

- ⌘ Oscillazioni e/o onde
- ⌘ Oscillazioni e grandezze caratteristiche
- ⌘ L'oscillatore armonico
- ⌘ Rappresentazione vettoriale delle grandezze oscillanti
- ⌘ Onde e impulsi
- ⌘ Equazione delle onde e principio di sovrapposizione
- ⌘ Onde e corpuscoli: compatibilità e differenze
- ⌘ Quesiti di fine capitolo
- ⌘ Quesiti dalle Olimpiadi della Fisica
- ⌘ Problemi di fine capitolo

IV.1 Oscillazioni e onde: grandezze tipiche e fenomeni

1.1 Oscillazioni e/o onde?

1.1.1 OSCILLAZIONI NEL TEMPO E OSCILLAZIONI CON PROPAGAZIONE NELLO SPAZIO

I *fenomeni oscillatori* fanno parte della nostra esperienza quotidiana. In alcuni casi le oscillazioni sono assolutamente visibili e non richiedono ulteriori commenti (un corpo pesante sospeso ad una fune e che oscilla in un piano verticale, un corpo pesante appeso ad un elastico o ad una molla).

In altri casi la oscillazione è meno evidente ma altrettanto presente: toccando il cono di cartone di un altoparlante con i polpastrelli percepiamo un movimento ritmico di compressione sul dito. Altrettanto accade se si preme una lama di coltello, o meglio ancora una spatola in acciaio armonico da colorificio, contro un tavolo piano lasciandola sporgere parzialmente. Si osserverà che la lamina (una volta sollecitata) si mette a vibrare e si osserva anche che le vibrazioni sono accompagnate dalla comparsa di un suono. Non preoccupiamoci per ora del suono ¹ e soffermiamoci sulle oscillazioni.

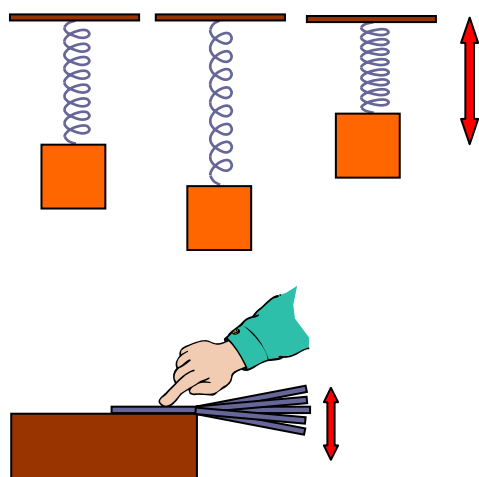
Si tratta di fenomeni che si ripetono in maniera del tutto identica o simile (nel caso delle oscillazioni smorzate). La grandezza che oscilla o che vibra non è necessariamente associabile ad un movimento anche se nella maggioranza dei casi è così. Si hanno oscillazioni senza movimenti apprezzabili nelle oscillazioni di pressione, nelle correnti alternate, nella luce.

In quasi tutti i casi la oscillazione avviene in un *mezzo*, ma esistono fenomeni oscillatori che avvengono anche nel vuoto. Appartengono alla prima categoria le oscillazioni che coinvolgono un mezzo elastico come quelle che si possono osservare da parte di un pezzo di legno che oscilla sulla superficie dell'acqua; appartiene alla seconda categoria la oscillazione di campo elettromagnetico che caratterizza la luce e che non ha bisogno di un mezzo entro cui avvenire; ma se rimaniamo sul terreno delle oscillazioni anche quella della lamina di acciaio armonico non ha bisogno di un mezzo, anzi, nel vuoto la lamina oscilla meglio.

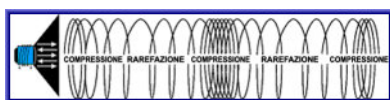
Le *oscillazioni*, tutte le oscillazioni, sono caratterizzate dalla osservazione di un fenomeno fisico che avviene nel tempo in un punto dello spazio (o nell'intorno di un punto).

Ma le oscillazioni quasi sempre danno luogo ad un secondo fenomeno: oltre che avvenire nel tempo esse tendono a propagarsi nello spazio; cioè la oscillazione, istante per istante, tende a trasmettersi ai punti circostanti determinando la comparsa di una *oscillazione che se ne va*, ovvero trasmette energia nello spazio.

¹ Come vedremo il suono è l'effetto delle vibrazioni trasmesse dalla lamina elastica all'aria (anch'essa elastica).



anche utilizzando mezzi poveri è molto semplice produrre **fenomeni di tipo oscillatorio**



quando le oscillazioni vengono generate in un **mezzo** si assiste alla loro propagazione nello spazio, con generazione di **onde elastiche**

Per capire cosa accade riferiamoci ad un semplice esperimento: la generazione di onde circolari sulla superficie dell'acqua in quiete. Se si genera una oscillazione in un punto (per esempio muovendo ritmicamente un dito) si osserva, al passare del tempo, il propagarsi della oscillazione nelle zone circostanti. Tutti i punti alla stessa distanza dal punto sollecitato si mettono ad oscillare sincronicamente e si creano le onde circolari cui siamo ben abituati. Se cessa la sollecitazione le onde precedentemente generate continuano a propagarsi mentre nulla prende più il loro posto.

Il meccanismo di generazione è abbastanza semplice: la tensione superficiale e gli effetti di pressione indotti dalla sollecitazione creano una sollecitazione elastica sulle zone adiacenti che produce nuove oscillazioni.

1.1.2 ESEMPI DI FENOMENI OSCILLATORI E DI FENOMENI ONDULATORI NELLA VITA QUOTIDIANA ED ASPETTI DI INTERESSE FISICO

Sulla base di quanto si è discusso nel paragrafo precedente chiameremo *fenomeno ondulatorio* un fenomeno di natura oscillatoria che si propaga nello spazio.

Ne consegue che un'onda può essere osservata da due distinti punti di vista:

- se si fissa un punto dello spazio si osserva una oscillazione nel tempo evidenziabile anche attraverso una ripresa cinematografica; se si guarda a cosa fanno altri punti vicini si osserverà che anch'essi oscillano, ma in generale lo fanno in anticipo o in ritardo rispetto al primo punto; ciò è in accordo con il fatto che qualsiasi perturbazione trasporta energia in un tempo finito; pertanto *ciò che accade qui ed ora lo ritroviamo là e dopo o prima*.
- se si fissa un particolare istante si osserva nello spazio l'equivalente di una oscillazione evidenziabile attraverso un'istantanea fotografica della situazione. Se però, invece di una fotocamera si utilizza una videocamera si vedranno tutti i punti oscillare in maniera regolare ma non sincronica.

I **fenomeni di natura oscillatoria** si incontrano praticamente in ogni aspetto della vita quotidiana oltre che nella più sofisticata attività di laboratorio. Tutti i processi di andata all'equilibrio sono caratterizzati da *oscillazioni smorzate* dovuti all'azione contemporanea di sollecitazioni di tipo elastico e fenomeni dissipativi. In questi casi si ha sempre una trasformazione di energia cinetica in potenziale (e viceversa) mentre un fenomeno dissipativo tende a far decrescere l'ampiezza delle oscillazioni sino all'equilibrio.

Ancora più diffusi sono i **fenomeni ondulatori** in cui le oscillazioni sono associate alla propagazione nello spazio; un'ampia gamma di fenomeni non immediatamente associabili all'idea di onda si sono rivelati, dopo un'analisi attenta delle loro caratteristiche, come dovuti ad onde; così si parla di onde sonore in acustica, elastiche in geofisica, luminose in ottica, elettromagnetiche nel calore radiante, nelle trasmissioni radio-televisive, nella trasmissione delle informazioni via cavo o nel vuoto, nella diagnostica medica, nella terapia medica radiante e nelle indagini di struttura della materia.

Le onde fanno parte integrante della nostra vita quotidiana, anche quando non le vediamo.

un fenomeno ondulatorio può essere **osservato nel tempo** concentrandosi sul moto dei diversi punti e in quel caso si osservano oscillazioni sfasate, oppure **si può fissare il tempo** (come in una fotografia) e si osserva una istantanea del fenomeno

ciò che individua un'onda come tale non è la apparenza o la classe di fenomeno ma il fatto di presentare un particolare andamento nel tempo e nello spazio; i fenomeni ondulatori sono descritti matematicamente da **equazioni dello stesso tipo**

1.2 Oscillazioni e grandezze caratteristiche

1.2.1 AMPIEZZA, PERIODO E FREQUENZA, FASE

Un *fenomeno oscillatorio* è un fenomeno descritto da una funzione periodica nel tempo, cioè un fenomeno che ad intervalli regolari si ripresenta immutato.

Come si è già detto la grandezza fisica che varia può essere uno spostamento, una pressione, una densità, un campo elettrico o magnetico e persino una temperatura. In ogni caso tale grandezza variabile assumerà ad intervalli regolari un valore massimo; tale valore viene detto *ampiezza della oscillazione*.

Il tempo *minimo* τ tale che $\forall t$ si ha $f(t+\tau) = f(t)$ è detto *periodo della oscillazione* e il suo inverso, cioè il *numero di oscillazioni nella unità di tempo* è detto *frequenza* indicata solitamente dalla lettera greca ν .

Si ha dunque:

$$\tau = \frac{1}{\nu} \quad [\tau] = s = \frac{1}{[\nu]} = \frac{1}{\text{hertz}} \quad (\text{IV.1.1})$$

La funzione matematica che descrive la oscillazione deve come argomento un numero puro che viene detto *fase*.

Per esempio il fenomeno rappresentato dalla legge $p = 2.50 \sin(\omega t)$ ha come ampiezza 2.50 Pa, come periodo il valore τ tale che $\omega\tau = 2\pi$ e cioè

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}.$$

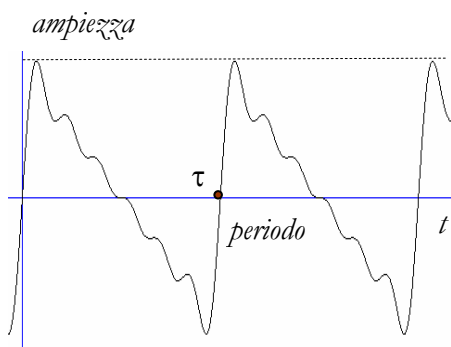
Chi è ω ? Come vedremo studiando le armoniche si tratta di una quantità imparentata con la velocità angolare (per questa ragione la si è indicata con ω). Per ora basta osservare che si tratta di una grandezza dimensionale tale che ωt sia un angolo espresso in radianti e dunque la chiameremo *frequenza angolare*.

1.2.2 ENERGIA ASSOCIATA ALLE OSCILLAZIONI: LE GRANDEZZE CHE LA DETERMINANO

I fenomeni oscillatori sono sempre associati ad un parametro energetico che dipende dalle diverse forme di energia coinvolte nel fenomeno.

Per esempio nel caso delle oscillazioni di una massa sospesa ad una molla si ha l'intervento della energia potenziale elastica, della energia potenziale gravitazionale e della energia cinetica.

Queste non sono le uniche forme di energia possibili. Senza entrare troppo nei dettagli, cosa che sarà fatta analizzando i singoli fenomeni, possiamo però intuire che la energia dipenderà dalla ampiezza di oscillazione² e anche dalla frequenza.



un esempio di fenomeno oscillatorio caratterizzato da una visibile periodicità che consente di individuare il **periodo** e la **ampiezza**

² L'ampiezza delle oscillazioni comparirà al quadrato visto che l'energia potenziale massima dipende dal quadrato della ampiezza. La dipendenza dalla frequenza potrà essere evidenziata nei prossimi paragrafi dopo aver analizzato le caratteristiche energetiche del fenomeno oscillatorio più semplice, il cosiddetto oscillatore armonico.

L'oscillatore armonico

1.2.3 L'EQUAZIONE DEL MOTO E LE GRANDEZZE RILEVANTI

Un *moto armonico* ad una dimensione è un movimento caratterizzato dalla equazione

$$x = X \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{IV.1.2})$$

o da analogo equazione espressa tramite la funzione seno visto che il coseno corrisponde ad una senoide traslata.³

La quantità costante X è detta *ampiezza della oscillazione*, $X \cos \varphi$ è il valore iniziale, $\omega t + \varphi$ è la fase e φ rappresenta la fase iniziale cioè il valore dell'angolo all'istante $t = 0$.

La quantità ω è detta *frequenza angolare* perché ha le dimensioni di una frequenza (s^{-1}) ma la frequenza è moltiplicata per un fattore di normalizzazione (2π) tale che quando $t = \tau$ l'argomento della funzione coseno risulta pari ad un angolo giro (2π).

In effetti se si considerano due istanti t_1 e t_2 tali che $t_2 - t_1 = \tau$ si ha:

$$(\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi) = \omega(t_2 - t_1) = \omega \tau = 2\pi \text{ da cui}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu \quad (\text{IV.1.3})$$

1.2.4 PERCHÉ SI STUDIANO LE OSCILLAZIONI SINUSOIDALI?

Il motivo per cui si studiano con particolare attenzione le oscillazioni sinusoidali è in parte fisico e in parte matematico.

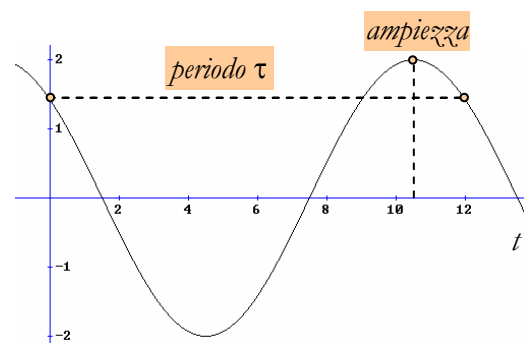
Quando si sovrappongono armoniche di frequenza ed ampiezza diversa le sovrapposizioni possono produrre andamenti differenziati nei quali il grado di regolarità incomincia a diminuire al crescere del numero di elementi che si sommano e al variare delle intensità dei diversi contributi.

Per illustrare quanto si va dicendo si considerino le immagini delle figure qui a lato.

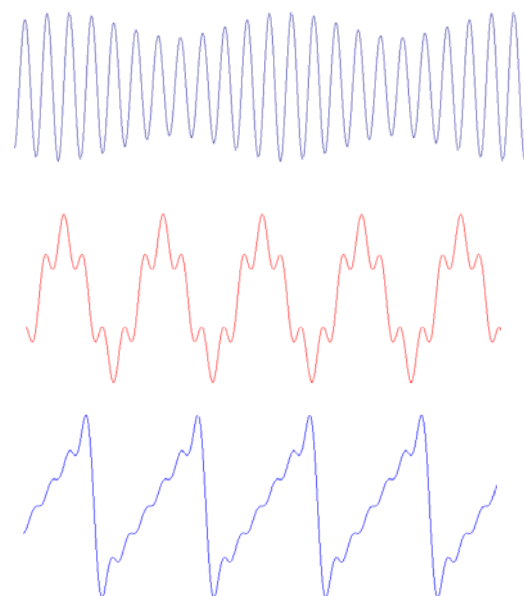
Nella prima di esse vengono sommate tre armoniche di ampiezza diversa le cui frequenze differiscono in più o in meno di una stessa quantità $\delta\omega$. Come si vede si determina una vera e propria modulazione del segnale. Si tratta del principio su cui si basa la trasmissione delle informazioni via radio in *modulazione di ampiezza*. Esiste un segnale portante di frequenza ω cui si sovrappongono segnali contenenti la informazione. Tali segnali determinano dei mutamenti di ampiezza decodificabili dall'apparecchio radoricevente.

Nella seconda di esse vengono sommate 2 armoniche nelle quali la seconda ha una frequenza quintupla della prima e una ampiezza pari a un terzo di essa.

Nella terza vengono sommate sei armoniche di frequenza multipla (1,2,3,4,5,6) di una frequenza base e di ampiezza che decresce come gli inversi delle frequenze. Come si nota, la terza immagine assomiglia, ormai, molto poco ad una senoide eppure è prodotta dalla sovrapposizione di solo 6 armoniche. Cosa accade quando le armoniche diventano molto numerose?



una armonica e i suoi costituenti ampiezza e periodo

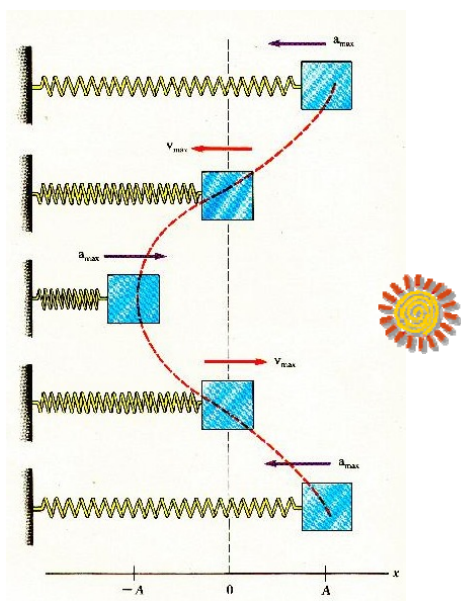


i risultati della sovrapposizione di armoniche di diversa ampiezza e frequenza; la forma d'onda cambia vistosamente ma si individuano subito fenomeni di regolarità sottostante

³ Infatti con le identità di riduzione al primo quadrante si ha: $\sin(x+\pi/2) = \cos x$



Jean Baptiste Fourier (1768 – 1830) padre della analisi armonica; i fisici prediligono le armoniche perché le altre funzioni periodiche si possono ottenere per **sovrapposizione di armoniche**



il **moto armonico semplice** si genera quando un corpo di massa m viene sottoposto all'azione di una forza elastica di costante k . Si producono oscillazioni con frequenza che dipende solo da m e k .

Un teorema di matematica, detto *teorema di Fourier*⁽⁴⁾, ci assicura che qualunque funzione periodica può essere rappresentata efficacemente attraverso la somma di un congruo numero di armoniche di frequenze ed ampiezze opportune.

Dunque, qualsiasi *funzione periodica* deriva le sue proprietà dalle proprietà delle armoniche di cui è costituita. Per questa *buona ragione* i fisici sono affezionati alle armoniche. Si tratta di grandezze semplici da studiare e che recano in sé tutte le informazioni necessarie per studiare gli altri fenomeni periodici più complessi (siano essi luminosi od acustici).

Terminiamo osservando che il teorema di Fourier, che ancora oggi gioca un ruolo notevole negli studi avanzati di analisi matematica, è stato pubblicato nel 1822 all'interno di un testo dedicato allo studio della propagazione del calore, studio nel quale il calore era trattato come una sostanza (*teoria del calorico*). La teoria fisica era sbagliata, ma il teorema matematico no. Succede anche questo nella scienza.

1.2.5 IL MOTO DI UN CORPO SOGGETTO ALL'AZIONE DI UNA FORZA ELASTICA

Un corpo di massa m soggetto all'azione di una forza elastica di costante k nella stessa direzione della velocità si muove sempre di moto armonico, cioè di un moto la cui legge oraria corrisponde ad una sinusoide (eventualmente traslata, a seconda delle condizioni iniziali del moto).

La frequenza e il *periodo* di oscillazione dipendono esclusivamente dal rapporto $\frac{k}{m}$ e per la precisione valgono:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{\nu} \quad (\text{IV.1.4})$$

La posizione, la velocità e l'accelerazione hanno tutte un andamento sinusoidale (ma le sinusoidi sono tra loro sfasate in maniera caratteristica); l'ampiezza di oscillazione dipende dalle condizioni iniziali e in particolare dalla energia del sistema che poi rimane costante durante l'intero movimento.

1.2.6 UN LEGAME CINEMATICO TRA MOTO CIRCOLARE E MOTI SINUSOIDALI IN QUADRATURA

Per dimostrare quanto detto e ricavare le espressioni richieste incominciamo ad osservare che esiste una relazione molto semplice, di origine cinematica, tra il moto circolare uniforme ed un moto rettilineo caratterizzato da legge sinusoidale.

In effetti le due componenti del vettore posizione di una particella in moto circolare uniforme possono essere scritte come:

$$x = r \cos \alpha \quad y = r \sin \alpha$$

mentre la posizione angolare, stante la definizione di velocità angolare, risulterà essere:

⁴ Joseph Fourier (1768-1830), giacobino, docente all'Ecole Polytechnique negli intervalli della carriera amministrativa in periodo napoleonico si occupò a fondo di teoria del calore cercando di descriverne la modalità di propagazione attraverso lo studio delle equazioni differenziali corrispondenti. Si trovò pertanto nella necessità di svilupparne la teoria e, nell'ambito di questi studi, sviluppò delle metodologie di soluzione delle equazioni differenziali che lo portarono ad *inventare* la rappresentazione delle funzioni come somme di infinite funzioni sinusoidali.

$$\alpha = \varphi + \omega t$$

Dove φ rappresenta la posizione angolare iniziale e ω la velocità angolare che è costante e vale $\frac{2\pi}{T}$

A causa del carattere centripeto della accelerazione normale si ha che:

$$a_x = -a \cos \alpha = -\omega^2 r \cos \alpha = -\omega^2 x \quad (\text{IV.1.5})$$

mentre v_x (a causa della perpendicolarità tra v e r) risulta essere pari a:

$$v_x = -v \sin \alpha = -\omega r \sin \alpha \quad (\text{IV.1.6})$$

Ragionamenti analoghi possono essere condotti, se lo si desidera, anche sull'asse y.

Dunque la accelerazione e la posizione sono tra loro proporzionali in ogni istante, hanno segno contrario e la costante di proporzionalità vale ω^2 (determineremo tra poco il suo legame con la massa del corpo oscillante e con la costante elastica).

Anche la velocità, come le altre grandezze varia con legge sinusoidale ma è sfasata rispetto ad esse di $\frac{1}{4}$ di periodo.

Ipotizziamo, per comodità di rappresentazione, che sia $\alpha_0 = 0$ (cioè $\varphi = 0$) ed osserviamo nella figura qui a lato gli andamenti della posizione, della velocità e della accelerazione.

Come si vede la posizione e la accelerazione hanno lo stesso andamento salvo il fatto di essere in opposizione (sfasati di mezzo periodo); invece la posizione e la velocità sono sfasati di $\frac{1}{4}$ di periodo e vanno rispettivamente come il coseno e come $-\text{seno}$. Quando la posizione è nulla la velocità è massima o minima e viceversa.

Sull'asse delle ascisse si può collocare a piacere sia il tempo, sia l'angolo, perché nel moto circolare uniforme queste due grandezze sono proporzionali e dunque si passa dall'una all'altra solo cambiando la scala senza che si modifichi l'andamento.

1.2.7 COME SI SPIEGA IL MOTO ARMONICO

Ritorniamo ora al punto di vista dinamico ed applichiamo alla nostra particella di massa m la II legge della dinamica; avremo che: $m a_x = -k x$ da cui si ottiene:

$$a_x = -\frac{k}{m} x$$

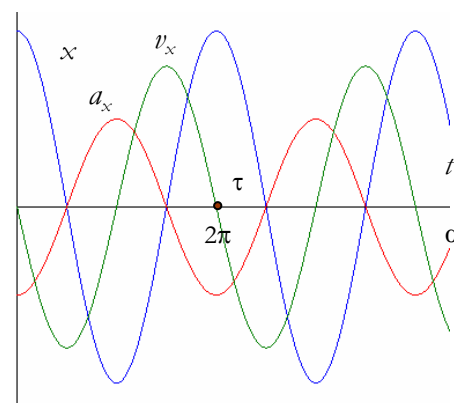
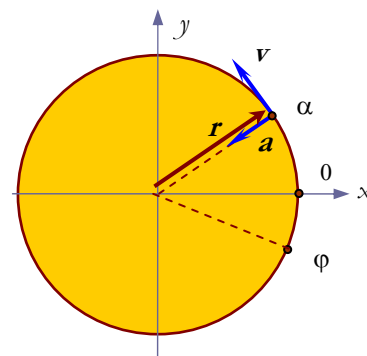
Questa equazione confrontata con la (IV.1.5) ci permette di determinare la dipendenza di ω dai due parametri caratteristici del moto (massa e costante elastica); le due relazioni coincidono a condizione di porre:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (\text{IV.1.7})$$

ma da qui, tenendo presente la definizione di velocità angolare si ottiene la (IV.1.4).

Possiamo pertanto concludere che *una particella di massa m sottoposta all'azione di una forza elastica di costante k si muove come la proiezione del punto mobile di un moto circolare uniforme cioè con una legge oraria corrispondente ad una sinusoidale, più o meno traslata a seconda delle condizioni iniziali e con una frequenza*

$$\text{angolare } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



il legame tra **posizione, velocità e accelerazione** nelle proiezioni di un **moto circolare uniforme**
gli andamenti sono sinusoidali con sfasamenti reciproci di un quarto di periodo





Un movimento con le caratteristiche dette sopra è detto *moto armonico* e qualunque dispositivo fisico che oscilli con le regole dette è chiamato un *oscillatore armonico*.

È bene sottolineare che la *passione* dei fisici per lo studio del moto armonico non deriva da una astratta passione per le sinusoidi o tanto meno per le molle, ma dal fatto che molti fenomeni di natura hanno carattere oscillatorio e tutti i fenomeni oscillatori possono essere studiati come sovrapposizioni di moti armonici di frequenza opportuna.

Dunque le tre equazioni del moto armonico, dopo aver reintrodotta la posizione angolare iniziale φ , si scrivono:

$$x = r \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{IV.1.8.a})$$

$$v_x = -\omega r \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{IV.1.8.b})$$

$$a_x = -\omega^2 r \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{IV.1.8.c})$$

la quantità r è detta *ampiezza della oscillazione* mentre l'altra costante φ è detta *fase iniziale o posizione angolare iniziale*.

Entrambe possono essere determinate assegnando le condizioni iniziali del moto (velocità iniziale e posizione iniziale).

1.2.8 L'ENERGIA DELL'OSCILLATORE ARMONICO

La energia cinetica e l'energia potenziale di un *oscillatore armonico* cambiano nel tempo, mentre rimane costante la energia meccanica. In presenza di effetti dissipativi avremo invece una progressiva trasformazione di energia meccanica in energia interna, le oscillazioni si faranno meno ampie, mentre non varierà la frequenza che dipende esclusivamente da k e m .

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m [\omega r \sin(\omega t + \varphi)]^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Ma, ricordando le formule di bisezione, possiamo ridurre al I grado la espressione goniometrica al quadrato ⁵⁾

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{4} m \omega^2 r^2 [1 - \cos 2(\omega t + \varphi)]$$

La espressione che abbiamo trovato è una senoide di frequenza doppia della precedente e di valore medio pari a $\frac{1}{4} m \omega^2 r^2 = \frac{1}{4} m v_{\max}^2$

Ragionando analogamente per l'energia potenziale si trova che:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k [r \cos(\omega t + \varphi)]^2 = \frac{1}{2} k r^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$U = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Anche questa funzione è una senoide traslata ed ha lo stesso valore medio della precedente.

La energia meccanica (somma della energia cinetica e di quella potenziale) risulta costante perché in virtù della identità fondamentale della goniometria si elimina la dipendenza dal tempo:

⁵⁾ $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$



$$\mathcal{E}_k + U = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = \text{costante} \quad (\text{IV.1.9})$$

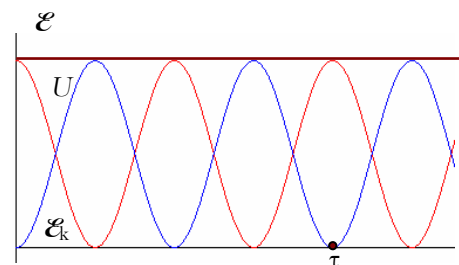
Dunque la energia di una oscillazione armonica è proporzionale al quadrato della ampiezza e della frequenza. Il diagramma qui a lato rappresenta in blu l'energia cinetica e in rosso quella potenziale con la loro somma costante

Qualunque grandezza fisica che cambi nel tempo secondo la legge (IV.1.8) viene chiamata *oscillatore armonico* indipendentemente dalla particolare grandezza soggetta a variazione (pressione, posizione, campo elettrico, campo magnetico, densità, ...).

In un oscillatore armonico la grandezza variabile e la sua accelerazione (in senso lato) sono sempre proporzionali ed opposte.

La costante di proporzionalità determina il periodo di oscillazione. La ampiezza della oscillazione è invece connessa alle condizioni iniziali, cioè, in ultima analisi, alla energia.

La quantità $\omega = 2\pi\nu$ è detta *frequenza angolare*.



l'energia dell'oscillatore armonico è proporzionale al quadrato della ampiezza e al quadrato della frequenza

1.2.9 IL PENDOLO SEMPLICE COME ESEMPIO DI OSCILLATORE ARMONICO

La legge dell'isocronismo del pendolo si deve a Galileo Galilei che oltre ad avere ampiamente usato i pendoli nei suoi ragionamenti sul *piano inclinato* (il moto del pendolo viene immaginato da Galilei come il moto su una successione di piani inclinati di inclinazione via via crescente) riuscì a ricavare una formula approssimata per la determinazione del periodo utilizzando la proprietà citata nel capitolo sulle applicazioni della II legge della dinamica circa il tempo impiegato a percorrere un piano inclinato corrispondente alla corda di una opportuna semicirconferenza.⁶⁾

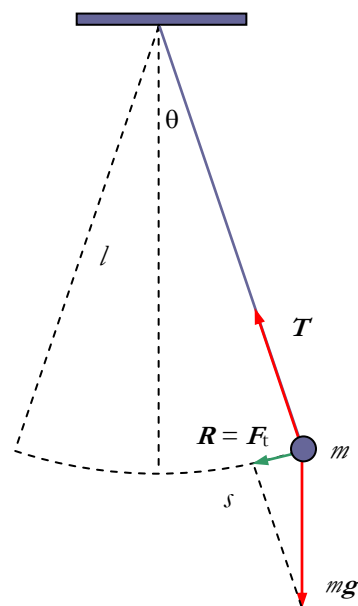
La *legge dell'isocronismo del pendolo semplice* afferma che: *un pendolo semplice, cioè un pendolo formato da una fune di lunghezza l (e di massa trascurabile) cui sia attaccata una massa puntiforme m quando compie piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio, oscilla con un periodo costante, indipendente dalla massa e dalla ampiezza della oscillazione. Tale periodo vale $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.*

La legge precedente verrà dedotta facendo vedere che, nelle condizioni date, il pendolo si muove come se fosse soggetto ad una forza elastica diretta lungo la traiettoria circolare.

Incominciamo con l'osservare che il *pendolo semplice* si muove sotto l'azione congiunta della forza peso (diretta lungo la verticale) e della tensione della fune (diretta come la fune). Queste due forze, sommandosi producono una risultante tangente alla traiettoria (che abbiamo indicato F_t) la cui intensità vale $mg \sin \theta$.

Ma quando l'angolo è piccolo, l'angolo (rapporto tra arco e raggio) e il seno coincidono con approssimazione molto elevata.

Per esempio per $\theta = 0.10000$ (cioè circa 6°) si ha $\sin \theta \approx 0.09983$ e pertanto l'errore è inferiore a 2 parti su 1000.



il moto del pendolo semplice per piccole oscillazioni corrisponde alla equazione dell'oscillatore armonico



⁶ Per la determinazione si veda, per esempio, E. Mach, *la meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, ed. Boringhieri

Dunque, se l'angolo è piccolo si ha, applicando la II legge della dinamica:

$$a_t = \frac{F_t}{m} \approx -g \theta = -g \frac{s}{l} = -\frac{g}{l} s \quad (7)$$

Se confrontiamo la relazione trovata con quella che ci ha consentito di studiare il moto armonico $a_x = -\frac{k}{m} x$ possiamo concludere che, poiché il pendolo è soggetto ad una accelerazione proporzionale ed opposta allo spostamento, si muove di moto armonico lungo la traiettoria circolare e che il suo periodo, applicando la formula del periodo del moto armonico, risulta:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{IV.1.10})$$

Cosa accade quando il corpo non è puntiforme o quando la massa della fune non è trascurabile? Cosa accade al periodo del pendolo semplice quando le oscillazioni non sono di ampiezza trascurabile? Esiste un pendolo basato sulle oscillazioni dovute alla gravità e che sia perfettamente isocrono?

il periodo del pendolo semplice

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



Tutti i problemi citati derivano dalla necessità di far fronte ad un problema pratico di notevole rilevanza: la determinazione della posizione durante un viaggio in mare, quello che si chiama comunemente *fare il punto*.

La posizione di un corpo sulla superficie terrestre è determinata infatti attraverso due coordinate la latitudine (posizione angolare rispetto ad un meridiano di riferimento) e la longitudine (posizione del parallelo su cui ci si trova rispetto ad un parallelo di riferimento).

Mentre la longitudine si può determinare abbastanza agevolmente misurando l'altezza del sole rispetto all'orizzonte nel momento in cui il sole si trova nel punto più alto della sua traiettoria (mezzogiorno), la determinazione della latitudine richiede di sapere che ore sono nel meridiano di riferimento quando nel punto in cui ci si trova sia un'ora prestabilita (per esempio mezzogiorno). Ricordiamo che l'ora locale può sempre essere determinata attraverso la osservazione del sole che a mezzogiorno si trova nel punto più alto della sua traiettoria apparente.



Huyghens diede importanti contributi alla realizzazione di orologi affidabili perché programmaticamente isocroni

Dunque quando una nave del sei settecento parte per un lungo viaggio in mare deve avere a bordo un orologio che, dopo essere stato messo in moto nel punto di partenza, *batta il tempo* con precisione, durante tutto il viaggio. Dalla lettura del suo orario si saprà, in qualunque istante, la differenza tra l'ora locale e l'ora di riferimento e si saprà pertanto di quanti meridiani ci si è spostati rispetto a quello di riferimento.

L'orologio di cui parliamo non potrà essere un pendolo semplice le cui oscillazioni si smorzano e il cui moto risente fortemente degli sbalzi dovuti al rollio della nave (si immagini cosa gli succede durante una tempesta).

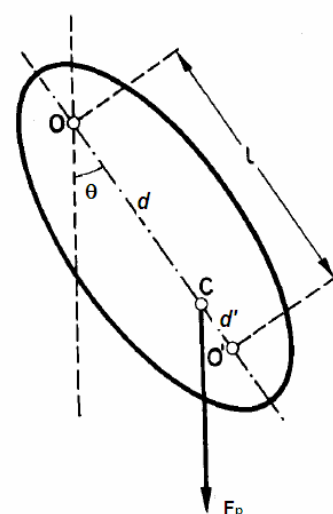
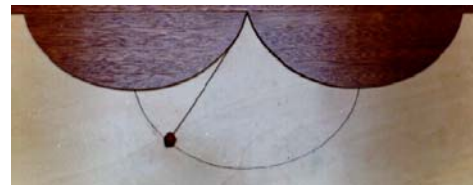
Questo ed altri problemi della stessa natura furono affrontati, prima a livello artigianale, poi a livello scientifico e tecnologico nel corso dei due secoli citati. In particolare è fondamentale il contributo di Christiaan Hu-

⁷ Il segno meno deriva dal fatto che gli archi sono misurati positivi in verso antiorario mentre, con riferimento alla figura la accelerazione ha verso orario

gens (1629-1695) che nel 1673 pubblica un trattato dedicato a quanto detto e nel quale vengono affrontati e risolti, tra gli altri, i seguenti problemi:

- studio dei sistemi macroscopici oscillanti in generale risolto attraverso il concetto di *momento di inerzia*;
- studio e realizzazione dell'orologio isocrono. Si tratta di un orologio a pendolo a traiettoria cicloidale. La cicloide è la traiettoria descritta da un punto di un cerchio che rotoli lungo una retta;
- determinazione di valori di g attraverso misure di periodo dei pendoli;
- spiegazione degli errori di orologi a pendolo trasportati nel nuovo continente attraverso le corrispondenti variazioni della accelerazione di gravità

Huyghens inventa l'orologio cicloidale perfettamente isocrono: il filo viene fatto scorrere lungo una cicloide e ciò produce una traiettoria cicloidale



1.2.10 IL PENDOLO COMPOSTO

Si parla di *pendolo composto* in contrapposizione al pendolo semplice quando un corpo rigido esteso imperniato lungo l'asse z nel punto O viene costretto ad oscillare nel piano xy .

Anche in questo caso, per analogia con il pendolo semplice vale una legge che consente di parlare di isocronia per le piccole oscillazioni.

Se teniamo presente quanto già stabilito per i movimenti di rotazione dei corpi rigidi utilizzeremo gli spostamenti angolari θ , al posto della massa il momento di inerzia e al posto delle forze il loro momento.

Se indichiamo con C il centro di massa e con d la distanza OC , il momento della forza peso F_p vale $m g d \sin \theta \approx m g d \theta$ (nella approssimazione delle piccole oscillazioni). Dunque la costante elastica vale $m g d$ e

$$\text{dunque } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ diventa } \omega = \sqrt{\frac{m g d}{I}}$$

Il momento di inerzia andrà calcolato tramite il teorema di Steiner:

$$I = I_{CM} + m d^2$$

Nel rispetto delle equazioni dimensionali possiamo anche introdurre una nuova misura lineare $l = \frac{I}{m d}$ e otterremo così (come nel pendolo semplice):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\text{Si osservi che } l = \frac{I_{CM} + m d^2}{m d} = \frac{\alpha m b^2 + m d^2}{m d} = d + \alpha \frac{b^2}{d} > d$$

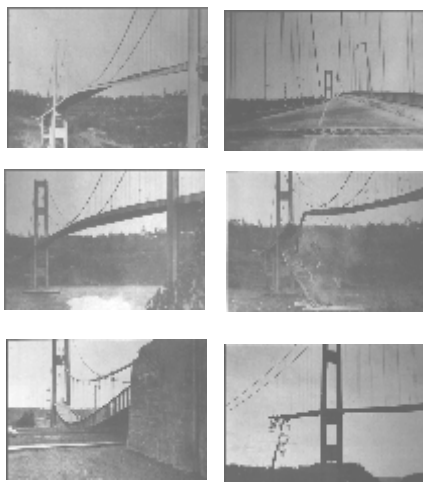
In sintesi, il periodo di un pendolo composto, nella approssimazione delle piccole oscillazioni, vale:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ con } l = \frac{I}{m d} \quad (\text{IV.1.11})$$

Ovvero si comporta come un pendolo semplice la cui massa invece che stare nel centro di massa si trova leggermente più in basso, nel punto O' .

1.2.11 OSCILLAZIONI LIBERE E FORZATE, SMORZAMENTO E RISONANZA

Fino ad ora ci siamo occupati del caso in cui un sistema dotato di una propria frequenza di oscillazione viene lasciato libero di oscillare. In generale qualsiasi struttura, anche molto complessa, essendo realizzata at-



settembre 1940: crollo del ponte Tacoma per **risonanza**; si ha la risonanza quando una azione esterna e periodica ha la stessa frequenza della frequenza propria di oscillazione del sistema

traverso il collegamento di corpi elastici possiede una sua frequenza propria di oscillazione. Ciò vale in particolare per gli alberi delle macchine di rotazione, per i ponti, per i grandi grattacieli ma anche, più semplicemente per una altalena.

Le *oscillazioni libere* in presenza di un fenomeno di smorzamento sono sempre caratterizzate da andamenti di tipo sinusoidale associati ad un termine esponenziale decrescente. Il decremento esponenziale è più o meno rapido a seconda della incidenza energetica del processo dissipativo sulla energia associata alla oscillazione invece la presenza del fenomeno dissipativo non modifica mai la frequenza di oscillazione.

Le oscillazioni smorzate si incontrano nei fenomeni più diversi dalla meccanica all'elettronica.

Consideriamo a titolo di esempio il caso delle automobili. Gli assi di rotazione sono collegati al telaio attraverso un sistema di molle il cui scopo è quello di assorbire la energia connessa agli sbalzi dovuti alle asperità del fondo stradale trasformandola in energia potenziale elastica. Ma oltre che una molla che rende più confortevole il viaggio, serve anche un ammortizzatore che smorzi in un tempo piuttosto breve le oscillazioni. A questo scopo si utilizzano dei pistoni a bagno d'olio.

Come è noto l'altalena è soggetta a forze di smorzamento che tendono ad annullare le oscillazioni, ma le oscillazioni possono essere mantenute o muovendosi ritmicamente con la frequenza propria della oscillazione o facendosi spingere con un periodo uguale o multiplo di quello dell'altalena. Se qualcuno ci spinge a caso, o se chi si trova sull'altalena si muove in modo s coordinato, invece di avere un apporto energetico positivo si ha un peggioramento della condizione di moto.

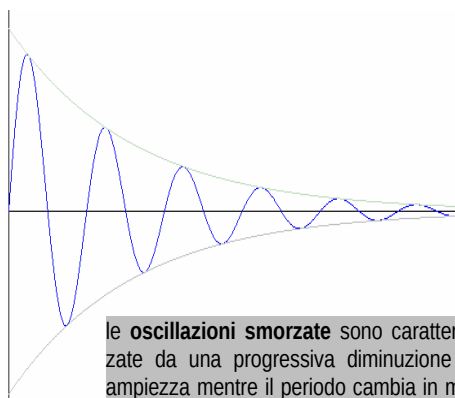
Cosa accade quando un corpo dotato di una propria frequenza di oscillazione viene invece obbligato ad oscillare da una causa esterna variabile periodicamente?

In generale esso tende più o meno rapidamente ad adeguarsi al ritmo della causa esterna. Quando però la causa esterna presenta una frequenza prossima alla frequenza propria del sistema le oscillazioni si fanno rapidamente molto intense e, in assenza di fenomeni dissipativi, tendono ad infinito.

Si tratta del fenomeno della *risonanza* che viene utilizzato o evitato (a seconda dei contesti) nei campi più diversi.

Nella costruzione di ponti ed edifici bisogna assolutamente evitare che un fenomeno naturale quale il vento o il passaggio di automezzi determinino una oscillazione forzata accordata con quella propria del sistema. La storia è ricca di esempi di costruzioni cadute per effetto di cause apparentemente inoffensive (soldati a passo di marcia, condizioni di vento, deboli oscillazioni di origine sismica). Il caso più famoso perché ampiamente studiato e documentato è quello del ponte Tacoma crollato nel settembre 1940 dopo pochi mesi di funzionamento per effetti di risonanza dovuti al vento.

Il fenomeno della *risonanza* è quello che induce ad effettuare periodicamente la equilibratura degli pneumatici delle automobili. L'automobile presenta una propria frequenza di oscillazione e il moto rotatorio delle gomme non equilibrate corrisponde alla applicazione di una vibrazione forzata con una frequenza che dipende dalla velocità angolare delle ruote. Poiché la frequenza propria della automobile viene raggiunta a veloci-



le **oscillazioni smorzate** sono caratterizzate da una progressiva diminuzione di ampiezza mentre il periodo cambia in maniera meno rilevante



gli **ammortizzatori** vengono progettati per dar luogo ad un rapido processo di smorzamento e sfruttano solitamente l'attrito viscoso

tà prossime alle velocità di crociera (100÷120 km/h) se non si interviene sulle gomme, raggiunta quella velocità l'auto entra in risonanza. La equilibratura serve ad attenuare la oscillazione forzata delle gomme rendendo la distribuzione di massa perfettamente simmetrica intorno all'asse di rotazione.

Ma la risonanza è anche alla base del funzionamento degli strumenti musicali o della possibilità degli apparecchi radiotelevisivi di ricevere un segnale di una ben precisa frequenza. L'argomento sarà ripreso in acustica.

Parametri cinematici ed energetici di un oscillatore armonico

Esercizio: Un oscillatore armonico ha massa $m = 0.200$ kg ed è soggetto all'azione di una molla di costante $k = 3.25 \times 10^2$ N/m. L'oscillatore viene lasciato andare da una posizione iniziale $x_0 = 0.125$ m con una velocità iniziale $v_0 = 10.0$ m/s. Determinare, il periodo di oscillazione, la ampiezza delle oscillazioni, la fase iniziale e l'energia del sistema.



Il periodo di oscillazione si trova mediante la (IV.1.4)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.200}{3.25 \times 10^2}} \approx 0.156 \text{ s e dunque } \nu \approx 6.42 \text{ Hz, mentre } \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 40.3 \text{ rad/s}$$

Per determinare la ampiezza e la fase iniziale basta porre $t = 0$ nelle (IV.1.8). Così facendo si ottiene:

$x_0 = r \cos \varphi$ $v_{0x} = -\omega r \sin \varphi$ e facendo il rapporto si ottiene:

$$\tan \varphi = -\frac{v_{0x}}{\omega x_0} = -\frac{10.0}{40.3 \times 0.125} \approx -1.98 \text{ e quindi } \varphi \approx \arctan(-1.98) \approx -1.10 \text{ rad}$$

$$\cos \varphi \approx 0.450 \text{ e dunque } r = \frac{x_0}{\cos \varphi} = \frac{0.125}{0.450} \approx 0.278 \text{ m}$$

La energia può essere determinata calcolando energia cinetica e potenziale all'istante iniziale:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (3.25 \times 10^2 \times 0.125 + 0.200 \times 10.0^2) = 30.3 \text{ J}$$



Equazione di un oscillatore armonico dai parametri energetici e dalle condizioni iniziali

Esercizio: Un oscillatore armonico ha massa $m = 0.350$ kg e all'istante iniziale è caratterizzato da $x_0 = 25.4$ cm e $v_0 = -3.50$ m/s. Sapendo che l'energia meccanica del sistema vale $\mathcal{E} = 23.4$ J determinare l'equazione del moto e la posizione e la velocità all'istante $t = 0.55$ s.



Se utilizziamo le condizioni iniziali con le equazioni (IV.1.8) avremo che: $0.254 = r \cos \varphi$ e $-3.50 = -\omega r \sin \varphi$

mentre $\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$ e pertanto $23.4 = 0.175 \omega^2 r^2$

Si tratta di risolvere il sistema in 3 incognite.

$$\omega r = 11.6 \text{ m/s}$$

$$\sin \varphi = \frac{3.50}{\omega r} = \frac{3.50}{11.6} = 0.303 \quad \varphi = 17.6^\circ = 0.307 \text{ rad} \quad \cos \varphi = 0.953$$

$$r = \frac{0.254}{0.953} = 0.267 \text{ m e } \omega = \frac{11.6}{0.267} = 43.4 \text{ rad/s}$$

L'equazione del moto è dunque: $x = 0.267 \cos(43.4 t + 0.307)$

$$\text{Il periodo della oscillazione vale } \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 0.145 \text{ s}$$

Per $t = 0.55 \text{ s}$ si ha $x = 0.267 \cos(43.4 \times 0.55 + 0.307) = 0.154 \text{ m}$

$$v_x = -\omega r \sin(\omega t + \varphi) = -43.4 \times 0.267 \times \sin(43.4 \times 0.55 + 0.307) = 9.46 \text{ m/s}$$



1.2.12 VALUTAZIONE DEGLI EFFETTI DI SMORZAMENTO SU UN OSCILLATORE ARMONICO

La valutazione dell'andamento dei processi di *smorzamento* così come quello delle oscillazioni forzate non sono stati studiati quantitativamente perché la loro trattazione richiede l'utilizzo di equazioni differenziali che solitamente non sono ancora note ad uno studente del triennio di scuola superiore.⁸

Ciononostante poiché i risultati che si ottengono sono pienamente giustificabili e ben comprensibili li vogliamo riassumere pur non procedendo a una trattazione matematica rigorosa.

Quando un oscillatore armonico è soggetto, oltre che all'azione della forza elastica di costante k all'azione di una forza dissipativa viscosa di costante b si genera un movimento oscillatorio smorzato con andamento esponenziale come nella figura qui a lato.

La legge che governa il fenomeno è allora:

$$m a = -k x - b v$$

e integrando l'equazione differenziale lineare si ottiene ancora

$$x = A_t \cos \omega_b t$$

ma occorrono due precisazioni che stanno in quei due pedici messi a fianco di A e di ω .

- L'ampiezza della oscillazione decresce con andamento esponenziale con un *tempo di rilassamento* τ per cui l'ampiezza ha la espressione

$$A_t = A_0 e^{-t/\tau} \quad \tau = \frac{2m}{b} \quad (\text{IV.1.12})^9$$

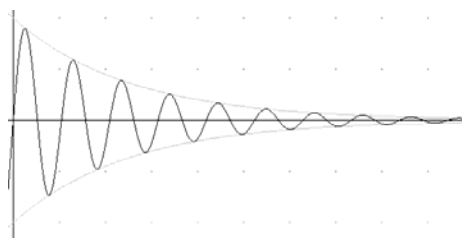
Dunque il tempo di rilassamento è tanto maggiore quanto più grande è la massa oscillante e quanto è minore (come è ovvio) il coefficiente di resistenza viscosa. Come si vede non è invece influenzato dalla costante elastica.

- Anche il periodo di oscillazione è influenzato dal processo dissipativo ed è maggiore di quello libero secondo la relazione:

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{4mk}}} \quad (\text{IV.1.13})$$

⁸ purtroppo e inspiegabilmente; e con la scusa che *la matematica è difficile* si continua a perseguire una politica di ritardo culturale per il nostro paese

⁹ Si ricordi che τ è la intercetta sull'asse dei tempi della tangente alla funzione esponenziale tracciata al tempo 0.



Teoricamente, quando il denominatore va verso lo 0 si può determinare anche lo smorzamento immediato $T \rightarrow \infty$.

Il termine al denominatore, tenuto conto che $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ si può anche scrivere in una forma in cui si confrontano il periodo delle oscillazioni libere e il tempo di rilassamento. Si ottiene infatti, per sostituzione:

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2}} \quad (\text{IV.1.13 bis})$$

Da qui si vede bene, come ci si poteva aspettare, che la variazione di periodo è tanto trascurabile quanto più il periodo di oscillazione libera è piccolo rispetto al tempo di rilassamento.

Poiché l'energia dell'oscillatore è proporzionale al quadrato della ampiezza vale la pena di soffermarci su di essa. Come per tutte le funzioni esponenziali il rapporto delle ampiezze dopo una oscillazione rimane costante:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\exp(-(n+1)T/\tau)}{\exp(-nT/\tau)} = \exp(-T/\tau)$$

Teniamo inoltre presente che dopo ogni tempo di rilassamento l'ampiezza si riduce a $e^{-1} \approx 0.368$ e che la funzione esponenziale ci consente di trovare immediatamente il numero di tempi di rilassamento necessari a raggiungere un risultato voluto.

Il tempo di rilassamento τ , come in tutti i processi ad andamento con decrescita esponenziale, è legato al cosiddetto *tempo di dimezzamento* $T_{1/2}$ cioè al tempo necessario affinché l'ampiezza si riduca a metà.

Se deve essere $A/A_0 = 1/2$ dovrà essere $T_{1/2}/\tau = \ln 2 = 0.693$ dunque possiamo concludere che:

$$T_{1/2} = \ln 2 \tau \approx 0.693 \tau \quad (\text{IV.1.14})$$

Solitamente, in tutti i fenomeni fisici in cui è coinvolto il tempo di dimezzamento, per esempio in quelli legati al decadimento radioattivo, si assume come tempo teorico di azzeramento quello corrispondente a 10 tempi di dimezzamento. Visto che $1/2^{10} = 1/1024$ ciò corrisponde a ridurre il fenomeno a 1/1000 del valore iniziale.

Stima del tempo necessario a decrementare una oscillazione secondo un rapporto dato.

Esercizio: in un fenomeno dissipativo caratterizzato da un tempo di rilassamento $\tau = 2.50$ s si vuol sapere quanto bisogna aspettare affinché l'energia di oscillazione si riduca a 1/100 del valore iniziale.



Se l'energia si deve ridurre a 1/100 l'ampiezza si deve ridurre a 1/10 e basta dunque risolvere l'equazione $\exp(-t/\tau) = 1/10$ ovvero $t/\tau = \ln 10 \approx 2.30 \cdot 2.50 = 5.76$ s.



Oscillazioni smorzate di una sferetta appesa ad una molla immersa in paraffina liquida

Esercizio: Una sfera di acciaio di raggio $r = 2.50$ cm oscilla attraverso una molla di costante elastica $k = 2.64$ N/cm. Il sistema è immerso in paraffina liquida che ne determina lo smorzamento.

Determinare il periodo di oscillazione libero e quello smorzato. Determinare inoltre il tempo di dimezzamento e il tempo convenzionale necessario a smorzare completamente le oscillazioni.



Per risolvere il problema dobbiamo determinare i parametri del sistema che governano i processi oscillatori.

Per determinare ω occorre determinare m mentre per il tempo di rilassamento ci serve la costante relativa all'attrito e per determinarla dovremo utilizzare la legge di Stokes.

$$m = V \delta = \frac{4}{3} \pi r^3 \delta.$$

In tabella otteniamo per δ il valore 8.00×10^3 kg/m³

$$m = \frac{4}{3} \pi 0.0250^3 \times 8.00 \times 10^3 = 0.524 \text{ kg}$$

Il sistema viene smorzato dalla forza viscosa e, in base alla legge di Stokes,

$$F_a = 6\pi\eta r v \text{ pertanto la costante } h = 6\pi\eta r.$$

In tabella si trova per η il valore 1.00 Pa s e pertanto:

$$h = 6\pi\eta r = 6\pi \times 1.00 \times 0.0250 = 0.471 \text{ Pa m s}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2.64 \times 10^2}{0.524}} = 22.4 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Il periodo } T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 0.28 \text{ s}$$

$$\text{Il tempo di rilassamento } \tau = \frac{2m}{h} = \frac{1.048}{0.471} = 2.23 \text{ s}$$

Vediamo ora se esiste una significativa variazione nella frequenza di oscillazione:

$$\text{La quantità che governa il fenomeno è } \frac{T_0}{2\pi\tau} = 0.020$$

$$T/T_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{T_0}{2\pi\tau}\right)^2}} = 1.0002 \text{ pertanto non si hanno variazioni significative di periodo.}$$

$$\text{Il tempo di dimezzamento vale } T_{1/2} = \ln 2 \tau = 1.54 \text{ s}$$

L'oscillazione si può considerare conclusa al tempo $t = 15.4$ s



1.3 Rappresentazione vettoriale delle grandezze oscillanti

1.3.1 LA SOVRAPPOSIZIONE DI ARMONICHE DELLA STESSA FREQUENZA

Come si è già accennato parlando della *passione dei fisici per il moto armonico* le armoniche possiedono alcune proprietà particolari interessanti sia dal punto di vista fisico, sia dal punto di vista matematico.

Due armoniche della stessa frequenza si sovrappongono producendo sempre una armonica della stessa frequenza anche se hanno fasi ed ampiezze diverse.

Per dimostrarlo consideriamo dunque due armoniche della stessa frequenza, ma di fase ed ampiezza diverse e cerchiamo capire quale fenomeno si determini dalla loro sovrapposizione.

Siano dunque $s_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ e $s_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Se calcoliamo la loro somma:

$$s = s_1 + s_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Con lunghi e noiosi passaggi di matematica basati sulla applicazione delle formule di somma e sottrazione (utilizzate prima per espandere e poi per fattorizzare ⁽¹⁰⁾) si potrebbe dimostrare che si ottiene ancora una sinusoidale con fase ed ampiezza diverse.

Noi, sapendo che la questione ammette soluzione, ci chiederemo per quali valori di A e φ la relazione appena scritta risulti una identità, risulti cioè vera per ogni valore di t .

Sia dunque:

$$A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Condizione necessaria affinché una identità sia vera è che essa valga per particolari valori dati alla variabile. In particolare per $\omega t = 0$ si ha:

$$A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = A \cos \varphi$$

Mentre per $\omega t = \pi / 2$, ricordando le relazioni per archi associati: ⁽¹¹⁾

$$A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 = A \sin \varphi$$

Dividendo le due relazioni si ottiene $\tan \varphi$:

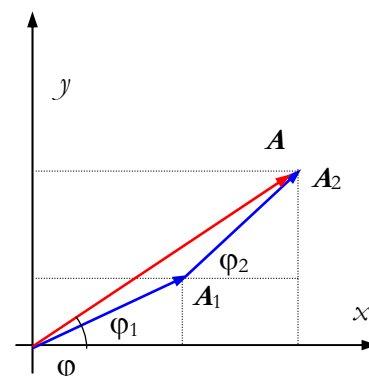
$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (\text{IV.1.15})$$

Se invece si eleva al quadrato e si somma, sfruttando la identità fondamentale della goniometria, si elimina la dipendenza da φ e si può determinare A ; precisamente:

$$A^2 = (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2 + (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 \quad (\text{IV.1.16})$$

Dunque, note le ampiezze e le fasi delle armoniche componenti, si trovano la ampiezza e la fase della loro somma.

Le due relazioni trovate sono complicate da ricordare, ma se osserviamo con attenzione i risultati trovati scopriremo un aspetto che ci consente



le armoniche **si compongono** con le regole del **calcolo vettoriale** e ciò consente di semplificare i calcoli relativi alla sovrapposizione di armoniche

¹⁰ Si tratta di un istruttivo esercizio di goniometria, poco interessante dal punto di vista fisico, ma utile per la acquisizione di una discreta autonomia nel calcolo matematico. Ne consigliamo pertanto la esecuzione.

¹¹ $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin \alpha$



di evitare la loro memorizzazione e che ci consentirà di effettuare molto rapidamente la sovrapposizione di armoniche.

I valori trovati corrispondono esattamente alle leggi di composizione del calcolo vettoriale. Considerati due vettori $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ sfasati di φ_1 e φ_2 il vettore somma $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ ha come componenti proprio $A_x = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2$ e $A_y = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2$, mentre $\tan \varphi = A_y / A_x$.

Detto altrimenti il calcolo relativo alla sovrapposizione di armoniche si effettua con le stesse regole di calcolo della composizione vettoriale come in figura.

Esempio di composizione di armoniche

Esercizio: Determinare l'effetto della sovrapposizione delle due armoniche $a_1 = 3.00 \cos(2.5t + 1.25)$ e $a_2 = 2.00 \cos(2.5t + 2.47)$



Poiché le due armoniche hanno la stessa frequenza è possibile comporre con le regole del calcolo vettoriale.

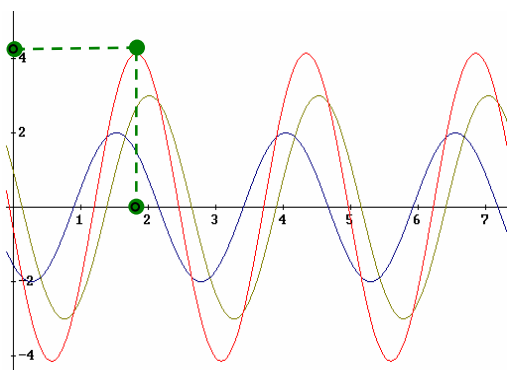
$$a_x = 3.00 \times \cos 1.25 + 2.00 \times \cos 2.47 = -0.6197$$

$$a_y = 3.00 \times \sin 1.25 + 2.00 \times \sin 2.47 = 4.0914$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4.138$$

$$\cos \varphi = \frac{a_x}{a} = -0.1498 \quad \varphi = 1.72$$

Nella figura qui a lato sono state rappresentate le due armoniche, la loro somma (in rosso) oltre che (in verde) i due punti che corrispondono ai valori della ampiezza e della fase iniziale che abbiamo determinato per via vettoriale.



sovrapposizione di due armoniche di uguale frequenza e diversa fase ed ampiezza

1.3.2 LA SOVRAPPOSIZIONE DI N ARMONICHE DELLA STESSA AMPIEZZA ED EGUALMENTE SFASATE.

Effettuiamo ora un particolare calcolo; la sovrapposizione di n armoniche tutte della stessa ampiezza e tutte egualmente sfasate l'una rispetto all'altra. Si tratta di un tipo di calcolo utilizzabile per la analisi di numerosi fenomeni di interferenza e di diffrazione di perturbazioni ondulatorie.



La sovrapposizione produce ancora una armonica della stessa frequenza la cui ampiezza risulta però variabile e può addirittura annullarsi. Ciò che determina il risultato è una particolare relazione tra l'angolo di sfasamento α e il numero di armoniche che vengono a sovrapporsi.

Consideriamo dunque n armoniche identiche ed egualmente sfasate di α l'una rispetto all'altra:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= A \cos(\omega t + \varphi) \\ s_2 &= A \cos(\omega t + \varphi + \alpha) \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= A \cos[\omega t + \varphi + (n-1)\alpha] \end{aligned} \right\}$$

Il corrispondente diagramma vettoriale costituisce un poligono regolare aperto ed è pertanto inscritto in una circonferenza. Gli angoli al centro di ogni singolo vettore sono esattamente pari agli angoli di sfasamen-

to dell'uno rispetto all'altro. Per rendersene conto basta considerare due triangoli adiacenti e svolgere semplici considerazioni geometriche.

Il vettore risultante corrisponde ad una corda di lunghezza B e di angolo al centro β . Pertanto, per il teorema della corda sarà:

$$B = 2R \sin(\frac{1}{2}\beta)$$

dove R rappresenta il raggio della circonferenza circoscritta.

I valori di R e di β sono determinabili attraverso semplici considerazioni geometriche.

In effetti $\beta = 2\pi - n\alpha$ e, pertanto

$$\sin(\frac{1}{2}\beta) = \sin(\pi - \frac{1}{2}n\alpha) = \sin(\frac{1}{2}n\alpha)$$

mentre per R basta riferirsi ad uno qualsiasi degli n triangoli isosceli di angolo al vertice α per ottenere

$$A = 2R \sin(\frac{1}{2}\alpha)$$

Tenendo conto di tutto ciò si ottiene alla fine:

$$B = A \frac{\sin(\frac{1}{2}n\alpha)}{\sin(\frac{1}{2}\alpha)} \quad (\text{IV.1.17})$$

Si osservi, a commento del risultato, che (fissato A e α) la ampiezza della risultante può variare da 0 sino a $2R$ a seconda del numero di armoniche che si sommano e può addirittura accadere (quando $n\alpha > 2\pi$) che la poligonale si riavvolga su se stessa.

La ampiezza massima merita di essere evidenziata e risulta pari al diametro, cioè:

$$B_{\max} = \frac{A}{\sin(\frac{1}{2}\alpha)} \quad (\text{IV.1.18})$$

Questa condizione si realizza quando $n\alpha = (2k+1)\pi$ o anche:

$$\alpha = (2k+1) \frac{\pi}{n} \quad (\text{IV.1.19})$$

Se invece $n\alpha = 2k\pi$ cioè

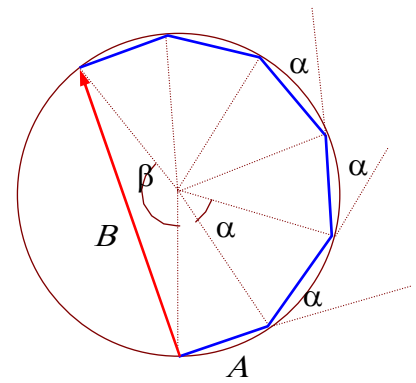
$$\alpha = 2k \frac{\pi}{n} \quad (\text{IV.1.20})$$

si realizza una sovrapposizione che produce ampiezza nulla, cioè la distruzione della armonica.

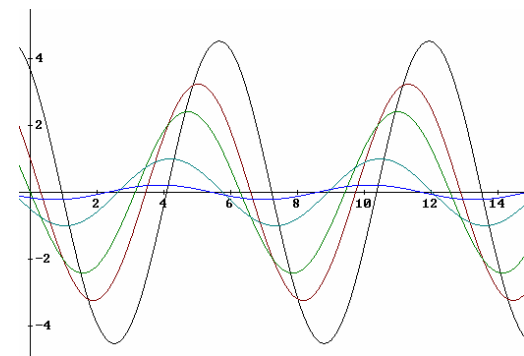
Il primo caso, nei fenomeni ondulatori corrispondente alla cosiddetta *interferenza costruttiva* mentre il secondo alla *interferenza distruttiva*.

Rimane da chiedersi, per dare senso fisico a quanto affermato sino ad ora, da cosa dipenda fisicamente lo sfasamento tra le diverse armoniche che si sovrappongono.

Tale sfasamento può essere determinato da due effetti diversi, eventualmente concomitanti: sorgenti multiple di armoniche caratterizzate da differenza di fase nei processi di generazione delle armoniche stesse oppure, nel caso delle onde, differenza nel percorso seguito dalle armoniche sino al punto in cui vengono fatte sovrapporre. Infatti la differenza di percorso si trasforma nel caso di percorsi diversi in una differenza di fase.



Composizione di n armoniche con la stessa frequenza ed ampiezza ed egualmente sfasate le une rispetto alle altre



rappresentazione esemplificativa

sono state sommate 5 armoniche sfasate di α l'una rispetto all'altra con $\varphi = 0$ e sfasamento pari rispettivamente a $\pi/10, \pi/5, \pi/4, \pi/3, 2\pi/5 - 0.02$

Il valore $2\pi/5$ provoca l'interferenza distruttiva e si è scelto come ultimo valore un dato prossimo ad esso (in blu). In questo caso si determina una attenuazione progressiva

Possiamo sintetizzare così i due aspetti sin qui esaminati e che saranno ripresi in diversi punti trattando di fenomeni ondulatori:



- Armoniche della stessa frequenza, ma di diversa ampiezza e fase si compongono con le leggi del calcolo vettoriale. Ciò significa che, nella sovrapposizione di due armoniche, potremo avere una armonica di ampiezza massima quando le due armoniche sono in fase, e che avremo una armonica di ampiezza minima quando sono in opposizione di fase. Al limite quando le due ampiezze sono uguali si determinerà l'assenza di qualsiasi fenomeno.
- Se invece si sovrappongono armoniche della stessa ampiezza ed egualmente sfasate l'armonica risultante ha come ampiezza la lunghezza di una diagonale di un opportuno poligono regolare inscritto in una circonferenza. Il diametro di tale circonferenza ci dà la ampiezza massima possibile che risulta pari a $\frac{A}{\sin \alpha/2}$.

1.4 Onde e impulsi

1.4.1 IMPULSI O ONDE?

Abbiamo già chiarito sul piano qualitativo che con onda intendiamo un fenomeno periodico nel tempo e nello spazio. Ma, dalla definizione che abbiamo appena richiamato, consegue che, se rimanessimo sul piano strettamente matematico, dovremmo ammettere che le onde non esistono visto che non possono esistere fenomeni periodici di durata temporale od estensione spaziale infinite e che trasportino energia finita.

La soluzione è ovviamente di tipo fisico e si basa sul particolare significato che un fisico dà a parole come *durata od estensione infinita*.

Per un fisico ciò significa che la ripetizione del fenomeno è sufficientemente elevata e cioè l'intervallo temporale che lo caratterizza è molto maggiore del periodo.

Questa precisazione ci porta ad introdurre la distinzione tra *onda* e *impulso*.

L'impulso è un particolare fenomeno, non necessariamente periodico e solitamente di breve durata, che trasporta energia nello spazio e nel tempo. L'onda, non necessariamente infinita, è un fenomeno per il quale si possa prescindere da problematiche di inizio e di fine nel corso del processo.

Così se consideriamo una fune di teleferica di quelle che si trovano in montagna per il trasporto a valle di piccoli carichi e produciamo con una pietra delle sollecitazioni di percussione produrremo degli impulsi per i quali osserveremo fenomeni di riflessione ripetuta da parte degli estremi e potremo calcolare la velocità di propagazione dalla osservazione dell'intervallo temporale tra impulso prodotto e impulso riflesso. Gli impulsi non saranno esaminati ulteriormente.

Le onde, o meglio i treni d'onda, sono fenomeni periodici che si propagano nello spazio e nel tempo e che pur presentando un inizio ed una fine sono caratterizzati da una ripetitività estesa ed osservabile.

1.4.2 ONDE LONGITUDINALI E TRASVERSALI

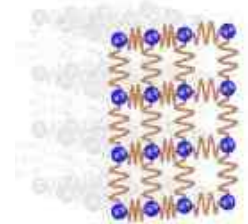
Le *onde* possono essere classificate in longitudinali o trasversali a seconda che la grandezza oscillante compia oscillazioni nella direzione di propagazione o nella direzione ortogonale ad essa.

Appartengono alla prima categoria, per esempio, le onde sonore, caratterizzate da onde di pressione nelle quali la sollecitazione è diretta come la velocità di propagazione.

Appartengono alla seconda categoria le onde elastiche che si propagano nei solidi e tutte le onde elettromagnetiche.

- La necessità di sottolineare la trasversalità o longitudinalità di un'onda elastica è legata al fatto che le loro proprietà, a partire dalla velocità di propagazione, sono strettamente dipendenti dalle caratteristiche del mezzo in cui avviene il fenomeno.
- Le onde elastiche trasversali si propagano solo nei solidi.
- Nel caso delle onde sismiche, normalmente utilizzate per indagare la struttura interna della Terra, la presenza o meno di un'onda riflessa o rifratta di tipo longitudinale o trasversale fornisce informazioni sulle

onda o impulso? E' una questione di durata del fenomeno confrontato con il periodo



modello tridimensionale di mezzo elastico



modello tridimensionale di onda longitudinale



modello tridimensionale di onda trasversale



caratteristiche della discontinuità nella struttura terrestre responsabile dell'evento osservato.

1.4.3 ONDE POLARIZZATE

La polarizzazione è una particolare proprietà delle onde trasversali. Una onda longitudinale può avere una sola direzione di oscillazione; invece una onda trasversale, per definizione, può averne infinite perché la perpendicolare ad una direzione definisce un intero piano e in un piano si possono avere infinite direzioni.

Un'onda *polarizzata* è un'onda trasversale per la quale la direzione di propagazione e quella di oscillazione definiscono un piano detto piano di polarizzazione ovvero un'onda per la quale, se si esegue una fotografia nello spazio, l'onda stessa giace integralmente in un piano.

Se si considera una fune fissata ad un estremo e si muove l'altro estremo con legge armonica sempre nella stessa direzione si produce un'onda polarizzata. Se invece il movimento armonico della mano avviene secondo direzioni qualsiasi si produce una onda trasversale non polarizzata.

La *polarizzazione* viene studiata per diverse ragioni:

- perché se un'onda risulta polarizzabile essa è sicuramente trasversale; la questione sembra irrilevante ma nelle vicende dell'ottica ha giocato un ruolo essenziale; infatti la luce è polarizzabile e pertanto se ne deduceva che il vuoto (per trasmettere un'onda trasversale) doveva avere le caratteristiche di un solido con un elevatissimo modulo di Young. Tutta la vicenda dell'esistenza dell'etere si è giocata a partire da questa faccenda.
- perché esistono fenomeni naturali caratterizzati dalla capacità di produrre onde polarizzate (per esempio la luce riflessa risulta essere polarizzata); le lenti polaroid negli occhiali da sole vengono usate perché riescono a tagliare la componente riflessa
- perché i campi magnetici sono in grado di far ruotare il piano di polarizzazione delle onde luminose; questo fenomeno è stato scoperto da Faraday e qualche decennio dopo ha costituito un indizio a favore delle teorie che tendevano a ricondurre la luce ad un'onda elettromagnetica.
- perché la luce polarizzata può essere un ottimo strumento di analisi delle strutture cristalline e delle soluzioni.

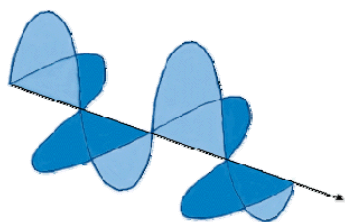
1.4.4 FASE E FRONTE D'ONDA

Quando un'onda armonica si propaga nello spazio esistono delle regioni di spazio caratterizzate tutte dalla stessa fase. Si tratta cioè di regioni in cui la perturbazione energetica si sta propagando sincronicamente. Tali regioni sono dette *fronti d'onda*.

I fronti d'onda hanno forme e caratteristiche diverse a seconda del tipo di onda.

Nel caso delle onde sonore generate da una sorgente puntiforme i fronti d'onda sono delle sfere concentriche e l'ampiezza dell'onda associata al fronte d'onda tende a diminuire man mano che l'onda si propaga perché la stessa energia va a distribuirsi su superfici sempre più grandi.

Nel caso delle onde di superficie generate su una superficie liquida piana i fronti d'onda sono circonferenze.



Un esempio di onda trasversale polarizzata con campo elettrico e campo magnetico tra loro ortogonali

un **fronte d'onda** è una regione di spazio in cui punti oscillano in fase

Nel caso delle onde su una fune i fronti d'onda sono dei punti; essi sono invece dei piani nel caso di onde sferiche quando ci si trova a distanza molto elevata dalla sorgente.

1.4.5 VELOCITÀ DI FASE E VELOCITÀ DI GRUPPO

Un ultimo concetto rilevante nella discussione generale sulle onde è quello che porta a distinguere tra *velocità di fase* e *velocità di gruppo*.

Nel caso delle onde armoniche la velocità di propagazione dipende dal mezzo ed è ben definita nel caso di mezzi omogenei. Ma tale velocità dipende anche, seppur debolmente dalla frequenza e ciò porta al fenomeno della dispersione su cui si basa la capacità dei prismi ottici di scomporre la luce nelle sue componenti monocromatiche.

Si chiama *velocità di fase* di un'onda armonica di ben definita frequenza ¹² la velocità di propagazione di quest'onda.

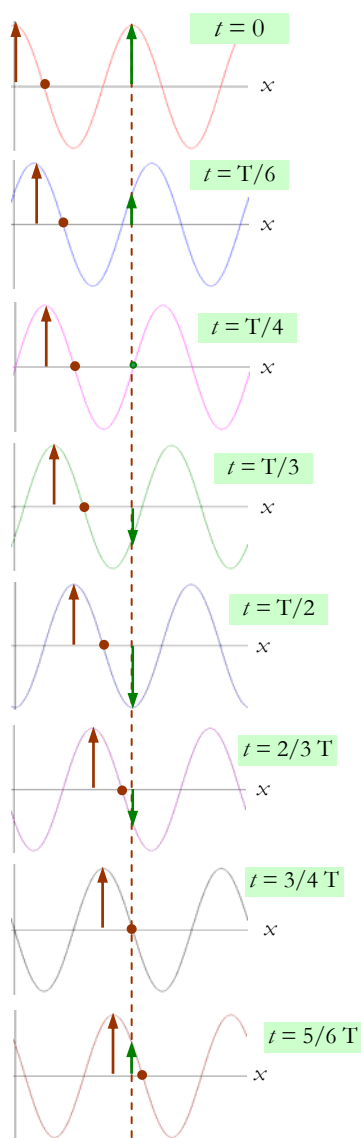
Se si considera un'onda non armonica o un impulso si ha a che fare con un fenomeno fisico che trasporta energia ad una ben precisa velocità detta *velocità di gruppo*. Tale velocità è in generale diversa dalla velocità di fase; per questa ragione, nel corso della propagazione, l'onda si deforma.

Infatti, in base al teorema di Fourier l'onda non monocromatica risulta composta da una serie di armoniche ciascuna con velocità leggermente diversa. Pertanto se nel punto P e all'istante t l'onda ha una certa forma in un punto P' all'istante $t + \Delta t$ le diverse armoniche si sommeranno con fasi diverse e ciò produrrà una diversa forma del segnale. Questa è una ulteriore ragione a favore della opportunità di privilegiare lo studio delle armoniche.

la **velocità di fase** è tipica di un'onda monocromatica; la **velocità di gruppo** indica la velocità di propagazione di un fenomeno ondulatorio non monocromatico

¹² Poiché la frequenza in ottica si associa al colore le onde di ben definita frequenza vengono dette *monocromatiche* cioè di eguale colore anche quando non si tratta di onde luminose.

1.5 Equazione delle onde e principio di sovrapposizione



un'onda si propaga nel verso dell'asse x ed essa viene fotografata ad intervalli regolari; si osserva sia l'oscillazione in uno stesso punto (freccia verde) sia il trasferimento con ritardo della sollecitazione (freccia e punti marroni)

lunghezza d'onda, numero d'onda ed equazione delle onde

$$A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = A \cos (\omega t - k x)$$



1.5.1 L'EQUAZIONE DELL'ONDA ARMONICA AD UNA DIMENSIONE

Per non appesantire inutilmente la trattazione riferiremo il nostro studio al caso delle *onde monocromatiche ad una dimensione* cioè al caso di onde che si propagano lungo una retta e la cui intensità, se si prescinde dai fenomeni di attenuazione dovuti all'assorbimento energetico da parte del mezzo, non cambia nel tempo e nello spazio.

Consideriamo dunque una retta orientata x e supponiamo che l'origine sia caratterizzata da una armonica di equazione:

$$s = A \cos \omega t^{13}$$

Se indichiamo con $f(x, t)$ la generica funzione che fornisce il valore di s nei diversi punti ai diversi istanti dovremo tener conto del fatto che nella ipotesi per cui l'onda si propaga nel verso positivo dell'asse x con velocità:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

dovrà esserci un ritardo nella percezione del fenomeno (ciò che si ha qui ed ora è avvenuto nell'origine all'istante $t - \Delta t = t - \frac{x}{v}$).

Pertanto:

$$s(x, t) = s\left(0, t - \frac{x}{v}\right) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

Ma $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e pertanto l'argomento della funzione coseno si scrive anche $\omega t - \frac{2\pi}{T} \frac{x}{v}$.

Ma la quantità $v T$ che corrisponde allo spazio percorso dall'onda nel tempo di un periodo è detta *lunghezza d'onda* λ e si ha pertanto:

$$\lambda = v T = \frac{v}{\nu} \quad (\text{IV.1.21})$$

Un secondo termine relativo alle onde e particolarmente utilizzato dai fisici è il cosiddetto *numero d'onda* k :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{\omega}{v} \quad (\text{IV.1.22})$$

Se si utilizzano le due costanti k e λ la equazione delle onde può dunque essere scritta in una delle forme seguenti:

$$s(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

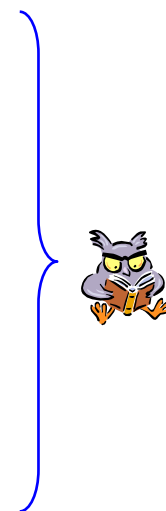
$$s(x, t) = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (\text{IV.1.23})$$

$$s(x, t) = A \cos (\omega t - k x)$$

¹³ Per non appesantire inutilmente e senza vantaggi la trattazione supponiamo che sia nulla la fase iniziale.

Le equazioni appena presentate sembrano particolarmente complesse da ricordare ma si prestano ad una semplice memorizzazione; basta tenere presenti i seguenti elementi:

- La costante moltiplicativa della funzione goniometrica è l'ampiezza
- L'argomento della funzione goniometrica deve essere un numero puro espresso in radianti e deve contenere un termine temporale e uno spaziale
- I due termini hanno lo stesso segno quando l'onda si propaga in verso contrario all'asse mentre è presente un segno meno sul termine spaziale quando la propagazione è in verso opposto all'asse
- Il termine spaziale va sempre rapportato con la grandezza spaziale dell'onda (la lunghezza d'onda), mentre quello temporale va rapportato al termine temporale dell'onda (periodo). Entrambi i termini vanno moltiplicati per 2π per ottenere un dato in radianti.
- Se non si desidera far comparire il fattore 2π basta operare con la frequenza angolare e con il numero d'onda.



Nel caso in cui si volesse introdurre una fase iniziale diversa da zero basta aggiungere nell'argomento della funzione un termine angolare additivo.

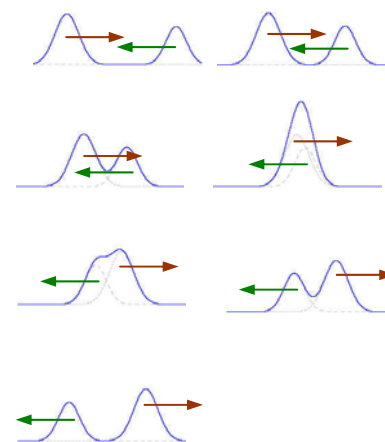
1.5.2 IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Le onde, nella maggioranza dei contesti ¹⁴, possiedono una proprietà nota come *principio di sovrapposizione*, che può essere sintetizzata dicendo che *le onde si attraversano senza disturbarsi*.

Detto in maniera più completa e precisa il principio di sovrapposizione afferma che le onde si sovrappongono punto a punto sommando i rispettivi valori istantanei e che, dopo essersi sovrapposte, proseguono indisturbate la loro propagazione nelle direzioni originarie.

E' questa la ragione per cui è possibile, anche in un contesto in cui onde sonore di intensità, forma e frequenza diversa si sovrappongono, percepire alcune di esse in maniera distinta senza effetti distruttivi prodotti dalle sovrapposizioni.

In un contesto ancora più generale basta riflettere a cosa accadrebbe di tutte le trasmissioni radiotelevisive se le diverse onde elettromagnetiche non godessero di una sorta di autonomia reciproca. Invece di uno spazio ricco di informazione avremmo solo un indistinto rumore frutto della somma di tutte le trasmissioni che arrivano in una certa zona.



un esempio di sovrapposizione tra impulsi

¹⁴ Il principio di sovrapposizione non vale quando le onde si propagano entro mezzi materiali con intensità così elevate da modificare le caratteristiche del mezzo. Il caso della *ottica non lineare* e i comportamenti di frontiera delle onde non saranno esaminati in questo testo.

1.6 Onde e corpuscoli: compatibilità e differenze

1.6.1 CHE PROBLEMA C'È?



il mondo è fatto di onde o di corpuscoli?

Chi ci legge avrà già sentito parlare almeno una volta del *dualismo ondulatorio corpuscolare* riferito alla luce: la luce è fatta di onde o di particelle?

Si tratta di una questione iniziata come *dibattito sui massimi sistemi* al sorgere della scienza moderna che si è rivelata però, alla lunga, una questione molto seria, una di quelle faccende che ci aiutano a capire le *stranezze della scienza fisica*.

Si affronta un problema, ci si fa delle domande, si inventano esperimenti per rispondere alle domande, gli esperimenti forniscono risposte apparentemente conclusive, ma il dibattito non si conclude. La natura si rivela più ricca e complessa di come il senso comune non lasciasse immaginare.

Le onde e i corpuscoli sono compatibili con due fenomeni abbastanza comuni: la riflessione e il cambiamento di direzione quando si cambia mezzo di propagazione (rifrazione), ma hanno anche molte altre *cose incompatibili*.

Le onde sono estese e i corpuscoli sono concentrati, le onde si sovrappongono e i corpuscoli si scontrano, le onde quando incontrano un ostacolo riescono parzialmente ad aggirarlo (diffrazione) mentre i corpuscoli lasciano ombre nette, le onde possono sovrapporsi in maniera tale per cui $1 + 1$ faccia da 0 a 4 mentre per i corpuscoli $1 + 1$ fa sempre 2.

Allora non è poi tanto strano chiedersi se il suono o la luce siano fatti di onde o di corpuscoli e come si faccia a decidere?

La risposta iniziale fu che si trattasse di onde. Ci pare poi del tutto strano chiedersi se un atomo o un elettrone sia un corpuscolo o un'onda perché ci siamo abituati a pensare ai costituenti del mondo microscopico come ad oggetti, cioè a corpuscoli.

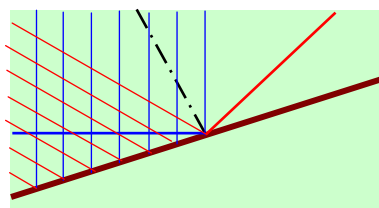


Eppure in queste domande non c'è nulla di strano perché appena si è incominciato ad interrogare la natura sulla struttura del mondo microscopico è emersa una realtà diversa. I micro oggetti (e i costituenti elementari della luce con essi) non sono né onde né corpuscoli.

Essi *si comportano come entrambe le cose* ma non in modo imprevedibile: la realtà microscopica soggiace a leggi e richiede concetti che non sono direttamente analizzabili con le leggi, i concetti, i modi di percepire e di pensare che ci portiamo dietro sulla base delle nostre esperienze primordiali; *il pensiero nasce dalla esperienza ma non dobbiamo commettere l'errore di identificare l'esperienza solo con la percezione del nostro primitivo sistema sensoriale*.

1.6.2 RIFLESSIONE E RIFRAZIONE

La riflessione avviene quando un'onda o un corpuscolo che si stanno propagando in un mezzo (eventualmente nel vuoto) arrivano al confine. Se decidiamo di descrivere il corpuscolo attraverso il vettore velocità e l'onda attraverso la direzione di propagazione del fronte d'onda si ha in entrambi i casi una deviazione dalla direzione originaria in cui si conservano gli angoli formati con la perpendicolare alla superficie di separazione.

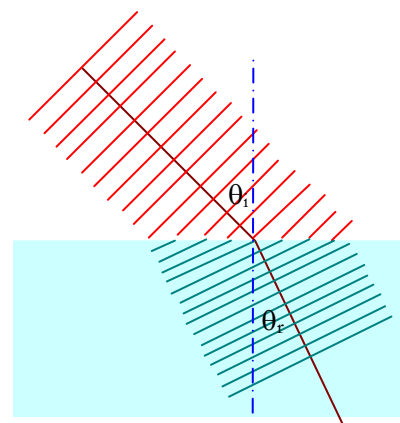


nella riflessione si conservano gli angoli

Nel caso dei corpuscoli la spiegazione si basa sulla conservazione della quantità di moto e sulle leggi dell'urto elastico; nel caso delle onde la spiegazione è più complessa e riguarda problematiche di continuità alla superficie di separazione. Comunque fenomeni tipicamente corpuscolari quali il gioco del biliardo e fenomeni tipicamente ondulatori come le onde di superficie di un liquido rispettano entrambi questa legge.

La rifrazione è caratterizzata essenzialmente da un cambiamento di direzione che avviene in corrispondenza della superficie di separazione tra due mezzi entro i quali sia le onde, sia i corpuscoli siano dotati di velocità diverse.

La legge che regola il fenomeno sostiene che al variare dell'angolo rimanga costante il rapporto tra i seni degli angoli di incidenza e di rifrazione. Ma nei due casi viene dato un significato diverso a questa costante. In un caso si tratta del rapporto delle due velocità, mentre nell'altro si tratta del rapporto inverso.



nella rifrazione rimane costante il rapporto dei seni degli angoli, cambiano la direzione e la distanza tra i fronti d'onda

1.6.3 LA DIFFRAZIONE

La *diffrazione* è un fenomeno tipicamente ondulatorio e consiste nella capacità delle onde di propagarsi al di là degli ostacoli cioè di seguire traiettorie non rettilinee quando si tenta di delimitare il campo d'azione dell'onda.

I corpuscoli invece tendono a dar luogo ad ombre nette come conseguenza dell'inerzia che li porta a propagarsi secondo traiettorie rettilinee nei mezzi omogenei.

L'elemento cruciale da prendere in considerazione nel caso della diffrazione è il rapporto tra la lunghezza d'onda dell'onda considerata e la dimensione dell'oggetto che ne delimita il percorso.

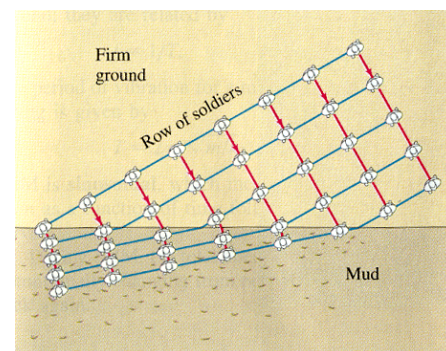
Quando questo rapporto è $\ll 1$ la diffrazione è del tutto trascurabile mentre il fenomeno diventa via via più rilevante quanto più la lunghezza d'onda diventa comparabile o addirittura maggiore delle dimensioni dell'oggetto.

Nel caso delle onde elastiche, e in particolare di quelle sonore, la diffrazione è la responsabile della possibilità che abbiamo di percepire i suoni anche quando essi sono schermati da ostacoli. In quel caso tutti gli spigoli producono fenomeni significativi di diffrazione e l'onda risulta percepibile anche nelle zone d'ombra.

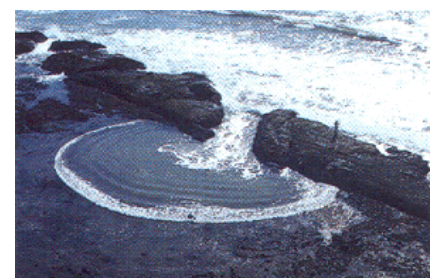
Nel caso delle onde luminose la diffrazione è più difficile da osservare a causa dei bassi valori della lunghezza d'onda della luce visibile ma sono imputabili ad essa le iridescenze delle bolle di sapone o, per parlare di oggetti ormai di uso comune, quelle prodotte dai Cd-Rom quando vengono esposti alla luce bianca. La teoria ondulatoria alla base di questo fenomeno oltre che qualche elemento di natura quantitativa saranno esposti nei prossimi capitoli.

1.6.4 L'INTERFERENZA E LE CONDIZIONI DI COERENZA DELLE SORGENTI

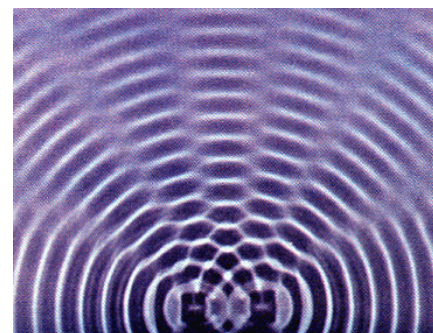
La *interferenza* può essere considerata la regina dei fenomeni ondulatori. Si tratta del fenomeno in base al quale onde che possiedano opportune caratteristiche di regolarità si sovrappongono dando luogo ad un risultato non ondulatorio.



al cambio di velocità anche i soldati in marcia subiscono la rifrazione per mantenere l'allineamento



diffrazione di onde con fronte d'onda rettilineo sull'acqua oltre una fenditura



interferenza di onde circolari in acqua



frange di interferenza in luce blu; la interferenza produce stazionarietà e richiede coerenza nelle sorgenti

sorgenti coerenti: conservano nel tempo la differenza di fase e sono caratterizzate da perfetta monocromaticità; il laser è una sorgente artificiale perfettamente coerente



E' tipico delle onde dar luogo a propagazione di energia; nel caso della interferenza la sovrapposizione di *cose che si propagano* produce un *fenomeno stazionario*, cioè un fenomeno nel quale la propagazione non ha più luogo.

L'interferenza possiede inoltre un'altra caratteristica: esistono zone dello spazio in cui essa ha carattere distruttivo, cioè zone in cui $1 + 1 = 0$. Tutto ciò non è in contrasto con la conservazione dell'energia perché in altre zone $1 + 1 = 4$ e, in media, $1 + 1$ continua a fare 2.¹⁵

Le caratteristiche di regolarità cui si è accennato sono relative alla costanza della differenza di fase delle onde che si sovrappongono. A decidere gli effetti di interferenza è la differenza di fase tra due onde che si sovrappongono. Se la differenza di fase è pari a π , 3π , 5π , ... due armoniche della stessa ampiezza si sovrappongono dando come risultato zero. Se tale differenza di fase si conserva nel tempo la somma continuerà a fare zero e avremo una interferenza distruttiva.

Se le sorgenti che producono le onde non hanno la stessa frequenza questa condizione è impossibile perché la differenza di fase cambierà nel tempo essendo dipendente dalla frequenza. Se le sorgenti hanno la stessa frequenza, la differenza di fase, nei diversi punti verrà a dipendere solo da quanta strada hanno fatto le due onde e pertanto avremo diverse zone di interferenza distruttiva (oltre che costruttiva).

Ma se una delle sorgenti, improvvisamente smette di emettere anche per un attimo, e fa questa operazione in modo casuale, non riusciremo ad osservare interferenza perché le zone di interferenza distruttiva continueranno a cambiare posizione.

Abbiamo citato questo fatto perché mentre è piuttosto semplice osservare l'interferenza con onde sonore, onde sulle funi o onde di superficie sui liquidi, è invece difficile osservare l'interferenza nel caso delle onde luminose. Infatti la luce viene emessa dagli atomi e questi emettono luce per periodi molto brevi e quando decidono loro. Si condensa tutto ciò dicendo che le *sorgenti* di luce *non sono coerenti* cioè non sono in grado di produrre onde monocromatiche e in grado di conservare nel tempo la differenza di fase.

Per questa ragione il dibattito sul carattere ondulatorio o corpuscolare è proseguito sino alla metà dell'ottocento¹⁶ e decisiva è stata la possibilità di misurare la lunghezza d'onda attraverso esperimenti di interferenza.

A partire dagli anni 60 del 900 è stato inventato il *laser*¹⁷ un dispositivo basato su tecniche che utilizzano la meccanica quantistica e che consentono di ottenere la emissione dei fotoni a comando. Ciò permette di disporre di sorgenti di luce coerenti con ambiti di applicazione tra i più diversi dalla chirurgia alla microscopia, dalla registrazione e lettura di informazioni (lettori di Cd e masterizzatori) alla concentrazione in spazi ridotti di alti valori di energia per gli usi più diversi.

¹⁵ Per la tranquillità dei sostenitori di quella mezza imbecillità secondo cui *la matematica non è un'opinione*. La matematica non è un'opinione, è una libera creazione dell'intelletto umano e dunque non ci deve scandalizzare il fatto che $1+1$ possa fare da 0 a 2. Si pensi al caso dei vettori.

¹⁶ Provvisoriamente, visto che a inizio 900 si incomincia a parlare di *dualismo ondulatorio corpuscolare per la radiazione elettromagnetica*.

¹⁷ Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

1.7 Quesiti di fine capitolo

Gran parte di questi quesiti sono stati assegnati nell'ambito di compiti in classe di *conoscenza e comprensione* sia nel biennio sia nel triennio di Liceo Scientifico tra il 2000 e il 2006.

1. Le onde costituiscono l'unico fenomeno fisico per il quale valga il principio di sovrapposizione ¹⁸
2. Le onde meccaniche richiedono sempre un mezzo fisico entro cui propagarsi ¹⁹
3. Per le onde elettromagnetiche la velocità di propagazione non dipende dal mezzo ²⁰
4. Nella propagazione delle onde meccaniche è essenziale la presenza di un mezzo che svolga una funzione di richiamo ²¹
5. Se si prescinde dai fenomeni di attenuazione dovuti ai fenomeni di assorbimento da parte del mezzo si può affermare che, per un'onda piana prodotta da una sorgente puntiforme, non si abbia attenuazione della intensità ²²
6. Una onda trasversale può essere sia polarizzata, sia non polarizzata ²³
7. La velocità di propagazione di un fenomeno a carattere ondulatorio può avvenire con velocità inferiore a quella di alcune delle onde che lo compongono ²⁴
8. L'ampiezza di un'onda si misura in unità diverse a seconda del mezzo in cui si propaga ²⁵
9. L'ampiezza di un'onda si misura in unità diverse a seconda del tipo di fenomeno che descrive ²⁶
10. La frequenza di un'onda si misura in hz^{-1} e rappresenta il numero di oscillazioni nell'unità di tempo ²⁷

¹⁸ Vero: con questa affermazione si intende che le due grandezze ondulatorie y_1 e y_2 quando agiscono nello stesso punto e nello stesso istante danno luogo ad una grandezza $y = y_1 + y_2$ e successivamente proseguono indisturbate il loro processo di propagazione.

¹⁹ Vero

²⁰ Falso: la velocità è (grosso modo) la stessa a tutte le frequenze, ma il suo valore dipende dal mezzo. Il rapporto c/v tra velocità nel vuoto e velocità nel mezzo è chiamato indice di rifrazione del mezzo rispetto al vuoto.

²¹ Vero: è il mezzo di richiamo a produrre le forze elastiche in grado di dar luogo a moti armonici autopropagantisi.

²² Falso: se raddoppia la distanza dalla sorgente la stessa energia si distribuisce su una circonferenza di lunghezza doppia e pertanto la intensità si dimezza.

²³ Vero: la trasversalità richiede solo che la oscillazione avvenga in un piano perpendicolare alla direzione di propagazione. Il fatto che si abbia una direzione fissa o meno determina lo stato di polarizzazione.

²⁴ Vero: un'onda si può rappresentare come sovrapposizione di diverse armoniche ciascuna con velocità diverse. Pertanto nel processo di propagazione il fenomeno cambia forma e si deve definire una velocità di gruppo diversa dalle diverse velocità di fase dei singoli componenti.

²⁵ Falso

²⁶ Vero: per esempio nelle onde sonore si misura in Pascal, mentre nelle onde sull'acqua si misurerà in unità di spostamento

11. La frequenza di un'onda è pari all'inverso del periodo di oscillazione ²⁸
12. La frequenza di un'onda è una caratteristica dell'onda stessa e non dipende dal mezzo in cui l'onda si propaga ²⁹
13. La lunghezza d'onda di un'onda è una caratteristica dell'onda stessa e non dipende dal mezzo in cui l'onda si propaga ³⁰
14. La fase di un'onda dipende dall'istante considerato, dalla posizione e dalla ampiezza ³¹
15. Le onde possono essere definite come oscillazioni sinusoidali dotate di un ben preciso valore di frequenza ed ampiezza ³²
16. Nello studio delle onde si considerano solo le perturbazioni armoniche perché le altre perturbazioni non sono onde ³³
17. Condizione sufficiente affinché la espressione $A \cdot \cos\{2\pi(t/T - x/v)\}$ possa rappresentare un'onda è che t rappresenti il tempo, T il periodo di oscillazione, x la posizione e v la velocità di propagazione. ³⁴
18. Un fenomeno periodico che si propaga si può sempre rappresentare come sovrapposizione di un opportuno numero di armoniche ³⁵
19. Il fenomeno della dispersione consiste nella deformazione di un segnale a causa della riflessione contro le piccole particelle del mezzo in cui si propaga ³⁶
20. La dispersione oltre a determinare una deformazione di un segnale ne modifica la velocità di propagazione ³⁷
21. Un corpo di massa m , soggetto ad una forza elastica di costante k si muove di moto armonico con periodo $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Sintetizzare perché. ³⁸

²⁷ Falso: si misura in $\text{Hz} = \text{sec}^{-1}$

²⁸ Vero

²⁹ Vero

³⁰ Falso: $\lambda = v/f$ e poiché v dipende dal mezzo e f no $\Rightarrow \lambda$ dipende dal mezzo

³¹ Falso: non dipende dalla ampiezza; semmai bisogna aggiungere che dipende dalla fase iniziale.

³² Falso: le onde sono fenomeni energetici che si propagano nello spazio e nel tempo conservando caratteristiche di ripetitività.

³³ Falso: Il riferimento alle grandezze sinusoidali deriva dal fatto che qualunque grandezza periodica può essere analizzata come sovrapposizione di grandezze sinusoidali e dal fatto che le onde armoniche sono dotate di una velocità definita.

³⁴ Falso: la espressione contiene un *marchiano* errore dimensionale perché t/T è un numero puro mentre x/v è un tempo.

³⁵ Vero

³⁶ Falso: la dispersione è il fenomeno che porta ad una deformazione di un'onda a causa del fatto che le sue componenti presentano velocità diverse per le diverse frequenze.

³⁷ Vero: la deformazione è dovuta alla diversa velocità di propagazione delle componenti che porta ad introdurre il concetto di velocità di gruppo.

³⁸ Consideriamo un punto che si muova di moto circolare uniforme con velocità angolare ω in un circonferenza di raggio A . Sappiamo che a questo moto corrisponde una velocità tangenziale v perpendicolare al raggio con $v = 2\pi A/T = \omega A = 2\pi v A$. Alla velocità tangenziale variabile in direzione corrisponde una accelerazione centripeta

22. Nel moto armonico l'accelerazione e lo spostamento sono sempre in fase ³⁹
23. Nel moto armonico la velocità è sfasata di un quarto di periodo rispetto allo spostamento ⁴⁰
24. Nel moto armonico l'energia totale è proporzionale alla ampiezza della oscillazione ⁴¹
25. Due moti armonici con la stessa ampiezza, prodotti da molle di diversa costante k hanno la stessa energia ⁴²
26. In cosa differisce la sovrapposizione di due fenomeni ondulatori dalla sovrapposizione (urto) di due fenomeni corpuscolari?
27. In cosa consiste e quando si realizza il fenomeno della risonanza?
28. Motivare perché è falsa la seguente affermazione: *La fase di un'onda dipende dall'istante considerato, dalla posizione e dalla ampiezza*
29. Dato un fenomeno ondulatorio di natura armonica scegliere tra queste grandezze quelle che sono tipiche dell'onda indipendentemente dal mezzo: velocità di propagazione, ampiezza, frequenza, lunghezza d'onda. Cosa accade all'onda durante la propagazione, se non è armonica?
30. Data una forza elastica di costante k applicata ad un corpo di massa m scrivere l'equazione del moto $x = f(t)$ con le condizioni iniziali $x_0 = A$ e $v_0 = 0$. Precisare come si chiamano le costanti A , quella che moltiplica il tempo e l'argomento della funzione sinusoidale considerata. ⁴³
31. Indicare due modi completamente diversi per fornire le condizioni iniziali di un moto armonico. ⁴⁴

$a = v^2/A = \omega^2 A$. Da tutto ciò segue che nel moto circolare uniforme il vettore posizione e il vettore accelerazione hanno la stessa direzione, verso opposto e un legame $a = \omega^2 A$ (la costante di proporzionalità è ω^2). Se consideriamo il movimento delle due proiezioni del punto mobile esse si muoveranno come il seno e il coseno secondo la legge $x_p = A \cos(\omega t + \varphi)$ e $y_p = A \sin(\omega t + \varphi)$. Confrontiamo ora questo moto, studiato da un punto di vista cinematico con il moto di un corpo di massa m soggetto ad una forza elastica $F = -kx$. Si avrà $-kx = ma$, cioè la stessa legge del moto circolare uniforme (e delle sue proiezioni) a condizione di porre $\omega^2 = k/m$. Pertanto un corpo soggetto a una forza elastica si muove con legge sinusoidale con periodo tale che $\omega^2 = (2\pi/T)^2 = k/m \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{m/k}$

³⁹ Falso: sono sempre in opposizione di fase

⁴⁰ Vero: si ricordi la perpendicolarità tra velocità e vettore posizione

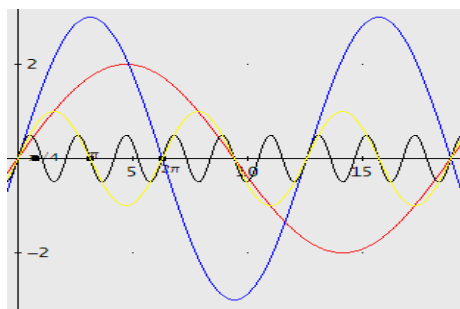
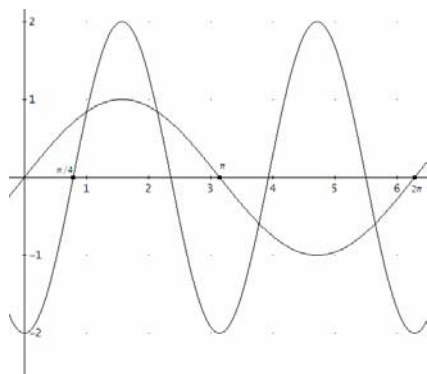
⁴¹ Falso: si consideri il punto in cui $v=0$: si ha $E=U=1/2kA^2$

⁴² Falso: si veda il punto precedente

⁴³ In generale, per il moto armonico, moto generato da una forza elastica di costante k su un corpo di massa m , $x = h \cos(\omega t + \varphi)$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $v = -h\omega \sin(\omega t + \varphi)$. Con le condizioni iniziali date si ha $A = h \cos \varphi \wedge 0 = -h\omega \sin \varphi \Rightarrow \varphi = 0 \wedge h = A$. A si chiama ampiezza, ω si chiama pulsazione e ωt è detta fase. In questo caso la fase iniziale è zero.

⁴⁴ La equazione del moto armonico $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ contiene 3 costanti ω che dipende dal sistema e A e φ che dipendono dalle condizioni iniziali (come

32. In un moto armonico dovuto ad una forza elastica l'energia totale del sistema vale: ... ⁴⁵
33. In un moto armonico dovuto ad una forza elastica con legge oraria $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ la velocità v e la accelerazione a hanno equazioni: ⁴⁶
34. Spiegare in maniera semplice la ragione per cui in un moto armonico dovuto ad una forza elastica la posizione e la accelerazione risultano sempre in opposizione di fase. ⁴⁷
35. Perché il fatto che lo spostamento di un oscillatore armonico sia il medesimo a due istanti diversi non è sufficiente per affermare che i due punti siano in fase? ⁴⁸
36. Se la prima delle due armoniche rappresentate ha equazione $x = A \sin \omega t$, qual è l'equazione della seconda? ⁴⁹
37. Supponiamo di avere un moto armonico smorzato a causa della presenza di una forza viscosa $F = h v$; la costante h come influenza lo smorzamento? Rispondere qualitativamente ⁵⁰
38. La figura rappresenta quattro armoniche (blu, nero, rosso e giallo) di ampiezza e frequenza diversa. Chiamandole per colore metterle in ordine di energia decrescente. ⁵¹
39. Nel caso di oscillazioni forzate quando si realizza la condizione di risonanza? ⁵²



in qualsiasi moto). Per assegnare le condizioni iniziali basta fornire 2 particolari informazioni sul moto a) si può dare la posizione e la velocità iniziale b) Si può dare la energia cinetica e la energia potenziale ad un istante particolare (per esempio quello iniziale)

⁴⁵ $\mathcal{E} = E_k + U = \text{costante}$. Basta dare perciò o l'energia potenziale o l'energia cinetica quando l'altra si annulla. $\mathcal{E} = U_{\max} = \frac{1}{2} k A^2$ dove A rappresenta l'ampiezza e k la costante elastica.

⁴⁶ $v = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$ $a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$. Avevo assegnato volutamente il moto con $\sin(\omega t + \varphi)$; per rispondere correttamente bisognava ricordare che v è di un quarto di periodo in anticipo.

⁴⁷ Il moto armonico è il moto dovuto alle forze elastiche. Per la II legge della dinamica si ha $F_x = m a_x = -k x$ da cui $a_x = -\frac{k}{m} x$ pertanto a_x e x sono sempre proporzionali e con segno opposto (opposizione di fase).

⁴⁸ Basta disegnare una sinusoide e si vede subito che se $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$ non ne discende che $\alpha_1 = \alpha_2$ nemmeno operando su un periodo. In quel caso $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$

⁴⁹ $A \sin 2(x - \pi/4)$

⁵⁰ Lo smorzamento è di tipo esponenziale ed è tanto più rapido quanto più h è grande.

⁵¹ Basta ricordarsi che l'energia è proporzionale al quadrato della frequenza e della ampiezza e dunque per ordinarle basta ordinare secondo il prodotto frequenza per ampiezza. In opportune unità di misura si ha che: nero = $\frac{1}{2} \cdot 3$; giallo 1·1; rosso 2·1/3; blu 3· $\frac{1}{2}$. L'ordine è nero e blu, giallo, rosso

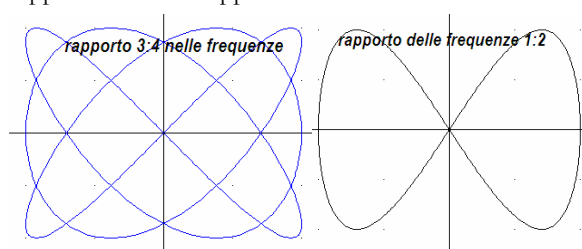
⁵² Quando la frequenza propria di oscillazione del sistema è uguale a quella della forza esterna; in quel caso la ampiezza delle oscillazioni cresce molto rapidamente e, in assenza di fenomeni dissipativi, tende a infinito.

40. Si considerino due moti armonici $x = A \sin \omega t$ e $y = B \sin(\omega t + \theta)$ che avvengono lungo l'asse x e lungo l'asse y . Qual è la traiettoria del punto mobile quando $\theta = 0$? ⁵³
41. Si considerino due moti armonici $x = A \sin \omega t$ e $y = B \sin(\omega t + \theta)$ che avvengono lungo l'asse x e lungo l'asse y . Qual è la traiettoria del punto mobile quando $\theta = \pi/2$? ⁵⁴
42. Con riferimento alla domanda precedente cosa accade quando $\theta = -\pi/2$. Quando lo sfasamento è un angolo intermedio cosa accade. Considerare per esempio il caso $\pi/4$? ⁵⁵
43. Spiegare in cosa la seguente definizione di onda risulti imprecisa: un'onda corrisponde ad una oscillazione sinusoidale di un mezzo nel quale si ha trasporto di energia senza trasporto di materia. ⁵⁶
44. Dare la definizione di fronte d'onda e di raggio precisando per quali tipi di onde ha senso parlare di raggio. ⁵⁷
45. Spiegare perché nello studio delle onde si privilegiano le armoniche. ⁵⁸
46. Spiegare la differenza tra onda longitudinale onda trasversale ⁵⁹

⁵³ x varia da 0 ad A poi decresce sino a $-A$ per poi tornare a 0, mentre in fase con esso y compie lo stesso movimento. Viene disegnato un segmento di ratta passante per l'origine e di inclinazione B/A .

⁵⁴ $x = A \sin \omega t$ mentre $y = B \sin(\omega t + \pi/2) = B \cos \omega t$ basta ora ricordare la identità fondamentale della goniometria $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ e si ottiene $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$ che è l'equazione di una ellisse di semiassi A e B .

⁵⁵ $\sin(\omega t - \pi/2) = -\cos \omega t$ e dunque la traiettoria non cambia però viene percorsa in senso contrario. Per gli angoli intermedi viene ancora una ellisse ma con i semiassi ruotati. Quando poi i due moti armonici hanno frequenze che stanno in rapporti esprimibili mediante numeri interi semplici vengono delle caratteristiche figure, dette figure di Lissajous di cui nella immagine qui sotto si dà la rappresentazione relativa al caso del rapporto 3:4 e del rapporto 1:2



⁵⁶ Le onde non hanno necessariamente bisogno di un mezzo (vedi onde elettromagnetiche) e corrispondono alla oscillazione periodica, non necessariamente sinusoidale, di una qualche grandezza fisica tipica del processo ondulatorio con trasporto di energia senza trasporto di materia.

⁵⁷ Il fronte d'onda è la porzione di onda caratterizzata dal fatto che tutti i suoi punti risultano in fase; ha senso parlare di raggio quando la perpendicolare ad una porzione di fronte d'onda risulta essere, nel tempo la stessa retta. Ha senso parlare di raggio per le onde piane e per le onde sferiche.

⁵⁸ Perché solo esse si propagano senza modificare la loro forma (a causa della esistenza di una ben definita velocità di propagazione) e perché un qualsiasi fenomeno periodico può essere esaminato come sovrapposizione di armoniche (teorema di Fourier). Le onde non armoniche, essendo sovrapposizione di armoniche con velocità diversa si deformano nel corso della propagazione.

47. Dare la definizione di lunghezza d'onda e di periodo di un'onda armonica ⁶⁰
48. Supponiamo che un'onda monodimensionale abbia equazione $y = A \cos(mt - nx)$ dove m e n sono delle opportune costanti; tenendo conto di quanto detto nella risposta precedente il periodo T vale ..., la lunghezza d'onda λ vale ... ⁶¹
49. Correggere la seguente affermazione sbagliata: se due punti di un'onda sono in fase essi distano spazialmente di λ ⁶²
50. Indicare sotto quali condizioni si possono rappresentare e sommare due armoniche mediante le regole del calcolo vettoriale, precisare in particolare a cosa corrisponde l'angolo tra i due vettori ⁶³
51. Enunciare il principio di sovrapposizione. ⁶⁴
52. Si dimostra che la costante elastica di due molle in serie di costanti k_1 e k_2 vale k dove $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. Se con la prima molla il periodo è τ_1 quanto vale il periodo con le due molle in serie quando $k_2 = 2k_1$? ⁶⁵
53. In assenza di gravità è possibile misurare la massa facendo oscillare un pendolo costituito da una molla di costante k disposta orizzontalmente cui viene collegata una massa m nota. Si misura la frequenza di oscillazione ω . Successivamente si sovrappone a m la massa ignota m' e si misura una nuova frequenza ω' . Dimostrare che $m' = m \left(\frac{\omega^2}{\omega'^2} - 1 \right)$ ⁶⁶

⁵⁹ Nelle onde longitudinali la oscillazione della grandezza avviene nella direzione di propagazione, in quelle trasversali nel piano perpendicolare

⁶⁰ La lunghezza d'onda è la distanza spaziale tra due creste consecutive, invece il periodo è la distanza temporale tra due creste (la lunghezza d'onda si riferisce a due punti distinti in uno stesso istante mentre il periodo ad uno stesso punto in due istanti diversi). Esse sono legate dalla relazione $\lambda = v T$.

⁶¹ Posto $T = t_2 - t_1$ si deve avere $(mt_2 - nx) - (mt_1 - nx) = 2\pi$ da cui $T = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{m}$.

Posto $\lambda = |x_2 - x_1|$ si deve avere $(mt - nx_2) - (mt - nx_1) = 2\pi$ da cui $\lambda = |x_2 - x_1| = \frac{2\pi}{n}$

⁶² Distanza spaziale di un multiplo intero di lunghezze d'onda oppure fanno parte di uno stesso fronte d'onda

⁶³ Si possono sommare se hanno la stessa frequenza e se conservano nel tempo la differenza di fase che, nella rappresentazione grafica, corrisponde all'angolo tra i due vettori.

⁶⁴ Le onde si sovrappongono sommando le rispettive oscillazioni istante per istante ed esse si attraversano senza influenzarsi reciprocamente.

⁶⁵ $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{2k_1} = \frac{3}{2k_1}$ pertanto $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{2k_1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_1$

⁶⁶ Basta far riferimento alla legge che fornisce la frequenza angolare del moto armonico: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

54. Vengono sommate tre armoniche della medesima ampiezza A e con la stessa frequenza angolare ciascuna sfasata rispetto alla successiva di $\pi/4$. Determinare l'ampiezza della oscillazione risultante e il suo angolo di sfasamento rispetto alla prima.
55. Se si sommano dieci armoniche di ampiezza A ciascuna sfasata di α rispetto alla precedente, quanto vale α per ottenere l'annullamento delle oscillazioni? Dopo aver trovato la soluzione osservare che ne esiste anche una seconda. Quale? ⁶⁷
56. Un pendolo semplice di massa m e lunghezza l e un pendolo fisico costituito da una sbarra della stessa massa e lunghezza compiono oscillazioni della stessa ampiezza angolare. Ragionando in termini di energia potenziale spiegare come mai il pendolo semplice ha una energia maggiore. ⁶⁸
57. Un disco piano di massa m e di raggio R viene imperniato intorno ad un asse che si trova a distanza R_C dal centro di massa. Ricordando che il momento di inerzia di un disco piano, rispetto al centro di massa è $I_{CM} = \frac{1}{2} m R^2$ dimostrare che il periodo di oscillazione di un tale pendolo fisico vale: $T = 2\pi \sqrt{\frac{(R/2)^2 + R_C^2}{g R_C}}$. Quanto vale la lunghezza equivalente a quella di un pendolo semplice della stessa massa? ⁶⁹

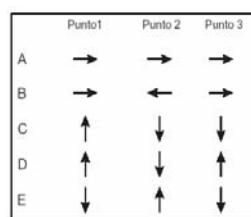
⁶⁷ Nel primo caso si tratta di costruire un opportuno poligono regolare di 10 lati. Se ora si dà alle armoniche uno sfasamento doppio rispetto al precedente si trova un opportuno poligono di 5 lati che viene percorso due volte.

⁶⁸ Durante un quarto di oscillazione cosa fa il baricentro nei due casi?

⁶⁹ Utilizzare quanto illustrato nel testo

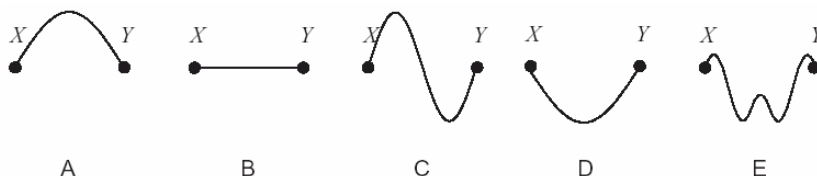
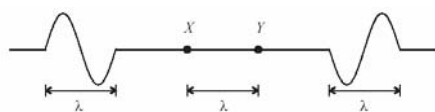
1.8 Quesiti dalle Olimpiadi di Fisica

1. In figura è schematizzata l'istantanea di una corda elastica lungo la quale si propaga, da sinistra a destra, un'onda trasversale. In quale verso si muovono i punti 1, 2 e 3 della corda nell'istante in cui è stata raffigurata? ... (Juniore 1995)⁷⁰

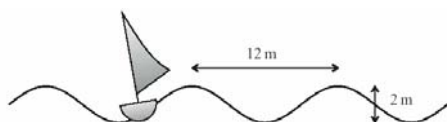


A B C D **E**

2. Nella figura qui a lato due impulsi, ambedue di lunghezza A , si propagano uno verso l'altro lungo una corda elastica. Il tratto XY della corda ha la stessa lunghezza A dei due impulsi. Quando i due impulsi si trovano contemporaneamente nel tratto XY , quale delle seguenti figure rappresenta meglio la configurazione della corda in quel tratto? ... (Juniore 1996)

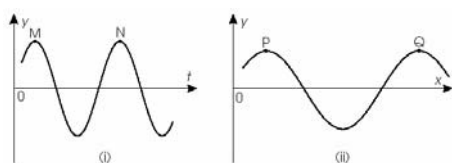


A B C D E
A **B** C D E



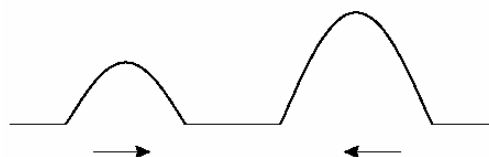
3. Una barchetta alla deriva oscilla su e giù sballottata dalle onde. Pierino, a bordo, nota che ci vogliono circa 4 secondi per un'oscillazione completa, giù-su-giù. Quale è la frequenza del moto ondoso? ... (Juniore 1996)⁷¹

A ...0.25Hz B ...0.50Hz C ...4Hz
D ...8Hz E ...12Hz



4. I grafici in figura rappresentano la stessa onda che si propaga lungo una corda tesa: il grafico (i) mostra l'andamento dello spostamento y di un punto della corda in funzione del tempo t ; il grafico (ii) invece mostra come varia il valore di y per le diverse ascisse x dei punti della corda in un determinato istante. Quale delle seguenti espressioni fornisce la velocità di propagazione dell'onda? ... (Juniore 1998)

A ... $MN \times PQ$ B ... $\frac{MN}{PQ}$ **C** ... $\frac{PQ}{MN}$ D ... $\frac{1}{MN \times PQ}$



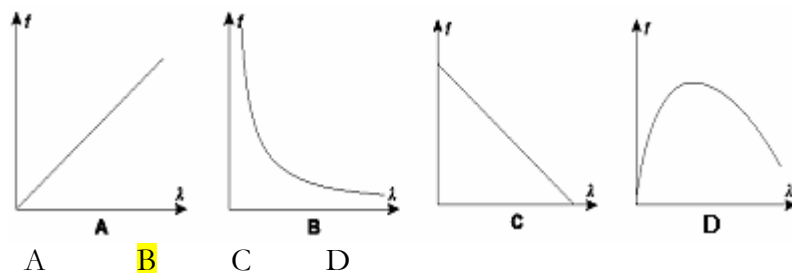
5. In figura sono rappresentate due onde impulsive che procedono in verso opposto lungo la stessa corda elastica. Il loro incontro comporta... (Juniore 1998)

A ...una modifica permanente del loro profilo.
B ...un cambiamento delle lunghezze d'onda dopo il loro incontro.

⁷⁰ Si tratta di un'onda trasversale e dunque sono da scartare gli spostamenti orizzontali. Bisogna poi prendere in esame cosa accade quando si fa spostare nel verso indicato l'onda.

⁷¹ La frequenza è l'inverso del periodo

- C** ...una momentanea modifica del profilo delle onde limitata alla durata dell'incontro.
- D ...un cambiamento della velocità di propagazione delle onde dopo il loro incontro.
6. Ammettendo che la velocità con cui si propaga il suono nell'aria sia la stessa per tutte le frequenze, quale dei seguenti grafici rappresenta l'andamento della frequenza in funzione della lunghezza d'onda? ... (Juniores 1999)



7. In figura è rappresentata, in un dato istante, un'onda trasversale che si propaga lungo una corda elastica. Le lettere P, Q, R e S individuano quattro particolari elementi della corda. Quale delle seguenti affermazioni sul moto degli elementi della corda in quell'istante è corretta? ... (Juniores 1999)

- A ...Il modulo della velocità dell'elemento P è massimo
- B ...Lo scostamento dalla posizione di equilibrio dell'elemento Q è sempre nullo
- C ...L'energia posseduta dall'elemento R è solamente cinetica
- D** ...Il modulo dell'accelerazione dell'elemento S è massimo

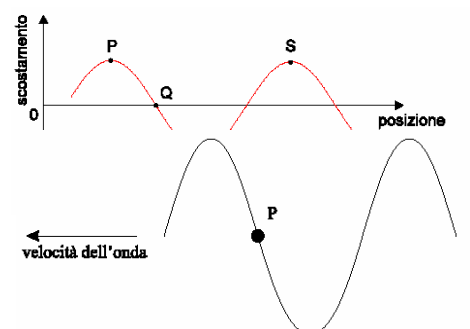
8. Il diagramma qui a lato mostra un'onda trasversale che si propaga verso sinistra lungo una corda. Nell'istante cui si riferisce la figura, il punto P della corda come si sta muovendo? ... (Juniores 2004)

- A** ...Verso il basso del foglio.
- B ...Verso l'alto del foglio.
- C ...Verso sinistra.
- D ...Verso destra.

9. In quale dei seguenti casi un pendolo potrebbe oscillare da due a quattro volte più lentamente di prima? ... (I livello 1995)

- A ... Portandolo in alto, dal livello del mare sulla cima di una montagna molto alta
- B ... Portandolo in basso, dal livello del mare in una profonda miniera di carbone
- C** ... Portandolo dalla superficie della Terra sulla superficie della Luna
- D ...Portandolo dalla superficie della Luna sulla superficie della Terra
- E ...Portandolo dalla superficie della Terra in un punto dello spazio molto lontano da qualunque altra massa

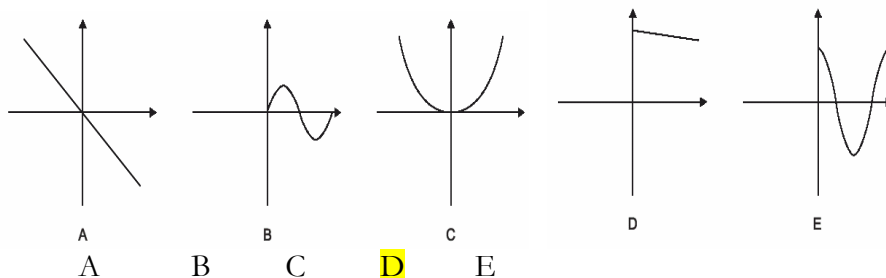
10. Quando un corpo si muove di moto armonico semplice, quali delle seguenti quantità 1) accelerazione 2) forza di richiamo 3) velocità



variano nel tempo con uno sfasamento di $\frac{1}{2}\pi$ rispetto alla posizione? ... (I livello 1995)

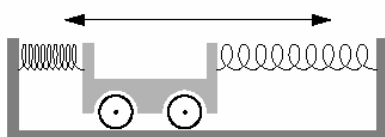
- A ... Tutte e tre B ... Solo la 1 e la 2 C ... Solo la 2 e la 3
D ... Solo la 1 **E** ... Solo la 3

11. In un'esperienza di laboratorio si studia il moto di una massa che oscilla verticalmente appesa ad una molla. Quale dei grafici in figura rappresenta nel modo migliore l'andamento dell'energia totale (asse verticale) in funzione del tempo (asse orizzontale)? ... (I livello 1996)



12. In un'esperienza di laboratorio si studia il moto di una massa che oscilla verticalmente appesa ad una molla. Riferendosi alla figura del quesito precedente quale grafico può rappresentare nel modo migliore l'energia potenziale complessiva (asse verticale) in funzione dello spostamento dalla posizione dell'equilibrio (asse orizzontale)? ... (I livello 1996)

- A B **C** D E



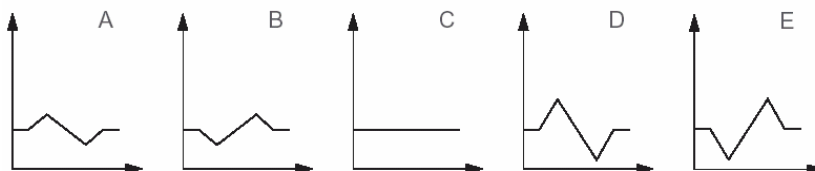
13. La figura mostra un carrello che si muove di moto oscillatorio armonico. In quale modo la frequenza delle oscillazioni può essere aumentata in maniera rilevante? ... (I livello 1997)

- A ... Aumentando l'ampiezza delle oscillazioni.
B ... Aggiungendo una massa al carrello.
C ... Riducendo gli attriti.
D ... Riducendo l'ampiezza dell'oscillazioni.
E ... Utilizzando una coppia di molle più rigide

14. L'energia totale di una particella che si muove di moto armonico può essere variata in uno di questi modi indipendenti. 1) variando l'ampiezza del moto. 2) variando il periodo del moto. 3) variando la massa della particella. Quali, dei modi indicati, sono corretti? ... (I livello 1997)

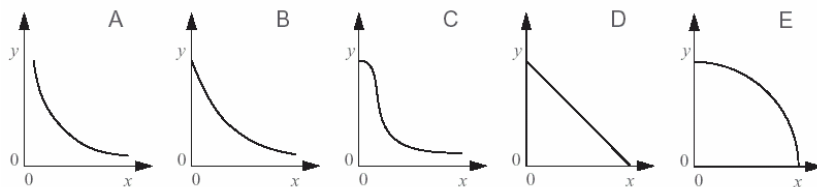
- A** ... Tutti e tre B ... I primi due
C ... Gli ultimi due D ... Solo il primo E ... Solo il terzo

15. Le figure mostrano schematicamente possibili impulsi che si propagano lungo una corda. La sovrapposizione dell'impulso E e dell'impulso A lungo la stessa corda determina una nuova forma di impulso. A quale degli impulsi rappresentati in figura somiglia di più quello risultante? ... (I livello 1997)



A **B** C D E

16. I cinque grafici in figura mostrano come una certa grandezza y può dipendere da un'altra grandezza x . Dire quale di questi rappresenta meglio la relazione tra l'energia potenziale di un pendolo semplice che oscilla senza attrito (grandezza y) e la sua energia cinetica (grandezza x) allo stesso istante. ... (I livello 1997) ⁷²

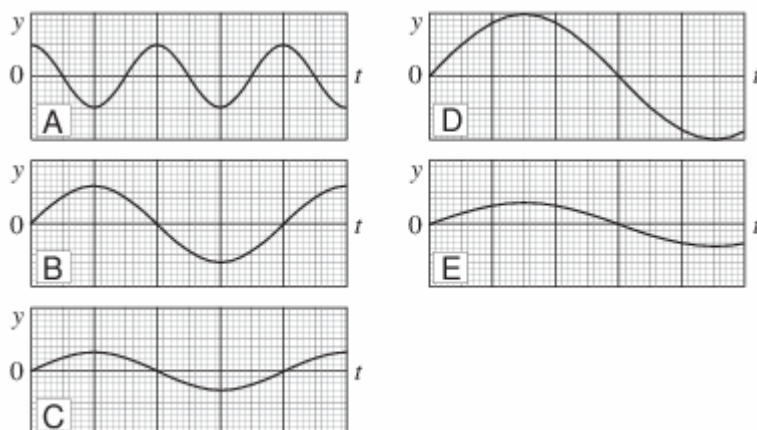
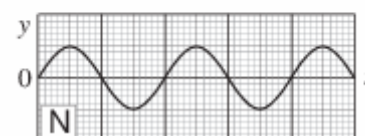
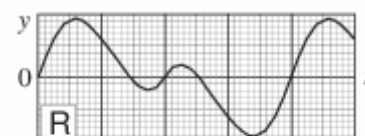


A B C **D** E

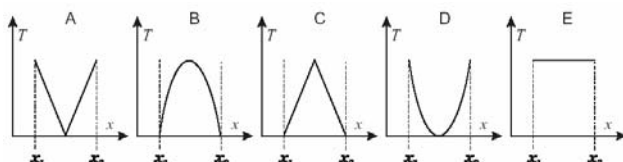
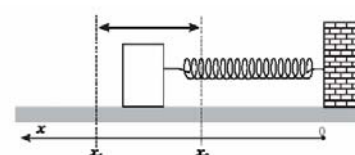
17. Due onde M e N si sovrappongono in un punto e il grafico dello spostamento risultante, in funzione del tempo, è quello riportato nella figura in alto, indicato con R. Lo spostamento, in funzione del tempo, della sola onda N sarebbe invece rappresentato dal grafico riportato in basso. Di conseguenza, tra quelli riportati qui sotto, il grafico che descrive meglio lo spostamento, in funzione del tempo, per l'onda M è ⁷³

A **B** C D E

NB: Tutti i grafici rappresentati in questo quesito sono riferiti ad una stessa scala. ... (I livello 1998)



18. La figura mostra un oscillatore, di massa m e costante elastica k , che si muove su un piano senza attrito. Le posizioni estreme dell'oscillazione sono x_1 e x_2 . Quale, tra i grafici seguenti rappresenta meglio come varia l'energia totale dell'oscillatore in funzione della

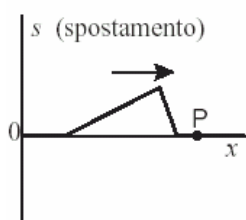


⁷² Poiché l'energia totale si conserva si ha $x + y = \text{costante}$

⁷³ Sia N sia R si annullano dopo due unità di tempo. Quindi anche M si deve annullare al tempo 2 e questo ci costringe a concentrarci solo su B e C che differiscono per un fattore di scala. Al tempo 1 N è nullo mentre R è positivo e ha il valore di B

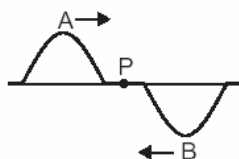
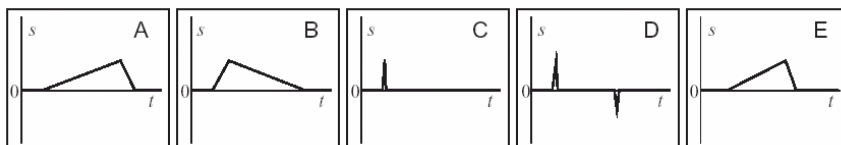
posizione x ? ... (I livello 1998)

A B C D **E**

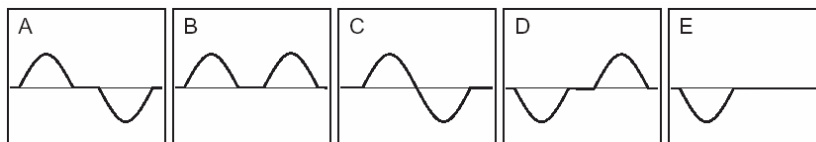


19. Un impulso si sta propagando su una corda nella direzione positiva dell'asse x ; lo spostamento dei diversi punti della corda ad un certo istante è mostrato in figura. P è un punto della corda. Quale dei grafici seguenti rappresenta invece lo spostamento del punto P in funzione del tempo? ... (I livello 1998)

A **B** C D E



20. Due impulsi che si stanno propagando in versi opposti su una stessa corda sono rappresentati in figura ad un certo istante. Dopo un secondo i punti di massimo spostamento A e B si trovano in P. Quale tra le seguenti figure rappresenta meglio la forma della corda dopo 2 secondi. ... (I livello 1998)



A B C **D** E

21. Se il raggio della Terra dovesse diminuire e la sua massa rimanere costante uno sperimentatore sulla superficie della Terra osserverebbe che: ... (I livello 1998) ⁷⁴

A ...tutti gli orologi a pendolo rallenterebbero
 B ...il peso di un oggetto misurato con una bilancia a molla diminuirebbe
 C ...il periodo di oscillazione di un oggetto sospeso ad una molla elicoidale rimarrebbe inalterato
 D ...il periodo di rotazione della Luna intorno alla Terra diminuirebbe
 E ...il valore della costante gravitazionale G aumenterebbe

A B **C** D E

22. Il periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo è indipendente da piccole variazioni 1) dell'accelerazione di gravità 2) della massa del pendolo 3) dell'ampiezza del moto. Quali delle precedenti affermazioni sono corrette? ... (I livello 1999)

A ...Tutte e tre B ...Sia la 1 che la 2
C ...Sia la 2 che la 3 D ...Soltanto la 1
 E ...Soltanto la 3

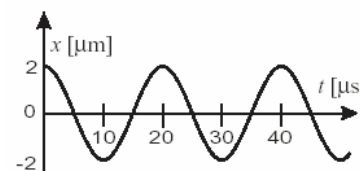
⁷⁴ Aumenterebbe il valore di g dunque a) il periodo dei pendoli diminuirebbe b) il peso aumenterebbe c) non cambierebbe il periodo delle oscillazioni armoniche che dipende solo da m e k d) il periodo di rotazione della Luna dipende solo dalla massa della terra e dalla distanza e) G è una costante universale

23. Sulla Terra, un corpo sospeso ad una molla produce un allungamento L ed oscilla con frequenza f . Se il corpo viene trasportato sulla Luna e sospeso alla stessa molla, le due quantità diventano $L' = L/n$ ed f' . Il rapporto f/f' è ... (I livello 2000)⁷⁵

A ... n B ... $n^{1/2}$ **C ... 1**
D ... $1/n^{1/2}$ E ... $1/n$

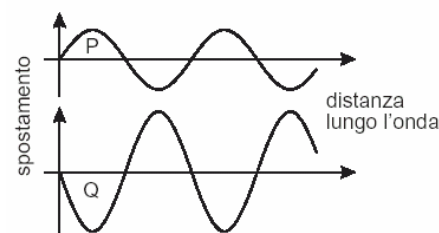
24. Una particella investita da un'onda progressiva si muove di moto armonico semplice, in fase con l'onda; il grafico mostra come varia la posizione della particella in funzione del tempo. L'onda avanza alla velocità di 5 km/s. La sua lunghezza d'onda è ... (I livello 2001)

A ... 0.010 m B ... 0.020 m C ... 0.050 m
D ... 0.10 m E ... 0.20 m



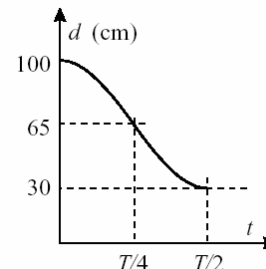
25. La figura mostra, ad uno stesso istante, i profili di due onde, P e Q, di uguale frequenza e di ampiezza rispettivamente Y e $2Y$. Le onde sono sovrapposte e producono un'onda risultante. Quali sono l'ampiezza dell'onda risultante e la differenza di fase, in radianti, tra l'onda risultante e l'onda P? ... (I livello 2001)

	ampiezza	fase
A	Y	0
B	Y	π
C	$2Y$	0
D	$3Y$	π
E	$3Y$	0



26. Una molla, la cui lunghezza a riposo è l_0 viene appesa al soffitto; all'altra estremità viene fissato un corpo che, dopo essere stato tirato e poi abbandonato, comincia ad oscillare secondo un moto armonico di periodo T . Il grafico indica come varia nel tempo la sua distanza d dal soffitto. Dal grafico si può ricavare che... (I livello 2002)

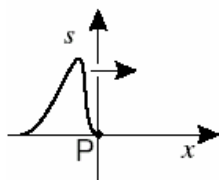
A ... l'ampiezza del moto armonico è 70 cm
B ... l'energia cinetica ha un massimo in $t = \frac{1}{2} T$
C ... il modulo della forza di richiamo sul corpo aumenta fra $t = 0$ e $t = \frac{1}{4} T$
D ... il modulo della velocità ha un massimo in $t = \frac{1}{4} T$
E ... il valore di l_0 è 65 cm



27. Per un corpo che si muove di moto armonico semplice, quali delle seguenti affermazioni sono vere in ogni istante? 1 – La velocità istantanea è direttamente proporzionale allo spostamento dalla posizione centrale. 2 – L'accelerazione del corpo è inversamente proporzionale allo spostamento dalla posizione centrale. 3 – La forza di richiamo è direttamente proporzionale allo spostamento dalla posizione centrale. ... (I livello 2003)

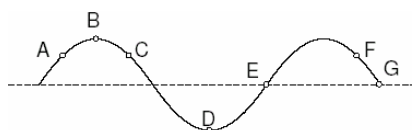
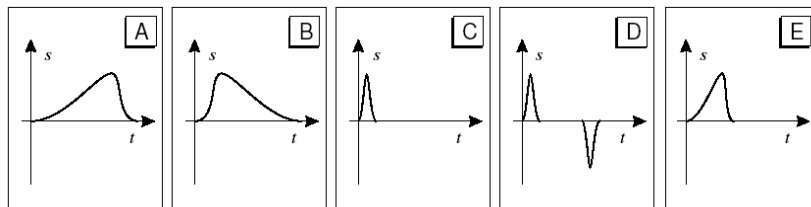
A ... Solo la 1 e la 2 B ... Solo la 1 e la 3
C ... Solo la 1 D ... Solo la 2
E ... Solo la 3

⁷⁵ Attenzione ai distrattori



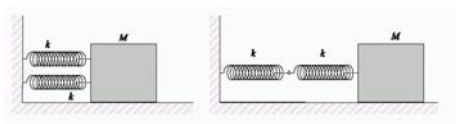
28. Il grafico nella prima figura riporta lo spostamento dalla loro posizione di equilibrio di particelle che, a un certo istante, risentono dell'effetto di un'onda che viaggia lungo l'asse x. P è un punto lungo il percorso fatto dall'onda. Quale dei grafici seguenti rappresenta meglio lo spostamento in funzione del tempo di una particella che si trova nel punto P? (I livello 2004)

A **B** C D E



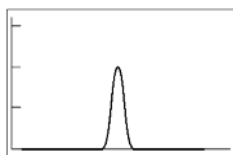
29. Il seguente diagramma mostra un'onda periodica. Quale delle seguenti rappresenta una coppia di punti in fase? (I livello 2004)

A ... A e C B ... B e D **C ... C e F**
D ... E e G E ... A e F

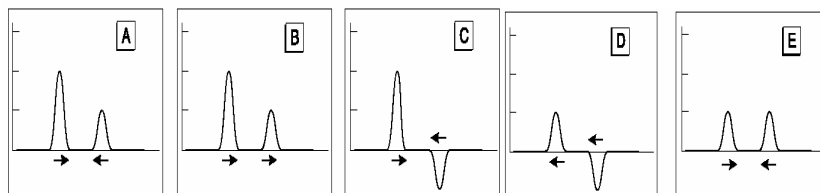


30. Due blocchi di identica massa M sono attaccati ciascuno a due molle identiche con costante elastica k, come mostrato nelle figure sotto-stanti. L'attrito tra i blocchi e la superficie d'appoggio è trascurabile. Il rapporto tra il periodo di oscillazione del blocco attaccato alle molle collegate in parallelo (a sinistra) e il periodo del blocco attaccato alle molle collegate in serie (a destra) sarà: (I livello 2005) ⁷⁶

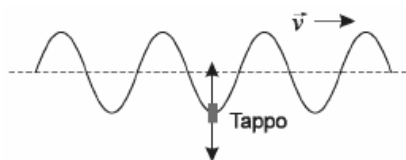
A ... 1/2 B ... $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C ... 1 D ... $\sqrt{2}$ E ... 2



31. In un certo mezzo si propagano, nella stessa direzione, due impulsi che a un certo punto si sovrappongono. In quell'istante si ottiene l'impulso mostrato in figura a sinistra, dovuto alla loro sovrapposizione. Fra i seguenti, quali possono essere gli impulsi iniziali? (I livello 2005)



A B C D **E**



32. Il disegno schematizza un'onda d'acqua che si propaga alla velocità di 1 m/s e mette in moto un tappo che compie 8 oscillazioni in 4s. Qual è la lunghezza d'onda?... (I livello 2006)

A ... 0.25 m **B ... 0.5 m** C ... 1 m
D ... 2 m E ... 4 m

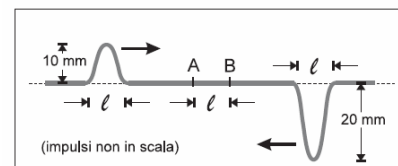
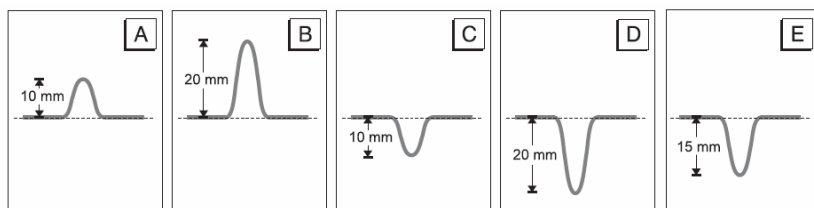
⁷⁶ $T \propto \frac{1}{\sqrt{k}}$ e in parallelo $k' = 2k$ mentre in serie $k' = \frac{1}{2}k$

33. L'equazione di un'onda armonica è $y = Y_0 \sin[k(x - v t)]$. Se $Y_0 = 3\text{ m}$, $k = 3\pi \text{ m}^{-1}$, $v = 8 \text{ m/s}$, qual è la frequenza dell'onda? ... (I livello 2007) ⁷⁷

A ... 3.0 Hz B ... 7.2 Hz C ... 8.0 Hz **D ... 12 Hz**
E ... 24 Hz

34. Il disegno in figura mostra due impulsi, ciascuno di lunghezza l , che si muovono lungo una corda uno verso l'altro alla stessa velocità. Quale disegno rappresenta meglio la forma della corda quando entrambi gli impulsi raggiungono il tratto AB? ... (I livello 2007)

A B **C** D E

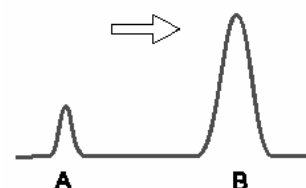


35. Un pendolo è appeso al soffitto di un ascensore. Quando l'ascensore è fermo il periodo del pendolo è 1.00 s. Qual è il periodo quando l'ascensore si muove con un'accelerazione di 2.3 m s^{-2} diretta verso l'alto? (I livello 2008) ⁷⁸

A ... 0.80 s B ... 0.90 s C ... 1.00 s **D ... 1.10 s**
E ... 1.20 s

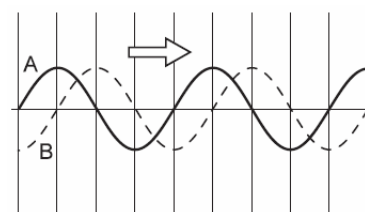
36. In figura sono schematizzati due impulsi, A e B, che viaggiano lungo una fune omogenea da sinistra verso destra. Rispetto all'impulso A, l'impulso B ha: (I livello 2008) ⁷⁹

A ... velocità maggiore ed energia più alta
B ... velocità maggiore ed energia più bassa
C ... velocità maggiore e la stessa energia
D ... la stessa velocità ed energia più bassa
E ... la stessa velocità ed energia più alta

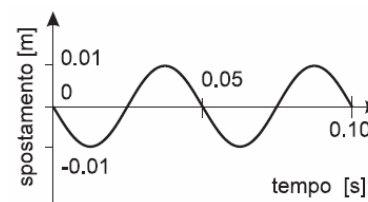


37. Il diagramma a fianco rappresenta due onde, A e B, che si propagano da sinistra a destra. La differenza di fase tra le due onde è ... (I livello 2014)

A ... 0° B ... 45° **C ... 90°** D ... 120° E ... 180°



38. Nel grafico è riportato lo spostamento in funzione del tempo di una particella di un mezzo uniforme quando questo viene attraversato da un'onda. Qual è la frequenza dell'onda? ... (I livello 2014)



⁷⁷ $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi v}{v}$ da cui $v = \frac{v k}{2\pi}$

⁷⁸ $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$ e dunque, poiché dentro l'ascensore si percepisce una accelerazione di 12.3 m/s^2 si ha $T' = T \sqrt{\frac{g}{g'}} = 0.90 \text{ s}$

⁷⁹ L'energia è proporzionale al quadrato della ampiezza (nella figura l'impulso B ha anche una durata maggiore e dunque trasporta ancora più energia); la velocità dipende solo dalla corda ed è la stessa.

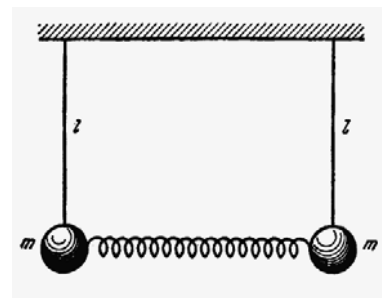
⁷⁹ L'energia è proporzionale al quadrato della ampiezza (nella figura l'impulso B ha anche una durata maggiore e dunque trasporta ancora più energia); la velocità dipende solo dalla corda ed è la stessa.

A ... 5×10^{-2} Hz**B** ... 2×10^{-1} HzC ... 1×10^1 HzD ... 2×10^1 HzE ... 5×10^1 Hz

1.9 Problemi di fine capitolo

1. Due pendoli accoppiati

Esercizio: Due pendoli semplici di lunghezza l sono accoppiati tramite una molla di massa trascurabile e di costante k . Sapendo che la configurazione di equilibrio è caratterizzata dai pendoli in posizione verticale con la molla in condizione di riposo, determinare le frequenze per piccole oscillazioni nei due casi a) in cui i due pendoli vengono deflessi inizialmente di uno stesso angolo nello stesso verso (oscillazioni in fase) b) in cui vengono deflessi con angoli uguali ma opposti (oscillazioni in opposizione di fase).⁸⁰



2. Parametri quantitativi di un oscillatore armonico di data equazione.

Esercizio: un oscillatore armonico è caratterizzato dalla equazione: $x = 0.08 \cos(20\pi t + \pi/4)$.

Determinare le equazioni della velocità, della accelerazione e quelle della energia cinetica e potenziale.⁸¹



3. Parametri quantitativi di un oscillatore armonico note le condizioni iniziali e l'energia

Esercizio: un punto materiale si muove di moto armonico e sono note le condizioni iniziali $x_0 = 0.450$ m e $v_0 = -3.45$ m/s, la massa $m = 0.250$ kg e l'energia cinetica massima $\mathcal{E}_{\text{KM}} = 7.50$ J. Determinare l'equazione del moto e il primo istante in cui l'energia potenziale raggiunge il suo valore massimo.



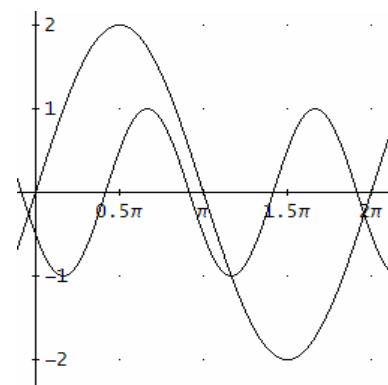
4. Composizione di moti armonici usando il calcolo vettoriale

Esercizio: Una particella è sottoposta simultaneamente a due moti armonici di equazione: $x' = 3 \sin(4t + \pi/6)$ e $x'' = 4 \sin(4t - \pi/3)$. Utilizzando il calcolo vettoriale determinare l'equazione del moto risultante $x = x' + x''$ e il valore della energia totale del sistema.



5. Determinazione di una equazione del moto armonico a partire dal diagramma

Esercizio: utilizzando il diagramma fornito scrivere le equazioni dei due moti armonici sapendo che sull'asse dei tempi si la fase (in radianti) e sull'asse delle ordinate l'ampiezza delle oscillazioni in metri.



⁸⁰ Nel primo caso non cambia nulla perché la molla non viene mai sollecitata. Nel secondo caso la forza tangenziale vale $mg \sin\theta + 2kl \sin\theta \cos\theta \approx m(g + 2kl/m) \theta$

Basta far ora riferimento alla deduzione della legge del pendolo semplice per concludere che il ruolo di g è assunto da $g + 2kl/m$ e dunque: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + 2kl/m}}$

che il ruolo di g è assunto da $g + 2kl/m$ e dunque: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{2kl}{m}}}$

⁸¹ Lasciare esplicitati i fattori π

⊗

Le ampiezze valgono rispettivamente 2 m e 1 m.

La prima armonica è una senoide di periodo 2π e di fase iniziale nulla pertanto la sua equazione risulta essere:

$$x_1 = 2 \sin \omega t$$

Il secondo diagramma è una senoide rovesciata di frequenza 2ω e la sua equazione sarà $x_2 = -\sin(2\omega t + \theta)$.

Per determinare θ basta particularizzare una coordinata. Dal diagramma si vede che per $t = 0$ si ha $x_2 = -1/2$ e dunque $-1/2 = -\sin\theta$ da cui $\theta = \pi/6$ e l'equazione risulta $x_2 = -\sin(2\omega t + \pi/6)$

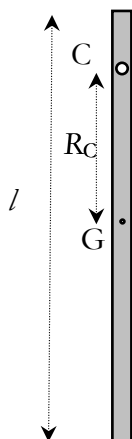
☺

6. Ricerca del punto di sospensione in una sbarra per massimizzare la frequenza di oscillazione

Esercizio: Una sbarra omogenea di massa m e lunghezza l viene imperniata in un suo punto C al di sopra del centro di massa G in maniera che possa oscillare. Dimostrare che la frequenza angolare delle piccole oscillazioni vale:

$$\omega = \sqrt{\frac{12 g R_C}{l^2 + 12 R_C^2}}$$

Con un programma di grafica rappresentare la funzione trovata e dimostrare che il massimo di frequenza angolare si ha per $R_C = \frac{l}{2\sqrt{3}}$



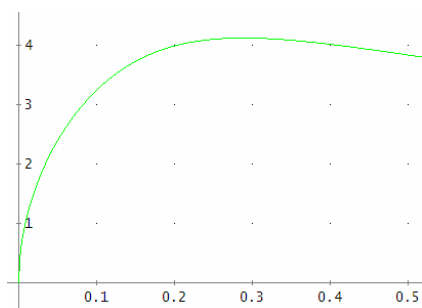
⊗

Abbiamo già dimostrato che la frequenza angolare delle piccole oscillazioni di un pendolo fisico vale $\omega = \sqrt{\frac{m g R_C}{I}}$ si tratta pertanto di calcolare il momento di inerzia I sapendo che quello riferito al centro di massa (l.16.8) vale $1/12 m l^2$.

Per il teorema di Steiner si ha: $I = \frac{1}{12} m l^2 + m R_C^2$

$$\text{E pertanto: } \omega = \sqrt{\frac{12 g R_C}{l^2 + 12 R_C^2}} = \sqrt{\frac{12 g \alpha}{l(1 + 12 \alpha^2)}}$$

Dove si è posto $\alpha = \frac{R_C}{l}$ con la limitazione $0 < \alpha < 1/2$



Nella immagine qui a lato si rappresenta il diagramma di ω in funzione di α avendo posto per comodità di rappresentazione $l = 1\text{ m}$ e $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Si osserva che la frequenza che è nulla quando la sbarra è imperniata nel baricentro inizia a crescere man mano che il punto di cerniera si allontana dal baricentro ma poi, in corrispondenza di un valore determinabile derivando la funzione non cresce indefinitamente ma prende un valore massimo relativo e poi decresce, seppur lentamente.

La derivata della funzione, avendo inserito i valori numerici per le costanti risulta:

$$\omega' = 5.425 \frac{1 - 12x^2}{\sqrt{x} (12 x^2 + 1)^{3/2}}$$

E pertanto il punto di massimo (annullamento della derivata prima) si ha per $x = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.29 \text{ m} = 0.29 l$ a cui corrisponde (per sostituzione)

$$\omega = 4.12 \text{ rad/sec}$$

$$\omega = 4.12 \text{ rad/sec}$$

Il risultato è abbastanza inatteso perché ci si sarebbe aspettati di trovare la frequenza massima per $\alpha = 1/2$



7. Il moto di un pendolo intercettato da un vincolo: Olimpiadi II livello 2008

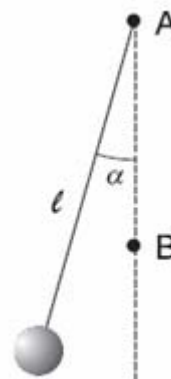
Esercizio: Un corpo di massa $M = 0.83$ kg è sospeso con un filo di lunghezza $l = 75$ cm, ad un chiodo (indicato in figura con A); un secondo chiodo B è spostato più in basso, sulla verticale del primo, a $2/3$ della lunghezza del filo. Il corpo viene spostato in modo che il filo teso formi con la verticale un angolo piccolo α e poi lasciato da fermo. In quanto tempo il corpo torna nella posizione iniziale (filo inestensibile e di massa trascurabile, attrito trascurabile).



Sul lato sinistro della figura il pendolo compie complessivamente una mezza oscillazione e ha lunghezza l .

Sul lato destro avviene la stessa cosa ma questa volta la lunghezza è $1/3 l$ pertanto il tempo impiegato per tornare al punto di partenza è la somma di due semiperiodo di durata diversa:

$$T = \frac{1}{2} 2\pi \left(\sqrt{\frac{l}{g}} + \sqrt{\frac{l}{3g}} \right) = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 1.37 \text{ s}$$



Indice analitico

ampiezza della oscillazione - 4

armoniche: rappresentazione vettoriale; composizione - 16;
sovrapposizione - 16; sovrapposizione di n egualmente sfasate - 17

diffrazione: aspetti generali - 26

dualismo ondulatorio corpuscolare: evoluzione del problema - 25

Esercizio: Composizione di moti armonici usando il calcolo vettoriale - 44; Determinazione di una equazione del moto armonico a partire dal diagramma - 45; Due pendoli accoppiati - 44; Equazione di un oscillatore armonico dai parametri energetici e dalle condizioni iniziali - 12; Esempio di composizione di armoniche - 17; Il moto di un pendolo intercettato da un vincolo; Olimpiadi II livello 2008 - 46; Oscillazioni smorzate di una sferetta appesa ad una molla immersa in paraffina liquida - 15; Parametri cinematici ed energetici di un oscillatore armonico - 12; Parametri quantitativi di un oscillatore armonico di data equazione - 44; Parametri quantitativi di un oscillatore armonico note le condizioni iniziali e l'energia - 44; Ricerca del punto di sospensione in una sbarra per massimizzare la frequenza di oscillazione - 45; Stima del tempo necessario a decrementare una oscillazione secondo un rapporto dato - 14

fare il punto: navigazione - 9

fase: definizione - 3

fenomeni oscillatori: esperienza comune - 1

fenomeno ondulatorio: modalità d osservazione nello spazio e nel tempo - 2

fenomeno oscillatorio: parametri caratteristici - 3

frequenza: definizione - 3

frequenza angolare - 4; definizione - 3

fronti d'onda - 21

funzione periodica: armoniche dello spettro di Fourier - 5

Huygens: orologio cicloidale - 10

interferenza: aspetti generali - 26

interferenza costruttiva: distruttiva - 18

laser - 27

lunghezza d'onda - 23

mezzo di trasmissione: non sempre necessario - 1

modulazione di ampiezza - 4

moto armonico: definizione - 4; legame tra legge oraria, velocità e accelerazione - 6; spiegazione dinamica - 6

moto circolare uniforme: moti armonici in quadratura - 5

numero d'onda - 23

onda: impulso; distinzione - 20; polarizzata - 21

onde: longitudinali; trasversali - 20

onde monocromatiche: monodimensionali; equazione - 23

oscillatore armonico: energia proporzionale al quadrato di ampiezza e frequenza angolare - 7; energie cinetica e potenziale - 7; frequenza angolare - 7; le equazioni - 7

oscillazioni: sorgenti di una propagazione ondosa - 1

oscillazioni libere: smorzamento - 11

oscillazioni smorzate: andata all'equilibrio - 2

pendolo composto: periodo e momento di inerzia - 10

pendolo semplice: isocronismo per le piccole oscillazioni - 8; oscillatore armonico, periodo - 8

periodo: definizione - 3; moto armonico - 5

polarizzazione: perché si studia - 21

principio di sovrapposizione: enunciato; significato - 24

Problemi di fine capitolo - 44–46

Quesiti dalle Olimpiadi di Fisica - 35–43

Quesiti di fine capitolo - 28–34

riflessione e rifrazione: aspetti generali - 25

risonanza - 11; equilibratura degli pneumatici - 11

smorzamento: aspetti quantitativi - 13; decrementi di energia - 14; tempo di rilassamento - 13; variazione del periodo - 13

sorgenti coerenti: condizione per l'interferenza - 27

sovrapposizione: armoniche - 4

tempo di dimezzamento: legame con il tempo di rilassamento - 14

teorema di Fourier - 5

velocità di fase: velocità di gruppo - 22

