04828
0.4	0.91651	1.09109
0.5	0.86602	1.15470
0.6	0.80000	1.25000
0.7	0.71414	1.40028
0.8	0.60000	1.66667
0.9	0.43589	2.29416
0.95	0.3122499	3.20256
0.99	0.1410673	7.08881
0.995	0.0998749	10.0125
0.999	0.0447102	22.3662
0.9995	0.0316188	31.6267
0.9999	0.0141418	70.7124
0.99995	0.0099999	100.001
0.99999	0.0044721	223.607
0.999995	0.0031623	316.228

$$(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2 \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - x} \approx 1 + x \quad (\text{II.3.15})$$

$$(1 + x/2)^2 = 1 + x + x^2/4 \approx 1 + x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad (\text{II.3.16})$$

$$(1 - x/2)^2 = 1 - x + x^2/4 \approx 1 - x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{1}{2}x \quad (\text{II.3.17})$$

I fenomeni fisici che dipendono da x sono detti *effetti del primo ordine in x* e quelli che dipendono da x^2 sono detti *effetti del II ordine in x* . Si adotta una analoga terminologia per le approssimazioni.



Per esempio, se un fenomeno dipende da $(1 + x) - \frac{1}{1 - x} \approx 1 + x - (1 + x) = 0$ la approssimazione del primo ordine non è in grado di fare previsioni e bisogna studiare i fenomeni del II ordine, cioè quelli che dipendono da x^2 e che nella approssimazione erano stati trascurati.

Si tenga presente che esistono fenomeni fisici che dipendono solo da effetti del II ordine e pertanto una apparecchiatura sperimentale in grado di misurare solo effetti del I ordine non è in grado di evidenziarli.

Per esempio, la metodologia di misura della velocità della luce nel verso del movimento della terra nella sua orbita e in verso perpendicolare (*sperimento di Michelson e Morley*) è stata considerata fondamentale nell'arrivare a stabilire il principio della costanza della velocità della luce nel vuoto perché era in grado di evidenziare eventuali effetti del II ordine e il risultato sperimentale è invece stato negativo: *la velocità della luce in direzione tangenziale al moto della terra ed in direzione radiale risulta la stessa anche con una precisione del II ordine in β* .

3.8.3 LA DINAMICA DELL'IMPRESA SCIENTIFICA

Il legame tra meccanica classica e meccanica relativistica si presta bene a commentare lo *sviluppo della impresa scientifica*. Qualunque teoria scientifica descrive un gruppo di fenomeni con un certo grado di accuratezza che dipende dal livello di sviluppo della scienza e da quello delle tecniche di misura. Nel progredire della scienza vengono continuamente analizzati e inclusi nuovi fenomeni. Contemporaneamente aumenta anche l'accuratezza delle misure.

Ad un certo punto può accadere che la vecchia teoria non riesca più a spiegare i nuovi fenomeni. Le conclusioni della vecchia teoria entrano in contrasto con i nuovi fatti e si sviluppa una nuova teoria molto spesso sulla base di nuovi principi. Ma la nuova teoria non scarta la vecchia come completamente sbagliata. Essa *include i risultati* delle vecchie teorie come *casi limite* validi per il gruppo di fenomeni che venivano descritti dalla vecchia in modo soddisfacente.

In genere, è molto difficile scartare i principi fondamentali della teoria vecchia perché, in tal caso, si devono rifiutare principi *auto evidenti*, *ovvi* e, di conseguenza, veri. Tuttavia, prima o poi si fa strada una nuova teoria vincente e, le generazioni successive di scienziati trovano difficile capire cosa abbia consentito l'affermazione dei vecchi argomenti.





Max Planck ed Albert Einstein



È successo così con la teoria della relatività. Quando fu proposta all'inizio essa suscitò accesi dibattiti. Molti scienziati, incapaci di rinunciare alle loro opinioni abituali non ne compresero l'essenza.

La teoria della relatività ristretta fu avanzata nel 1905 da un personaggio allora sostanzialmente sconosciuto ed ebbe, sino al 1912, sia una scarsa circolazione, sia uno scarso riconoscimento nella comunità scientifica (unica eccezione rilevante fu quella di *Max Planck*).

Lo stesso Einstein ricevette il premio Nobel per la fisica solo nel 1922 (riferito al 1921) dopo che una spedizione guidata dal più famoso astro-nomo inglese *Eddington* confermò con un alto grado di attendibilità alcune previsioni della teoria generale della relatività del 1919.

Il premio Nobel gli fu comunque assegnato per le ricerche sull'*effetto fotoelettrico* perché, ancora nel '21, la comunità scientifica non era unanimemente d'accordo nel ritenere la relatività una teoria confermata adeguatamente.

3.8.4 L'OPINIONE DI UN NEOPOSITIVISTA

Il capitolo dedicato alla più grande rivoluzione nella teoria della conoscenza con cui è iniziato il XX secolo non può non concludersi con qualche osservazione di ordine filosofico. Il brano che segue è ripreso da un testo di un grande *epistemologo*, fisico di formazione, *Hans Reichenbach*. Non si pretende di esaurire la questione ma semmai di stimolare la curiosità.⁽¹³⁾

Per l'esistenza di un tempo assoluto, ossia di una simultaneità non ambigua, occorrerebbe un mondo nel quale vi fossero segnali veloci non soggetti ad alcun massimo. Ma proprio perché nel nostro universo la velocità di trasmissione causale è limitata, si ha la esclusione di ogni simultaneità assoluta. ...

Tali risultati suggeriscono una soluzione del problema del tempo simile a quella del problema dello spazio. Il tempo, al pari dello spazio, non è una entità di tipo platonico percepita con qualche atto di visione intellettuale, né una forma ordinatrice imposta al cosmo dal soggetto umano, come ebbe a credere Kant. La mente dell'uomo è in grado di concepire differenti sistemi di ordine temporale, fra i quali quello classico è uno, e quello di Einstein, con la caratteristica limitazione della velocità di trasmissione causale, un altro. Entro questo insieme, la scelta del sistema valido nel nostro mondo appare una questione empirica. L'ordine temporale rappresenta una proprietà generale dell'universo in cui viviamo ed è reale nel medesimo senso già chiarito a proposito della realtà dello spazio. Anziché a priori la sua conoscenza è frutto di osservazioni, così da costituire un capitolo della fisica. Questo è il risultato della filosofia del tempo.

Per quanto strana possa sembrare la relatività della simultaneità è logica e accessibile alla intuizione. La singolarità dei concetti einsteiniani verrebbe meno in un mondo nel quale le restrizioni della trasmissione causale risultassero più evidenti. Ad esempio il giorno in cui ci fossero comunicazioni radiotelefoniche con Marte e occorressero venti minuti per ottenere risposta ad ogni quesito formulato parlando attraverso l'apparecchio, la relatività della simultaneità ci apparirebbe naturale e finiremmo per abituarci ad essa così come lo siamo ai differenti fusi orari in cui è diviso il

¹³ Hans Reichenbach (1891-1953) fu uno dei maggiori esponenti del *neopositivismo* e dopo i primi lavori negli anni 20 e 30 in Austria e Germania si trasferì negli Usa all'avvento del nazismo. I suoi lavori principali sono dedicati a ricerche sui fondamenti della logica, alla filosofia dello spazio e del tempo ed alla meccanica quantistica. Il brano riportato è ripreso da *la nascita della filosofia scientifica* - Il Mulino. Per chi volesse approfondire le implicazioni filosofiche della teoria della relatività si consiglia dello stesso autore *Filosofia dello spazio e del tempo* - Feltrinelli.

globo terrestre. Ancora, una volta istituiti i voli interplanetari, non dovrebbe più sorprendere il fatto che persone, al ritorno da lunghi viaggi cosmici, rivelino un rallentato invecchiamento, essendo rimaste più giovani dei coetanei trattenutisi sulla terra. Risultati, raggiunti dagli scienziati mediante ragionamenti astratti, e tali prima facie da richiedere l'abbandono di credenze tradizionali, spesso divengono nozioni comuni per le generazioni successive... Si è scoperto che la struttura di tale flusso è molto più complessa di quanto possa apparire nella percezione immediata, prevedendosi altresì che con la conquista degli spazi interplanetari anche il tempo della vita quotidiana assumerà lo stesso aspetto di quello della scienza teorica odierna. È vero che le scienze, per procedere all'analisi logica astraggono dai contenuti emotivi, ma è altrettanto vero che esse ci dischiudono nuove possibilità, le quali un giorno forse ci consentiranno di provare emozioni assolutamente nuove.



3.9 Esercizi

Gli *esercizi* che seguono consentono di apprendere le tecniche di utilizzo delle leggi della cinematica relativistica.



3.9.1 DETERMINARE β DALLA CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

Esercizio - Una sbarra in moto con velocità v lungo la direzione della sua lunghezza subisce una contrazione relativa ε dello 0.6%. Determinare il valore di β eseguendo il calcolo dapprima in forma esatta e quindi utilizzando le formule approssimate espresse a fine capitolo.



Per definizione si ha:

$$\varepsilon = \frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \frac{l}{l_0}$$

Ma in base alla relazione sulla contrazione delle lunghezze:

$$\frac{l}{l_0} = \sqrt{1 - \beta^2} \text{ e pertanto:}$$

$$0.006 = 1 - \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$\sqrt{1 - \beta^2} = 1 - 0.006 = 0.994 \Leftrightarrow 1 - \beta^2 = 0.988036 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{1 - 0.988036} = 0.109$$

Se usiamo le espressioni approssimate avremo:

$$\sqrt{1 - \beta^2} = 1 - \frac{1}{2} \beta^2 \text{ e pertanto:}$$

$$0.006 = 1 - (1 - \frac{1}{2} \beta^2) \text{ e dunque } \beta^2 = 0.012 \text{ e } \beta = 0.110$$

Visto che l'errore era espresso con una sola cifra significativa non c'è differenza



3.9.2 COME SI CONTRAE UNA SBARRA INCLINATA DI α NELLA DIREZIONE DEL MOTO?

Esercizio - Una sbarra di lunghezza propria l_0 è inclinata di α lungo l'asse delle x e si muove lungo l'asse x con velocità descritta da β . Determinare la lunghezza nel sistema di riferimento K .

Di quanto appare inclinata la sbarra vista dal sistema K ?

Eseguire il calcolo per il caso in cui sia $\alpha = 30^\circ$ e confrontare i due casi estremi $\beta \rightarrow 0$ e $\beta \rightarrow 1$



La contrazione avviene solo nella direzione del moto e pertanto:

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$$

con la precisazione che:

$$l_y = l_{y0} = l_0 \sin \alpha$$

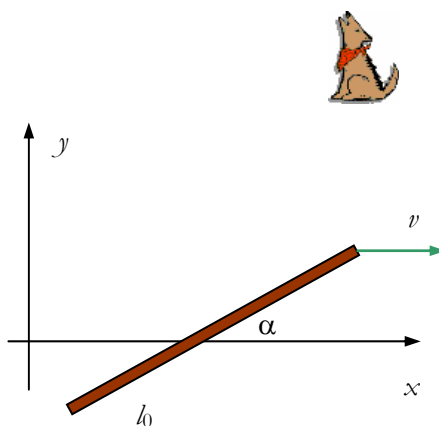
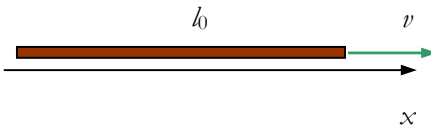
mentre:

$$l_x = l_{x0} \sqrt{1 - \beta^2} = l_0 \cos \alpha \sqrt{1 - \beta^2}$$

pertanto:

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = l_0 \sqrt{\cos^2 \alpha (1 - \beta^2) + \sin^2 \alpha} = l_0 \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \alpha}$$

L'angolo di inclinazione α' risulta dato da:



$$\tan \alpha' = \frac{l_y}{l_x} = \frac{l_0 \sin \alpha}{l_0 \cos \alpha \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Per $\alpha = 30^\circ$ si ha:

$$l = l_0 \sqrt{1 - 3/4 \beta^2} = 1/2 l_0 \sqrt{4 - 3\beta^2}$$

Quando $\beta \rightarrow 0$ (meccanica classica) si ha ovviamente $l \rightarrow l_0$ (non si hanno contrazioni)

Quando $\beta \rightarrow 1$ (dominio ultrarelativistico) si ha: $l \rightarrow 1/2 l_0$



3.9.3 UN OROLOGIO IN MOTO

Esercizio - Un orologio è in moto lungo l'asse delle x di un sistema di riferimento K e rallenta di una quantità Δt nel tempo T (misurato in K). Determinare il corrispondente valore di β .



Dati numerici: si supponga che la variazione relativa sia del 10%.



L'intervallo temporale misurato dall'orologio in moto è un tempo proprio pertanto:

$$T = \frac{T - \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Si tratta ora di risolvere l'equazione rispetto a β .

$$\sqrt{1-\beta^2} = 1 - \frac{\Delta t}{T} \Leftrightarrow 1 - \beta^2 = \left(1 - \frac{\Delta t}{T}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\beta = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\Delta t}{T}\right)^2} = \sqrt{\frac{\Delta t}{T} \left(2 - \frac{\Delta t}{T}\right)}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\Delta t}{T} \left(2 - \frac{\Delta t}{T}\right)} = \sqrt{0.10 (2 - 0.10)} = 0.435$$



3.9.4 UNA SBARRA IN MOTO

Esercizio - Una sbarra in moto lungo l'asse delle x (munito di coordinate) viene misurata con la seguente metodologia: si esegue la misura simultanea in K e si determina una differenza di coordinate in K pari a Δx_1 . Quindi si effettua la misura simultanea secondo il sistema della sbarra e si determina una differenza di coordinate in K pari a Δx_2 . Determinare β in funzione dei dati sperimentali.



Nel primo caso viene determinata la lunghezza definita dalla contrazione di Lorentz, si ha cioè

$$\Delta x_1 = l_0 \sqrt{1-\beta^2}$$

Nel secondo caso dobbiamo riferirci alle trasformazioni di Lorentz e pensare ad una misura simultanea in K' (la sbarra).

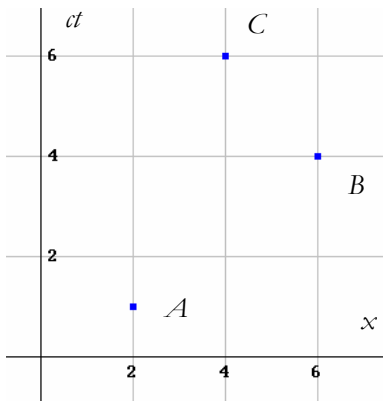
$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ e pertanto: } \Delta x_2 = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ dove } \Delta x' \text{ è stato misurato in K'}$$

e pertanto è la lunghezza propria; abbiamo pertanto:

$$\Delta x_1 = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad \Delta x_2 = \frac{l_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Facendo il rapporto otteniamo:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = 1 - \beta^2 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}}$$



3.9.5 L'INTERVALLO SPAZIO TEMPORALE

Esercizio - Nel diagramma qui a lato sono rappresentate le coordinate di 3 eventi A, B, C che hanno luogo lungo l'asse x di un sistema di riferimento inerziale. Determinare il tempo proprio tra gli eventi A e C; determinare la distanza propria tra gli eventi A e B.



$\mathcal{I}_{AB} = c^2 \Delta t_{AB}^2 - \Delta x_{AB}^2 = \text{costante al variare del sistema di riferimento}$

Nel sistema di riferimento rappresentato si ha:

$$\mathcal{I}_{AB} = 9 - 16 = -7 \text{ m}^2$$

$$\mathcal{I}_{AC} = 25 - 4 = 21 \text{ m}^2$$

Il tempo proprio è quello misurato da uno stesso orologio quello cioè misurato nel sistema di riferimento per il quale $\Delta x = 0$; si ha dunque:

$$T_{AC} = \frac{\sqrt{\mathcal{I}_{AC}}}{c} = \frac{\sqrt{21}}{2.998 \cdot 10^8} = 1.53 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

La distanza propria è quella che si ha nel riferimento in cui i due eventi risultano simultanei:

$$L_{AB} = \sqrt{-\mathcal{I}_{AB}} = \sqrt{7} = 2.65 \text{ m}$$



3.9.6 COME CAMBIA LA ACCELERAZIONE?

Esercizio - Un punto materiale che si muove lungo l'asse x accelera con accelerazione a lungo tale asse. Determinare le componenti della accelerazione lungo gli assi x' e y' di un sistema K' caratterizzato da β .



$$a'_x = \frac{\delta v'_x}{\delta t'} = \frac{\delta v'_x}{\delta t} \frac{\delta t}{\delta t'} = \frac{\delta v'_x}{\delta t} \frac{1}{\frac{\delta t'}{\delta t}}$$

Dobbiamo pertanto calcolare le derivate delle trasformazioni di Lorentz:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ e } t' = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\frac{\delta t'}{\delta t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 - \beta v_x/c)$$

$$v'_x = \frac{\delta x'}{\delta t} \frac{1}{\frac{\delta t'}{\delta t}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (v_x - v) \sqrt{1 - \beta^2} \frac{1}{(1 - \beta v_x/c)} = \frac{v_x - v}{1 - \beta v_x/c}$$

Abbiamo ritrovato con calcoli di analisi la legge di composizione relativistica delle velocità.

$$\frac{\delta v'_x}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t} \frac{v_x - v}{1 - \beta v_x/c} = \frac{a_x(1 - \beta v_x/c) - (v_x - v)(-\beta a_x/c)}{(1 - \beta v_x/c)^2} = \frac{a_x(1 - \beta^2)}{(1 - \beta v_x/c)^2}$$

$$a'_x = \frac{\delta v'_x}{\delta t} \frac{1}{\frac{\delta t'}{\delta t}} = \frac{a_x(1 - \beta^2)}{(1 - \beta v_x/c)^2} \sqrt{1 - \beta^2} \frac{1}{(1 - \beta v_x/c)} = a_x \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - \beta v_x/c)^3}$$

$a'_y = 0$ perché $v'_y = 0$ e la accelerazione diretta come l'asse x non è in grado di modificarla.



Indice analitico

- addizione delle velocità* - 16; legge classica - 4
Bridgman - 11; operazionismo - 12
composizione relativistica delle velocità - 1, 14, 15, 16, 42
criteri di semplicità - 4
dilatazione del tempo: rallentamento degli orologi - Vedi
distanza: carattere relativo - 12
effetti del II ordine - 36
effetti del primo ordine - 36
effetto Doppler - 32; asimmetria - 32; in acustica - 32; relativistico - 33; simmetria nel vuoto - 32
Einstein - 4, 5, 8, 9, 10, 27; euristica - 5; innovatore - 6; premio Nobel - 37; sincronizzazione degli orologi - 9; Sottile è il Signore ... - 27
Esercizio: accelerazione - 41; contrazione delle lunghezze - 39, 40; Intervallo spazio temporale - 41; rallentamento degli orologi - 40; sbarra inclinata contrazione - 39
esperimento: di Michelson e Morley - 3; due fulmini - 10
esperimento di Michelson e Morley: effetti del II ordine - 36
etere elettromagnetico - 3, 6
eventi - 8
intervalli: di tipo luce - 29; di tipo spazio - 28; di tipo tempo - 28
intervallo di tempo: carattere relativo - 24
intervallo spazio temporale - 27; definizione - 28
invarianti: teoria degli - 27
legge classica di composizione delle velocità: esame critico - 14
linea di universo: rappresentazione - 29
logica della fisica moderna: citazione - 11
Lorentz - 1, 19, 30, 40; contrazione di - 22; reciprocità delle trasformazioni - 20; trasformazioni di - 19; trasformazioni in forma simmetrica - 27; visualizzazione e della contrazione - 23
lunghezza di riposo - 22
Maxwell - 2; elettromagnetismo - 6
Minkowski - 28
muoni: conferma del rallentamento degli orologi - 25; conferma della contrazione delle lunghezze - 25
orologi: desincronizzazione - 20; sincronizzazione - 8
paradosso del tubo e della sbarra - 33
principi unificatori - 4
principio di relatività - 6
principio metafisico - 6
red shift - 33
Reichenbach: citazione su senso comune - 37

relatività - 2, 4, 5, 9, 17, 37; i fatti - 24; meccanica newtoniana - 35;
previsioni inattese - 6; principio di - 6; ristretta o speciale - 6; un nome
fuorviante - 27

simultaneità: concetto relativo - 10; relatività - 11

sincronizzazione: locale, a distanza - 9

sincronizzazione degli orologi: definizioni equivalenti - 9

sistema di riferimento privilegiato - 2, 3, 4, 6

spazio assoluto - 2, 6

sviluppo della impresa scientifica - 36

tempo assoluto - 8, 12

tempo proprio - 24, 25, 29, 33, 41; definizione - 24

teoria continuista - 19

teorie - 6; assiomatiche - 15; struttura assiomatica - 6

Terrel: contrazione delle lunghezze come rotazione - 23

trasformazioni di coordinate: linearità - 15

trasformazioni di Galileo - 4, 14, 35; errate - 7

trasformazioni di Lorentz: esame e deduzione - 19

universo degli eventi - 29

velocità della luce - 1, 2, 3, 6, 17, 33; carattere limite - 17; costanza - 3;
invarianza - 4; nel vuoto - 1; principio di invarianza - 6; riferimento
privilegiato - 2

vento d'etere - 3

