

## IV.2 Le onde elastiche: grandezze fisiche e fenomeni tipici

- ⌘ Le proprietà dei mezzi elastici rispetto alle diverse sollecitazioni
- ⌘ Parametri caratteristici delle onde: intensità e velocità
- ⌘ Le onde sismiche e la struttura della Terra
- ⌘ Il suono e l'orecchio umano
- ⌘ Le onde stazionarie
- ⌘ L'effetto Doppler
- ⌘ I battimenti
- ⌘ Applicazioni biomediche e tecnologiche degli ultrasuoni
- ⌘ Quesiti di fine capitolo
- ⌘ Quesiti dalle Olimpiadi di Fisica
- ⌘ Problemi di fine capitolo

### 2.1 Le proprietà dei mezzi elastici rispetto alle diverse sollecitazioni

#### 2.1.1 LEGGE DI HOOKE E MODULO DI ALLUNGAMENTO O DI YOUNG

Come si è visto nella prima parte nel capitolo dedicato alla forza, per i corpi omogenei a struttura unidimensionale vale una legge di proporzionalità tra lo *sforzo* (o tensione) definito come forza per unità di superficie e l'*allungamento relativo*.

La costante di proporzionalità, detta *modulo di allungamento* o *modulo di elasticità*, o *modulo di Young*, è tipica di ogni materiale e si indica con la lettera *E*. Si scrive pertanto:

$$\sigma = E \varepsilon \tag{IV.2.1}$$

Poiché  $\varepsilon$  è un numero puro, il *modulo di Young* ha le dimensioni di  $\sigma$  (quelle di una pressione) e si rapporta in modo semplice ad altre costanti tipiche del materiale che riguardano sollecitazioni diverse da quella unidimensionale.<sup>1</sup>

#### 2.1.2 IL COEFFICIENTE DI POISSON CI INFORMA SULLE DEFORMAZIONI TRASVERSALI

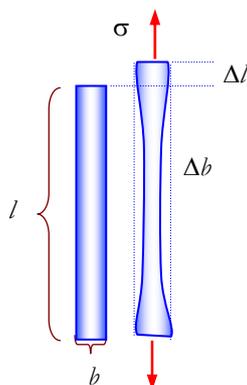
Quando un solido viene stirato o compresso in una sola direzione esso oltre che allungarsi (o contrarsi) si contrae (o si dilata) trasversalmente alla sollecitazione. Il rapporto tra le due deformazioni relative è una costante tipica del materiale ed è detto *modulo di Poisson* o *rapporto di Poisson* (visto che ha le dimensioni di un numero puro e non di uno sforzo). Se indichiamo con *l* la lunghezza del materiale considerato nel verso della sollecitazione e con *b* quella in direzione ortogonale avremo:

$$\nu = - \frac{\Delta b / b}{\Delta l / l} = \text{costante} \tag{IV.2.2}$$

Il segno meno viene introdotto per dare un valore positivo alla costante  $\nu$  tenuto conto che le due variazioni di dimensione hanno sempre segno contrario (in caso di stiramento il materiale contrae la sua sezione e viceversa in caso di compressione). Il modulo di Poisson, nel caso dei metalli prende valori compresi tra 0.2 e 0.4. Per esempio, nel caso del Ferro vale 0.29

Le due grandezze appena descritte, *modulo di Young* e *modulo di Poisson* sono importanti perché consentono di determinare i parametri elastici di un materiale sottoposto a sollecitazioni di natura volumetrica quali sono quelle relative alle onde elastiche sia longitudinali sia trasversali.

Nella tabella IV.II.1 sono riportati un po' di valori a puro titolo indicativo data la elevata variabilità nei valori reperibili presso le diverse fonti.



la deformazione laterale descritta dal **modulo di Poisson** è tra il 20 e 30% di quella di allungamento descritta dal **modulo di Young**

<sup>1</sup> In lingua inglese si usano i due termini *stress* e *strain*.

2.1.3 LE SOLLECITAZIONI VOLUMETRICHE NEI SOLIDI E NEI GAS

Consideriamo un elemento di volume  $V$  sottoposto ad una sollecitazione isotropa che potremo indicare liberamente o con il simbolo  $\sigma$  dello sforzo o come variazione di pressione  $\Delta p$  nel mezzo. Per effetto dello sforzo l'elemento di volume subirà una deformazione  $\Delta V$ . Anche in questo caso la deformazione relativa risulta proporzionale alla tensione e la costante di proporzionalità, tipica del materiale, è detta *modulo di comprimibilità*  $K$ .

$$\sigma = \Delta p = -K \frac{\Delta V}{V} \tag{IV.2.3}$$

Il *modulo di comprimibilità* interviene nel determinare la velocità di propagazione delle onde longitudinali ed esso risulta associato alle due costanti che sono state definite in precedenza, il modulo di Young e quello di Poisson. Attraverso l'uso di opportuni modelli si dimostra infatti che:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \tag{IV.2.4}$$

Tutti i materiali siano essi solidi o fluidi possiedono un proprio modulo di comprimibilità.

2.1.4 LE SOLLECITAZIONI DI TAGLIO

Un ultimo tipo di sollecitazione rilevante al fine dello studio delle onde elastiche di tipo trasversale è la *sollecitazione di taglio*. In questa sollecitazione zone adiacenti di uno stesso materiale vengono spinte a scorrere le une sulle altre da una tensione tangenziale (forza per unità di superficie)  $\tau$ .

Per sollecitazioni non troppo elevate si osserva ancora proporzionalità tra la tensione e la deformazione che, in questo caso, sarà descritta dal rapporto  $\Delta x / l$ . Ma tale rapporto che corrisponde alla tangente dell'angolo  $\Delta\theta$  di deformazione, per angoli piccoli, può essere identificata con l'angolo stesso e scriveremo pertanto:

$$\tau = G \Delta\theta \tag{IV.2.5}$$

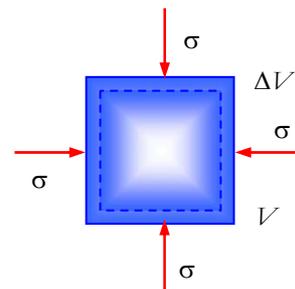
dove la quantità  $G$ , detta *modulo di taglio o modulo di elasticità tangenziale*, esprime una proprietà tipica del materiale.

La risposta elastica alla sollecitazione di taglio ha senso esclusivamente per i corpi solidi visto che nei fluidi non si ha opposizione allo scorrimento relativo ma si verifica semmai una forma di attrito interno descritto dalla viscosità.

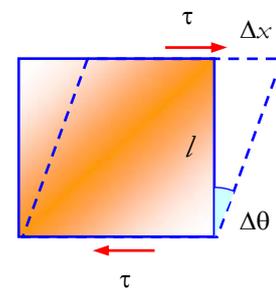
Anche il modulo di elasticità tangenziale risulta legato in maniera semplice ai moduli di Young e di Poisson. Per la precisione di dimostra che:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{IV.2.6}$$

Dunque i due moduli di elasticità che intervengono nei fenomeni di propagazione ondosa (quello di comprimibilità per le onde longitudinali e quello di taglio per le onde trasversali) hanno un rapporto che dipende esclusivamente dal modulo di Poisson cioè dal modo con cui un materiale sottoposto a compressioni o stiramenti tende a deformarsi lateralmente.



il modulo di comprimibilità dipende da quello di Young e da quello di Poisson



anche il modulo di taglio dipende da quello di Young e di Poisson

Tabella IV.2.1	E	ν	K	G
Materiale	10 <sup>9</sup> Pa		10 <sup>9</sup> Pa	10 <sup>9</sup> Pa
Acqua	==	==	2.2	==
Acciaio	200	0.34	167	81
Alluminio	70	0.34	71	26
Calcestruzzo	18-30	0.1-0.2		
Ferro	211	0.29	170	82
Ghiaccio	9	0.33		
Gomma	10 <sup>-4</sup> -10 <sup>-3</sup>	0.50	10 <sup>-4</sup> -10 <sup>-3</sup>	
Granito	25	0.2-0.3		
Ottone	91	0.35		30
Piombo	16	0.44	45	5.6
Platino	150	0.38		60
Polietilene	0.1-1.4	0.46		
Quarzo	52	0.37	14	30
Rame	130	0.34	142	40
Vetro	70	0.25	50-55	25-32

## 2.2 Parametri caratteristici delle onde: intensità e velocità

### 2.2.1 L'ONDA MONOCROMATICA AD UNA DUE E TRE DIMENSIONI

Nel capitolo precedente abbiamo imparato a maneggiare l'equazione delle onde armoniche e a riconoscerne i parametri caratteristici: ampiezza, frequenza, lunghezza d'onda, velocità di fase, numero d'onda.

Dal punto di vista pratico sono particolarmente significative alcuni tipi di onde che abbiamo già citato e che vengono ora riprese con maggiore dettaglio:

**Onde piane:** sono onde i cui fronti d'onda sono dei piani. Sono caratterizzate da direzioni di propagazione costituite da rette parallele e sono tipiche di onde che si propagano in 3 dimensioni. Un'onda piana si può ottenere in due modi: o sollecitando il mezzo con delle superfici piane (e in quel caso si ottengono onde longitudinali) oppure ponendosi a grande distanza da una sorgente puntiforme. Questa produce onde sferiche caratterizzate da raggi di propagazione divergenti. Ma quando provengono da molto lontano essi, con buona approssimazione, possono essere assimilati a paralleli.

Quando si passa da 3 a 2 o 1 dimensione si ottengono le *onde di superficie*<sup>2</sup> a fronte d'onda rettilineo e le *onde unidimensionali* a direzione di propagazione rettilinea (il fronte d'onda è un punto).

Tutti questi tipi di onde sono caratterizzati da una ampiezza costante (se si prescinde dall'assorbimento energetico da parte del mezzo) perché l'energia che esse trasportano va sempre ad occupare le stesse dimensioni spaziali.

**Onde sferiche:** sono onde i cui fronti d'onda sono superfici sferiche e per mantenere questa forma è necessario che il mezzo in cui si propagano sia isotropo. Se si passa a 2 dimensioni l'onda sferica si riduce all'onda di superficie con fronte d'onda circolare.

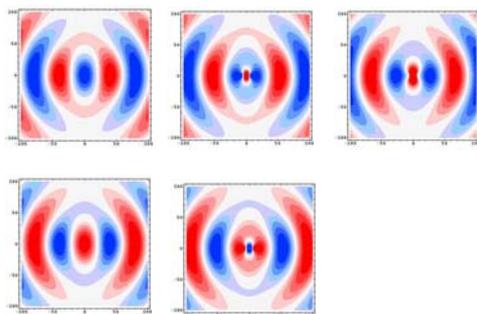
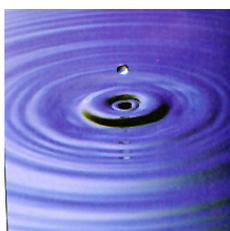
Rispetto alle precedenti le onde sferiche sono caratterizzate da una progressiva diminuzione di ampiezza (inversamente proporzionale alla distanza) dovuta al fatto che la stessa quantità di energia va progressivamente ad interessare porzioni più ampie. Ovviamente la stessa cosa accade per le onde circolari anche se cambia il tipo di dipendenza tra ampiezza e distanza.

### 2.2.2 AMPIEZZA E INTENSITÀ

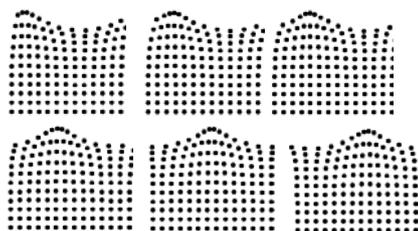
Nel capitolo precedente abbiamo discusso le caratteristiche energetiche dell'oscillatore armonico di massa  $m$ , frequenza angolare  $\omega$  e ampiezza di oscillazione  $A$ ; in particolare l'energia meccanica ad esso associata vale:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

Questa relazione può essere generalizzata al caso delle onde elastiche che si propagano in un mezzo continuo svolgendo considerazioni di tipo semiquantitativo che portano però a risultati corretti e che consentono



sequenza di generazione delle onde longitudinali sferiche di un'onda sonora



nelle onde sull'acqua si ha la composizione di due moti armonici orizzontali e verticali con traiettoria ellittica

<sup>2</sup> Le altre sono dette onde di volume.

di determinare la quantità di energia che un'onda porta con sé durante la sua propagazione.

Si chiama *intensità di un'onda* il rapporto tra la potenza di fronte d'onda che attraversa una porzione  $\Delta S$  e la superficie stessa.

$$I = \frac{P}{\Delta S} \quad (IV.2.7)$$



Come si nota dalla definizione la intensità è una grandezza indipendente da tipologia fisica e caratteristiche dell'onda e si misura sempre in  $W/m^2$ . A sua volta la potenza risulta calcolabile in maniera abbastanza semplice consentendo di determinare la relazione tra ampiezza e intensità di un'onda. Il legame è di tipo quadratico per tutti i tipi di onda e la determinazione della intensità ha il vantaggio di consentire considerazioni di natura energetica del tutto indipendenti dal fenomeno fisico associato all'onda.

Consideriamo una porzione  $\Delta S$  di fronte d'onda e un intervallo temporale  $\Delta t \gg T$  in modo di prescindere dalla variabilità dei fenomeni durante tale intervallo, chiediamoci quanto vale la potenza media che attraversa  $\Delta S$  durante l'intervallo tra  $t$  e  $t+\Delta t$ :

$$P = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t}$$

dove  $\Delta \mathcal{E}$  rappresenta la quantità di energia che attraversa la sezione nel tempo considerato. Ma tale quantità si può calcolare osservando che l'energia da determinare è quella che si trova localizzata nel volume  $\Delta V$  di area  $\Delta S$  e altezza  $v \Delta t$  dove  $v$  è la velocità di fase dell'onda. Basta pertanto calcolare la densità di energia e il problema è risolto.

Per calcolare la densità di energia estendiamo al mezzo continuo le proprietà dell'oscillatore armonico e ipotizziamo cioè che il mezzo sia costituito da tanti oscillatori armonici microscopici uniformemente distribuiti; ciò ci consente di calcolare la densità di energia  $\varepsilon$  come:

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{E}}{V} = \frac{1}{2V} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \delta \omega^2 A^2$$

dove si è indicata con  $\delta$  la densità del mezzo.

Si ha dunque (facendo intervenire la densità di energia  $\varepsilon$ ):

$$I = \frac{P}{\Delta S} = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t \Delta S} = \frac{\varepsilon \Delta V}{\Delta t \Delta S} = \frac{\varepsilon v \Delta t}{\Delta t} = \varepsilon v \quad (IV.2.8)$$

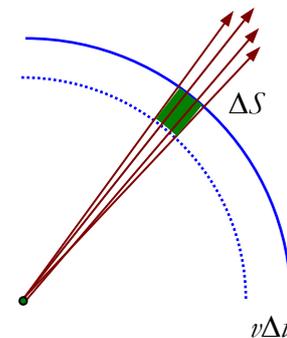
L'*intensità di un'onda* è data dal prodotto tra la velocità dell'onda e la densità di energia.<sup>3</sup>

Se poi teniamo conto della particolare espressione della densità di energia avremo che:

$$I = \frac{1}{2} \delta v \omega^2 A^2 \quad (IV.2.9)^4$$

<sup>3</sup> Il risultato è del tutto generale e vale per qualsiasi onda.

<sup>4</sup> Questo risultato non vale per le onde elettromagnetiche che si propagano nel vuoto ma rimane vera la dipendenza dal quadrato della frequenza, dalla velocità e dal quadrato della ampiezza. Per trovare cosa debba prendere il posto di  $\delta$  basta svolgere un esercizio di calcolo dimensionale.



relazione tra intensità ampiezza e frequenza

$$I = \varepsilon v = \frac{1}{2} \delta v \omega^2 A^2$$

l'intensità è proporzionale al quadrato della ampiezza e della frequenza



e cioè l'intensità è proporzionale al quadrato della ampiezza e della frequenza oltre che alla velocità al primo grado.

La relazione tra ampiezza e distanza per le onde sferiche e circolari è una immediata conseguenza di quanto appena visto.

In effetti, se si prescinde da fenomeni di attenuazione da parte del mezzo, la intensità relativa ad una stessa potenza risulta inversamente proporzionale alla superficie e pertanto:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (\text{IV.2.10})$$

Questa legge nota come *legge dell'inverso quadrato della distanza* regola tutti i processi di attenuazione connessi alla propagazione ondosa in ogni campo ed ha ripercussioni immediate su problematiche di inquinamento o di valutazione della distanza di una sorgente in base alla intensità che riceviamo da essa.

Poiché l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza avremo anche che l'ampiezza di un'onda sferica decresce in maniera inversamente proporzionale alla distanza.<sup>5</sup>

### 2.2.3 VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE DI UN'ONDA AD UNA DIMENSIONE

Sino ad ora abbiamo parlato della esistenza di una *velocità di propagazione* senza preoccuparci di stimarne né un ordine di grandezza né i parametri da cui essa dipende. Si intuisce in prima approssimazione che la velocità venga a dipendere dalle caratteristiche di elasticità del mezzo e dalla inerzia del mezzo stesso; ma che caratteristiche ha tale dipendenza?

Nel caso di un'onda trasversale unidimensionale che si propaghi lungo una fune caratterizzata da tensione  $T$  e da densità lineare  $\xi$ <sup>6</sup> la velocità risulta essere pari a:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\xi}} \quad (\text{IV.2.11})$$

La deduzione della (IV.2.11) può essere effettuata in maniera relativamente semplice sia ricorrendo a considerazioni dimensionali sia applicando la II legge della dinamica. Lasciamo al lettore il compito di svolgere la deduzione dimensionale per esercizio e vediamo come si opera con la II legge.

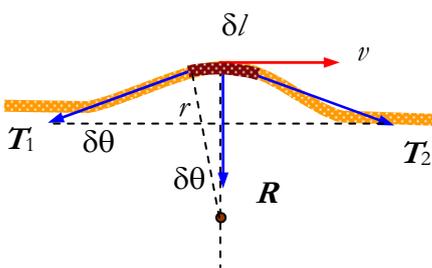
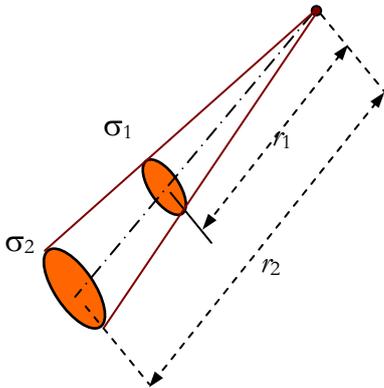
Consideriamo una porzione elementare di impulso di lunghezza  $\delta l$  che viaggi lungo la fune come in figura. Tale porzione presenta una massa  $\delta m = \xi \delta l$  e si muove sotto l'azione delle due tensioni  $T_1$  e  $T_2$  di modulo  $T$  la cui somma vettoriale  $R$  ha modulo  $2T \sin \theta$ ; essa è dunque soggetta ad una accelerazione centripeta  $a = \frac{v^2}{r}$  dove  $r$  rappresenta il raggio di curvatura dell'impulso nel punto considerato.

Se applichiamo la II legge della dinamica avremo dunque:

<sup>5</sup> Lasciamo al lettore come utile esercizio di autoverifica il compito di precisare cosa accade nel caso delle onde circolari di superficie.

<sup>6</sup> La densità lineare, cioè la *massa per unità di lunghezza*, si indica solitamente con la lettera  $\lambda$  ma, nel caso delle onde, il simbolo è già stato utilizzato per la lunghezza d'onda e pertanto useremo la lettera greca  $\xi$  (csi).

legge dell'inverso quadrato della distanza



propagazione di un impulso lungo una fune

$$v = \sqrt{\frac{T}{\xi}}$$

$$2T \sin \delta\theta = \xi \delta l \frac{v^2}{r}$$

Ma se il segmento ha dimensioni infinitesime si ha  $\sin \delta\theta \approx \delta\theta = \frac{1/2 \delta l}{r}$  e pertanto si ottiene:

$$2T \frac{\delta l}{2r} = \xi \delta l \frac{v^2}{r}$$

da cui semplificando si ottiene il risultato previsto.

La (IV.2.11) è interessante da due punti di vista:

- sul piano teorico perché abbiamo trovato (come previsto) che la velocità dipende dal rapporto tra un termine che esprime la sollecitazione elastica e un termine inerziale
- sul piano pratico perché nel caso di oscillazioni di fune vincolate negli estremi (in cui la lunghezza d'onda è vincolata dalla lunghezza della fune) si ottengono velocità diverse e dunque frequenze diverse o cambiando lo spessore delle funi (cambia  $\xi$ ) o aumentando attraverso opportuni tiranti, la tensione delle corde (come accade nella chitarra e in tutti gli strumenti musicali a corda vibrante).



### Calcolo della velocità di propagazione in un cavo

*Esercizio:* Un cavo di acciaio armonico del diametro di 0.75 mm viene teso attraverso l'azione della gravità su una massa  $m = 2.50$  kg. Determinare la velocità di propagazione degli impulsi lungo il cavo sapendo che la densità dell'acciaio armonico vale  $\delta = 7.8$  kg/dm<sup>3</sup>



Per determinare la densità lineare dell'acciaio armonico osserviamo che:

$$m = \delta V = \xi l$$

e pertanto (indicata con  $\sigma$  la sezione del filo) si ha:  $\delta \sigma l = \xi l$ . Dunque  $\xi = \delta \sigma$  (attenzione alle unità di misura!).

$$\xi = \delta \sigma = 7.8 \times 10^3 \times \pi (0.375 \times 10^{-3})^2 = 3.45 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$$

$$\text{La tensione } T = mg = 2.50 \times 9.806 = 24.5 \text{ N}$$

$$\text{Pertanto } v = \sqrt{\frac{T}{\xi}} = \sqrt{\frac{24.5}{3.45 \times 10^{-3}}} = 84.3 \text{ m/s}$$



### 2.2.4 VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE DI UN'ONDA DI VOLUME

Le onde di volume si propagano all'interno dei mezzi elastici con velocità che vengono a dipendere esclusivamente dai moduli di elasticità e dalla densità.

Per le onde longitudinali si ha:

$$v_p = \sqrt{\frac{K + 4/3 G}{\rho}} \tag{IV.2.12}$$

mentre per le onde trasversali:

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{IV.2.13}$$

la velocità delle onde di volume dipende dalla densità e dai moduli di elasticità  
le onde longitudinali viaggiano più velocemente di quelle trasversali

Sono stati utilizzati, come si fa convenzionalmente in sismologia, i due suffissi P(per Primarie) e S (per Secondarie). Infatti, come si nota dalle relazioni, le onde longitudinali hanno una velocità di propagazione più alta delle trasversali e pertanto raggiungono i sismografi per prime.

Nel caso dei gas e dei liquidi le onde trasversali non si propagano (si annulla il coefficiente di rigidità) mentre la velocità di propagazione delle onde longitudinali assume una forma particolarmente significativa se si tiene conto della equazione del gas perfetto.

Le trasformazioni termodinamiche che avvengono in un gas nel corso della propagazione ondosa sono di tipo adiabatico a causa della rapidità delle variazioni (la velocità di propagazione ondosa ha, come vedremo, lo stesso ordine di grandezza delle velocità molecolari di tipo random).

Pertanto per calcolare la *velocità di propagazione* dovremo valutare la quantità  $K = -\delta p \frac{V}{\delta V}$  nel caso di trasformazioni adiabatiche.

Attraverso calcoli di analisi matematica che indichiamo in nota si dimostra che nella trasformazione adiabatica caratterizzata dal rapporto  $\gamma$  tra i calori specifici, vale la relazione:  $\frac{\delta p}{p} = -\gamma \frac{\delta V}{V}$  <sup>7</sup> che consente di correlare  $K$  alla pressione perché  $-\delta p \frac{V}{\delta V} = \gamma p$

Pertanto

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p V}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma n R T}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma M 10^3 R T}{M \mu}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{10^3 \gamma R T}{\mu}} \tag{IV.2.14}$$

Nel caso dell'aria se si tiene conto della densità in condizioni standard (0° C e 1 atm) e del valore di  $\gamma$  si ha:

$$v = \sqrt{\frac{1.417 \times 1.013 \times 10^5}{1.293}} \approx 333 \text{ m/s}$$

A temperatura ambiente diminuisce leggermente la densità (trasformazione isobara) e si ottiene un valore di velocità intorno ai 343 m/s.

### 2.2.5 DA COSA DIPENDE LA VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE: CONSIDERAZIONI DI NATURA DIMENSIONALE

Le relazioni che consentono di determinare la *velocità di propagazione* delle onde possono essere determinate, a meno di costanti moltiplicative adi-

<sup>7</sup> Per l'equazione di Poisson si ha  $(p+\delta p)(V+\delta V)^\gamma = pV^\gamma \Leftrightarrow$

$pV^\gamma \left(1 + \frac{\delta p}{p}\right) \left(1 + \frac{\delta V}{V}\right)^\gamma = pV^\gamma \Leftrightarrow \left(1 + \frac{\delta p}{p}\right) \left(1 + \frac{\delta V}{V}\right)^\gamma = 1$  ma poiché  $\frac{\delta V}{V}$  è un infinitesimo il binomio  $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$  a meno di infinitesimi di ordine superiore e nel nostro caso si ottiene:

$\left(1 + \frac{\delta p}{p}\right) \left(1 + \gamma \frac{\delta V}{V}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\delta p}{p} + \gamma \frac{\delta V}{V} = 0$  (dove si è trascurato il prodotto di due infinitesimi) ☺

onde longitudinali in un gas

$$v = \sqrt{\frac{10^3 \gamma R T}{\mu}}$$


mensionali attraverso il principio di omogeneità delle grandezze presentato nel capitolo 0.

Consideriamo dunque un'onda di volume che si propaga in un mezzo elastico e ipotizziamo che la velocità di propagazione dipenda dalla densità (che ci informa sulle caratteristiche inerziali del mezzo) e dai coefficienti di elasticità che, come sappiamo, hanno le dimensioni di una pressione. Indichiamo tali coefficienti, genericamente con la lettera  $E$  (anche se di volta in volta si tratterà del modulo di comprimibilità (onde longitudinali) o del modulo di taglio (onde trasversali)).

La relazione che cerchiamo sarà dunque del tipo

$$v = \alpha \rho^\beta E^\gamma$$

dove  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sono 3 costanti adimensionali e ci proponiamo di determinare  $\beta$  e  $\gamma$  imponendo che l'equazione rappresenti una velocità.

Dovrà essere pertanto:

$$[\rho^\beta E^\gamma] = L T^{-1}$$

$$[ML^{-3}]^\beta [FL^{-2}]^\gamma = M^\beta L^{-3\beta} [MLT^{-2}L^{-2}]^\gamma = M^\beta L^{-3\beta} M^\gamma L^\gamma T^{-2\gamma} L^{-2\gamma} = M^{\beta+\gamma} L^{-3\beta-\gamma} T^{-2\gamma}$$

Affinché la espressione corrisponda ad una velocità dovrà essere:

$$\beta + \gamma = 0 \wedge -3\beta - \gamma = 1 \wedge -2\gamma = -1$$

Da ciò segue che:

$\gamma = 1/2 \wedge \beta = -1/2$  mentre, come si vede la II equazione è automaticamente soddisfatta (segno che la velocità non dipende da altre grandezze e cioè che l'ipotesi fatta è corretta).

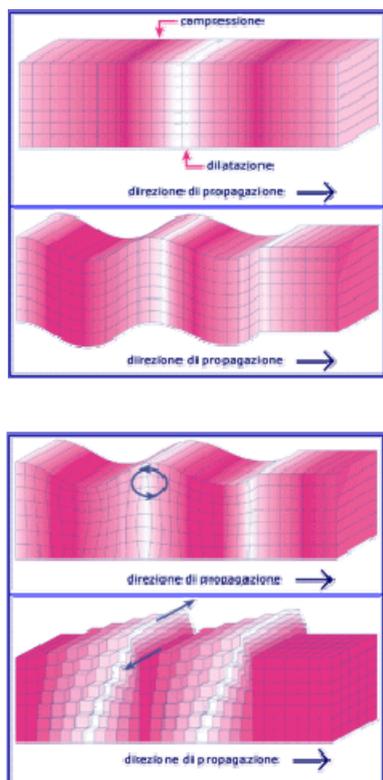
Dunque:

$$v = \alpha \rho^\beta E^\gamma = \alpha \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$



Naturalmente con questo metodo non siamo in grado di trovare se al posto del modulo di comprimibilità si dovrà porre una relazione più complessa che sia dimensionalmente equivalente; per trovare relazioni come la (IV.2.13) e la (IV.2.14) dovremmo ricorrere a modelli più complessi ed applicare le leggi della meccanica, cosa che non faremo in questa sede.

## 2.3 Le onde sismiche e la struttura della Terra



### 2.3.1 CLASSIFICAZIONE DELLE ONDE SISMICHE

Le *onde sismiche* si dividono in due categorie:

- quelle superficiali responsabili dei fenomeni distruttivi
- quelle di volume che attraverso le reti dei sismografi vengono utilizzate sia per individuare la localizzazione del sisma, sia per indagare e approfondire le nostre conoscenze sulla struttura della Terra.

Le onde di volume si generano in corrispondenza dell'epicentro del sisma e sono di due tipi:

- le *onde P* (primarie) sono onde longitudinali di compressione delle rocce, hanno velocità dell'ordine di 8-10 km/s e si chiamano così perché arrivano per prime.
- Le *onde S* (secondarie) sono onde trasversali e pertanto non si propagano nei fluidi. Dalle equazione (IV.2.12-13) possiamo osservare che, fissate le caratteristiche delle rocce è il rapporto di Poisson a determinare il valore inferiore della velocità che, grosso modo va come  $1/\sqrt{3}$

Quando le onde di volume raggiungono la superficie terrestre esse generano altri due tipi di onde:

- Le *onde di Rayleigh* (simili alle onde che si generano lanciando un sasso in acqua) sono caratterizzate da un movimento ellissoidale e retrogrado rispetto alla direzione di propagazione.
- Le *onde di Love* che sono onde trasversali di taglio

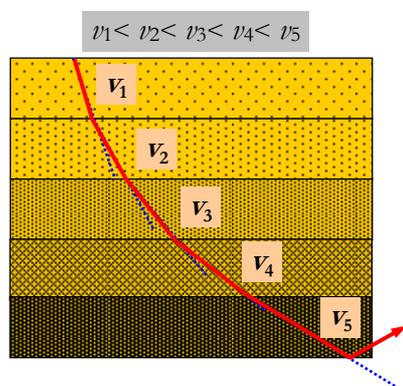
### 2.3.2 PRIME CONSIDERAZIONI SU RIFLESSIONE E RIFRAZIONE DELLE ONDE ELASTICHE

Nel prossimo capitolo dedicati alle leggi dell'ottica geometrica studieremo con un certo dettaglio il comportamento della luce in corrispondenza della superficie di separazione tra due mezzi ed esamineremo a fondo i due fenomeni della riflessione e della rifrazione.<sup>8</sup>

L'elemento principale da considerare è la velocità di propagazione la quale, a sua volta, è determinata dalle caratteristiche del mezzo (aspetti inerziali descritti dalla densità) e aspetti di resistenza elastica (descritti dai moduli di compressione e di taglio).

Quando un'onda elastica si propaga in un mezzo le cui caratteristiche cambiano, al crescere della velocità il fronte d'onda *non si propaga più in linea retta* ma tende a seguire linee curve con la direzione di propagazione che forma angoli via via crescenti con la normale e il fronte che tende a *disporsi parallelamente alla linea di discontinuità*.

Avviene una *rifrazione continua* caratterizzata da percorsi curvilinei che ad un certo punto determinano addirittura la *riflessione totale* dell'onda.



al crescere della velocità, per rifrazione, le onde curvano la loro traiettoria e tendono a minimizzare i tempi di percorrenza in accordo con il principio di Fermat

<sup>8</sup> Per lo studio delle onde sismiche è sufficiente limitarsi agli aspetti di natura qualitativa ed in particolare alla tendenza delle onde elastiche, man mano che la loro velocità diminuisce, a disporsi con il fronte d'onda parallelo alla linea di discontinuità.

### 2.3.3 L'APPLICAZIONE DELLE ONDE SISMICHE ALLO STUDIO DELLA STRUTTURA DELLA TERRA

I terremoti e, successivamente, esplosioni artificiali tra cui quelle atomiche sperimentali nei primi anni della guerra fredda, ci hanno dato la possibilità di indagare la struttura della Terra giungendo ad inferirne densità, composizione chimica e stato di aggregazione attraverso l'utilizzo combinato delle osservazioni sulla propagazione delle onde sismiche e delle leggi della fisica che abbiamo in parte esposto.

Le osservazioni si ottengono attraverso una rete di *sismografi* che sono in grado di registrare la intensità, la tipologia e i tempi di arrivo di un insieme di onde prodotte simultaneamente in un dato punto in occasione di un evento sismico.

I sismografi sono collocati lungo la superficie terrestre; essi sono costituiti da masse oscillanti dotate di un sistema di scrittura e registrazione. Quando si verifica un evento sismico il sismografo registra l'evento (come nelle immagini della pagina successiva) e dalla osservazione del sismogramma si distinguono bene le onde P (che arrivano prima e sono onde longitudinali di compressione) e le onde S (che arrivano successivamente e sono onde trasversali di taglio).

I diversi sismografi registrano con precisione l'ora di arrivo necessaria per determinare il tempo di percorrenza che, a sua volta, consentirà di fare ipotesi sul percorso seguito dall'onda entro la Terra.

Le onde P e S, a partire dall'epicentro del terremoto subiscono tutte una rifrazione seguita dalla riflessione totale delle onde P entro un angolo di 105°. Le onde S incontrano una zona liquida e dunque non si propagano. Oltre l'angolo di 105° si crea una zona d'ombra sino a 140° quando si ritrovano le onde riflesse dalla superficie del nucleo solido.

Le onde trasversali S oltre che giungere in ritardo, quando raggiungono la zona di separazione tra mantello e nucleo, non riescono a penetrare nel nucleo liquido e pertanto agli antipodi si trovano solo onde longitudinali o onde trasversali secondarie generate nel successivo punto di discontinuità.

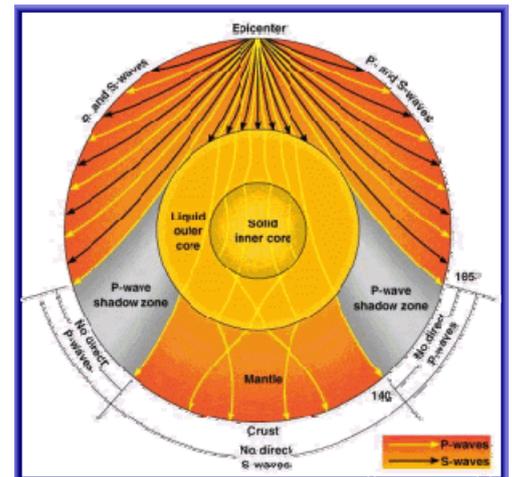
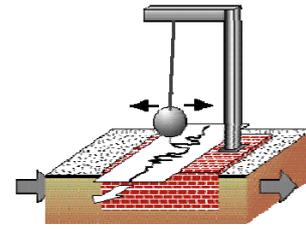
Dalle indagini di tipo sismico si arriva alla compilazione di tabelle quali la IV.2.2 in cui si riportano la densità e la velocità di propagazione delle onde sismiche in funzione della profondità.

A queste tabelle vengono poi fatti corrispondere modelli relativi a composizione e stato di aggregazione delle diverse zone.

Si osservi che al crescere della profondità aumentano sia la densità sia la velocità di propagazione ad indicare un maggiore peso dei moduli di elasticità rispetto alla densità.

Nel 1909 il sismologo Andrija Mohorovich, studiando i sismogrammi relativi a un terremoto avvenuto in Croazia, scoprì che, a circa 60 km di profondità, la velocità delle onde sismiche aumentava improvvisamente. Ciò indicava un brusco cambiamento delle proprietà fisiche delle rocce. Così fu scoperta la discontinuità di Mohorovich, corrispondente al passaggio dalla crosta al mantello.

Pochi anni dopo fu rilevato che le onde S non riuscivano ad attraversare la parte più interna della Terra. Poiché le onde S possono attraversare solo i solidi, si giunse alla conclusione che la Terra possedesse un nucleo costituito da materiali fluidi.

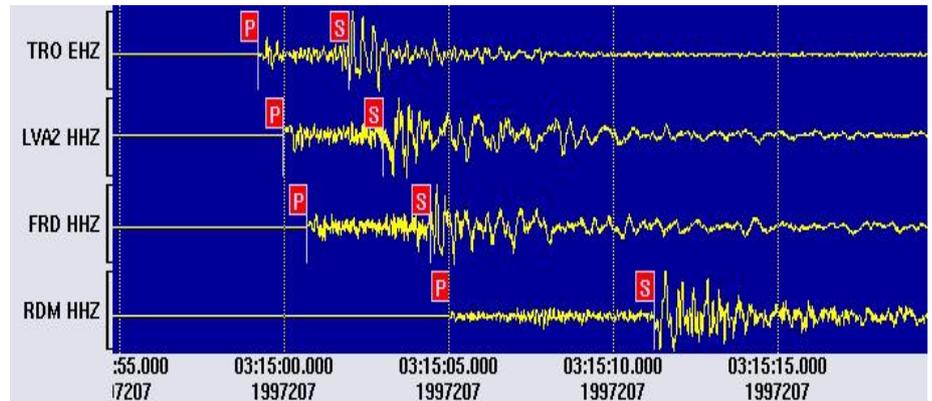


Le onde P vengono rifratte entro un angolo di 103°; tra 105 e 140° si ha una **zona d'ombra dovuta alla riflessione totale** sulle due superfici del nucleo liquido e di quello solido.

Le onde S non riescono a propagarsi nel nucleo che si trova dunque allo stato liquido.

Profond. km	densità, kg/dm <sup>3</sup>	V <sub>p</sub> km/s	V <sub>s</sub> km/s
0.0	1.030	1.500	0.0
3.0	2.802	6.000	3.550
3.0	1.030	1.500	0.0
14.0	2.902	6.500	3.750
14.0	2.802	6.000	3.550
19.0	3.310	7.934	4.654
19.0	2.902	6.500	3.750
420.0	3.768	9.554	5.052
420.0	3.553	8.967	4.806
670.0	4.377	10.928	6.114
670.0	4.077	10.038	5.417
2'885.3	9.909	8.002	0.0
2'885.3	5.550	13.732	7.243
5'153.9	12.704	11.091	3.439
5'153.9	12.139	10.258	0.000
6'371	13.012	11.241	3.565

Le incertezze maggiori riguardano la parte interna del nucleo, detta nucleo interno, che si suppone sia solido a causa degli altissimi valori che la pressione raggiunge a quella profondità.



esempi di sismogrammi con visibilità delle onde P ed S e i tempi di arrivo presso le diverse stazioni che consentono di ricostruire a posteriori il percorso delle onde

### Utilizzo delle onde sismiche per individuare un terremoto

*Esercizio:* un sisma avviene in un certo punto G e le onde P e S raggiungono un sismografo che si trova in A con un certo ritardo temporale tra di esse riscontrabile dal sismogramma della figura qui sopra. Conoscendo le velocità medie di propagazione delle onde come si risale alla distanza AG? Come si può utilizzare questa informazione per individuare il punto G?

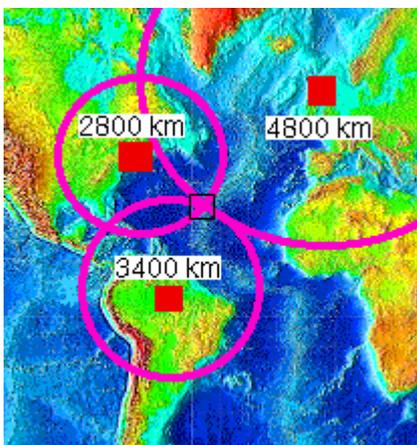
☹

$$t_p = \frac{AG}{v_p} \text{ e } t_s = \frac{AG}{v_s} \text{ pertanto } \Delta t = t_s - t_p = AG \left( \frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_p} \right) \text{ e infine:}$$

$$AG = \frac{\Delta t}{\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_p}}$$

Basta ora utilizzare, invece che una singola stazione sismica, il risultato di tre di esse (tre e non due perché si sta operando su una sfera e dunque si è in tre dimensioni) per tracciare con centro nella stazione sismica tre sfere di raggio AG e il punto di intersezione determinerà la posizione del sisma.

☺



### La zona del silenzio dovuta alla rifrazione continua della atmosfera

*Esercizio:* Accade a volte che un suono prodotto in un punto A della superficie terrestre raggiunga un punto B ma che tra A e B si venga a creare una *zona di silenzio*. Spiegare questo fenomeno attraverso la *rifrazione continua* prodotta in atmosfera dal gradiente termico. Come deve essere il gradiente affinché il fenomeno si verifichi?

☹



In base alla (IV.2.14) la velocità di propagazione del suono in aria è proporzionale a  $\sqrt{T}$  e pertanto se per qualche ragione si determina un gradiente termico positivo la velocità di propagazione cresce con la quota e le onde sonore tendono a disporsi come in figura per effetto della *rifra-*

zione continua sino a determinare una riflessione totale e a seguire poi una traiettoria simmetrica.

Il risultato è la creazione di una zona d'ombra.



### 2.3.4 ATTENUAZIONE DI INTENSITÀ DOVUTA ALL'ASSORBIMENTO DI ENERGIA DA PARTE DEL MEZZO

I mezzi quando partecipano al processo di trasmissione ondosa non si limitano a svolgere la funzione di agenti della trasmissione; una quota dell'energia dell'onda viene infatti assorbita dal mezzo e si ha dunque una *attenuazione* del fenomeno analoga a quella che abbiamo già discusso a proposito della attenuazione al trascorrere del tempo per le oscillazioni.

E' realistico affermare che data una intensità  $I$  la attenuazione  $\delta I$  nell'attraversare uno spessore di materiale  $\delta x$  sia proporzionale a  $I$  e a  $\delta x$ . La costante di proporzionalità  $\mu$  è detta coefficiente di attenuazione e si scrive (tenendo conto che  $\delta I$  è negativo):

$$\delta I = - \mu I \delta x \tag{IV.2.15}$$

L'equazione può essere integrata come si è già fatto per altre equazioni analoghe e si trova:

$$I = I_0 \exp(-\mu x) = I_0 \exp(-x/\tilde{x}) \tag{IV.2.15 bis}$$

dove si è posto  $\tilde{x} = \frac{1}{\mu}$  e  $\tilde{x}$  indica lo spessore che riduce la intensità a  $1/e$ .

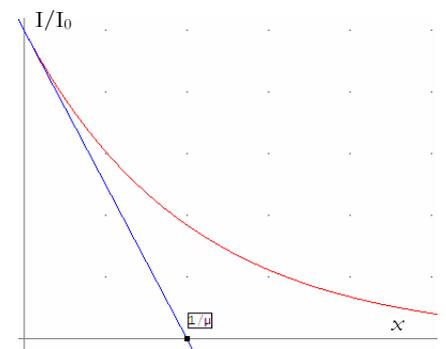
In tutti i processi di attenuazione si utilizza però il concetto di *strato equivalente*, pari allo spessore che riduce la intensità alla sua metà. Se si pone  $I/I_0 = 1/2$  si ottiene

$$x_{1/2} = \ln 2 \tilde{x} = \frac{\ln 2}{\mu} \tag{IV.2.15 ter}$$

Il *fattore di attenuazione*, tipico del materiale, da cosa dipende?

Per molti materiali si ha che  $\mu \propto \omega^2$  ovvero l'assorbimento cresce con legge quadratica con la frequenza e nel caso dell'aria la costante di proporzionalità vale  $4 \cdot 10^{-11} \text{ sec}^2/\text{m}$ .

Va ulteriormente precisato che esistono però particolari frequenze per le quali l'assorbimento si impenna a causa di fenomeni di risonanza.



## 2.4 Il suono e l'orecchio umano

### 2.4.1 LA PRODUZIONE DEL SUONO E LA PERCEZIONE SONORA

Il termine suono e onda sonora si riferisce originariamente ai fenomeni che interessano la percezione legata all'organo dell'udito; ma questo tipo di approccio è certamente da considerare superato a favore della indagine che riguarda il comportamento delle onde elastiche in un range di frequenze corrispondenti a quelle percepibili dall'orecchio umano in aria. Ovviamente sono considerati interessanti anche tutti i fenomeni di frontiera (range di altri mammiferi, onde sonore entro mezzi diversi dall'aria, ...).

L'onda sonora viene generata quando un oggetto vibrante esegue le sue oscillazioni in presenza di un gas che, a sua volta inizia a vibrare con la stessa frequenza trasportando a distanza l'energia associata al fenomeno oscillatorio.

Questa onda viene poi decodificata attraverso un *organo di senso* che, nel caso dell'uomo, presenta le caratteristiche indicate in figura.

L'onda sonora viene raccolta dal *padiglione auricolare* ❶ e inviata verso il *timpano* ❸ dal *condotto auricolare* ❷. La funzione del padiglione oltre che legata alla necessità di raccogliere il massimo di energia è quella di indurre attraverso una serie di riflessioni dei piccoli sfasamenti tra le diverse componenti dell'onda. In questo modo il sistema nervoso centrale viene informato sulla direzione di provenienza dell'onda.

Il condotto auricolare si comporta come una cassa armonica aperta su un lato e chiusa sull'altro dalla membrana timpanica. Tutto ciò consente la creazione di *onde stazionarie* caratterizzate (grosso modo) da una lunghezza d'onda pari a  $4l$  dove con  $l$  si indica la lunghezza del condotto.

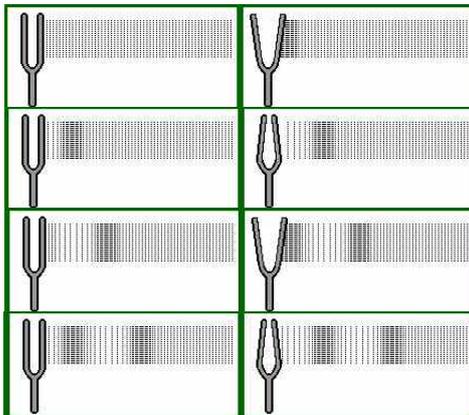
Se si tiene conto che la velocità del suono in aria è di circa 340 m/s e che il condotto auricolare è lungo circa 2.5 cm si ha che la frequenza corrispondente alla condizione di risonanza per l'orecchio umano vale:

$$v = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4l} = \frac{340}{0.1} \approx 3400 \text{ hz}$$

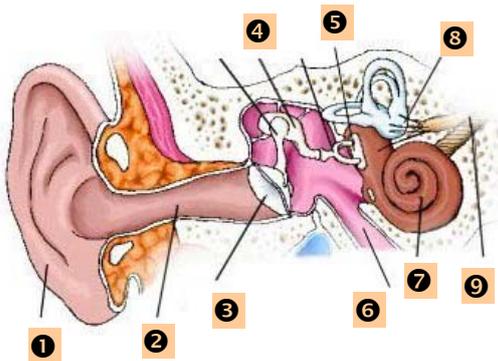
Ecco spiegata la ragione per la quale l'orecchio umano presenta la sua massima sensibilità intorno ai 3000 hz ed ecco perché i bambini piccoli sono disturbati poco, nel loro sonno, dalla voce umana. La loro frequenza di risonanza è più elevata a causa delle ridotte dimensioni del canale e pertanto essi sono sensibili a suoni più acuti anche se di debole intensità.

La membrana timpanica ❸ ha la funzione di un trasduttore che serve a separare fisicamente l'orecchio esterno dall'orecchio medio dove sono presenti organi delicati. Inoltre, grazie alla sua elasticità esso modifica dinamicamente le dimensioni del canale auricolare e ciò ci consente di avere una buona percezione sonora in un range di frequenze abbastanza largo.

Al di là della membrana timpanica inizia l'*orecchio medio* che è collegato alla cavità orale attraverso la *tuba di Eustachio* ❹ (questo collegamento consente l'adattamento della pressione dell'orecchio medio alle variazioni di pressione esterna la qual cosa avviene, per esempio, quando si sbadiglia).

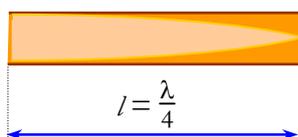


successione di compressioni e rarefazioni prodotte dalle oscillazioni dei rebbi di un diapason con generazione di una onda sonora



l'orecchio esterno, medio e interno

1) padiglione 2) condotto auricolare 3) membrana timpanica 4) ossicini 5) finestra orecchio interno 6) tuba di Eustachio 7) chiocciola 8) canali semicirculari 9) nervo acustico



Il condotto auricolare ha una lunghezza tale da creare condizioni di risonanza intorno ai 3 kHz

L'orecchio medio è costituito da un amplificatore meccanico delle variazioni di pressione costituito da 3 *ossicini* (martello, incudine e staffa) ④. Il martello riceve le vibrazioni del timpano e la staffa le comunica come oscillazioni di pressione sulla finestra ovale ⑤ dell'orecchio interno.

La funzione dell'*orecchio interno* è quella di compensare con un poderoso aumento delle variazioni di pressione (da 60 a 100 volte) la diminuzione di ampiezza che si avrebbe a causa del cambiamento di mezzo (da aria ad un liquido acquoso). Infatti, come si è visto  $I = \frac{1}{2} \delta v \omega^2 A^2$ , e dunque a parità di intensità e di frequenza la ampiezza risulta inversa mente proporzionale alla radice della densità e della velocità che crescono nel passaggio aria acqua.

L'aumento di pressione è dovuto al fatto che la leva costituita dai 3 ossicini ha un proprio guadagno cui si somma il fatto che l'area del timpano è circa 20 volte superiore a quella della finestra ovale su cui inizia l'orecchio interno.

L'*orecchio interno* è costituito da una *chiocciola ossea* ⑦ e da 3 *canali semicircolari* mutuamente ortogonali ⑧; ad entrambi si connette il *nervo acustico* ⑨.

I canali semicircolari sono riempiti da un liquido e portano dei sensori che decodificando le onde di pressione generate dai movimenti della testa consentono di gestire il senso dell'equilibrio. I 3 canali semicircolari non partecipano alla gestione dell'udito che avviene invece nella *coclea* ⑩

All'interno della coclea che ha uno sviluppo complessivo di 35 mm è presente il sistema dei sensori che non descriviamo trattandosi di un argomento di fisiologia ed analizziamo invece gli aspetti di natura fisica. 10 Nella coclea si realizzano i seguenti processi che, difficilmente, possono essere considerati secondari rispetto alle funzioni cerebrali alte:

- ❑ amplificazione selettiva di suoni di intensità diversa in modo di percepire bene entrambi
- ❑ soppressione di segnali sporchi in vicinanza di un segnale principale
- ❑ accentuazione della amplificazione nella fase di attacco in modo di risvegliare l'attenzione nei confronti della novità e in maniera complementare soppressione di toni vicini quando un segnale cessa in modo di evidenziarne in modo netto la fine
- ❑ attività di controllo degli stimoli giunti al cervello e da questo rimandati ai sensori locali

### 2.4.2 I CARATTERI DISTINTIVI DEL SUONO E LA MUSICA

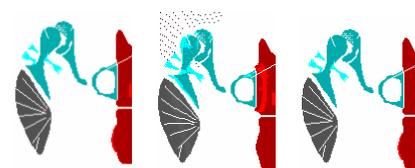
Come abbiamo già visto nel capitolo precedente le onde raramente si presentano nella forma pura delle armoniche e sono invece costituite dalla sovrapposizione di armoniche di diversa frequenza ed ampiezza.

Nella analisi del suono si distinguono:

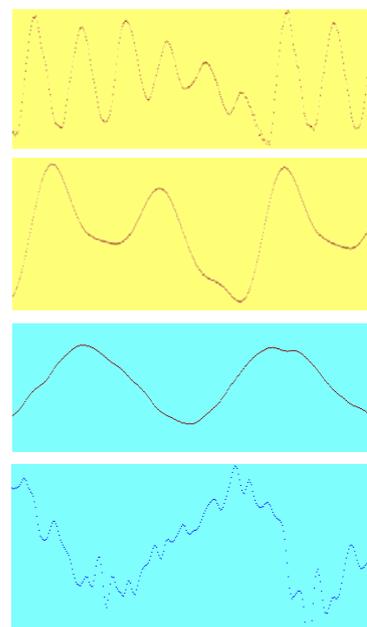
- i *suoni puri* (generati dalle vibrazioni dei rebbi del diapason),

<sup>9</sup> Nome latino della chiocciola.

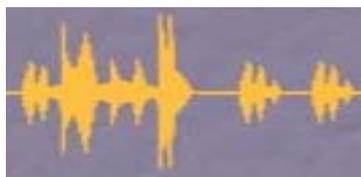
<sup>10</sup> Si veda, per maggiori dettagli l'ipertesto a cura dell'IRRSAE del Veneto all'indirizzo <http://www.sissa.it/bp/Cochlea/index.html>



I 3 ossicini dell'orecchio medio (martello, incudine e staffa) costituiscono un poderoso amplificatore meccanico di pressione che controbilancia la elevata impedenza di ingresso che si ha alla superficie di separazione tra aria e liquido



con un microfono e un Pc ci si può divertire ad analizzare il suono; nell'ordine le vocali a ed u dell'autore seguite dal suono di una chitarra e da quello di un sax



la voce umana: andamento nel tempo e distribuzione della ampiezza in frequenza

- le sovrapposizioni di *suoni puri* (caratterizzate dal possedere un carattere periodico definito, per esempio quelli generati dagli strumenti musicali o le vocali della voce umana)
- i suoni più complessi che, pur trasmettendo informazione, non presentano se non su intervalli temporali molto brevi, una qualche forma di periodicità perché le armoniche componenti non stanno in rapporti di frequenza armonici (cioè non sono multipli di una frequenza fondamentale).

Per quanto riguarda la classificazione qualitativa del suono si utilizzano tre concetti: la *intensità* che ci informa della ampiezza della vibrazione correlata, la *altezza* che viene correlata alla frequenza, il *timbro* che viene correlato alla forma d'onda e dunque alla presenza, accanto alla armonica principale di altre armoniche multiple di essa. Gli strumenti musicali producono le medesime note con timbri diversi.

Le nostre conoscenze sullo studio delle caratteristiche del suono risalgono in larga misura all'ottocento ma alcune caratteristiche sono nettamente anteriori. Per esempio i fondamenti delle conoscenze che hanno portato alla costruzione delle scale musicali sono dovute ai pitagorici. Essi fondavano le loro affermazioni sulla convinzione che la *natura è numero* e sulla scoperta che corde vibranti emettevano suoni gradevoli solo in corrispondenza di determinate lunghezze della corda; tale gradevolezza, in presenza di sovrapposizione di suoni diversi, risultava accentuata quando i rapporti delle corde che li generavano stavano tra loro come rapporti di numeri interi semplici.

La prima *scala musicale*, detta pitagorica, ha un'origine in parte fisica e in parte numerologica. L'origine fisica si fonda sulla generazione di suoni ottenuti attraverso strumenti a corda facendo variare la lunghezza della corda secondo rapporti numerici semplici alla ricerca di una qualche forma di ripetitività oltre che di gradevolezza.

Operando in questo modo si arriva a definire una scala musicale che risulta costituita da sette note fondamentali: do, re, mi, fa, sol, la, si. Se  $f$  è la frequenza (in hertz) della nota fondamentale do, le altre note hanno le frequenze:

le note	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
i rapporti in frequenza	$f$	$9/8 f$	$5/4 f$	$4/3 f$	$3/2 f$	$5/3 f$	$15/8 f$	$2f$
uguale circa		1.125	1.25	1.33	1.50	1.667	1.875	2
differenze con precedente		0.125	0.125	0.08	0.17	0.167	0.208	0.125
rapporto con precedente		1.125	1.11	1.064	1.128	1.11	1.125	1.067

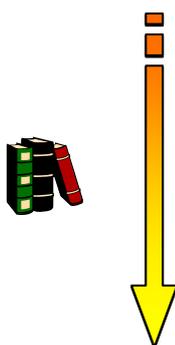
Ma come nascono le frazioni riportate in tabella? Tutto si basa sull'utilizzo dei numeri 2 e 3. Si parte da una corda di lunghezza data come generatrice della nota fondamentale. La si dimezza e si ottiene la nota di frequenza doppia (un'ottava sopra).

- Si prendono i  $2/3$  della corda originaria e si ottiene una frequenza pari a  $3/2$  (il sol).
- Se ne prendono ancora i due terzi e si ottiene il re della ottava superiore (la si dimezza e si ottiene il re con lunghezza  $8/9$  e frequenza  $9/8$ ).
- Si prendono i  $2/3$  di  $8/9$  e si ottiene  $16/27 \approx 0.59259 \approx 3/5$ ; così si genera il la per approssimazione

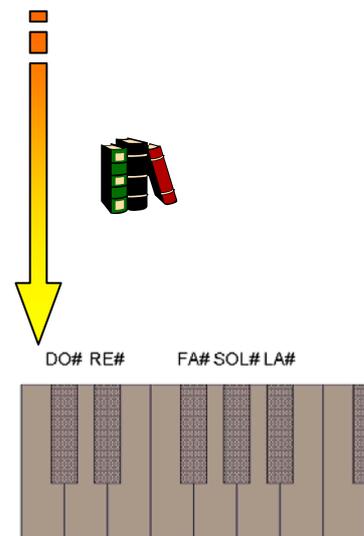


le scale musicali vengono prodotte inizialmente dalla scuola pitagorica che associa la gradevolezza dei suoni a rapporti semplici tra le lunghezze delle funi che li generano

il rapporto  $2/3$  genera tutte le note salendo e scendendo di un'ottava



- Si prendono i 2/3 di 3/5 e cioè 2/5; la frequenza 5/2 è il mi della ottava superiore; si raddoppia la corda e si ottiene con 4/5 di lunghezza e 5/4 di frequenza il mi.
- I 2/3 di 4/5 danno 8/15 che produce la frequenza di 15/8 pari al si.
- I 2/3 di 8/15 producono una lunghezza di 16/45 con frequenza di 45/16 che appartiene alla ottava superiore. Si raddoppia la lunghezza a 32/45  $\approx 0.711 \approx 3/4$  e così si produce il fa.
- Se al fa si applica ancora il mitico rapporto di 2/3 si arriva ad una lunghezza di 1/2 che produce il do dell'ottava superiore e qui si ricomincia.



Osserviamo che nel calcolo sono state introdotte due approssimazioni nel generare il la e il fa e ciò determinava dei problemi nella costruzione degli strumenti musicali a tastiera che, non utilizzando rapporti in lunghezza, finivano per disallineare le scale.

Per questa ragione nel corso del 700 si è introdotta la **scala temperata** che differisce dalla precedente per l'utilizzo di una suddivisione armonica basata sulla costanza dei rapporti in frequenza. L'ottava (caratterizzata da un rapporto 1:2) viene suddivisa in 12 intervalli che si trovano in rapporto rigorosamente costante in modo che:

$$\frac{v_i}{v_{i+1}} = \sqrt[12]{2} \approx 1.059463 \quad (\text{IV.2.16})$$

Utilizzando la scala temperata i rapporti in frequenza risultano i seguenti (tenendo conto della presenza dei diesis e del fatto che ogni volta si moltiplica per  $\sqrt[12]{2}$ ):

le note	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
i rapporti in frequenza	f	$\sqrt[12]{2^2}$	$\sqrt[12]{2^4}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[12]{2^9}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	$\sqrt[12]{2^{12}}$
la scala temperata	1	1.122	1.260	1.335	1.498	1.682	1.888	2
la scala naturale	1	1.125	1.25	1.33	1.50	1.667	1.875	

Concludiamo questi brevi cenni dedicati alla fisica della musica soffermandoci sulla estensione della voce umana che risulta piuttosto ristretta rispetto alla soglia di udibilità di cui ci occuperemo nel prossimo paragrafo.

### 2.4.3 DECIBEL E SENSAZIONE SONORA

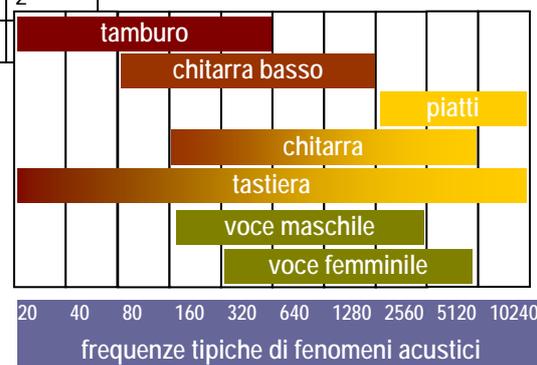
L'orecchio umano e, come vedremo, l'occhio sono due capolavori nella costruzione di apparati di decodifica delle informazioni. Essi sono infatti in grado di raccogliere informazioni e discriminare tra esse in un intervallo di energie estremamente ampio.

Non si tratta solo della capacità di udire sia rumori molto forti sia rumori molto deboli, la cosa più interessante è la capacità di percepire piccole differenze di suono sia a intensità alte sia a intensità basse.

Soffermiamoci per ora su questo aspetto prescindendo dal ruolo giocato dalla frequenza (in effetti non percepiamo allo stesso modo due suoni della stessa intensità ma di frequenza diversa).

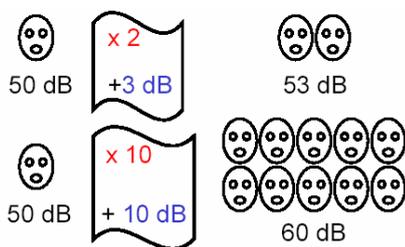
Supponiamo di avere intorno a noi una sorgente sonora che determina un certo grado di sensazione sonora. Se ora le sorgenti sonore diventano 2, 3 ... la corrispondente sensazione aumenta ma non raddoppia e cre-

Nella scala temperata sono costanti i rapporti in frequenza tra i 12 intervalli che corrispondono alle note ed ai diesis





A. G. Bell scoprì l'andamento logaritmico della percezione sonora nell'ambito degli studi per perfezionare microfono e altoparlante a fine 800



ogni 3 dB l'intensità raddoppia

sce rispettivamente del 30 e 48%. Il raddoppio si ha solo se le sorgenti diventano 10.

Di ciò ci si è resi conto quando grazie alle ricerche del fisico americano *Alexander Graham Bell* si resero disponibili il microfono e l'altoparlante (1876) cioè gli strumenti che consentono di produrre ed analizzare suoni introducendo parametri di natura quantitativa.<sup>11</sup>

In suo onore è stata definita la misura del *livello di intensità sonora* distinto dalla intensità; per la precisione si pone:

$$L_I = 10 \log \frac{I}{I_0} \tag{IV.2.17}$$

dove  $I$  rappresenta l'intensità nel punto considerato e  $I_0$  è l'intensità minima percepibile dall'orecchio umano alla frequenza di 1'000 Hz pari a  $10^{-12} \text{ w/m}^2$ .

La presenza della funzione logaritmo che cresce come l'esponente delle potenze fa sì che il livello minimo si abbia per  $I = I_0$  e valga 0.<sup>12</sup>

La quantità  $\log \frac{I}{I_0}$  veniva originariamente misurata in *bel* ma poiché il *bel* risultò essere una unità eccessivamente grande perché la variazione di 1 bel veniva a corrispondere alla decuplicazione della intensità si optò per l'uso del *decibel* antepoendo un fattore moltiplicativo alla definizione.

Agli effetti pratici ciò che interessa spesso è non il livello sonoro ma la sua variazione:

$$\Delta L_I = L_{I2} - L_{I1} = 10 \log \frac{I_2}{I_0} - 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log \left( \frac{I_2}{I_0} \times \frac{I_0}{I_1} \right) = 10 \log \frac{I_2}{I_1}$$

la variazione dipende esclusivamente dal rapporto delle due intensità e non dal valore scelto come riferimento. Il livello aumenta di 10 decibel quando  $\log \frac{I_2}{I_1} = 1$  e cioè quando  $\frac{I_2}{I_1} = 10$ .

D'altra parte quando la intensità raddoppia  $\frac{I_2}{I_1} = 2$  si ha  $\Delta L_I = 10 \log 2 \approx 3 \text{ dB}$ . Si tratta di un numero importante da ricordare perché si potrebbe essere tentati di pensare che, in fondo, un rumore da 70 dB non sia molto diverso da uno di 73 e invece nel secondo caso la intensità sonora che è ciò che può risultare dannosa (soprattutto quando ci si trova ai limiti superiori della scala) è raddoppiata.

Nello schema qui vediamo che la nostra *capacità uditiva* varia da 0 sino a 140÷180 dB e ciò significa, in termini di potenza che il nostro orecchio riesce a lavorare, decodificandole, su una gamma di 18 ordini di grandezza con potenze comprese tra  $10^{-12} \text{ w/m}^2$  e  $10^6 \text{ w/m}^2$ .

Oltre che il livello di intensità del suono si utilizza anche il *livello di pressione del suono*. Nel definire questa grandezza si tiene conto del fatto che, a parità di condizioni, la potenza è proporzionale al quadrato della pressione e che la pressione di riferimento è pari a 20  $\mu\text{Pa}$ .



fenomeni tipici associati al corrispondente valore di intensità e di percezione sonora

<sup>11</sup> Non mi interessa entrare in questa sede sul dibattito relativo alla invenzione del telefono: Popov, Meucci o Bell?

<sup>12</sup>  $\log 1 = 0$ . Ricordiamo che i logaritmi godono delle seguenti proprietà: 1)  $\log(ab) = \log a + \log b$  2)  $\log(a/b) = \log a - \log b$  3)  $\log a^b = b \log a$

Poiché  $\frac{I}{I_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^2$  e poiché nel logaritmo gli esponenti diventano fattori moltiplicativi si ha che:

$$L_p = 20 \log \frac{p}{p_0} \quad (IV.2.18)$$

### 2.4.4 INQUINAMENTO DA RUMORE

Il *rumore* ha influenza negativa su diversi aspetti della vita; per esempio una esposizione costante dell'ordine degli 85 dB per 20 anni porta alla sordità totale ed è quanto è avvenuto nei decenni passati a migliaia di lavoratori dell'industria tessile a causa del rumore dei telai.

Secondo un rapporto OCSE del 1991 il 18% della popolazione europea è esposta ad un rumore definito *inaccettabile* superiore ai 65 dB e un altro 20% è sottoposto ad un rumore definito *irritante* sui 55 dB.

Per questa ragione in tutti i paesi sono ormai entrate in vigore sia disposizioni di tutela dei lavoratori in ambiente professionalmente esposto, sia misure a carattere urbanistico tese a migliorare la qualità di vita nelle città (in questo caso si danno indicazioni di carattere pianificatorio indicando il livello equivalente massimo di giorno e di notte in dB).

### 2.4.5 INTENSITÀ SOGGETTIVA DEL SUONO

Sino ad ora abbiamo ignorato il fatto che il nostro orecchio anche in condizione di buon funzionamento non sente egualmente bene a tutte le frequenze. In effetti il concetto di *livello di intensità* e i valori di riferimento dei diversi rumori sono convenzionalmente riferiti alla frequenza di 1'000 Hz. Per tenere conto della variabilità di percezione con la frequenza si tracciano le cosiddette *curve isofoniche* in un sistema d'assi con in ascissa la frequenza ed in ordinata il livello di pressione in decibel.

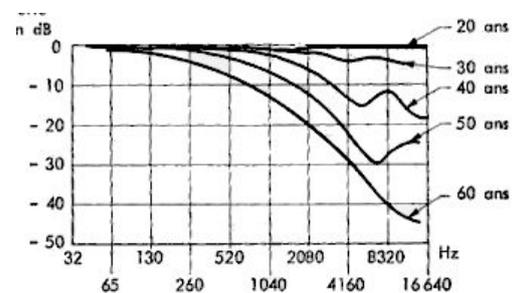
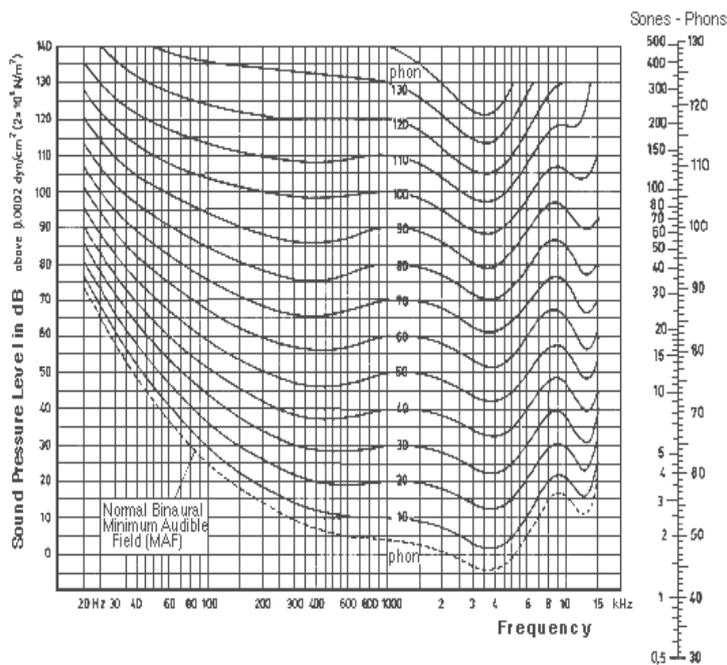
Un suono di 20 *phon* è un suono che alle diverse frequenze produce la stessa sensazione sonora prodotta da un suono di 20 dB alla frequenza di 1'000 Hz.

Se osserviamo le curve rappresentate qui a lato vediamo che l'orecchio umano presenta una buona risposta in frequenza tra i 300 e i 3000 Hz mentre all'esterno di questo intervallo si ha un rapido deterioramento delle capacità auditive. Per esempio, alla frequenza di 20 Hz un suono di 80 dB corrisponde a soli 20 phon mentre a 15 kHz 20 phon corrispondono a 30 dB (come è noto sentiamo meglio alle alte frequenze che non alle basse). Al di sotto dei 20 Hz e al di sopra dei 15 kHz le capacità auditive decadono rapidamente a zero e si parla di *infrasuoni ed ultrasuoni*.

Per concludere osserviamo che le capacità auditive si deteriorano piuttosto visibilmente con l'età in particolare nella fascia delle frequenze medio alte. Nella figura qui a lato sono riportate le diminuzioni di sensibilità uditiva in decibel.

zona - livello massimo diurno e notturno in dB		
aree particolarmente protette	50	40
aree prevalentemente residenziali	55	45
aree di tipo misto	60	50
aree di intensa attività umana	65	55
aree prevalentemente industriali	70	60
aree esclusivamente industriali	70	70

limiti di rumore definiti dalla legislazione urbanistica



le curve isofoniche consentono di registrare i valori di intensità sonora che, alle diverse frequenze, producono la stessa sensazione; nel secondo diagramma si osserva il deterioramento di sensibilità uditiva con l'età

2.4.6 IL LEGAME TRA INTENSITÀ E VARIAZIONE DI PRESSIONE PER LE ONDE SONORE

Quando si opera con le onde sonore non risulta molto significativo riferire la intensità dell'onda alla ampiezza perché non esistono strumenti in grado di apprezzare tale parametro; è molto più significativo il riferimento alle variazioni di pressione  $\Delta p$  indotte dall'onda nel mezzo infatti il timpano e le membrane in genere sono sensibili alle variazioni di pressione.

Con considerazioni di carattere meccanico si dimostra che una compressione caratterizzata da velocità di variazione  $u$  e che si propaga in un mezzo di densità  $\rho$  con velocità  $v$  determina una variazione di pressione

$$\delta p = u v \rho$$

Se si tiene conto del fatto che la velocità di una oscillazione si lega all'ampiezza attraverso  $u = A \omega$  si può dunque esprimere il legame tra ampiezza di un'onda e corrispondente variazione di pressione:

$$\delta p = u v \rho = A \omega v \rho \tag{IV.2.19}$$

Ancora più interessante dal punto di vista pratico è la relazione tra intensità e variazione di pressione. Infatti se applichiamo la (IV.2.9)

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2$$



avremo che:

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho v \frac{(\delta p)^2}{\rho^2 v^2}$$

$$I = \frac{1}{2} \frac{(\delta p)^2}{\rho v} \tag{IV.2.19 bis}$$

**Passaggio da Livello di intensità sonora a intensità**

*Esercizio:* Alla frequenza di 3'500 Hz la curva della soglia di udibilità raggiunge il valore di -8 dB. Determinare il corrispondente valore di intensità sonora.



$$10 \log \frac{I}{I_0} = -8 \text{ e dunque } \log \frac{I}{I_0} = -0.8$$

$$\frac{I}{I_0} = 10^{-0.8} \approx 0.158 \text{ pertanto } I = 10^{-12} \times 0.158 \text{ w/m}^2$$



**Sovrapposizione di livelli di intensità**

*Esercizio:* Si sommano 3 suoni di livelli rispettivamente  $L_1 = 45$  dB,  $L_2 = 47$  dB,  $L_3 = 50$  dB. Determinare il livello determinato dalla sovrapposizione.



Quelli che si sommano non sono i livelli ma le intensità:

$$I = I_1 + I_2 + I_3; \text{ inoltre } \frac{I}{I_0} = 10^{L/10} \text{ e pertanto:}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = I_0 (10^{4.5} + 10^{4.7} + 10^{5.0}) \approx 181'741 I_0$$

Dunque  $L = 10 \log 181'741 = 52.6 \text{ dB}$



### Parametri di un suono e variazioni di intensità nella propagazione

*Esercizio:* Un altoparlante conico presenta un angolo di semiapertura  $\alpha = 70^\circ$  ed emette un suono della frequenza di 1'200 Hz con la potenza di 8.00 w. Determinare l'ampiezza di oscillazione delle onde sonore alla distanza  $d = 3.00 \text{ m}$  sapendo che  $t = 25.0 \text{ }^\circ\text{C}$  e che ci si trova alla pressione  $p = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Come cambia l'ampiezza alla distanza  $d' = 4 \text{ d}$ ?



L'angolo  $\alpha$  fa sì che la potenza invece di distribuirsi su di un angolo solido pari a  $4\pi$  (l'angolo in radianti caratteristico della distribuzione sferica) si distribuisca su di una calotta di angolo solido  $\frac{2\alpha}{\pi} 4\pi = 8 \alpha$  dove  $\alpha$  va espresso in radianti.

$$\alpha = \alpha^\circ \frac{\pi}{180} = 1.22$$

La superficie su cui le onde sferiche si distribuiscono sarà pari a

$$\sigma = 8\alpha d^2 = 8 \times 1.22 \times 3.00^2 = 87.8 \text{ m}^2$$

Dunque l'intensità se si prescinde da problematiche di assorbimento da parte del mezzo sarà pari a:

$$I = \frac{P}{\sigma} = \frac{8.00}{87.8} = 0.0911 \text{ w/m}^2$$

Per determinare la ampiezza dobbiamo tener conto della equazione (IV.2.9)  $I = \frac{1}{2} \delta v \omega^2 A^2$  dove sia la velocità, sia la densità devono essere determinate tenendo conto di considerazioni termodinamiche.

La velocità di propagazione in base alla (IV.2.14) vale  $v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\delta}}$  mentre la densità  $\delta$  si ottiene sfruttando il fatto che a pressione costante la densità e la temperatura sono inversamente proporzionali  $\delta = \delta_0 \frac{T_0}{T}$

Dalle tabelle è noto che in condizioni standard per l'aria si ha  $\delta_0 = 1.293 \text{ kg/m}^3$ , che  $\gamma = 1.40$  e pertanto:

$$\delta = \delta_0 \frac{T_0}{T} = 1.293 \frac{273}{298} = 1.185 \text{ kg/m}^3$$

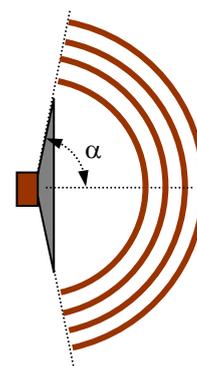
$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\delta}} = \sqrt{\frac{1.40 \times 1.01 \times 10^5}{1.185}} = 345.4 \text{ m/s}$$

Possiamo finalmente trovare la espressione dell'ampiezza:

$$A = \sqrt{\frac{2 I}{\delta v \omega^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.0911}{1.185 \times 345.4 \times (2\pi \times 1'200)^2}} = 2.79 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Per rispondere all'ultima domanda teniamo presente che l'ampiezza è proporzionale alla radice della intensità la quale a sua volta è inversamente proporzionale al quadrato della distanza pertanto l'ampiezza delle oscillazione è inversamente proporzionale alla distanza:

$$A' = A \frac{d}{d'} = \frac{1}{4} A = 6.97 \times 10^{-7} \text{ m}$$



### Sbalzi di pressione alla soglia del dolore

*Esercizio:* Determinare gli sbalzi di pressione nella membrana timpanica corrispondenti alla soglie del dolore di 130 dB.



Se  $I = 130$  dB vuol dire che  $\frac{I}{I_0} = 10^{13}$  e poiché la soglia minima  $I_0 = 10^{-12}$  w/m<sup>2</sup> ciò significa che un'onda pericolosa per la membrana timpanica corrisponde ad una intensità di  $10$  w/m<sup>2</sup>. Ma in base alla (IV.2.19 bis) a tale intensità corrisponde una variazione di pressione:

$$\Delta p = \sqrt{2 I \rho v} = \sqrt{2 \times 10 \times 1.29 \times 340} = 93 \text{ Pa}$$

Come si vede si tratta di un valore pari a meno di un millesimo della pressione atmosferica e ciò ci conferma di come la membrana timpanica sia un dispositivo assolutamente sensibile e dunque da trattare con grande delicatezza.



## 2.5 Le onde stazionarie

### 2.5.1 UN PARTICOLARE TIPO DI INTERFERENZA

Il sostantivo *onda* e l'aggettivo *stazionaria* sono in contrasto tra loro. Un'onda si propaga e dunque non può essere stazionaria. In effetti l'onda stazionaria non è un'onda anche se la sua produzione ha a che fare con le onde.

In un'onda stazionaria si ha una situazione in cui *tutti i punti* di una determinata regione spaziale *oscillano sincronicamente* pur avendo ampiezze di oscillazione diverse. Si tratta proprio del contrario dei fenomeni ondulatori nei quali i diversi punti dello spazio oscillano con fasi diverse perché l'onda si propaga a velocità finita e dunque ciò che accade qui ed ora si troverà là in un istante successivo.

Chi osserva un fenomeno stazionario rimane impressionato non dalla assenza di movimento (perché le oscillazioni ci sono) ma dal perfetto sincronismo con cui avvengono e dal fatto che tale sincronismo si conserva nel tempo.

Dietro il fenomeno c'è sempre una *particolare interferenza* (sovrapposizione) di *onde vere* che sommandosi danno luogo alla eliminazione della propagazione.

Nella figura qui a lato, nella impossibilità di disporre di una animazione sono rappresentati i diversi fotogrammi ad intervalli regolari di un'onda stazionaria.

### 2.5.2 SOVRAPPOSIZIONE DI ONDE PIANE CON VELOCITÀ OPPOSTA

Nella immagine qui a lato si osserva la sovrapposizione (in nero) di due onde con la stessa frequenza e velocità. La prima (in blu) si propaga verso sinistra mentre la seconda (in verde) si propaga verso destra. Come si nota il risultato è stupefacente: la somma è una sinusoidale che cambia ampiezza con il tempo ma non si sposta nello spazio. Si tratta di un'onda stazionaria; tutti i punti lungo l'asse orizzontale si muovono di moto armonico con la stessa fase ma con ampiezze diverse.

Il risultato che abbiamo espresso graficamente può essere dedotto per via analitica considerando le equazioni delle due onde armoniche e applicando alla sovrapposizione alcune semplici identità goniometriche.

Le due onde hanno equazione:

$$y_1 = A \cos(\omega t - kx) \quad y_2 = A \cos(\omega t + kx)$$

e se eseguiamo la somma avremo:<sup>13</sup>

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos \omega t \cos kx = B \cos \omega t$$

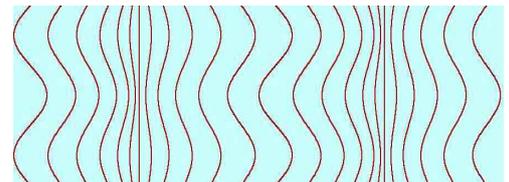
dove si è posto  $B = 2A \cos kx = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$

Riassumiamo:

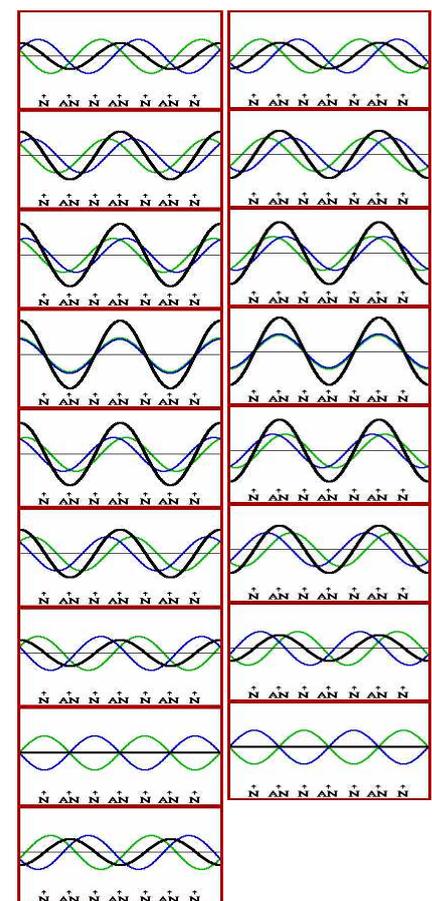


<sup>13</sup> Le formule di prostaferesi, che si ottengono invertendo quelle di somma e sottrazione, trasformano somme in prodotti:

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$



sequenza di fotogrammi di un'onda stazionaria lungo una fune: tutti i punti oscillano in fase con ampiezze diverse dipendenti dalla posizione



mentre l'onda blu viaggia verso sinistra e quella verde verso destra la loro somma in nero non si sposta e tutti i punti oscillano in maniera sincronica

$$y = B \cos \omega t \quad B = f(x) = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad (\text{IV.2.20})$$

Fissata la posizione un punto si muove di moto armonico con ampiezza  $B$ . Se si cambia la posizione si ottiene un nuovo valore dell'ampiezza ma ancora una oscillazione armonica in fase con la precedente. L'onda stazionaria ha la stessa frequenza e lunghezza d'onda delle onde da cui si genera.

I punti in cui l'ampiezza si annulla sono detti *nodi* ed essi possono essere determinati imponendo che sia:

$$2\pi \frac{x_n}{\lambda} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{dove } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

da qui si ottiene  $x_n = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$  e pertanto due nodi successivi distano

$$\text{di } \Delta x = [2(n + 1) + 1 - (2n + 1)] \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

Tra due nodi cioè a distanza  $\lambda/4$  dal nodo si trovano i punti di ampiezza massima detti *ventri* o *antinodi*.

I punti di ampiezza nulla (*nodi*) distano di  $\lambda/2$  e tra due nodi consecutivi si trovano i punti di ampiezza massima (*ventri*)

### 2.5.3 ONDE STAZIONARIE IN UNA FUNE

Il modo più semplice di ottenere *onde stazionarie* è quello che sfrutta la riflessione delle onde infatti la riflessione produce un'onda che viaggia in senso contrario a quella incidente.

Quando l'onda incide contro un mezzo fortemente riflettente l'onda risulta anche sfasata di  $\pi$  rispetto a quella incidente mentre quando l'onda viene debolmente riflessa lo sfasamento è nullo.

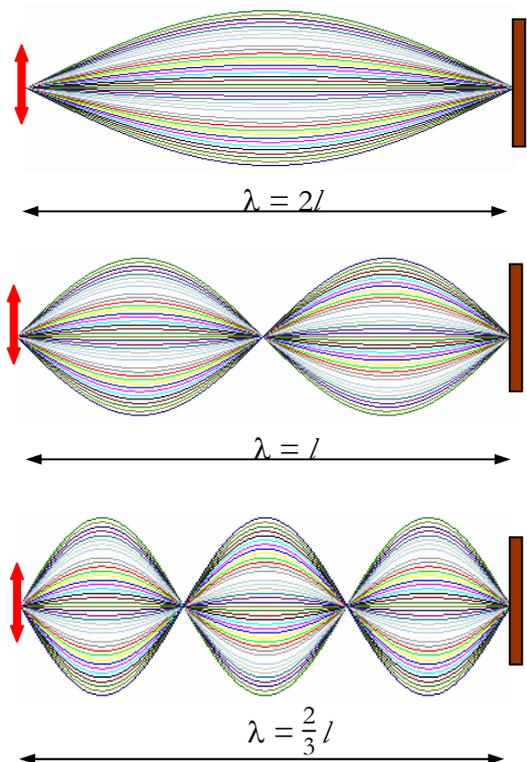
Consideriamo una fune fissata ad un estremo e cerchiamo di metterla in oscillazione dando dei piccoli impulsi regolari all'altro estremo. L'esperienza è di facilissima esecuzione e si consiglia vivamente di eseguirla. Tanto meglio se invece di una fune si dispone di una molla.

Si noterà inizialmente una azione di disturbo al polso data dal fatto che l'onda riflessa si sovrappone in modo disarmonico ma se si continua a far oscillare il polso con frequenza via via crescente ad un certo punto si sentirà la cessazione di quegli effetti di disturbo e improvvisamente la fune inizierà ad oscillare in maniera più intensa e con un minor bisogno di apporto energetico da parte del polso. La fune viene ad assumere una configurazione del tipo indicato in figura con tutti i punti che oscillano in fase con ampiezze diverse (massime al centro e nulle nei due estremi).

Se a questo punto si continua ad aumentare la frequenza di oscillazione si avrà nuovamente una situazione di disordine che si interrompe bruscamente quando la frequenza di oscillazione della mano consente la realizzazione di una nuova situazione stazionaria come quella indicata. E così via come nelle figure successive.

Cosa sta accadendo? Il fenomeno è identico a quello esaminato al punto precedente con una differenza: le onde si propagano entro uno spazio finito e, a causa dei vincoli posti dal fatto che nei due estremi ci devono essere dei nodi, la situazione si stabilizza quando a sinistra l'onda generata dal movimento del polso e quella riflessa proveniente dall'estremo di destra risultano essere sempre in opposizione di fase.

Tutto ciò si realizza quando la lunghezza della fune è pari ad un numero intero di mezza lunghezze d'onda (come nella figura qui a lato).



Se le onde si propagano in un mezzo vincolato avremo sovrapposizione tra un'onda applicata dall'esterno e quella riflessa con produzione di onde stazionarie in corrispondenza di ben determinati valori di frequenza dipendenti dalla lunghezza del mezzo

Dunque in un contesto come quello indicato la fune può oscillare con infinite frequenze tutte multiple di quella di lunghezza d'onda massima tale che:  $l = \frac{1}{2} \lambda$ . Ciò significa che la *prima armonica o armonica fondamentale* ha una lunghezza d'onda e una frequenza date da:

$$\lambda = 2l \quad v = \frac{v}{2l} \quad \text{(IV.2.21)}$$

e in generale:

$$\lambda_n = 2l/n \quad v = \frac{n v}{2l} \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{(IV.2.22)}$$

Ricordiamo che la velocità nella fune è legata alla tensione ed alla densità lineare da  $v = \sqrt{\frac{T}{\xi}}$  e pertanto la relazione generale che fornisce la frequenza dell'armonica fondamentale è:

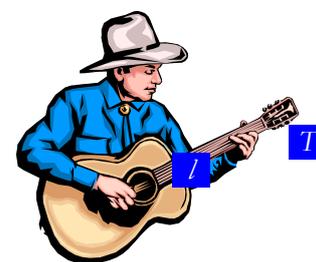
$$v = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\xi}} \quad \text{(IV.2.23)}$$

pertanto, in uno strumento a corda le *note musicali* prodotte da una data corda dipendono dallo stato di tensione (che si può variare con gli appositi tiranti) dal materiale e dallo spessore della fune (corde grosse per le basse frequenze) e dalla lunghezza che può essere variata con la pressione delle dita contro la corda sino a schiacciarla contro il manico.

L'operazione di accordatura di una chitarra consiste nell'agire sui tiranti finché la nota emessa dalla corda corrisponde alla nota standard di riferimento per quel tipo di corda.



la condizione che consente di determinare la lunghezza d'onda delle onde stazionarie lungo una fune



agendo sulla tensione delle corde di una chitarra si cambia la frequenza della armonica fondamentale

#### 2.5.4 IL DIAPASON E LE CASSE DI RISONANZA

I *diapason* presenti in tutti i laboratori di fisica sono sempre montati su *scatole in legno* del tipo indicato in figura. La loro funzione è quella di potenziare le onde sonore generate dalla percussione del diapason.

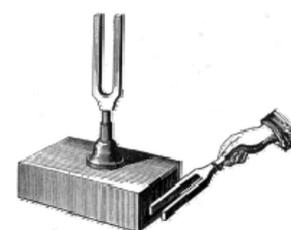
Il diapason da solo produce un suono appena percettibile mentre quando viene montato sulla cassa il suono si evidenzia nettamente.

La stessa cosa accade se si fa vibrare una lama di coltello o una spatola d'acciaio armonico (acquistabili nei colorifici e nei negozi di ferramenta) da sola o ponendola sopra un bicchiere in cui si possa variare la colonna d'aria libera. Ci si accorgerà che, in corrispondenza di un ben preciso livello, il suono si potenzia nettamente.

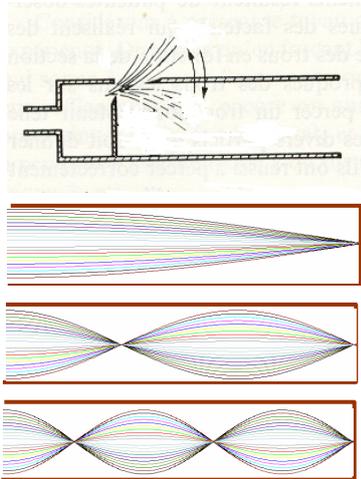
Se si lavora con una coppia di diapason identici si può addirittura mettere in vibrazione quello montato sulla *cassa armonica* avvicinando alla sua testata un diapason impugnato come in figura.

Quello che stiamo sentendo è un fenomeno di *risonanza* caratterizzato dalla capacità della colonna d'aria contenuta nella cassetta di generare onde stazionarie. Questa volta, a differenza del caso della fune fissata agli estremi le onde stazionarie dovranno presentare un nodo in corrispondenza dell'estremo chiuso e un ventre in corrispondenza della apertura.

Il diapason produce onde stazionarie nella colonna d'aria e questa, tramite il contatto con l'aria all'esterno del tubo genera onde sonore che si propagano nello spazio. Il fenomeno perdura finché il diapason non ha trasferito tutta la sua energia di vibrazione elastica.



diapason e casse armoniche; per avere la risonanza deve essere  $l = \frac{\lambda}{4}$



onde stazionarie su tubi aperti

Su questo principio si basa tutta l'acustica degli *strumenti musicali* (casse armoniche degli strumenti a corda) e in particolare il funzionamento dei tubi sonori dell'organo.

Nelle figure qui a lato sono rappresentate la imboccatura di una canna d'organo e degli esempi di prima seconda e terza armonica.

Si lascia al lettore il compito di esercitarsi nella determinazione delle frequenze data la lunghezza del tubo e si suggerisce infine la costruzione di una serie di *tubi sonori ad acqua* andando alla ricerca delle dimensioni della colonna d'acqua che produce le note musicali.

L'esperimento è particolarmente semplice da eseguire e di grande effetto. Si consiglia di utilizzare bicchieri cilindrici identici e di utilizzare un martelletto di gomma per produrre i suoni per semplice percussione laterale del bicchiere.

## 2.6 L'effetto Doppler

### 2.6.1 IL FISCHIO DELLE FORMULA 1

Appartiene alla esperienza comune la percezione del cambiamento di altezza (frequenza) di un suono generato da una sorgente mobile quando si passa dalla fase di avvicinamento a quella di allontanamento dall'osservatore.

Si percepisce in maniera esemplare quanto detto assistendo alle *gare di automobilismo* dove, le velocità molto elevate dell'auto rendono la discontinuità nel suono molto netta; ma vanno bene anche i flussi delle automobili in autostrada o il rumore di un treno in avvicinamento e in allontanamento.

Tutto ciò è noto come *effetto Doppler* e riguarda qualunque tipo di fenomeno ondulatorio: durante l'avvicinamento tra sorgente ed osservatore si percepisce un aumento di frequenza del suono e durante l'allontanamento se ne percepisce la diminuzione.

### 2.6.2 MOTO DELLA SORGENTE E MOTO DELL'OSSERVATORE

L'onda è un fenomeno periodico in cui la frequenza rappresenta il numero di cicli al secondo e la lunghezza d'onda è la distanza minima che separa due cicli completi. Per questa ragione possiamo comprendere la sostanza dell'effetto Doppler pensando ad un *nastro trasportatore* del tipo di quelli ormai in uso in tutti i grandi aeroporti su cui vengano depositati oggetti identici che assumeranno il ruolo delle onde. Il nastro trasportatore rappresenta il mezzo entro cui viaggiano le onde.

L'osservatore sarà una persona collocata fuori dal nastro che osserva l'arrivo degli oggetti, mentre la sorgente sarà una seconda persona che ad intervalli regolari deposita un oggetto sul nastro. Analizzeremo ora il caso dell'avvicinamento.

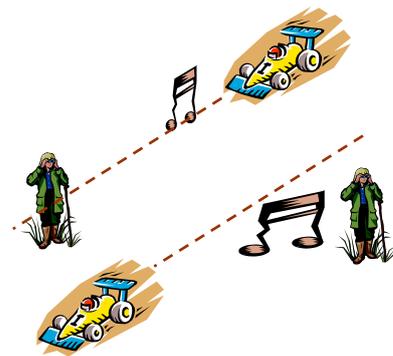
Si possono dare due casi elementari di moto relativo tra sorgente ed osservatore: quello in cui la sorgente è fissa e l'osservatore cammina incontro al nastro e quello in cui la sorgente cammina nello stesso verso del nastro andando incontro all'osservatore fermo.

Nel primo caso (moto dell'osservatore) gli oggetti si trovano sul nastro tutti ad una identica distanza  $\lambda = v T = \frac{v}{\nu}$  dove  $v$ ,  $T$  e  $\nu$  rappresentano rispettivamente la velocità del nastro (velocità dell'onda nel mezzo),  $T$  l'intervallo di tempo con cui la sorgente deposita gli oggetti sul nastro (periodo dell'onda) e  $\nu$  l'inverso di  $T$  e cioè la frequenza del fenomeno.

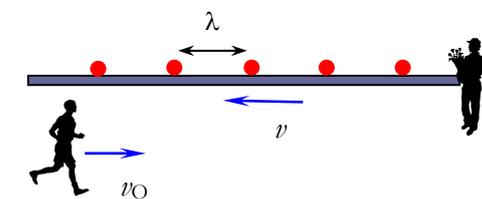
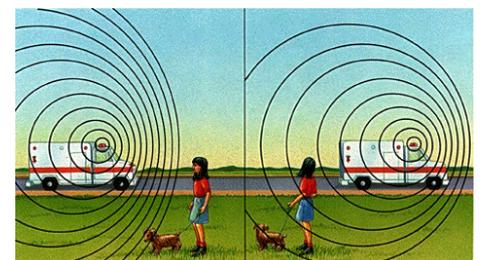
Ma l'osservatore si muove incontro al nastro con velocità  $v_0$  e pertanto il suo periodo di osservazione del fenomeno  $T' = \frac{\lambda}{v + v_0} = \frac{v}{\nu(v + v_0)} = \frac{1}{\nu(1 + \beta)}$  dove si è indicato con  $\beta$  il rapporto tra la velocità dell'osservatore e la velocità dell'onda.

Dunque per l'osservatore *in moto* non cambia la lunghezza d'onda ma cambia la frequenza e il nuovo valore vale:

$$\nu' = \nu (1 + \beta) \tag{IV.2.24}$$



il ben noto iiiiii...oom della formula 1 è il più noto esempio di effetto Doppler insieme alla mutata percezione delle sirene dei mezzi di soccorso



moto dell'osservatore e modifica della frequenza percepita perché l'osservatore corre incontro o si allontana dai fronti d'onda

$$\nu' = \nu (1 \pm \beta)$$

Se l'osservatore si allontana interviene solo un cambiamento di segno davanti a  $\beta$ .

Il caso della *sorgente in moto* differisce dal precedente per i seguenti elementi:

- poiché la sorgente si sposta nel verso del moto del nostro la lunghezza d'onda cambia a  $\lambda'$
- l'osservatore percepisce dunque un nuovo valore di frequenza dato da  $v' = \frac{v}{\lambda'}$

Il valore di  $\lambda'$  si ottiene sottraendo al valore di  $\lambda$  lo spazio percorso dalla sorgente in un periodo. Si ha così:

$$v' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\lambda - v_S T} = \frac{\frac{v}{\lambda}}{1 - \frac{v_S T}{\lambda}} = \frac{v}{1 - \frac{v_S}{v}}$$

e scriveremo indicando con  $\beta$  il rapporto tra la velocità della sorgente e quella dell'onda che:

$$v' = \frac{v}{1 - \beta} \tag{IV.2.25}$$

Anche in questo caso si cambia segni in caso di allontanamento.

Infine, se i due fenomeni si presentano contemporaneamente, si avrà (nel caso di moto di avvicinamento):

$$v' = \frac{v(1 + \beta_1)}{1 - \beta_2}$$

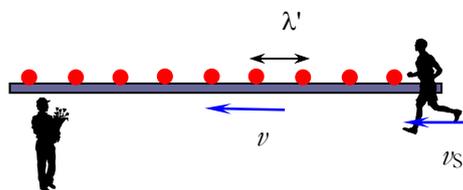
Dunque i due casi di moto dell'osservatore e della sorgente producono due effetti fisici diversi (nel primo caso si ha una variazione di frequenza senza variazione di lunghezza d'onda mentre nel secondo caso cambia la lunghezza d'onda e muta di conseguenza la frequenza).

Nel caso in cui i due valori di  $\beta$  siano uguali si ottengono dunque due valori di frequenza percepita diverse.

$$\frac{v' - v''}{v} = 1 + \beta - \frac{1}{1 - \beta} \approx 1 + \beta - (1 + \beta) = 0 \text{ solo a condizione di trascurare termini in } \beta^2.$$

A questo punto sorge un apparente contrasto con il *principio di relatività*. Se il moto tra sorgente ed osservatore è relativo non dovrebbero esserci differenze nei due casi. Ma la situazione non è simmetrica: il mezzo gioca un ruolo essenziale (le onde si propagano nel mezzo) ed ha senso parlare di moto assoluto della sorgente e dell'osservatore con riferimento al mezzo.

Esiste però un caso in cui l'onda si propaga senza bisogno di alcun mezzo (cioè nel vuoto): è il caso delle onde elettromagnetiche e in questo caso la simmetria tra moto dell'osservatore e moto della sorgente è assoluta. In questo caso l'*effetto Doppler* esiste ancora ma le leggi che lo descrivono sono diverse e richiedono l'uso dei principi della relatività ristretta (si veda l'argomento nel capitolo di cinematica relativistica della II parte del testo).



moto della sorgente e modifica della lunghezza d'onda nel mezzo perché il fronte d'onda successivo viene emesso quando il precedente si è spostato di una lunghezza d'onda  $\pm$  lo spazio percorso dalla sorgente

$$v' = \frac{v}{1 \pm \beta}$$



il moto della sorgente e quello dell'osservatore danno luogo, a parità di  $\beta$ , ad effetti leggermente diversi, ma ciò non è in contrasto con il principio di relatività

### 2.6.3 IL CONO DI MACH

Cosa accade all'effetto Doppler quando la velocità della sorgente raggiunge la velocità dell'onda nel mezzo? La risposta ci viene dalle tre immagini qui a lato. I fronti d'onda in fase di avanzamento risultano sempre più ravvicinati finché quando  $v_s = v$  si crea un addensamento di energia determinato dal fatto che le onde via via create viaggiano insieme alle precedenti.

Se poi  $v_s > v$  la sorgente sopravanza le onde che provengono da lei e nello spazio si crea un cono detto *cono di Mach* (o nel piano un triangolo isoscele) con un angolo di semiapertura  $\alpha$  tale che:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_s} \quad (IV.2.26)$$

Infatti se si considera un generico intervallo di tempo  $\Delta t$  la sorgente avanza di  $v_s \Delta t$  mentre un fronte d'onda creato all'inizio dell'intervallo percorre uno spazio pari a  $v \Delta t$ . Mentre  $\sin \alpha$  risulta essere il rapporto tra il cateto (raggio percorso dal fronte d'onda) e l'ipotenusa (percorso della sorgente).

Il cono di Mach si crea in contesti quali: moto di un proiettile, aereo in volo con velocità supersonica, motoscafo in acqua.

Quando un osservatore viene attraversato dai fronti d'onda dove avviene l'involuppo delle diverse circonferenze o sfere subisce un *doppio bang* dovuto al rapido aumento e successivo decremento della pressione.

### L'effetto Doppler all'autodromo

*Esercizio:* Ipotizzando che la frequenza media del suono emesso da una automobile di formula 1 sia  $\nu = 5'000$  Hz e che l'automobile raggiunga nel rettilineo davanti alle tribune la velocità  $v_s = 320$  km/h si determini la variazione relativa di frequenza percepita da uno spettatore che si trova in tribuna quando l'auto gli passa davanti. Assumere come valore della velocità del suono in aria 340 m/s.

☹

Il valore  $\beta = \frac{v_s}{v} = \frac{320}{3.6 \cdot 340} = 0.26$

Avremo pertanto, in fase di avvicinamento:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 - \beta} = \frac{5000}{1 - 0.26} = 6760 \text{ Hz}$$

e in fase di allontanamento:

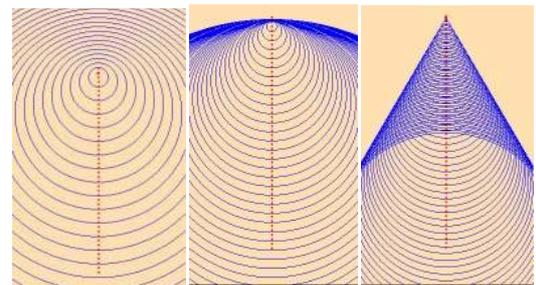
$$\nu'' = \frac{\nu}{1 + \beta} = \frac{5000}{1 + 0.26} = 3970 \text{ Hz}$$

La variazione relativa vale pertanto:

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{3970 - 6760}{5000} = -0.56$$

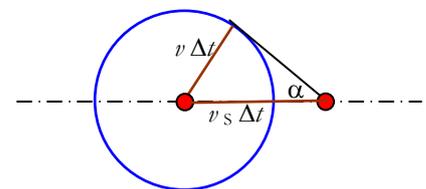
Il fenomeno è pertanto particolarmente percepibile.

Si osservi che, dovendo determinare la variazione relativa, la conoscenza della frequenza originaria del suono è del tutto irrilevante perché compare come fattore moltiplicativo sia al numeratore che al denominatore del rapporto. Avremmo potuto scrivere subito:



cono di Mach  $\beta \geq 1$   
 quando la velocità della sorgente si avvicina o supera la velocità dell'onda si produce un addensamento energetico con formazione di onde d'urto  

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_s} = 1/\beta$$



$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{1 + \beta} - \frac{1}{1 - \beta} = \frac{-2\beta}{1 - \beta^2}$$



### Effetto Doppler e cinematica del moto della sorgente

*Esercizio:* Una sorgente che emette onde sonore di frequenza  $\nu = 2500$  Hz e un osservatore si trovano nello stesso punto. Al tempo  $t = 0$  la sorgente inizia ad allontanarsi con accelerazione costante pari alla accelerazione di gravità. Determinare la frequenza percepita dall'osservatore al tempo  $t = 10$  s. Assumere per la velocità del suono in aria il valore  $v = 340$  m/s.



Per risolvere il problema bisogna determinare l'istante  $t'$  in cui viene emessa l'onda che sarà ricevuta al tempo  $t$  perché solo dalla conoscenza di  $t'$  saremo in grado di determinare la velocità della sorgente nel momento in cui l'onda viene emessa.

Tenendo conto delle leggi del moto uniforme (onda) e del m.u.a. (sorgente) e del fatto che lo spazio percorso in entrambi i casi è identico potremo scrivere l'equazione:

$\frac{1}{2} g t'^2 = v(t - t')$  che porta alla equazione di II grado:

$$4.9 t'^2 - 340 t' + 3400 = 0$$

La soluzione di questa equazione, dopo avere scartato la soluzione negativa è  $t' = 8.87$  s.

La velocità della sorgente all'istante  $t'$  è pertanto  $v_s = g t' = 86.9$  m/s a cui corrisponde il valore  $\beta = \frac{86.9}{340} = 0.255$ .

Applichiamo ora la legge dell'effetto Doppler per il caso di allontanamento della sorgente e avremo:

$$\nu'' = \frac{\nu}{1 + \beta} = \frac{2550}{1.255} = 1990 \text{ Hz}$$



## 2.7 I battimenti

### 2.7.1 IL FENOMENO: DAL SUONO DELLE CAMPANE AL METODO PER ACCORDARE LE CHITARRE

Quando si ascolta un suono capita a volte di percepire una sorta di *va e vieni* del suono stesso; il caso più conosciuto è il fluttuare del *din don* delle campane che viene erroneamente attribuito ad un effetto del vento accusato impropriamente di trasportare il suono di qua e di là.

Lo stesso *va e vieni* si ascolta quando si tenta di accordare una chitarra facendo vibrare la corda della chitarra campione insieme a quella della chitarra da accordare. Si percepisce un netto *va e vieni* del suono prodotto dalla sovrapposizione dei suoni delle due corde che si attenua operando sul tenditore della corda finché quando i due suoni risultano all'incirca<sup>14</sup> della stessa frequenza il volume risulta costante e stabile nel tempo.

Per capire cosa succede incominciamo ad osservare la figura qui a lato: in essa sono state disegnate due serie di righe apparentemente identiche ma che differiscono, nella spaziatura tra ogni riga, del 5%. Quando le due immagini vengono sovrapposte si osserva un fenomeno singolare: appaiono delle zone di chiaro e scuro che indicano un nuovo fenomeno periodico con una frequenza molto minore del precedente.

Il *va e vieni* delle campane o delle corde di una chitarra corrisponde proprio a questo: *quando due armoniche che differiscono di poco in frequenza si sovrappongono si genera una nuova armonica la cui intensità cambia nel tempo con una frequenza molto minore di quelle componenti al punto di essere percepita come variazione di intensità.*

Nel caso delle campane la differenza di frequenza è dovuta al fatto che le due metà di cui è costituita la campana, per effetto delle imperfezioni del processo di fusione, non sono mai perfettamente identiche. Nel caso della chitarra, la differenza di tensione determina una differenza nella velocità di propagazione dell'onda sulla corda e ciò determina una variazione della frequenza della armonica fondamentale.

Il fenomeno che abbiamo preso in esame, in acustica, è noto come fenomeno dei battimenti e la sua rappresentazione in termini di armoniche è visibile qui a lato.

### 2.7.2 ANALISI QUANTITATIVA

Per spiegare il fenomeno dei *battimenti* consideriamo due armoniche della stessa ampiezza la cui frequenza angolare differisca da una frequenza di riferimento  $\omega$  di una quantità  $\delta\omega$ ;

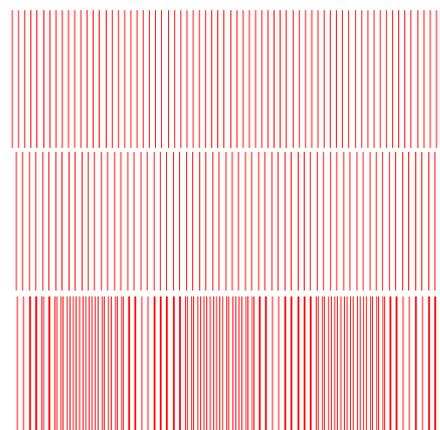
siano cioè:

$$s_1 = A \cos[2\pi(\nu + \delta\nu)t] \quad s_2 = A \cos[2\pi(\nu - \delta\nu)t]$$

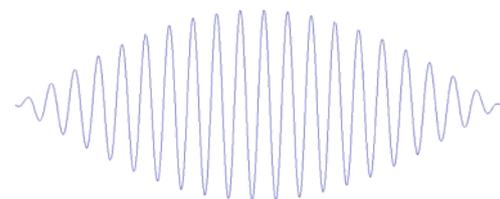
La armonica risultante può essere calcolata usando le formule di prostaferesi del coseno<sup>(15)</sup>:

<sup>14</sup> Si è preferito dire *all'incirca* e non *esattamente* per ricordare al lettore che ci stiamo occupando di fisica e non di matematica. I due suoni appaiono identici quando il nostro orecchio non è più in grado di percepire una differenza di altezza.

<sup>15</sup>  $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$



sovrapposizione di due griglie con spaziatura leggermente diversa; si vede subito l'addensamento in alcuni punti e la rarefazione in altri



il battimento prodotto da due armoniche di frequenza leggermente diversa

$$s = s_1 + s_2 = A\{\cos[2\pi(\nu + \delta\nu)t] + \cos[2\pi(\nu - \delta\nu)t]\}$$

da cui

$$s = 2A \cos(2\pi\delta\nu)t \cos(2\pi\nu)t \tag{IV.2.27}$$

Se le quantità  $\nu$  e  $\delta\nu$  sono sensibilmente diverse la armonica risultante assume un andamento caratteristico: *si produce una armonica di frequenza  $\nu$  la cui ampiezza cambia nel tempo, cioè è modulata, con frequenza  $\delta\nu$ .*

Nella figura qui a lato sono state rappresentate due armoniche la cui frequenza differisce di 10 parti su 300. Come si nota dalla rappresentazione di soli 6 periodi la differenza di frequenza determina un progressivo sfasamento delle due armoniche. Questo sfasamento operando su periodi di tempo più ampi fa in modo che le due armoniche in certi momenti interferiscano costruttivamente e in altri distruttivamente producendo per sovrapposizione una armonica di ampiezza variabile da 0 al doppio della ampiezza delle due componenti.

Nel diagramma in blu è stata rappresentata la sovrapposizione e si è operata una contrazione sull'asse dei tempi che consentisse, nello spazio a disposizione, di evidenziare almeno un battimento nella sua interezza.

Il *battimento* ha un periodo  $T_b$  corrispondente ad un semiperiodo della funzione coseno tale che  $2\pi\delta\nu T_b = \pi$  e dunque:

$$T_b = \frac{1}{2\delta\nu} = \frac{1}{\Delta\nu} \tag{IV.2.28}$$

Si osservi che con  $\delta\nu$  abbiamo indicato la semidispersione in frequenza e che la differenza tra le due frequenze componenti  $\Delta\nu$  (cioè la dispersione) è proprio  $2\delta\nu$ .

Nel diagramma successivo si è rappresentato un battimento con un periodo più elevato cioè con le frequenze componenti più prossime. Il periodo di battimento è tanto maggiore quanto più le due frequenze originarie sono ravvicinate; il battimento sparisce del tutto quando queste diventano uguali e in tale caso si ha  $s = 2A \cos \omega t$  ma praticamente basta che sia dell'ordine di 0.1 s o inferiore per divenire impercettibile a causa della persistenza della percezione sonora.

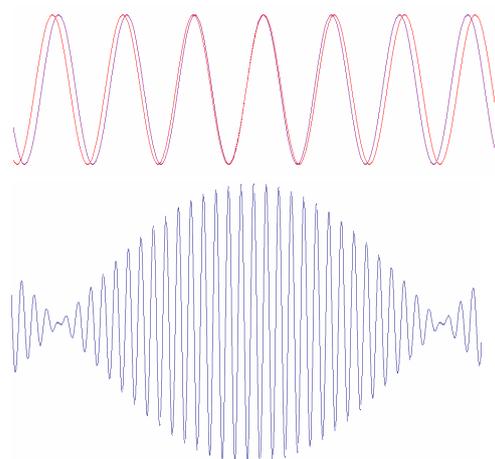
### 2.7.3 TRENO D'ONDE E INDETERMINAZIONE IN FREQUENZA

Il fenomeno dei battimenti ci consente di svolgere qualche considerazione connessa al *carattere spazialmente finito dei processi ondulatori*. Sino ad ora abbiamo finto di ignorare che poiché qualunque fenomeno fisico trasporta quantità finite di energia non possono esistere onde che non siano dotate di un inizio e di una fine e che pertanto le onde reali sono sempre, come amano dire i fisici, dei *pacchetti d'onda*, o dei *treni d'onda*. Con questi due termini si intende un fenomeno con le caratteristiche già studiate delle onde ma caratterizzato da estensione spaziale (e dunque anche temporale) finita.

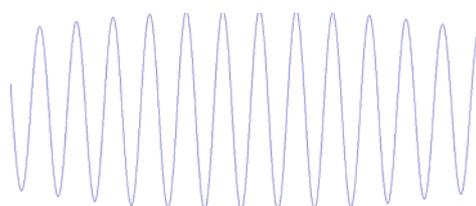
Si chiama pacchetto d'onda un fenomeno ondulatorio di estensione spaziale:

$$\Delta x = n \lambda \text{ con } n \gg 1 \tag{IV.2.29}$$

Se si tiene conto del fatto che il pacchetto d'onda viaggia a velocità  $v$  si potrà affermare anche che il pacchetto d'onda ha una durata temporale limitata pari a :



le due armoniche, per effetto della frequenza leggermente diversa **iniziano gradualmente a sfasarsi** dando poi luogo a zone di interferenza costruttiva e ad altre di interferenza distruttiva; la immagine del battimento è stata contratta sull'asse dei tempi per esigenze di rappresentazione; si può osservare la **contemporanea presenza di 2 fenomeni ondulatori**: il primo con frequenza  $\nu$  e il secondo con frequenza  $\Delta\nu$



in un pacchetto d'onda il fatto di fissare una estensione spaziale finita corrisponde ad una **indeterminazione in frequenza** se si ragiona in termini di battimento



$$\Delta\tau = \frac{\Delta x}{v} = \frac{n\lambda}{v} = nT$$

Se si osservano le caratteristiche del battimento ci si accorge immediatamente della parentela che intercorre tra un pacchetto d'onda ed una porzione di battimento: selezionare spazialmente un'onda (cioè considerare un *pacchetto d'onda*) equivale ad introdurre una indeterminazione nella frequenza:

$$\Delta\tau \approx T_b = \frac{1}{\Delta\nu} \tag{IV.2.30}$$

Abbiamo svolto considerazioni di tipo esclusivamente qualitativo ma è importante riflettere sul senso fisico di ciò che è stato detto:

*rinunciare alla estensione infinita di un fenomeno ondulatorio vuol dire rinunciare al suo carattere monocromatico e viceversa.*



### Un battimento dovuto a effetto Doppler con l'onda riflessa

*Esercizio:* Una sorgente stazionaria emette onde sonore piane con frequenza  $\nu = 1500$  Hz in aria ( $v = 340$  m/s) e queste onde vengono riflesse da una parete in avvicinamento alla sorgente con velocità  $v' = 0.50$  m/s. Ciò determina per effetto Doppler una diminuzione di frequenza dell'onda riflessa che si sovrappone all'onda emessa dalla sorgente determinando dei battimenti in un sistema di registrazione collocato lungo la direzione di propagazione delle onde. Quanto vale la frequenza di battimento?



Bisogna distinguere per quanto riguarda l'effetto Doppler tra l'onda incidente e l'onda riflessa. Durante il processo di andata la parete si comporta come un osservatore in avvicinamento e pertanto esso riceverà un'onda con frequenza:

$$\nu' = \nu(1 + \beta).$$

Durante il processo di ritorno la parete si comporterà come una sorgente in moto di avvicinamento e pertanto essa produrrà onde che saranno recepite con frequenza

$$\nu'' = \frac{\nu'}{1 - \beta}$$

Il risultato finale sarà  $\nu'' = \frac{\nu(1 + \beta)}{1 - \beta}$

Ma  $\beta = \frac{v'}{v} = \frac{0.50}{340} = 1.47 \times 10^{-3}$

Pertanto in base alla equazione dell'effetto Doppler:

$$\nu'' = \frac{\nu(1 + \beta)}{1 - \beta} = 1500 \frac{1 + 1.47 \times 10^{-3}}{1 - 1.47 \times 10^{-3}} = 1504.4 \text{ Hz}$$

e dunque  $\nu_b = 4.4$  Hz e  $T_b = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{1}{4.4} = 0.23$  s



## 2.8 Applicazioni biomediche e tecnologiche degli ultrasuoni

### 2.8.1 GLI ULTRASUONI: COSA SONO ? DOVE E PERCHÉ SI UTILIZZANO?



il delfino e il pipistrello si orientano con un sonar ad ultrasuoni; il fatto di usare onde di bassa lunghezza d'onda minimizza la diffrazione ed aumenta il potere risolvente dell'organo di percezione

Sino a qualche decina d'anni fa lo studio degli *ultrasuoni* cioè delle onde poste a frequenze superiori alla soglia di udibilità dell'orecchio umano costituivano una sorta di appendice delle curiosità legate all'acustica. Si sottolineava che i pipistrelli e i delfini comunicano e si orientano tramite sistemi ad ultrasuoni e al più si impostava qualche discorso legato alla navigazione alla pesca o alle applicazioni militari dell'utilizzo degli ultrasuoni (il sonar per la navigazione dei sommergibili o per la individuazione di banchi di pesci da parte dei pescherecci d'altura).

A partire dagli anni 60 del 900 la situazione è rapidamente mutata per le applicazioni legate alla lavorazione dei materiali, all'industria alimentare e soprattutto in campo medico.

Dal punto di vista fisico le applicazioni sono sostanzialmente di due tipi:

- bombardamento di materiali* con fasci ultrasonici di intensità molto elevata e utilizzo delle brusche variazioni di pressione che si creano a scopo demolitivo
- utilizzo di fasci di ultrasuoni ben collimati e di frequenze ed intensità opportune per *produrre immagini* (per riflessione) e per ottenere informazioni sulla presenza di strutture in movimento (effetto Doppler).



come e perché si è diffuso l'utilizzo degli ultrasuoni per vedere dove non arriva l'occhio

In entrambi i casi sono stati decisivi lo sviluppo della elettronica e della telematica che hanno consentito di realizzare strumentazioni altamente automatizzate che semplificano sia la fase di preparazione sia la fase di decodifica delle informazioni.

La scelta di utilizzare gli ultrasuoni è dovuta alle seguenti ragioni:

- relativa semplicità nel realizzare sia i dispositivi di generazione sia quelli di rivelazione. Si tratta di materiali cristallini (quali il quarzo, utilizzato anche per la realizzazione degli orologi e di molti apparati di radiotrasmissione) o ceramici sintetici (titanati di piombo e zirconio) in cui si sfrutta il fenomeno della *piezoelettricità*, cioè la capacità di un solido di vibrare quando viene sottoposto all'azione di campi elettrici variabili. Se la frequenza della sollecitazione forzata è pari o sottomultipla di quella propria del cristallo si producono condizioni di risonanza che consentono la produzione delle onde elastiche di alta frequenza. Il cristallo viene tagliato in uno strato sottile dello spessore di mezza lunghezza d'onda e ciò consente la produzione di onde stazionarie e la emissione di un'onda della frequenza desiderata.
- possibilità di utilizzare lo stesso dispositivo di generazione anche come strumento di rivelazione dei segnali; lo stesso materiale investito da onde elastiche genera segnali elettrici.
- possibilità di utilizzare onde di altissima frequenza (tra 1 e 20 MHz) che vengono a corrispondere a lunghezze d'onda molto minori delle dimensioni degli oggetti da indagare il che garantisce gli stessi vantaggi che si ottengono con le radiazioni luminose o con le onde elettromagnetiche in genere: *percorsi rettilinei* e alto *potere di risoluzione*. In effetti la velocità delle onde elastiche varia da qualche centinaio di m/s nei gas, al migliaio nei liquidi ad alcune migliaia nei solidi. Per

esempio alla velocità di 1'500 m/s tipica delle sostanze acquose e dei tessuti molli, alla frequenza di 20 MHz corrisponde una lunghezza

$$\text{d'onda } \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{1'500}{20 \cdot 10^6} = 75 \mu\text{m}.$$

Un ultimo elemento di interesse fisico da considerare riguarda la percentuale di energia che viene trasmessa e quella che viene riflessa quando un fascio di onde acustiche incontra una discontinuità nel mezzo in cui si sta propagando.

Si è già accennato a questo aspetto nella descrizione delle caratteristiche dell'orecchio medio descrivendo il ruolo di amplificatore (e adattatore di impedenza) svolto dai 3 ossicini (martello, incudine e staffa).

La *impedenza acustica* esprime la opposizione che il mezzo oppone alla penetrazione dei segnali; essa risulta essere proporzionale sia alla densità del mezzo sia alla velocità di propagazione dell'onda e pertanto (visto che tale velocità cresce al crescere della densità) possiamo affermare che quando un fascio di ultrasuoni incontra sul suo percorso delle discontinuità esso venga in maggiore o minore misura riflesso e sia pertanto in grado di trasportare all'indietro informazioni che, opportunamente rielaborate, consentano di informarci sulla geometria e sulle caratteristiche dell'ostacolo.

Sostanza/tessuto	$\rho$ ( $\text{kg m}^{-3}$ )	$c$ ( $\text{m s}^{-1}$ )	$Z$ ( $10^6 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ )
Aria a 20 °C	1.29	344	0.000444
Acqua a 20 °C	1000	1430	1.43
Grasso	920	1460	1.34
Fegato	1060	1550	1.64
Milza	1060	1560	1.65
Sangue	1060	1560	1.65
Rene	1040	1560	1.62
Muscolo	1070	1590	1.70
Osso	1380–1810	2700–4100	3.75–7.38

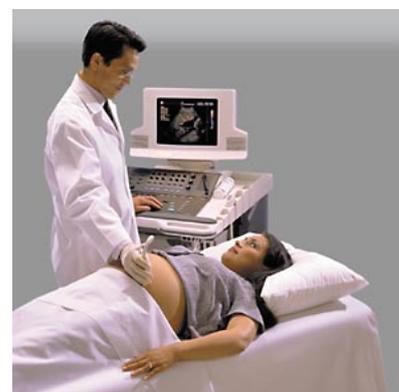
Il segnale che ritorna verso il rivelatore è molto complesso a causa della presenza di onde riflesse in punti e lungo direzioni diverse, di onde diffratte, di onde che recano una fase diversa a seconda delle caratteristiche di densità dell'ostacolo, ma di tutti questi aspetti si fanno carico l'elettronica e appositi software in grado di elaborare grandi masse di informazioni in tempo reale e trasformarle in immagini.

### 2.8.2 L'ECOGRAFIA E L'ECOCOLOR DOPPLER

Chi abbia fatto un esame ecografico sa che la parte del corpo da indagare viene preliminarmente spalmata di un gel acquoso: così facendo si diminuisce la impedenza alla superficie di contatto tra la sonda e il corpo e si fa in modo che gli ultrasuoni non vengano riflessi a livello della pelle.

A questo punto l'operatore muove la sonda sul corpo del paziente mentre su un monitor compaiono immagini del tipo rappresentato qui a lato.

impedenza acustica

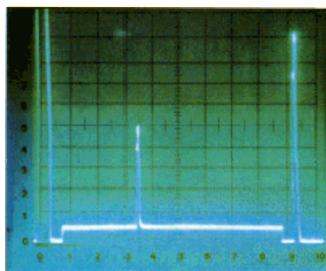


il controllo ecografico in gravidanza è uno standard grazie alla semplicità e al carattere non invasivo



immagini ecografica con effetto color Doppler

Per le indagini di tipo vascolare la sonda ecografica è associata ad un sistema di decodifica delle variazioni di frequenza dell'onda riflessa con una uscita audio e una video. A livello audio si ha la amplificazione sonora dei movimenti connessi ai flussi arteriosi e venosi mentre a livello video vengono rappresentati in rosso e in blu i segnali che presentano un aumento o una diminuzione di frequenza e che corrispondono a zone in cui i globuli rossi che riflettono il segnale risultano in avvicinamento o allontanamento rispetto al rivelatore.



il segnale di emissione, quello di ritorno riflesso a fine corpo e, al centro, un segnale riflesso che ci informa di una discontinuità interna al corpo in esame

La formazione delle immagini avviene utilizzando impulsi di ultrasuoni della durata da 1 a 5  $\mu\text{s}$  e che vengono ritrasmessi qualche centinaio di volte al secondo. In questo modo tra un fascio e il successivo intercorre il tempo necessario all'emettitore per trasformarsi in ricevitore con decodifica della distanza tra la pelle e l'interfaccia riflettente attraverso la differenza di tempo tra il treno d'onda inviato e quello riflesso. C'è inoltre il tempo di ricevere (per un dato treno d'onde) più di un fascio riflesso a diverse profondità il che consente di ottenere anche una buona risoluzione longitudinale.

Nella ipotesi di un treno d'onde a 10 MHz della durata di 2  $\mu\text{s}$  che si propaga in acqua e viene emesso ritmicamente con una frequenza di 200 impulsi al secondo abbiamo che:

materiale	L(cm)
acqua	0.0008
sangue	0.06
muscolo	0.7
fegato	0.5
rene	0.6
grasso	0.4

Tabella IV.2.3

- la distanza tra due treni d'onda successivi è di  $1/200 = 5 \text{ ms}$
- ogni treno d'onda è formato da 20 oscillazioni complete (il periodo è  $10^{-7} \text{ s}$  e in 2  $\mu\text{s}$  si hanno 20 oscillazioni)
- se il treno d'onda deve percorrere 15 cm tra andata e ritorno il segnale di ritorno arriva dopo  $\frac{0.15}{1500} = 0.1 \text{ ms}$  e dunque esiste tutto il tempo per il sistema di passare in modalità di ricezione ed incamerare le informazioni prima di emettere un nuovo treno d'onda.

La scelta di operare con emissioni impulsive consente inoltre di operare con intensità abbastanza elevate (perché la intensità media è comunque ridotta) in modo di aumentare la profondità della indagine nonostante si operi con livelli di attenuazione per assorbimento abbastanza elevati.

Come abbiamo già visto la legge di attenuazione nel mezzo è di tipo esponenziale e se la rappresentiamo in base 2, anziché in base  $e$ , avremo che:

$$I = I_0 2^{-L/L}$$

dove la quantità L (detta *strato emivalente*) rappresenta lo spazio percorso in ambiente omogeneo per produrre una riduzione a metà della intensità del fascio (tabella IV.2.3 – strati emivalenti di interesse ecografico).

La scelta della frequenza utilizzata è legata alla profondità del campo da esaminare nel senso che i fasci ad alta frequenza pur avendo una migliore risoluzione risultano più fortemente attenuati e inoltre, a parità di condizioni, richiedono un apporto energetico maggiore e dunque un più elevato livello di rischio.

A questo proposito vale la pena di concludere con una sintesi dei pro e dei contro legati all'utilizzo delle onde acustiche (*ecografia*) al posto delle più tradizionali onde elettromagnetiche (raggi X) in diagnostica.



immagini ecografiche tridimensionali di un feto riprese spostando la sonda lateralmente con un processo computerizzato che, sfruttando la diversa angolazione, ricostruisce la profondità

## I vantaggi

- Si tratta di una tecnica completamente non invasiva rispetto alle tecniche endoscopiche che prevedono l'inserimento di sonde nel corpo del paziente.
- Basso costo, piccole dimensioni delle apparecchiature e facilità di trasporto e memorizzazione
- Danni praticamente inesistenti per i tessuti e gli organi coinvolti
- Facilità di indagine sui tessuti molli e su numerosi organi interni tra cui il cuore

## Gli svantaggi

- Limiti nella risoluzione delle immagini rispetto ai raggi X
- Riflessione molto elevata nel passaggio da tessuto a gas e dunque impossibilità di esaminare zone contenenti cavità gassose (polmone, stomaco)
- Elevato assorbimento da parte delle ossa e conseguente impiego ridotto in traumatologia o nelle indagini sulla scatola cranica
- Difficoltà di interpretazione e produzione di buone immagini

## Danni alla salute

Inesistenti alle intensità utilizzate a scopo diagnostico. Le onde elastiche interagiscono con i tessuti per riscaldamento e stress ma si tratta di effetti bassissimi alle intensità utilizzate. Tutt'altro discorso riguarda i contesti in cui la interazione è volutamente ricercata (non a scopo diagnostico).

### 2.8.3 ONDE D'URTO E LITOTRIZIONE

Grazie all'elevato potere di collimazione e alla possibilità di concentrare entro spazi ridotti intensità molto elevate le *onde d'urto*, cioè successioni di impulsi con intensità molto elevate vengono utilizzate anche in funzione demolitiva sia in medicina sia nelle applicazioni industriali.

In medicina l'utilizzo delle onde d'urto sfrutta:

- la differenza di pressione che si viene a creare tra i due estremi di un calcolo quando esso viene investito da un'onda sulla parte anteriore e dalla onda riflessa su quella posteriore,
- il fenomeno di disgregazione prodotto dalla *cavitazione*

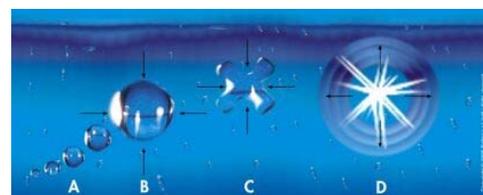
mentre sul piano industriale si utilizza prevalentemente quest'ultimo per potenziare le capacità di pulizia di liquidi detergenti.

Vediamo di cosa si tratta: quando in un liquido vengono immerse onde ultrasoniche (solitamente tra i 30 e i 50 kHz) caratterizzate da un alternarsi di pressione negativa e positive all'interno del liquido si vengono a creare numerose bolle che iniziano a crescere per effetto della pressione negativa; quando poi la pressione si inverte esse vengono sottoposte ad un brusco riscaldamento ed alla fine implodono generando onde d'urto molto intense che sono in grado di staccare dalle pareti del recipiente qualunque tipo di incrostazione o impurità. Funzionano su questa base le macchine pulitrici ad ultrasuoni.

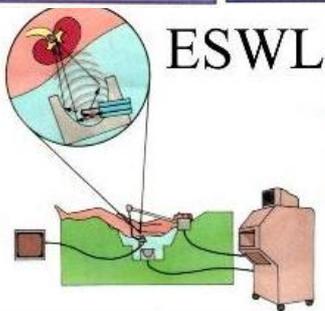
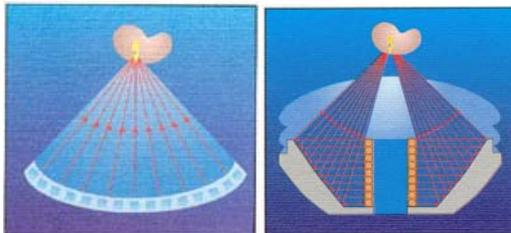
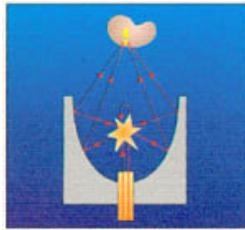
In ambito medico, a partire dagli anni 80 del 900 è iniziato l'uso su larga scala delle onde d'urto per demolire i calcoli dell'apparato urinario. Il



diagnostica dello stato di salute di un tronco con uno strumento ad ultrasuoni che registra variazioni nella velocità di propagazione dovute a cavità; frequenza 77 kHz



la *cavitazione*: la bolla dapprima cresce durante la fase di pressione negativa e poi implode generando onde d'urto nel liquido



Extracorporeal Shock Wave Lithotripsy: il paziente viene immerso in acqua e il calcolo fa da secondo fuoco di un ellissoide mentre il generatore di onde è collocato nel primo fuoco. L'onda può essere generata per scarica elettrica, azione elettrodinamica o effetto piezoelettrico

principio è quello di utilizzare altissime concentrazioni energetiche ottenute attraverso la focalizzazione di onde elastiche e farle convergere su oggetti anche molto duri quali i calcoli renali ottenendone la demolizione attraverso una successione di percussioni quali farebbe un maglio che colpisce con ritmicità e potenza il sassolino sino a frantumarlo.

La possibilità di utilizzo incruento di questa metodica si basa sulla capacità delle onde utilizzate di non produrre effetti devastanti sulle ossa a causa delle diverse proprietà elastiche plastiche di ossa e calcoli e sulla capacità degli operatori di far convergere le elevatissime potenze utilizzate in spazi molto ridotti e ben individuati.

Un apparato di *litotriazione*<sup>16</sup> utilizza i seguenti dispositivi:

□ **un generatore di onde d'urto**

Il generatore attualmente si basa su tre tipi di tecnologie corrispondenti anche a tre generazioni successive di litotrittori:

- Nel tipo più antico (detto elettroidraulico) l'onda è provocata innescando ritmicamente delle scintille all'interno di un liquido entro cui è immerso il paziente da trattare. La scintilla genera una brusca bolla di vapore che successivamente collassa producendo sia il picco di pressione positiva sia una successiva pressione negativa.
- Un secondo tipo di generatore si basa sull'utilizzo sincrono di molti generatori di *tipo piezoelettrico* già disposti in maniera da produrre una concentrazione dei raggi generati da ciascuno nel punto desiderato.
- In un terzo tipo di generatore (detto *elettromagnetico*) si fa passare una corrente rapidamente variabile in una bobina in grado di generare un campo magnetico e poi si sfruttano le correnti indotte e i conseguenti effetti elettrodinamici su una piastra metallica posta nelle vicinanze per creare l'onda d'urto.

□ **uno o più sistemi di focalizzazione**

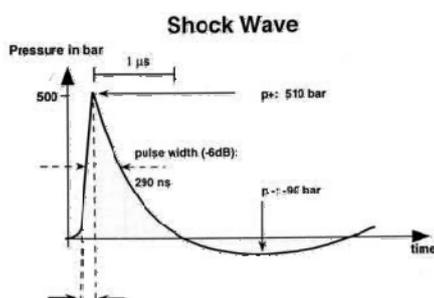
- Nel primo tipo si fa in modo di collocare la scintilla nel fuoco di un ellissoide in modo che tutte le onde generate all'indietro vengano riflesse nel secondo fuoco dove si fa in modo di collocare il calcolo da demolire
- Nel secondo tipo che genera raggi monodirezionali è sufficiente disporre i diversi generatori secondo le direzioni desiderate.
- Nel terzo tipo che genera onde piane si utilizzano lenti acustiche (del tutto simili a quelle che si utilizzano in ottica) per ottenere la focalizzazione desiderata.

□ **sistemi di localizzazione e monitoraggio del calcolo**

Si utilizzano sia metodi fluoroscopici basati sui raggi X sia sistemi di tipo ecografico del tipo descritto nei paragrafi precedenti.

□ **sistemi di accoppiamento acustico tra paziente e generatore**

Nei primi sistemi il paziente veniva immerso in una vasca d'acqua ma con la evoluzione tecnologica si dispone ormai di sistemi meno



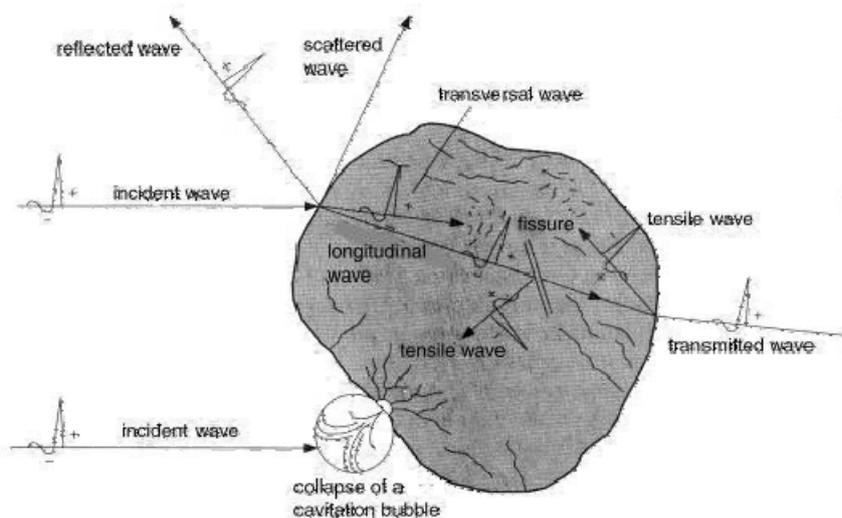
<sup>16</sup> etimologicamente = frantumazione della pietra

ingombranti che utilizzano cuscini riempiti d'acqua con membrane al silicone per garantire un buon accoppiamento con il paziente.

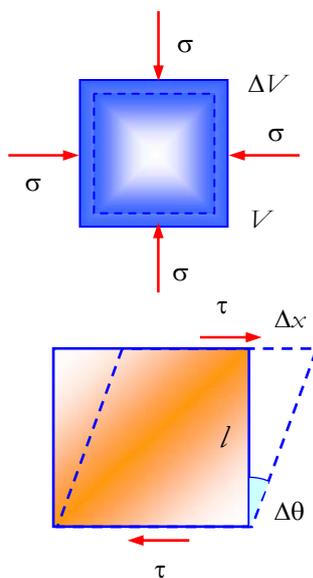
#### □ frantumazione del calcolo

Un'onda d'urto tipica arriva sino a frequenze equivalenti di 20 MHz e picchi di pressione sino a 120 MPa con pressioni negative sino a  $-10$  MPa.

La fase di attacco dell'onda d'urto caratterizzata da una estrema rapidità dell'ordine di qualche decina di ns produce un collasso nella struttura del calcolo e ciò determina l'inizio del processo demolitivo (cosa che non accade alle ossa che riescono a reagire elasticamente a tali variazioni) mentre l'onda si propaga al suo interno producendo erosioni successive. L'onda di pressione negativa viene invece riflessa alla interfaccia e innesca processi di cavitazione con produzione di onde d'urto secondarie.



## 2.9 Quesiti di fine capitolo



1. Descrivere il legame tra il modulo di Young e quello di Poisson.<sup>17</sup>
2. Il modulo di Young è un numero puro.<sup>18</sup>
3. Durante i processi di compressione e stiramento si verificano solitamente deformazioni laterali di valore simile a quelle longitudinali.<sup>19</sup>
4. Facendo riferimento alle immagini qui a lato dare la definizione del modulo di comprimibilità  $K$ .<sup>20</sup>
5. Cosa rappresenta questa relazione  $K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$ ? Come mai  $K$  è un numero positivo?<sup>21</sup>
6. Con riferimento alla immagine qui a lato dare la definizione del moduli di taglio definendo le diverse grandezze coinvolte nella definizione.<sup>22</sup>
7. La tendenza delle onde marine a seguire i contorni della costa è dovuta alla diffrazione.<sup>23</sup>
8. Spiegare la differenza tra onda piana e onda sferica individuando le implicazioni sulla ampiezza dell'onda.
9. Come è possibile l'esistenza di onde piane a 3 dimensioni?<sup>24</sup>
10. Le onde di superficie sull'acqua sono caratterizzate esclusivamente da uno spostamento verticale della superficie.<sup>25</sup>
11. Dare la definizione di intensità di un'onda e giustificare la seguente relazione  $I = \frac{1}{2} \delta v \omega^2 A^2$
12. Dare la definizione di fronte d'onda e di raggio precisando per quali tipi di onde ha senso parlare di raggio.<sup>26</sup>

<sup>17</sup> Il rapporto di Poisson esprime il rapporto tra la deformazione relativa trasversale e quella longitudinale perché si è visto che quando si stira o comprime un corpo a struttura lineare si ha sempre una contrazione o un allargamento della corrispondente sezione del corpo. I due *strain* risultano dipendere solo dal materiale. Si antepone un segno meno perché le due deformazioni hanno sempre segno contrario.

<sup>18</sup> Falso: ha le dimensioni di uno sforzo.

<sup>19</sup> Falso: il rapporto di Poisson ha valori tipici tra 0.2 e 0.4

<sup>20</sup> Quando operando a tre dimensioni un corpo viene sottoposto a uno *stress* di tipo volumetrico il rapporto tra lo stress e lo strain volumetrico è costante; la costante di proporzionalità  $K$  è detta modulo di comprimibilità.

<sup>21</sup> Il modulo di comprimibilità, coinvolgendo le deformazioni volumiche, si correla al modulo di Young e al rapporto di Poisson. Il denominatore è positivo perché il rapporto di Poisson ha valori tipici tra 0.2 e 0.4.

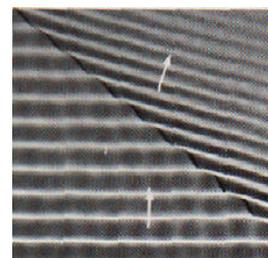
<sup>22</sup> Quando ad un solido si applica una deformazione di taglio applicando una tensione superficiale  $\tau$  in grado di far scorrere i piani cristallini si riscontra una proporzionalità tra  $\tau$  e l'angolo di scorrimento  $\theta$ . La costante di proporzionalità è detta modulo di taglio  $G$  e si tratta nuovamente di una quantità correlata solo a  $E$  e  $\nu$

<sup>23</sup> Falso: è dovuta alla rifrazione subita dalle onde la cui velocità cambia con la profondità man mano che ci si avvicina alla riva.

<sup>24</sup> Possono essere prodotte o facendo oscillare un piano o guardando un'onda sferica da lontano.

<sup>25</sup> Falso: il movimento è di tipo ellissoidale (si veda la immagine nel testo).

13. La lunghezza d'onda delle onde sull'acqua diminuisce man mano che ci si avvicina alla costa <sup>27</sup>
14. Nel passare da un mezzo a maggior velocità verso uno a minor velocità i fronti d'onda tendono a disporsi lungo la normale alla superficie di separazione <sup>28</sup>
15. Per i fronti d'onda rettilinei di onde piane, l'angolo di incidenza può essere definito come l'angolo tra la linea di separazione e il fronte d'onda. <sup>29</sup>
16. Cosa rappresenta questa legge  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$  ?
17. Si dimostra che un'onda trasversale unidimensionale si propaga lungo una fune con legge:  $v = \sqrt{\frac{T}{\xi}}$ . Senza ripetere pedissequamente tutti i passaggi riassumere la sostanza del processo dimostrativo.
18. Per le onde di volume che si propagano in un solido nella relazione che fornisce la velocità compare la densità al denominatore. Eppure in genere nei solidi più densi la velocità è più alta. Come lo spieghi? <sup>30</sup>
19. Cosa rappresenta questa relazione  $v = \sqrt{\frac{10^3 \gamma R T}{\mu}}$  ? Come mai vi compare il coefficiente adiabatico  $\gamma$  ? <sup>31</sup>
20. Nella immagine qui a lato si osserva il fenomeno della rifrazione di onde di superficie in corrispondenza di un brusco cambiamento di profondità del fondale: a) perché si ha rifrazione? b) il movimento delle onde è quello delle frecce; da quali dettagli della foto lo si capisce? c) per conoscere  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  bisogna conoscere la scala dell'immagine. Perché? <sup>32</sup>



<sup>26</sup> Il fronte d'onda è la porzione di onda caratterizzata dal fatto che tutti i suoi punti risultano in fase; ha senso parlare di raggio quando la perpendicolare ad una porzione di fronte d'onda risulta essere, nel tempo la stessa retta. Ha senso parlare di raggio per le onde piane e per le onde sferiche.

<sup>27</sup> Vero: al diminuire della profondità, diminuisce la velocità e con essa diminuisce la lunghezza d'onda.

<sup>28</sup> Falso: tendono a disporsi lungo la superficie di separazione. Come si vedrà studiando la rifrazione in dettaglio,  $\sin i / \sin r = v_1/v_2 > 1 \Rightarrow \sin i > \sin r$  e pertanto l'angolo di rifrazione tende gradualmente a 0 e le onde si dispongono parallelamente alla superficie di separazione.

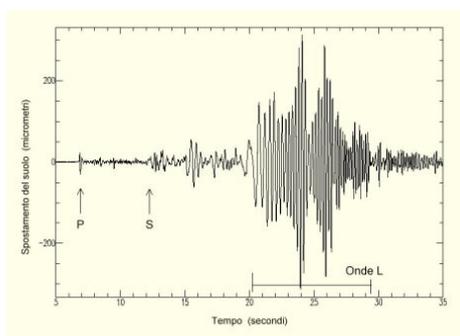
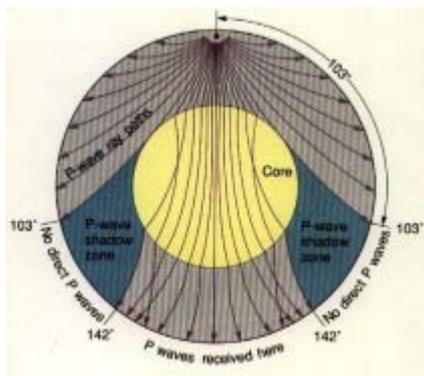
<sup>29</sup> Vero: si può parlare indifferentemente di angolo tra il fronte d'onda e la superficie o di angolo tra la direzione di propagazione e la normale perché i due angoli sono congruenti essendo formati da rette tra loro perpendicolari.

<sup>30</sup> Guardare cosa compare al numeratore.

<sup>31</sup> Fornisce la velocità di propagazione delle onde di pressione nei gas. Le trasformazioni termodinamiche coinvolte nella propagazione ondosa sono delle adiabatiche a causa della alta velocità con cui avvengono. Commentare il rapporto  $T/\mu$ .

<sup>32</sup> a) si ha rifrazione perché la variazione di profondità determina una variazione di velocità che a sua volta determina una variazione di lunghezza d'onda: i fronti d'onda conservano il loro parallelismo ma cambiano direzione. b) lo si capisce da due cose: dalla presenza delle onde riflesse nel primo mezzo e dalla attenuazione di intensità nel

21. Nel caso di onde nello spazio si usano la direzione di propagazione e la normale alla superficie di separazione per definire gli angoli <sup>33</sup>
22. Le quote (percentuali) di energia che vengono riflesse, rifratte o assorbite alla superficie di separazione di due mezzi qualsiasi dipendono prevalentemente dalla ampiezza delle onde <sup>34</sup>
23. L'addensamento di energia ondosa in corrispondenza dei promontori è dovuto alla diffrazione. <sup>35</sup>
24. Commentare questa immagine soffermandosi in particolare sul significato della zona d'ombra e sui suoi estremi.
25. Le onde sismiche sono di 4 tipi, due di volume e due di superficie: riassumete le caratteristiche.
26. Da chi sono generate le onde superficiali di un sisma? <sup>36</sup>
27. La somma della ampiezza dell'onda riflessa e di quella rifratta è sempre uguale a quella dell'onda incidente. <sup>37</sup>



28. Nella immagine qui a lato viene rappresentato un sismogramma. In quindici righe svolgere un commento con riferimento alla classificazione delle onde coinvolte e delle intensità che si sviluppano.
29. La classificazione dei terremoti viene misurata attraverso la magnitudo. La enciclopedia Treccani fornisce la seguente definizione: Grandezza strumentale che caratterizza in modo oggettivo l'entità del fenomeno sismico; sostituisce efficacemente le vecchie 'scale sismiche' a base soggettiva ed empirica (per es., la scala Mercalli) e fornisce al tempo stesso una misura dell'energia meccanica associata al terremoto. Secondo la definizione di C.F. Richter, introdotta nel 1935, la *m. M* di un terremoto è il logaritmo decimale della massima ampiezza, che un sismografo standard registrerebbe se si trovasse a una distanza di 100 km dall'epicentro di quel terremoto. Lo stesso Richter compilò una tabella nella quale sono date, per le varie distanze epicentrali, le ampiezze di registrazione fornite dal predetto sismografo standard per un terremoto di *m. zero* ('scosse standard'). Per un determinato terremoto si ha allora:  $M = \log_{10}(A/B)$ , dove *A* è l'ampiezza massima registrata in un dato luogo e *B* l'ampiezza massima che la 'scossa standard' produrrebbe in quel luogo (deducibile dalla tabella, a condizione che sia nota la distanza del luogo di registrazione dall'epicentro).  
 a) perché la magnitudo è un numero puro? b) qual è il vantaggio ad utilizzare una scala logaritmica c) la grandezza *A/B* a quale grandezza fisica del sisma può essere correlata? d) quando la magnitudo cambia di un punto di quanto cambia la indicazione del sismografo? <sup>38</sup>

secondo mezzo. c) dalla immagine io leggo il rapporto  $\lambda_1 / \lambda_2 =$  al rapporto delle distanze tra due fronti d'onda nei due mezzi ma non conosco separatamente  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  perché non conosco il fattore di scala.

<sup>33</sup> Vero

<sup>34</sup> Falso: semmai potrebbe esserci una dipendenza dalla frequenza

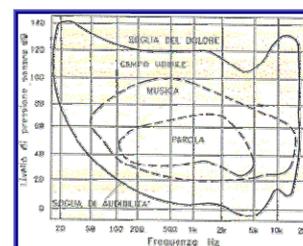
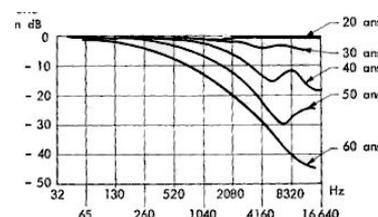
<sup>35</sup> Falso: l'addensamento è dovuto alla rifrazione che, facendo convergere i fronti d'onda in direzione della costa, produce l'addensamento energetico

<sup>36</sup>

<sup>37</sup> Falso: si sommano le energie in gioco e dunque le intensità e non le ampiezze che sono proporzionali alla radice quadrata della intensità.

<sup>38</sup> a) è l'argomento di una funzione trascendente b) si ha la possibilità di confrontare sismi di contenuto energetico molto diverso c) alla energia messa in gioco che spesso viene misurata in tonnellate equivalenti di tritolo d) quando si fanno confronti con i logaritmi il termine al denominatore se ne va e se  $M_1/M_2 = 1$  si ha che  $A_1/A_2 = 10$

30. Qual è la funzione del canale uditivo? Perché un bambino e un adulto hanno sensibilità diverse alle diverse frequenze?
31. Il martello, l'incudine e la staffa, posti al di là del timpano hanno una funzione di amplificatore meccanico. Perché serve un amplificatore meccanico al di là del timpano?
32. A cosa servono i canali semicircolari? Secondo te la presenza di piccole variazioni locali di densità nel liquido che si trova all'interno, o la presenza di piccole concrezioni calcaree cosa determina? Se non sai rispondere cerca su internet la parola *cupololitiasi*.
33. Cita i 4 processi che avvengono all'interno della coclea e che fanno dell'organo dell'udito un sistema molto specializzato.
34. Illustra la differenza tra la scala pitagorica e quella temperata. A cosa si pone rimedio con la scala temperata?
35. Qual è in frequenza il range della voce umana?
36. Dimostra che quando la intensità di un suono il corrispondente livello cambia di 3 dB.
37. Di cosa tratta questo diagramma?
38. Quanto vale il rapporto delle intensità di un aereo al decollo e di una normale conversazione?
39. Cosa sono le curve isofoniche; perché vengono introdotte?
40. Illustra il significato di questo diagramma facendo riferimento anche a qualche elemento di natura quantitativa.
41. Questa relazione è di un certo interesse per valutare taluni aspetti del suono:  $I = \frac{1}{2} \frac{(\delta p)^2}{\rho v}$ . Di cosa si tratta?
42. Come mai i livelli di intensità non si possono sommare? Cosa si deve fare per trovare l'effetto risultante?
43. Il nostro meccanismo di percezione sonora è di tipo esponenziale.  
39
44. L'orecchio umano ha un intervallo di udibilità di 12 ordini di grandezza.  
40
45. Il nostro apparato uditivo percepisce come tali differenze di intensità dell'ordine del 30%.  
41
46. La misura fisica di un suono differisce da quella fisiologica perché è diversa la unità di misura ( $W/m^2$  e decibel).  
42
47. Ogni 10 decibel di aumento la intensità sonora viene aumentata di  $10 W/m^2$ .  
43



<sup>39</sup> Falso: è di tipo logaritmico

<sup>40</sup> Vero: la soglia di udibilità è a  $10^{-12} W/m^2$  mentre la soglia del dolore a  $1 W/m^2$

<sup>41</sup> Vero. Al di sotto di differenze del 30% il nostro apparato uditivo spiana la sensazione uditiva.

<sup>42</sup> Falso: si usano due diverse unità perché è diverso il tipo di percezione: quella oggettiva è lineare (definizione di energia), quella soggettiva (fisiologica) è logaritmica. Per questo si definisce  $I_{db} = 10 \log (I/I_0)$  dove  $I_0$  rappresenta la soglia di udibilità.

48. La soglia del dolore per l'orecchio umano è intorno ai 120 decibel <sup>44</sup>
49. L'orecchio umano percepisce meglio i suoni di alta frequenza tra i 5 e i 10 mila Hz. <sup>45</sup>
50. In una classe scolastica la intensità sonora varia tra i 40 e i 60 decibel. <sup>46</sup>
51. La intensità sonora va misurata disponendo la superficie su cui cade l'onda sonora parallelamente alla direzione di propagazione. <sup>47</sup>
52. Nel definire la intensità sonora si sarebbe potuto utilizzare la energia perché tanto la potenza è proporzionale alla energia. <sup>48</sup>
53. Con il termine interferenza si intende semplicemente sovrapposizione di fenomeni con generazione di un nuovo fenomeno. Più propriamente si sottintende però che la sovrapposizione debba dar luogo a fenomeni dotati di una qualche forma di regolarità. <sup>49</sup>
54. Le onde, quando interferiscono non interagiscono <sup>50</sup>
55. Un'onda armonica, in un punto dello spazio, ha le caratteristiche di un moto armonico. Affinché l'interferenza di due moti armonici sia osservabile nel tempo occorre che si conservi la differenza di fase tra i due moti. <sup>51</sup>
56. Se la differenza di fase, varia lentamente rispetto al tasso di variazione del fenomeno, è comunque osservabile una specie di interferenza. <sup>52</sup>
57. Una zona in cui si formano figure di interferenza è soggetta a stazionarietà caratterizzata dalla mancanza di moti armonici. <sup>53</sup>
58. Un'onda stazionaria è una particolare forma di interferenza dovuta alla sovrapposizione di onde generate dalla limitatezza del mezzo di propagazione. <sup>54</sup>
59. Onda stazionaria è un *ossimoro*. Come mai? Cosa caratterizza le onde stazionarie? <sup>55</sup>

---

<sup>43</sup> Falso: vuol dire che la intensità sonora si è decuplicata. Se la differenza è di 10 decibel si ha che  $10 = 10[\log(I_2/I_0) - \log(I_1/I_0)] \Leftrightarrow \log(I_2/I_1) = 1 \Leftrightarrow I_2/I_1 = 10 \Leftrightarrow I_2 = 10 I_1$

<sup>44</sup> Vero: il valore corrisponde ad una intensità di  $1 \text{ W/m}^2$

<sup>45</sup> Falso: la zona di massima udibilità si ha tra 1000 e 5000 hz.

<sup>46</sup> Vero

<sup>47</sup> Falso: la superficie va disposta perpendicolarmente alla direzione di propagazione

<sup>48</sup> Falso: in un processo di tipo cumulativo, se si vuole ragionare in termini di intensità, per qualsiasi fenomeno, bisogna riferirsi ad un rapporto  $\Delta E/\Delta t$  cioè ad una potenza.

<sup>49</sup> Vero

<sup>50</sup> Vero

<sup>51</sup> Vero. Se non si conserva la differenza di fase non si determina la stabilità necessaria a dar luogo ad un fenomeno osservabile.

<sup>52</sup> Vero: questo accade per esempio nei battimenti

<sup>53</sup> Falso: la stazionarietà indica mancanza di propagazione. Tutti i punti oscillano armonicamente con la stessa fase e con ampiezze diverse.

<sup>54</sup> Vero

<sup>55</sup> Ossimoro significa coesistenza di elementi contraddittori. L'onda stazionaria non è un'onda perché non si ha propagazione del fenomeno (i suoi punti oscillano tutti in

60. Perché cambiando la tensione di una corda di chitarra cambia la frequenza del suono corrispondente? <sup>56</sup>
61. Per una traiettoria circolare di raggio  $r$ , la condizione di stazionarietà è data da  $2\pi r = n\lambda$  dove con  $n$  si è indicato un generico intero <sup>57</sup>
62. Lungo una fune di lunghezza  $l$ , fissata agli estremi, si generano solo onde stazionarie di frequenza tale che  $l$  corrisponda ad un numero dispari di mezze lunghezze d'onda. <sup>58</sup>
63. In presenza di onde stazionarie la propagazione ondosa cessa perché tutti i punti oscillano in fase. <sup>59</sup>
64. Cosa sono le casse di risonanza e a cosa servono? Che dimensioni devono avere per funzionare correttamente?
65. L'effetto Doppler consente di individuare l'esistenza di un moto relativo tra sorgente ed osservatore rispetto al mezzo. <sup>60</sup>
66. Nel caso di avvicinamento della sorgente si ha una riduzione della lunghezza d'onda che viene percepita come riduzione di frequenza. <sup>61</sup>
67. Nel caso di avvicinamento dell'osservatore si ha un aumento di frequenza che determina una corrispondente variazione di lunghezza d'onda nel mezzo. <sup>62</sup>

fase e con ampiezze diverse) ma d'altra parte è sempre prodotta dalla sovrapposizione di due onde e per questo la si chiama onda.

<sup>56</sup> Ragionare sulle onde stazionarie.

<sup>57</sup> Vero: solo le onde delle lunghezze d'onda equivalenti al valore  $2\pi r/n$  si sovrappongono sempre con la stessa fase dando luogo ad una intensificazione reciproca.

<sup>58</sup> Vero

<sup>59</sup> Vero

<sup>60</sup> Vero: per la precisione si individua il moto relativo della sorgente rispetto al mezzo e dell'osservatore rispetto al mezzo con due effetti fisici misurabili leggermente diversi nei due casi. Solo nel caso delle onde elettromagnetiche, per le quali esiste propagazione ondosa anche in assenza di un mezzo, l'effetto è lo stesso in accordo con il fatto che in tal caso si ha solo moto relativo della sorgente rispetto all'osservatore.

<sup>61</sup> Falso: si ha una riduzione di lunghezza d'onda e un conseguente aumento di frequenza percepita.

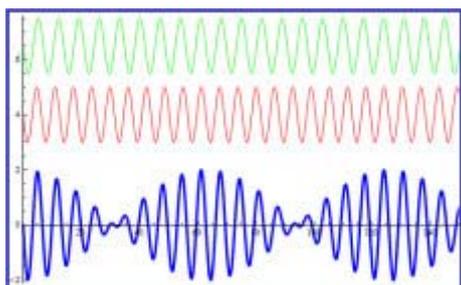
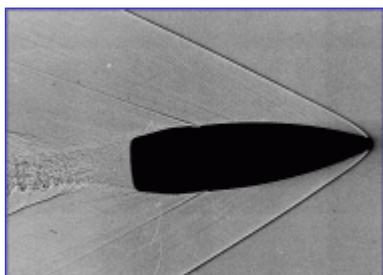
La riduzione di lunghezza d'onda è dovuta al fatto che mentre l'onda ha percorso lo spazio  $\lambda$  nel tempo  $T = \lambda/u$  la sorgente ha seguito l'onda di uno spazio  $\Delta x = vT$  e pertanto la lunghezza d'onda (distanza minima tra due punti in fase) risulta essere  $\lambda' = \lambda - \Delta x = \lambda - vT$ .

A tale riduzione di lunghezza d'onda corrisponde per l'osservatore, che vede l'onda venirgli incontro con velocità  $u$ , un aumento di frequenza. Infatti  $v' = v/\lambda' = v/(\lambda - vT) = (v/\lambda)/(1 - vT/\lambda) = v/(1 - v/u) = v/(1 - \beta)$ . Se  $\beta \ll 1$  si ha infine  $v' \cong v(1 + \beta)$  a meno di termini in  $\beta^2$ .

<sup>62</sup> Falso: si ha un aumento della frequenza dell'onda percepita dall'osservatore, cui non corrisponde però alcuna variazione di lunghezza d'onda che è una caratteristica dell'onda rispetto al mezzo.

L'osservatore dopo aver percepito una cresta, incontra la cresta successiva dopo un periodo apparente  $T' = \lambda/(v+u)$  a causa della sua velocità relativa  $v+u$  rispetto all'onda. Pertanto  $v' = 1/T' = (v+u)/\lambda = (v/u+1)/(\lambda/u) = (u/\lambda)(1+v/u) = v(1+\beta)$

68. Attraverso l'effetto Doppler è possibile determinare il moto relativo di sorgente ed osservatore rispetto al mezzo, ma non si può stabilire se a muoversi sia la sorgente o l'osservatore. <sup>63</sup>
69. Se si indica con  $\beta=v/u$  il rapporto tra velocità della sorgente o dell'osservatore rispetto al mezzo e con  $u$  la velocità dell'onda si può affermare che, in caso di avvicinamento, è  $v' \cong v(1+\beta)$ . <sup>64</sup>
70. L'effetto Doppler per le onde meccaniche, poiché evidenzia una diversità di comportamento per il moto relativo, costituisce una violazione del principio di relatività galileiana. <sup>65</sup>
71. Cosa illustra questa immagine in cui viene fotografato ad alta velocità il moto di un proiettile? Spiega il fenomeno di cui si tratta.
72. Nel caso delle onde elettromagnetiche, poiché si riscontra l'esistenza dell'effetto Doppler anche per la propagazione nel vuoto, si ha una evidenza della non applicabilità all'elettromagnetismo della relatività galileiana. <sup>66</sup>
73. Nelle onde meccaniche, l'effetto Doppler relativo al moto della sorgente, determina un cono (o un triangolo, per le onde che si propagano su un piano) di apertura data dalla relazione  $\sin\beta = u/v$  dove con  $\beta$  si indica l'angolo al vertice del triangolo, con  $v$  la velocità della sorgente e con  $u$  quella dell'onda. <sup>67</sup>
74. Il diagramma qui a lato illustra un importante fenomeno di acustica; illustralo insieme alle grandezze rilevanti e ricava l'equazione del fenomeno.
75. Cosa hanno a che fare i battimenti con la indeterminazione in frequenza legata alla estensione finita di un treno d'onde?
76. I generatori e i ricevitori di ultrasuoni funzionano utilizzando un particolare fenomeno fisico. Di cosa si tratta?



<sup>63</sup> Falso: come si è visto nei due punti precedenti i risultati nei due casi sono diversi e differiscono a meno di un termine in  $\beta^2$ . Infatti:  $\frac{1}{1-x} = \frac{(1+x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{(1+x)}{(1-x^2)} \cong 1+x$  se si trascurano termini in  $x^2$  rispetto a termini in  $x$ .

<sup>64</sup> Vero: come si è visto ai punti precedenti vale = nel caso di avvicinamento dell'osservatore e  $\cong$  in caso di avvicinamento della sorgente.

<sup>65</sup> Falso: in base al principio di relatività galileiana due sistemi di riferimento in moto relativo danno luogo agli stessi fatti descritti nello stesso moto. Ovvero non c'è modo di sapere quale dei due sistemi di riferimento sia *realmente* in moto.

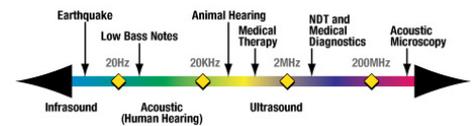
Nel caso considerato non c'è simmetria tra moto della sorgente e moto dell'osservatore perché il moto avviene rispetto ad un mezzo fisico esistente e a cui si riferiscono le velocità. In altri termini il moto dell'osservatore e quello della sorgente sono fisicamente distinguibili tra loro e dunque danno luogo ad evidenze sperimentali diverse.

<sup>66</sup> Vero: per le onde elettromagnetiche che si propagano anche nel vuoto si ha ancora effetto Doppler, ma in quel caso la legge che lo regola è diversa, è unica sia per moto della sorgente, sia per moto dell'osservatore, ed è deducibile attraverso le leggi della relatività speciale di Einstein.

In particolare per il moto dell'osservatore non è più vero che la velocità relativa sia  $v+u$ , ma essa risulta  $\frac{v+u}{\sqrt{1+\beta^2}}$

<sup>67</sup> Falso:  $\beta$  è l'angolo di semiapertura

77. Nella immagine qui a lato viene analizzato lo spettro delle onde acustiche con particolare attenzione alla zona degli ultrasuoni. In base a quanto viene discusso nel testo scrivi una breve relazione in cui analizzi il legame tra la frequenza e il tipo di applicazione soffermandoti anche sulla lunghezza d'onda che si correla al potere risolutivo.
78. In ecografia su quale fenomeno fisico si basa la possibilità di costruire una immagine dei diversi tessuti molli che vengono indagati?
79. Nella litotrizzazione come avviene il processo demolitivo?
80. Per evitare danni ad altri organi e apparati come si deve operare durante il processo di litotrizzazione?



## 2.10 Quesiti dalle Olimpiadi di Fisica

1. È noto che il suono del tuono si sente dopo aver visto la luce del lampo. Questo avviene perché... (Juniore 1996)

A ...la luce si propaga in linea retta mentre il suono si diffonde in tutto lo spazio.

B ...l'occhio reagisce più rapidamente dell'orecchio.

C ...la luce del lampo viene prodotta prima del suono del tuono.

D ...il lampo e il tuono sono prodotti in parti diverse della nuvola temporalesca.

**E** ...la velocità con cui si propaga la luce è più grande di quella con cui si propaga il suono.

2. Un violino ed un flauto suonano insieme: le onde sonore del violino hanno ampiezza maggiore di quelle del flauto. Quelle del flauto hanno frequenza maggiore rispetto a quelle del violino. Quale strumento produce il suono più forte e quale quello più alto? ... (Juniore 2001)

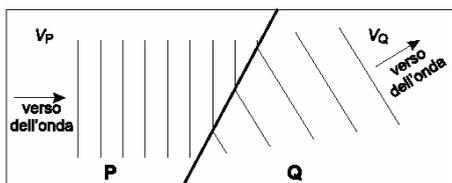
*Il suono più forte    Il suono più alto*

A... Flauto                      Flauto

B... Flauto                      Violino

**C**... Violino                      Flauto

D... Violino                      Violino



3. In figura sono schematizzate le creste delle onde formate in una vasca usata per lo studio dei fenomeni ondulatori. Nelle sezioni indicate con  $P$  e con  $Q$  la profondità della vasca è diversa e le onde si propagano con velocità di modulo, rispettivamente,  $v_P$  e  $v_Q$ . Le frecce mostrano le direzioni di propagazione delle onde nelle due zone. Come sono le lunghezze d'onda e le velocità di propagazione delle onde nelle due zone  $P$  e  $Q$ ? ... (Juniore 2002)

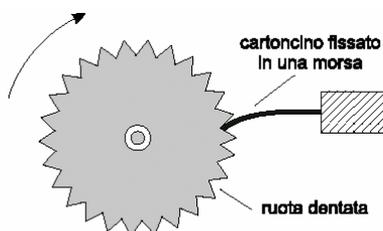
*La lunghezza d'onda                      La velocità di propagazione*

A ... è maggiore in  $P$                        $v_P$  è maggiore di  $v_Q$

B ... è maggiore in  $P$                        $v_Q$  è maggiore di  $v_P$

**C** ... è maggiore in  $Q$                        $v_P$  è maggiore di  $v_Q$

D ... è maggiore in  $Q$                        $v_Q$  è maggiore di  $v_P$



4. Se appoggiamo un cartoncino rigido ad una ruota dentata che gira velocemente possiamo sentire un suono definito. Il suono diventa più acuto se... (Juniore 2002)

A ...premiamo il cartoncino contro i denti della ruota con maggiore forza.

**B** ...facciamo girare la ruota più velocemente.

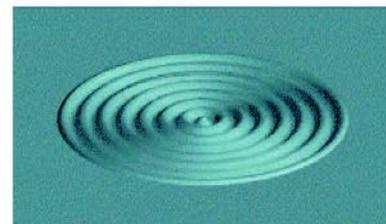
C ...usiamo un cartoncino più spesso.

D ...usiamo una ruota con meno denti.

5. Un pipistrello emette un breve suono acuto mentre vola vicino ad una casa. Dopo 0.5 s, ripassando per lo stesso punto, sente l'eco. Se la velocità del suono nell'aria è di 300m/s quanto dista la casa dal pipistrello? ... (Juniore 2003)

A ...600m                      B ...300m                      C ...150m                      **D** ...75m

6. Un amico ti mostra una foto con l'immagine istantanea di una serie di increspature sulla superficie di uno stagno. Ti dice anche che in quel momento l'increspatura più esterna si trovava a 1 m dal centro della perturbazione. Considerando la sola immagine, che cosa puoi determinare? ... (Juniors 2004)



- A ...La velocità dell'onda.
- B ...Il periodo dell'onda.
- C** ...La lunghezza d'onda.
- D ...Nessuna delle grandezze precedenti.

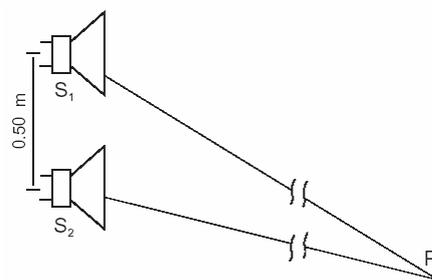
7. La distanza tra due nodi consecutivi di un'onda stazionaria è 20cm. L'onda che propagandosi dà origine all'onda stazionaria ha una lunghezza d'onda di? ... (I livello 1996)

- A ...10cm
- B ...20cm
- C ...30cm
- D ...40cm
- E ...50cm

8. Un treno si muove a velocità costante emettendo un fischio continuo. Una persona che si trova lungo la ferrovia vede arrivare il treno e sente un fischio... (I livello 1997)

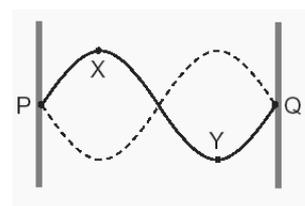
- A ...la cui frequenza aumenta gradatamente
- B** ...di frequenza costante, ma più alta
- C ...di frequenza uguale a quella emessa dal treno
- D ...di frequenza costante ma più bassa
- E ...la cui frequenza diminuisce gradatamente

9. Due piccoli altoparlanti identici  $S_1$  e  $S_2$  distanti tra loro 0.50 m sono connessi allo stesso generatore. Essi vibrano in fase emettendo onde sonore di lunghezza d'onda 0.40 m. Un microfono individua un minimo dovuto alla sovrapposizione delle onde provenienti dalle due sorgenti nel punto P. Se P è a 12.00m da  $S_2$  e  $PS_1 > PS_2$  allora la minima distanza di P da  $S_1$  deve essere: ... (I livello 1997)



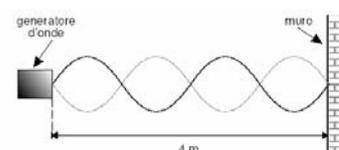
- A ...12.15 m
- B** ...12.20 m
- C ...12.40
- D ...12.50 m
- E ...13.00 m

10. Il diagramma mostra una corda elastica tesa fra due punti fissi P e Q. Sulla corda è presente un'onda stazionaria. Quale o quali delle seguenti affermazioni, riguardo ai due punti indicati X e Y della corda, sono corrette? 1) I due punti oscillano con una differenza di fase uguale a  $\pi$ . 2) I due punti hanno lo stesso periodo di oscillazione. 3) La distanza fra i due punti è uguale a una lunghezza d'onda. ... (I livello 2002)



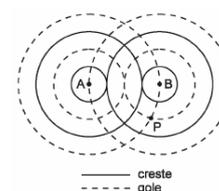
- A Tutte e tre
- B** Solo la 1 e la 2
- C Solo la 2 e la 3
- D Solo la 1
- E Solo la 3

11. Un generatore di onde, collocato a 4 metri di distanza da un muro riflettente, produce onde stazionarie in un nastro, come mostrato nel disegno a fianco. Se la velocità dell'onda vale 10m/s, qual è la sua frequenza? (I livello 2004)

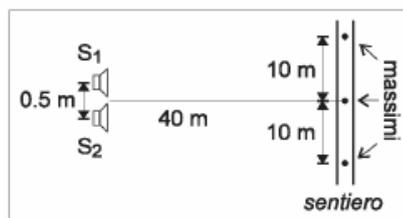


- A 0.4 Hz
- B 4 Hz
- C** 5 Hz
- D 10 Hz
- E 40 Hz

12. La figura rappresenta due sorgenti, A e B, di un ondoscopio. Che fenomeno si osserva nel punto P? ... (I livello 2006)



- A ...Interferenza distruttiva
- B** ...Interferenza costruttiva
- C ...Riflessione

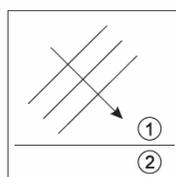


- D ... Rifrazione  
 E ... Diffrazione
13. La figura mostra due piccoli altoparlanti,  $S_1$  ed  $S_2$ , distanti 0.5 m uno dall'altro. Il suono emesso dai due altoparlanti ha la stessa frequenza. Una persona cammina lungo un sentiero davanti agli altoparlanti a 40 m di distanza e sente tre massimi di intensità sonora a distanza di circa 10 m uno dall'altro, come in figura. Qual è - approssimativamente - la lunghezza d'onda del suono emesso?... (I livello 2006) <sup>68</sup>

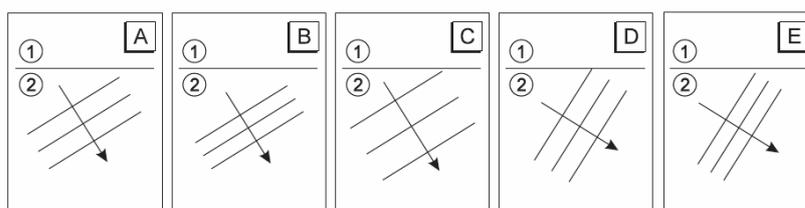
A ... 2m    B ... 1m    **C ... 0.25 m**    D ... 0.12 m  
 E ... 0.063m

14. Una sorgente di onde acustiche di frequenza costante e un osservatore si muovono uno rispetto l'altra. La frequenza dell'onda misurata dall'osservatore cresce uniformemente col tempo. Questo accade perché rispetto ad certo sistema di riferimento... (I livello 2007)

A ... l'osservatore si muove a velocità costante verso la sorgente che è ferma.  
 B ... la sorgente si allontana a velocità costante dall'osservatore che è fermo.  
**C ... l'osservatore si muove di moto uniformemente accelerato verso la sorgente ferma.**  
 D ... la sorgente si allontana in moto uniformemente accelerato dall'osservatore fermo.  
 E ... l'osservatore percorre, a velocità costante, una circonferenza nel cui centro sta la sorgente.

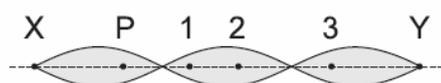


15. Nella figura sono rappresentati tre fronti d'onda consecutivi (possono essere interpretati come punti di massimo (creste) o di minimo (ventri), in ogni caso tutti in fase tra loro). L'onda sta per subire una rifrazione nel passaggio attraverso la superficie di separazione di due semispazi, indicati in figura con 1 e 2, nei quali la velocità di propagazione dell'onda è diversa. Quale dei seguenti disegni rappresenta correttamente gli stessi tre fronti d'onda dopo aver subito la rifra-



zione? (I livello 2012) <sup>69</sup>

A **B** C D E



16. In un filo teso XY si è stabilita un'onda stazionaria, come in figura. In quale o quali punti l'oscillazione risulta in verso opposto rispetto a P? (I livello 2013)

A ... Tutti e tre: 1, 2 e 3.    **B ... Solo 1 e 2.**    C ... Solo 2 e 3.

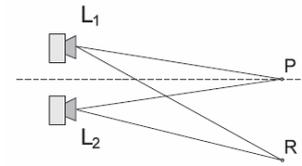
<sup>68</sup> Le onde hanno direzioni quasi parallele con inclinazione  $10/40$  e la differenza di cammino  $\lambda/10 = 10/40$

<sup>69</sup> Diminuisce la lunghezza d'onda (la velocità aumenta) e i fronti d'onda tendono a disporsi parallelamente alla superficie di separazione

D ... Solo 2.

E ... Solo 3.

17. Due altoparlanti identici  $L_1$  e  $L_2$  emettono un suono udibile della stessa frequenza e sono in fase tra loro. Si genera in questo modo un fenomeno di interferenza. Nel punto P, posto alla stessa distanza da entrambi gli altoparlanti, si trova un massimo di intensità. Allontanandosi da P, si incontra per la prima volta un altro massimo nel punto R, con  $L_1R = 5.6\text{m}$  e  $L_2R = 5.3\text{ m}$ . La frequenza del suono emesso dagli altoparlanti vale:

A ...  $8.8 \times 10^{-4}\text{ Hz}$ B ...  $3.1 \times 10^{-1}\text{ Hz}$ C ...  $1.0 \times 10^2\text{ Hz}$ **D** ...  $1.1 \times 10^3\text{ Hz}$ E ...  $3.7 \times 10^3\text{ Hz}$ 

## 2.11 Problemi di fine capitolo

### 1. Determinazione della temperatura tramite la velocità del suono.

*Esercizio:* La temperatura degli strati alti della atmosfera non può essere misurata con un termometro perché a causa della rarefazione dell'aria il termometro non riesce ad andare in equilibrio con l'ambiente. Per questa ragione si utilizzano delle esplosioni a quota controllata e si rivela il ritardo con cui l'onda sonora raggiunge una determinata altezza.

Si supponga che la composizione relativa dell'aria non cambi e dunque che il peso molecolare medio dell'aria sia  $\mu = 28.95 \text{ g/mole}$ <sup>70</sup> e che il coefficiente adiabatico valga 1.417. Viene fatta esplodere una carica trasportata da un razzo alla quota  $h_1 = 19 \text{ km}$  e un rivelatore sonoro posto alla quota di  $h_2 = 21 \text{ km}$  ne rileva il suono con un ritardo  $\Delta t = 6.75 \text{ s}$ . Determinare la temperatura alla quota intermedia  $h = 20 \text{ km}$ .<sup>71</sup>



### 2. Modulo di Young e di Poisson e determinazione della velocità del suono nel vetro

*Esercizio:* Determinare la velocità delle onde P e S del suono nel vetro sapendo che per il vetro esaminato: la densità  $\rho = 2.58 \text{ kg/dm}^3$ , il modulo di Young vale  $E = 69 \text{ GPa}$  mentre il rapporto di Poisson vale 0.25.



Dalla conoscenza di  $E$  e di  $\nu$  possiamo risalire ai due moduli di comprimibilità e di taglio:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \frac{69 \cdot 10^9}{3(1 - 0.50)} = 46 \text{ GPa}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 37.6 \text{ GPa}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{K + 4/3 G}{\rho}} = 6.1 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

mentre per le onde trasversali:

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3.8 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$



### 3. Livelli di intensità e di pressione

*Esercizio:* due suoni differiscono di a) 1 decibel nel livello di pressione; determinare il rapporto delle intensità b) 1 decibel nel livello di intensità; determinare il rapporto delle pressioni.<sup>72</sup>



<sup>70</sup> Valore che è stato determinato nel I capitolo della III parte

<sup>71</sup> Si applica l'equazione  $v = \sqrt{\frac{10^3 \gamma R T}{\mu}}$  e si trova  $T = 215.7 \text{ K}$

<sup>72</sup> Si applicano le definizioni e si trova a) 1.26 b) 1.12

#### 4. Variazioni di intensità e di pressione

*Esercizio:* Se l'intensità di un suono aumenta di 1'000 volte di quanti decibel cambia il livello? Come cambia il rapporto delle pressioni? <sup>73</sup>



#### 5. Battimenti

*Esercizio:* Una fune sottoposta ad una tensione di 150 N determina un battimento di frequenza 7 hz quando viene messa di fronte a un diapason. Il battimento sparisce quando la tensione viene portata a 160 N. Determinare la frequenza del diapason.

Questo diapason, messo di fronte ad un secondo diapason produce un battimento con 5 variazioni in 3 secondi. Determinare la frequenza del secondo diapason.



#### 6. Onde stazionarie in un tubo sonoro chiuso

*Esercizio:* un tubo sonoro chiuso ad entrambe le estremità genera la frequenza del sol della scala temperata. Se ora una delle due estremità viene aperta quale sarà la frequenza prodotta? Si assuma per il suono la velocità di 340 m/s.



#### 7. Onde stazionarie in una fune

*Esercizio:* una fune, fissata alle due estremità ad una distanza  $l = 150$  cm produce un'onda stazionaria. I punti della fune caratterizzati da una ampiezza di oscillazione pari alla metà del massimo risultano essere separati da una distanza  $d = 50/3$  cm. Determinare le caratteristiche dell'onda stazionaria: tipo di armonica e lunghezza d'onda.



L'onda stazionaria è caratterizzata da una equazione del tipo:

$y = A \cos \omega t \sin kx$  in cui l'ampiezza delle oscillazioni varia con la posizione con legge  $A \sin kx$ .

Nella immagine qui a lato è stata rappresentata come esempio, per aiutare nel seguire i ragionamenti il caso di una seconda armonica. Ma noi non sappiamo, nel nostro caso, di quale armonica si stia trattando.

La prima osservazione da fare riguarda il fatto che, ragionando in termini angolari, i punti di cui parla il testo hanno delle fasi supplementari e inoltre poiché  $\sin \alpha = 1/2 \Rightarrow \alpha = \pi/6$

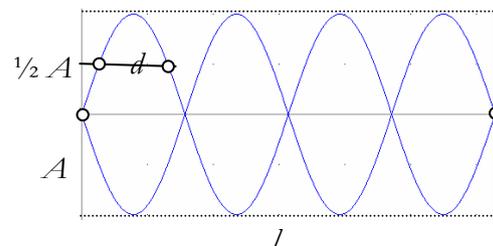
Dunque in termini angolari  $d$  vale  $\pi - 2 \pi/6 = 2/3 \pi$  e dunque possiamo scrivere che

$$k d = 2/3 \pi \text{ ovvero } k = \frac{2/3 \pi}{50/3} = \frac{\pi}{25}$$

Poiché l'onda stazionaria è delimitata da  $l$  avremo che  $k l = N \pi$  dove  $N$  rappresenta il numero di armoniche.

Pertanto  $\frac{\pi}{25} 150 = N \pi$  e dunque  $N = 6$

La lunghezza d'onda vale  $l/3 = 50$  cm.



<sup>73</sup> 30 dB e 31.6



## 8. Variazione di frequenza in una fune sottoposta a variazione di lunghezza

*Esercizio:* due funi identiche e vincolate agli estremi vengono stirate con degli allungamenti relativi  $\varepsilon_1 = 0.015$  e  $\varepsilon_2 = 0.030$ . Determinare il rapporto  $v_2/v_1$  delle frequenze fondamentali supponendo che le tensioni siano proporzionali agli allungamenti relativi.



Il problema non è banale come potrebbe apparire a prima vista; infatti la sollecitazione delle funi determina, oltre che una variazione di tensione anche una variazione delle densità lineari.

Infatti la massa non cambia, ma si ha una variazione di lunghezza.

$$\xi' = \frac{M}{l'} = \frac{M}{l + \varepsilon l} = \frac{M}{l(1 + \varepsilon)}$$

D'altra parte la frequenza fondamentale di una fune vincolata agli estremi è stata determinata nel testo e vale  $v = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\xi}}$

La massa delle due funi e la lunghezza originaria si semplificano nei rapporti e si ha pertanto:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{h'}{h} \sqrt{\frac{T_2 \xi_1}{T_1 \xi_2}} = \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 (1 + \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 (1 + \varepsilon_1)}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 (1 + \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 (1 + \varepsilon_2)}} = \sqrt{\frac{0.030 \cdot 1.015}{0.015 \cdot 1.030}} = 1.40$$



## 9. Armonica fondamentale e multiple di una colonna d'aria in un tubo aperto a una estremità

*Esercizio:* Una colonna d'aria della lunghezza  $l = 0.85$  m è contenuta in un tubo aperto ad una estremità. Determinare la frequenza fondamentale e tutte le armoniche di frequenza inferiore a 1'200 Hz. Dire cosa accade se il tubo viene aperto ad entrambe le estremità. Assumere per la velocità delle onde sonore in aria il valore  $v = 340$  m/s.<sup>74</sup>



## 10. Attenuazione di livello sonoro dovuto all'assorbimento da parte del mezzo e alla propagazione tridimensionale

*Esercizio:* Un'onda sonora presenta una intensità  $I = 2.00 \times 10^{-7}$  w/m<sup>2</sup> alla distanza  $d = 15.0$  m da una sorgente puntiforme. Supponendo che, per effetto dell'assorbimento da parte del mezzo l'onda subisca una attenuazione di tipo esponenziale caratterizzata da uno strato emivalente  $x = 110$  m, determinare la intensità alla distanza  $d' = 45.0$  m. Infine esprimere la variazione di livello sonoro in dB



<sup>74</sup> Tenere presente che quando il tubo è aperto in un estremo si forma un nodo nella parte chiusa e un ventre nella parte aperta. Quando si apre il tubo da entrambi i lati si hanno due ventri. Ragionare di conseguenza sulla lunghezza d'onda e sui suoi multipli.

Il problema richiede di tener conto della attenuazione dovuta alla azione simultanea dell'assorbimento (che avviene con legge esponenziale) e della legge dell'inverso del quadrato della distanza e cioè:

$$I = I_0 \frac{r_0^2}{d^2} 2^{-(d/x)} \quad I' = I_0 \frac{r_0^2}{d'^2} 2^{-(d'/x)}$$

Le due quantità  $I_0$  e  $r_0$  rappresentano un generico riferimento ma poiché siamo interessati al confronto tra due posizioni assegnate eliminiamo attraverso il rapporto la dipendenza dal riferimento e avremo:

$$\frac{I'}{I} = \frac{d^2}{d'^2} 2^{-(d' - d)/x}$$

Sostituendo i valori si avrà:

$$I' = I \frac{d^2}{d'^2} 2^{-(d' - d)/x} = 2.00 \times 10^{-7} \frac{15.0^2}{45.0^2} 2^{-30/110} = 2.00 \times 10^{-7} \times 0.0920 = 1.84 \times 10^{-8} \text{ w/m}^2$$

La variazione di livello sonoro vale  $\Delta L = 10 \log \frac{I'}{I} = 10 \log 0.0920 = -10.4 \text{ dB}$ .



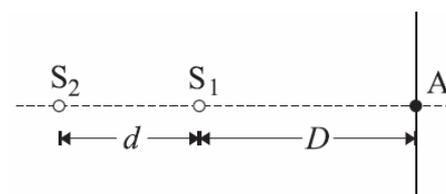
### 11. Olimpiadi 2014 Il livello: interferenza di sorgenti sonore

*Esercizio:* Due sorgenti puntiformi,  $S_1$  ed  $S_2$  emettono onde sonore di lunghezza d'onda  $\lambda$ , in fase tra loro. La distanza tra le due sorgenti è  $d = N\lambda$ , con  $N$  intero. Su un piano perpendicolare alla retta passante per le due sorgenti, distante  $D$  dalla sorgente più vicina (v. figura a lato), si hanno dei massimi e dei minimi di oscillazione che formano delle frange d'interferenza analoghe a quelle che si possono osservare in ottica.

- 1) Dire se nel punto A si ha un massimo, un minimo o nessuno dei due.
- 2) Dire qual è la forma delle frange d'interferenza, motivando la risposta.
- 3) Si indichi con  $h$  la distanza tra A e la frangia di minimi più vicina. Sia  $\lambda = 0.2\text{m}$ ,  $N = 300$  e  $D = 700 \text{ m}$ . Si calcoli l'espressione di  $h$  in funzione di  $D$ ,  $N$  e  $\lambda$ .

Suggerimenti: Può essere utile tenere presente che, con i valori indicati, si può dimostrare che risulta  $h \ll D$ . (Si ricordi che se  $x \ll 1$  allora  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ . In alternativa, si può osservare che  $d = 60\text{m}$ , ed è quindi molto minore di  $D$ .)

- 4) Si calcoli il valore numerico di  $h$ .



<sup>75</sup> Se il fenomeno si dimezza ad ogni strato equivalente la legge sarà del tipo  $(1/2)^{d/x}$  e cioè  $2^{-d/x}$

<sup>76</sup> Sul sito delle Olimpiadi vengono proposte ben quattro tipi di soluzioni possibili. Segnalo, oltre a quella classica qui proposta, una basata su una impostazione goniometrica e un'altra che affronteremo in generale in uno dei prossimi capitoli legata al fatto che il luogo geometrico per cui è costante la differenza di cammino da due punti fissi è l'iperbole.

Come detto sopra, le frange corrispondenti ad un minimo di oscillazione si hanno per  $r_2 - r_1 = (k - 1/2)\lambda$ , con  $k$  intero. Il triangolo avente per vertici  $S_1, S_2$  e un punto P sullo schermo ha lati  $r_2, r_1$  e  $d$ . Ricordando che in un triangolo la differenza di due lati è sempre minore o uguale del terzo si ha:

$$(k - 1/2)\lambda \leq d \Rightarrow k \leq d/\lambda + 1/2 = N + 1/2.$$

Al crescere della distanza fra P e A, la differenza di cammino delle due onde provenienti da  $S_2$  e  $S_1$  diminuisce, quindi per la frangia più vicina ad A il valore di  $k$  deve essere il massimo possibile. Il massimo valore intero che soddisfa la relazione qui sopra è evidentemente  $k = N$ . La frangia, corrispondente ad un minimo, più vicina al punto A, cioè quella di ordine  $N$ , si trova ad una distanza  $h$  da A determinata dall'equazione

$$\sqrt{(d + D)^2 + h^2} - \sqrt{D^2 + h^2} = (N - 1/2)\lambda = d - \lambda/2 \tag{1}$$

$$(d + D)\sqrt{1 + \left(\frac{h}{d + D}\right)^2} - D\sqrt{1 + \left(\frac{h}{D}\right)^2} = d - \frac{\lambda}{2}$$

Per  $h \ll D$  possiamo usare l'approssimazione suggerita nel testo:

$$(d + D)\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{d + D}\right)^2\right] - D\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{D}\right)^2\right] = d - \frac{\lambda}{2}$$

$$d + D + \frac{h^2}{2(d + D)} - D - \frac{h^2}{2D} = d - \frac{\lambda}{2}$$

$$h = \sqrt{\frac{D(N\lambda + D)}{N}} \tag{2}$$

## Indice analitico

- attenuazione*: assorbimento - 12
- battimenti*: analisi quantitativa - 30; periodo - 31; va e vieni del suono - 30
- Bell*: microfono, altoparlante - 17
- bombardamento di materiali*: ultrasuoni - 33
- canali semicircolari* - 14
- capacità uditiva*: range - 17
- cassa armonica* - 24
- cavitazione* - 36
- chiocciola ossea* - 14
- coclea* - 14
- condotto auricolare* - 13
- cono di Mach* - 28
- curve isofoniche* - 18
- decibel*: definizione, tabella con valori tipici - 17
- diapason* - 24
- doppio bang* - 28
- ecografia*: come funziona - 35; ecocolor Doppler - 34; vantaggi e svantaggi - 35
- effetto Doppler* - 26; moto dell'osservatore - 26; principio di relatività - 27; relativistico - 27; sorgente in moto - 27
- Esercizio*: Armonica fondamentale e multiple di una colonna d'aria in un tubo aperto ad una estremità - 53; Attenuazione di livello sonoro dovuto all'assorbimento da parte del mezzo e alla propagazione tridimensionale - 53; Battimenti - 52; Determinazione della temperatura tramite la velocità del suono - 51; Effetto Doppler e cinematica del moto della sorgente - 29; L'effetto Doppler all'autodromo - 28; Livelli di intensità e di pressione - 51; Modulo di Young e di Poisson e determinazione della velocità del suono nel vetro - 51; Olimpiadi 2014 II livello; interferenza di sorgenti sonore - 54; Onde stazionarie in un tubo sonoro chiuso - 52; Onde stazionarie in una fune - 52; Parametri di un suono e variazioni di intensità nella propagazione - 20; Passaggio da Livello di intensità sonora a intensità - 19; Sbalzi di pressione alla soglia del dolore - 21; Sovrapposizione di livelli di intensità - 19; Un battimento dovuto a effetto Doppler con l'onda riflessa - 32; Utilizzo delle onde sismiche per individuare un terremoto - 11; Variazioni di frequenza in una fune stressata in allungamento - 53; Variazioni di intensità e di pressione - 52
- fattore di attenuazione*: dipendenza dalla frequenza - 12
- focalizzazione*: onde d'urto - 37
- gare di automobilismo*: effetto Doppler - 26
- impedenza acustica* - 34
- infrasuoni ed ultrasuoni* - 18
- intensità di un'onda*: legame con velocità e densità di energia - 4; legame con velocità, frequenza, ampiezza e densità - 4

*intensità di un'onda* - 4  
*legge dell'inverso quadrato: intensità* - 5  
*litotriazione* - 37  
*livello di intensità: frequenza di riferimento* - 18  
*livello di intensità sonora* - 17  
*livello di pressione del suono* - 17  
*modulo: Young, Poisson; parametri elastici volumetrici* - 1  
*modulo di comprimibilità: K; legame con E e  $\nu$*  - 2  
*modulo di Poisson:  $\nu$  rapporto* - 1  
*modulo di taglio: G legame con E e  $\nu$*  - 2  
*modulo di Young: E* - 1  
*Mohorovich: discontinuità* - 10  
*nastro trasportatore: modello di effetto Doppler* - 26  
*nervo acustico* - 14  
*note musicali: tensione della corda* - 24  
*onda sonora* - 13  
*onda stazionaria: è un ossimoro* - 22; nodi e ventri - 23; particolare interferenza - 22  
*onde d'urto: applicazioni* - 36; demolizione calcoli urinari - 36  
*onde P e S: comportamento entro la terra; zone d'ombra e riflessione totale* - 10  
*Onde piane* - 3  
*Onde sferiche* - 3  
*onde sismiche: classificazione; primarie, secondarie, di Rayleigh, di Love* - 9; propagazione in mezzi non omogenei - 9; rifrazione continua e riflessione totale - 9  
*onde stazionarie: armonica fondamentale* - 24; nel condotto auricolare - 13; oscillazione di una fune - 23; per riflessione - 23  
*orecchio interno* - 14  
*orecchio medio* - 13  
*organo di senso: apparato uditivo, descrizione* - 13  
*ossicini: martello, incudine, staffa* - 14  
*pacchetti d'onda: definizione* - 31  
*padiglione auricolare* - 13  
*phon* - 18  
*piezoelettricità: sorgenti e rivelatori di ultrasuoni* - 33  
*produrre immagini: ultrasuoni* - 33  
***Quesiti dalle Olimpiadi di Fisica*** - 47–50  
***Quesiti di fine capitolo*** - 39–46  
*risonanza* - 24  
*rumore* - 18  
*scala musicale: pitagorica* - 15; temperata - 16

*sismografi*: rete - 10

*strato emivalente* - 35; attenuazione - 12

*strumenti musicali*: cassa armonica - 25

*suoni puri*: armoniche - 14; sovrapposizione - 15

*tabella*: densità e velocità delle onde con la profondità - 10

*timpano* - 13

*tuba di Eustachio* - 13

*tubi sonori ad acqua*: esperimento - 25

*ultrasuoni*: cosa sono e perché si utilizzano - 33; percorsi rettilinei, potere risolvante elevato - 33

*velocità di propagazione* - 5; espressione dimensionale - 7; gas - 7; onde P ed S - 6; relazione per onda lineare - 5

