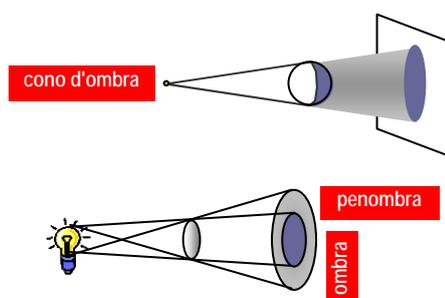


## IV.3 Ottica geometrica

### 3.1 Fasci e raggi

- ⌘ Fasci e raggi
- ⌘ Leggi della riflessione e della rifrazione
- ⌘ Particolari fenomeni di rifrazione
- ⌘ Il funzionamento delle lenti sottili
- ⌘ Costruzione delle immagini nelle lenti sottili
- ⌘ Aberrazioni delle lenti
- ⌘ Specchi sferici e parabolici
- ⌘ Quesiti di fine capitolo
- ⌘ Quesiti dalle Olimpiadi di Fisica
- ⌘ Problemi di fine capitolo

L'ottica geometrica studia quei fenomeni luminosi in cui si può trascurare il carattere ondulatorio della radiazione luminosa e sfruttare leggi geometriche più semplici basate sulla idea di raggio luminoso



ombra ⇔ è tipica delle sorgenti puntiformi  
penombra ⇔ è tipica delle sorgenti estese



eclissi parziali di luna: un esempio di ombra e penombra dovuta alla proiezione dell'ombra della Terra da parte di una sorgente non puntiforme (il Sole)

#### 3.1.1 DI COSA SI OCCUPA L'OTTICA GEOMETRICA

Lo studio dei fenomeni connessi alla propagazione della luce è precedente alla nascita della scienza moderna che possiamo collocare all'inizio del XVII secolo e segue comunque un *percorso parzialmente indipendente* rispetto al *processo di costituzione della fisica come scienza* anche durante e dopo il XVII secolo.

La ragione di questo fatto risiede in alcune *particolarità dei fenomeni luminosi* che hanno consentito di studiarne le leggi tramite strumenti di natura geometrica. Tali particolarità sono:

- o la propagazione praticamente rettilinea (che porta alla scoperta del concetto di ombra e alla visualizzazione della propagazione tramite particolari linee rette dette *raggi*),
- o la *reversibilità dei percorsi* (che consente di ragionare in entrambi i versi scambiando tra loro causa ed effetto),
- o la *elevata velocità di propagazione* (che consente di prescindere da ritardi nei processi di propagazione e di ragionare sulla propagazione come se si trattasse di un fenomeno istantaneo),
- o la *difficoltà di evidenziazione dei comportamenti tipicamente ondulatori* (che pure si affacciano in particolari contesti, come per esempio nella colorazione iridescente delle bolle di sapone).

Con gli occhi di oggi diremo che l'*ottica geometrica* si occupa di tutti quei fenomeni connessi alla propagazione della luce nei quali il carattere ondulatorio del fenomeno è irrilevante e dunque è possibile arrivare alla descrizione dei fenomeni attraverso leggi più semplici che applicheremo allo studio di lenti, specchi e prismi.

Si tenga però presente che in *ottica geometrica* esiste sempre una *zona di confine* in corrispondenza della quale il carattere ondulatorio del fenomeno si affaccia prepotentemente e pone delle limitazioni alla applicazione delle leggi dell'ottica geometrica.

In effetti la luce utilizzata negli strumenti ottici attraversa fenditure e diaframmi nei quali viene selezionata solo una *porzione del fronte d'onda* e, per effetto di ciò, si presenta il *fenomeno della diffrazione* che contrasta con l'assunto della propagazione rettilinea dei raggi di luce.

Ricordiamo infine che nel capitolo precedente, studiando le onde elastiche, abbiamo già incontrato alcuni casi di fenomeno ondulatorio (onde sismiche, ultrasuoni e onde d'urto) in cui l'aspetto ondulatorio viene trascurato a favore di leggi del tutto identiche a quelle che approfondiremo ora nel contesto della luce.

#### 3.1.2 FASCI E RAGGI

Appartiene alla esperienza comune la visione del percorso seguito dalla luce quando essa attraversa un mezzo in grado di evidenziarne la presenza: luci delle automobili in una giornata nebbiosa, porzioni di luce so-

lare in una stanza con un po' di pulviscolo atmosferico, luce di una pila in un recipiente trasparente contenente acqua in cui sia stata disciolta qualche goccia di latte. In tutti questi casi si osservano la presenza di un *fascio luminoso* di forma conica o cilindrica e chiameremo raggio di luce la singola linea retta di propagazione il cui insieme costituisce il fascio.

Nell'ambito dell'ottica geometrica si fa anche un largo uso di *fasci di raggi paralleli*: vale la pena di osservare preliminarmente che si tratta di una approssimazione. Una sorgente di luce emette radiazione in tutte le direzioni e dunque si ha una divergenza dalla sorgente verso lo spazio circostante. Per questo i cosiddetti raggi paralleli sono comunque sempre *fasci di tipo conico di apertura più o meno grande* e si può determinare un migliore parallelismo quanto più ci si allontana dalla sorgente.

Le nuove tecnologie ci hanno fornito, grazie all'uso di dispositivi a stato solido, fasci di luce laser a basso costo che vengono generati dalle cosiddette penne ottiche (o penne laser). Si tratta di fasci di luce rossa che soddisfano completamente le esigenze di tipo percettivo legate al concetto di raggio.

### 3.1.3 LA DIFFRAZIONE: ANTITESI DELLA PROPAGAZIONE RETTILINEA

Le onde, qualunque sia la loro origine (meccanica, acustica, ottica, elettromagnetica) sono tutte caratterizzate dal fatto di trasportare energia nello spazio e nel tempo. Il fenomeno del trasporto avviene tramite la oscillazione periodica di qualche grandezza fisica che, mentre oscilla nel tempo, si propaga nello spazio.

Ciò porta ai concetti di *velocità di propagazione*, di *frequenza di oscillazione* (l'inverso del periodo) e di *lunghezza d'onda* (la distanza spaziale percorsa dall'onda in un periodo). Se eseguiamo la fotografia di un'onda ad un dato istante la lunghezza d'onda sarà rappresentata dalla distanza tra due creste successive.<sup>1</sup>

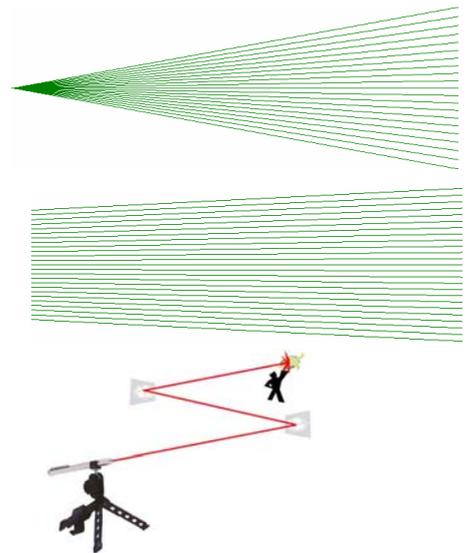
Il legame tra velocità, frequenza, periodo e lunghezza d'onda si esprime simbolicamente così:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu \quad (IV.3.1)$$

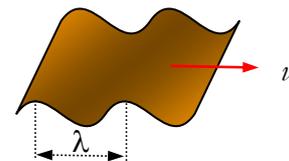
La *diffrazione* è uno dei fenomeni tipici delle onde e sarà analizzato dal punto di vista quantitativo in uno dei capitoli successivi. Ci basta qui sottolinearne le caratteristiche principali e dare anche un tentativo provvisorio di spiegazione.

Essa si presenta quando un'onda attraversa una fenditura che ne delimita una parte o incontra un ostacolo che ne blocca una parte; in entrambi i casi l'onda produce fenomeni ondulatori al di là degli ostacoli o al di fuori delle zone delimitate dalla fenditura. E' quanto si verifica nei porti dove, nonostante la diga foranea, si osserva la presenza di onde che la aggirano sullo spigolo verso mare.

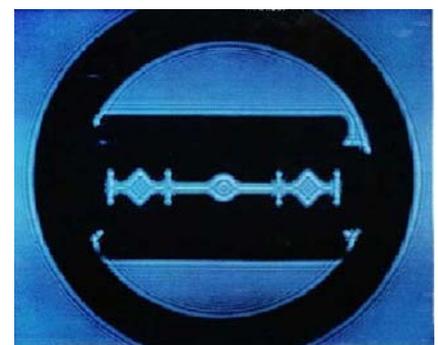
Il *fenomeno della diffrazione garantisce* a chi parla di ascoltare la propria voce nonostante il cono d'onda non vada dalla bocca verso le orecchie; il fenomeno della diffrazione è anche responsabile del fatto che le onde sull'acqua passino al di là degli ostacoli quando questi sono piccoli rispetto



da una sorgente puntiforme si genera un cono di raggi divergenti ma a grande distanza i raggi appaiono paralleli. Il puntatore laser è un ottimo generatore di raggi di luce con bassa divergenza



velocità, frequenza, lunghezza d'onda

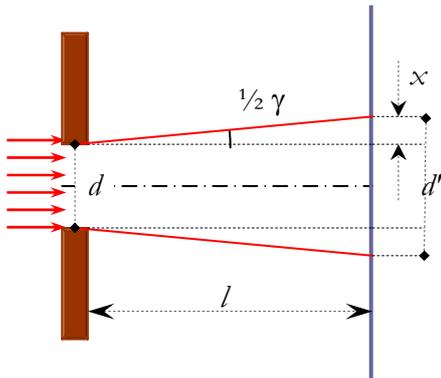


righe di diffrazione sul contorno della foto a distanza di una lametta da barba; la lama è affilata, la lametta è osservata a distanza e i due effetti combinati producono una diffrazione osservabile attraverso le tipiche frange

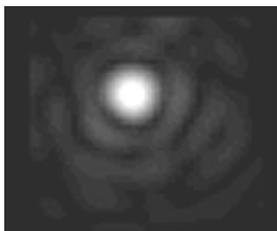
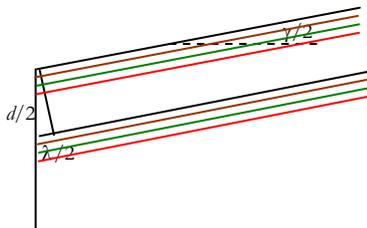
<sup>1</sup> Per consentire un uso flessibile del testo vengono ripresi alcuni concetti già introdotti nei capitoli precedenti



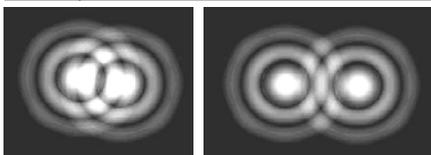
immagine di diffrazione di una fenditura in luce bianca: la fenditura appare più larga dell'originale e con i bordi sfuocati; la luce subisce anche la dispersione perché i massimi e minimi dei diversi colori finiscono in zone diverse



diffrazione trascurabile :  $d \gg \sqrt{l\lambda}$



le stelle sono oggetti puntiformi ma osservarle attraverso un diaframma (l'apertura del telescopio) determina la comparsa di fenomeni di diffrazione e ciò può comportare la difficoltà nel distinguere due stelle e determinarne la distanza angolare quando esse sono vicine tra loro e distanti rispetto all'osservatore



alla lunghezza d'onda, come accade nei laghi con i pali di approdo piantati in vicinanza delle rive.

Il fenomeno della diffrazione è il responsabile della impossibilità di osservare otticamente oggetti molto piccoli: vedere un oggetto vuol dire farlo interagire con un'onda luminosa ed osservare l'onda riflessa; ma quando la lunghezza d'onda ha dimensioni comparabili a quelle dell'oggetto o è addirittura più grande l'onda passa al di là dell'oggetto e questo diventa dapprima sfuocato e poi del tutto invisibile.

La cosa si spiega tenendo conto della capacità delle onde di interferire. Quando due onde con le stesse caratteristiche partono da punti diversi dello spazio e confluiscono in un terzo punto si sovrappongono con effetti diversi a seconda della differenza di cammino compiuto. Se i due cammini differiscono di 1, 3, 5 ... mezze lunghezze d'onda le due onde si distruggono mentre se i due cammini differiscono di un numero intero di lunghezze d'onda si sommano potenziandosi. Nel primo caso si parla di interferenza distruttiva e nel secondo di interferenza costruttiva.

Supponiamo che un fascio di raggi paralleli venga intercettato da una fenditura di dimensione lineare  $d$ . Per effetto del fenomeno della diffrazione, a distanza  $l$  dalla fenditura, si viene a formare una immagine (massimo principale di diffrazione) di dimensione  $d' = d + 2x$  caratterizzata da un bordo sfuocato di dimensione  $x$ . Tale difetto nell'immagine può essere trascurato quando  $x \ll d$  e questa condizione corrisponde a chiedere che sia:

$$d \gg \sqrt{l\lambda} \tag{IV.3.2}$$

Infatti (tenuto conto che l'angolo di divergenza  $\gamma$  è piccolo e che pertanto si possono identificare seno, angolo e tangente) si ha:

- $x = l \tan \gamma/2$  per ragioni geometriche
- $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\lambda}{d}$  perchè la zona di buio si genera dove le onde generate nei diversi punti della fenditura arrivano a coppie in opposizione di fase e ciò si verifica quando le onde generate da punti distanti  $d/2$  presentano una differenza di cammino pari a  $\lambda/2$  e dunque producono interferenza distruttiva (si veda la figura qui a lato in cui i raggi disegnati a coppie dello stesso colore sono assimilati a paralleli, il che è ammissibile quando l'angolo è piccolo e cioè  $d \ll l$ )

$$\text{e dunque } x = l \tan \gamma/2 \approx l \sin \gamma/2 = l \frac{\lambda}{d} \ll d \Rightarrow d^2 \gg l\lambda$$

Abbiamo così individuato un criterio per stabilire se in un dato contesto sono applicabili le approssimazioni dell'ottica geometrica. In base ad esso, per trascurare la diffrazione, non basta richiedere che gli oggetti considerati abbiano dimensioni decisamente superiori alla lunghezza d'onda. Ciò che determina la comparsa dei fenomeni di diffrazione è l'effetto combinato delle dimensioni dell'oggetto e della distanza tra sorgente ed immagine.

Per esempio considerato un valore tipico di lunghezza d'onda della luce visibile  $\lambda = 5'000 \text{ \AA}$ , affinché un oggetto delle dimensioni di 1 mm non dia luogo ad effetti osservabili di diffrazione deve essere:

$$l \ll d^2/\lambda = 10^{-6} / (5 \times 10^{-7}) = 2 \text{ m}$$

Un oggetto delle dimensioni di 1 mm produce fenomeni osservabili di diffrazione già quando viene osservato alla distanza di 2m.

Riflettendo su quanto appena visto si può cogliere l'importanza di una sottile distinzione terminologica: quella tra raggio come linea di propagazione e raggio come fascio sottile. Il raggio è un concetto geometrico e la tendenza ad identificarlo con un fascio sottile di luce si scontra con i limiti posti dal fenomeno della diffrazione.

### 3.1.4 FORMAZIONE DELLE IMMAGINI TRAMITE UN DIAFRAMMA

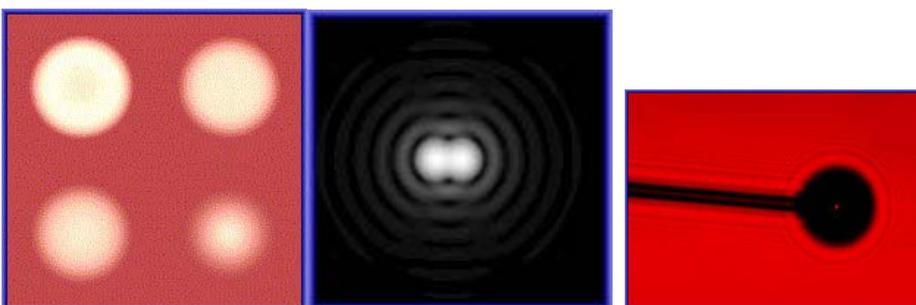
Se si pone una sorgente luminosa davanti ad una scatola di cartone sul cui fondo è stato posto uno schermo di vetro translucido che consenta la visione in trasparenza di una immagine si osserva che sullo schermo si viene a formare una immagine capovolta della sorgente luminosa. Il fenomeno si spiega con la propagazione rettilinea dei raggi luminosi e sino a qualche decennio fa, quando la tecnologia era meno sviluppata, costituiva il mezzo più semplice per costruirsi in proprio una piccola macchina fotografica (*camera oscura*).

Ogni punto della sorgente di luce emette uno stretto fascio luminoso che, passando attraverso il diaframma determina la comparsa di un punto luminoso e l'insieme di tali punti produce l'immagine della sorgente.

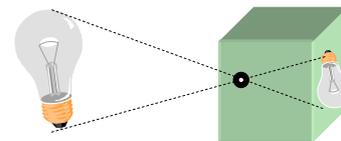
Affinché tale immagine si possa formare sono necessarie due condizioni:

- ◆ il diaframma non deve essere troppo largo perché in tal caso ad un punto della sorgente non corrisponde più un punto nell'immagine
- ◆ d'altra parte il diaframma non deve essere *troppo piccolo* per evitare la formazione di figure di diffrazione

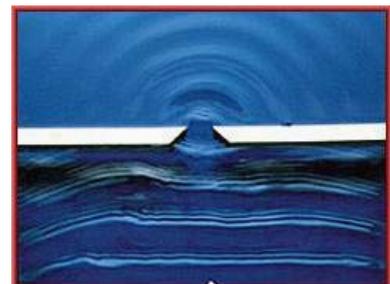
Qui di seguito si pubblicano alcune immagini diverse relative allo stesso fenomeno della *diffrazione*: allargamento di immagini, impossibilità di formare ombre nette, sfuocatura dei contorni di oggetti sottili, propagazione ondosa al di là di un ostacolo.



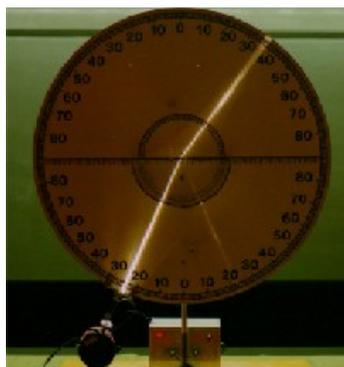
G. Airy scopritore delle immagini di diffrazione che caratterizzano la visione al telescopio delle stelle note in astronomia come **dischi di Airy**



un diaframma sottile consente di costruire immagini di oggetti luminosi ma risente delle limitazioni tipiche dell'ottica geometrica



## 3.2 Leggi della riflessione



riflessione e rifrazione alla superficie di separazione tra due mezzi; i due raggi hanno visibilmente intensità diverse

$i^\circ$	% riflessa aria-vetro	% riflessa aria-acqua
0	4.7	2.0
10	4.7	2.0
20	4.7	2.1
30	4.9	2.2
40	5.3	2.5
50	6.6	3.4
60	9.8	6.0
70	18	13.5
80	39	34.5
89	91	90.0
90	100	100

l'energia riflessa e rifratta dipendono dall'angolo di incidenza; la rifrazione predomina a piccoli angoli e la riflessione a grandi angoli

**immagini reali:** corrispondono a zone di convergenza di una parte dei raggi emessi dalla sorgente; **immagini virtuali** non corrispondono ad alcuna convergenza dei raggi e corrispondono ad una fisica del *come se*

### 3.2.1 COSA ACCADE ALLA SUPERFICIE DI SEPARAZIONE DI DUE MEZZI

I raggi luminosi che attraversano un mezzo omogeneo si propagano in linea retta finché giungono al confine del mezzo stesso, cioè alla superficie che separa il mezzo dallo spazio vuoto o da un secondo mezzo. Poiché siamo entro le approssimazioni dell'ottica geometrica possiamo ragionare sul comportamento di un singolo raggio; questo incontra la superficie in un punto in corrispondenza del quale ha senso parlare di *retta normale* alla superficie (è la perpendicolare passante per il piano tangente in quel punto).

Il raggio (che trasporta una certa quantità di energia) si separa in due raggi: il primo si propaga nel mezzo originario e verrà chiamato *raggio riflesso*, il secondo penetra nel secondo mezzo e sarà chiamato *raggio rifratto*. Ovviamente, in accordo con il teorema di conservazione dell'energia, i due raggi riflesso e rifratto trasporteranno una quantità di energia pari a quella di partenza.

La quantità di energia che viene riflessa o rifratta, oltre che dalle caratteristiche dei due mezzi, dipende in maniera molto sensibile dall'*angolo di incidenza* cioè dall'angolo che il raggio originario forma con la normale alla superficie di separazione. Come si vede dalla tabella qui a lato relativa al passaggio aria acqua e aria vetro, per piccoli angoli è nettamente predominante la rifrazione mentre la situazione si inverte progressivamente al crescere dell'angolo di incidenza.

### 3.2.2 LA LEGGE DELLA RIFLESSIONE

Poiché sia la riflessione sia la rifrazione hanno la capacità di deviare il cammino dei raggi luminosi, entrambi i fenomeni hanno la capacità di formare *immagini* di punti e/o oggetti.

Con il termine *immagine di un punto* si intende un punto dello spazio nel quale convergono i raggi luminosi provenienti dal punto dato. *L'immagine di un oggetto è semplicemente l'insieme dei punti immagine.*

Quando si parla di immagini si opera una seconda distinzione tra immagine reale e immagine virtuale.

*L'immagine reale* corrisponde in senso proprio alla definizione data nel paragrafo precedente ed è qualcosa di oggettivo, visualizzabile mediante uno schermo o una pellicola fotografica. Si tenga però presente che l'immagine conserva una differenza essenziale (anche dal punto di vista ottico) rispetto all'oggetto: in essa convergono solitamente solo una parte dei raggi luminosi emessi dall'oggetto e ciò a causa delle restrizioni poste dall'ottica geometrica nella costruzione degli apparati ottici.

*L'immagine virtuale* non è una vera e propria immagine ma corrisponde ad una visione del *come se*. Capita studiando fenomeni che riguardano sia gli specchi sia le lenti che una porzione di raggi provenienti da un oggetto divergano, ma gli stessi raggi, se vengono prolungati in zone al di là degli apparati, cioè in zone nelle quali non possono penetrare risultano convergere in un punto *come se la luce provenisse da quel punto che è detto immagine virtuale.*

La legge della riflessione afferma che *quando un raggio luminoso colpisce la superficie di separazione tra due mezzi il raggio incidente, la normale e il raggio ri-*

flesso giacciono in uno stesso piano e inoltre l'angolo di incidenza e quello di riflessione sono uguali.

Se applichiamo questa legge al caso degli specchi piani abbiamo una immediata visione di cosa si intenda con immagine virtuale.

Gli specchi piani formano una immagine virtuale di una sorgente puntiforme nel punto simmetrico della sorgente rispetto allo specchio.

Consideriamo la Figura qui a lato e siano SP e SQ due raggi emessi da S che vengono riflessi verso P' e Q'. Dopo aver tracciato la perpendicolare SH prolunghiamo P'P sino in S' ed osserviamo che il triangolo SS'P è diviso da PH in due triangoli congruenti per il II criterio (un lato in comune, due angoli retti e due angoli congruenti perché complementari di angoli congruenti per effetto della legge). Ne segue che SH = S'H.

Ma il ragionamento fatto vale identicamente per SQ e dunque S' non dipende dal particolare raggio perché SH è fissato univocamente. Ne consegue che tutti i raggi riflessi se vengono prolungati al di là dello specchio sembrano provenire da uno stesso punto. Il punto S' è una immagine virtuale di S. La riflessione da parte degli specchi piani produce pertanto delle immagini virtuali degli oggetti secondo una simmetria assiale.

Dalla figura si può trarre anche una seconda proprietà che, a prima vista risulta piuttosto bizzarra: fissato S e preso nello stesso semipiano un generico punto P' si può affermare che la luce che colpisce P' provenendo da S ha percorso il minimo cammino possibile tra S e P' passando per lo specchio.

La dimostrazione di ciò si basa sulla disuguaglianza triangolare. Dati S e P' si costruiscano H e il simmetrico S'. Si unisca S' con P' determinando così il punto P. La spezzata SP + PP' ha lunghezza minima tra quelle che vanno da S a P'. Preso infatti un altro punto Q≠P si ha che SP + PP' = P'S' < S'Q + QP' = SQ + QP' per effetto della disuguaglianza triangolare.

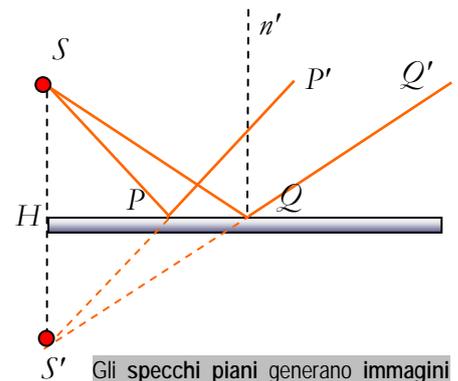
Questa stranezza in base alla quale la luce sembra sapere che percorso debba seguire per fare meno strada sarà ripreso più avanti sia sotto il profilo applicativo, sia sul piano storico - culturale.

Osserviamo ancora che la legge della riflessione è in pieno accordo con una interpretazione del fenomeno luminoso di tipo corpuscolare che, dopo i successi della legge di gravitazione universale, nel corso del 700 risultò inevitabile assumere come modello universale di spiegazione dei fenomeni naturali.

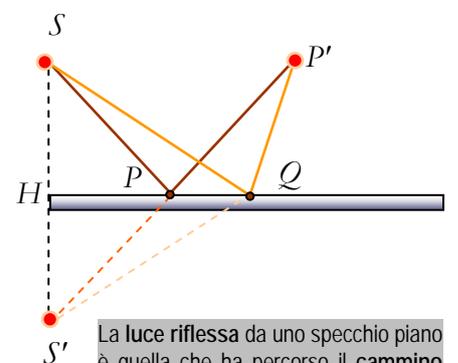
In base al modello corpuscolare la luce sarebbe fatta di corpuscoli emessi dalle sorgenti luminosi. Tali corpuscoli viaggiano in linea retta sia entro i corpi omogenei sia nel vuoto perché risultano soggetti ad una risultante nulla essendo egualmente attirati in tutte le direzioni. Quando essi incontrano la superficie di separazione tra due mezzi ha luogo un urto elastico che fa invertire la velocità ortogonale mentre si conserva la velocità tangenziale. In virtù di tale urto il corpuscolo viene riflesso formando un angolo di riflessione uguale a quello di incidenza.

Secondo questo modello la velocità di propagazione dei corpuscoli dovrebbe risentire (in vicinanza della discontinuità) della diversa densità dei due mezzi: mezzi più densi attirano più fortemente i corpuscoli determinando una velocità di propagazione superiore nel mezzo più denso.

Quando un fascio di raggi paralleli cade su una superficie scabra ogni singolo raggio viene riflesso in maniera diversa da quello adiacente e

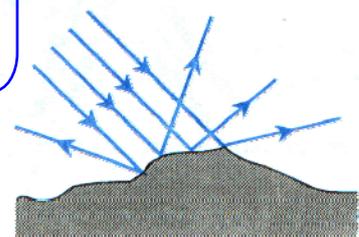


Gli specchi piani generano immagini virtuali della sorgente e tale immagini corrisponde ad una simmetria assiale



La luce riflessa da uno specchio piano è quella che ha percorso di lunghezza minima

Il modello corpuscolare spiega la riflessione tramite conservazione della quantità di moto e leggi dell'urto elastico



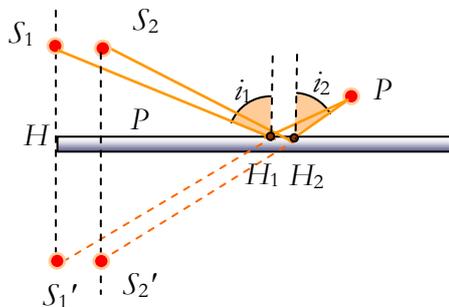
la diffusione prodotta dalla riflessione su una superficie scabra

pertanto si viene a perdere ogni tipo di regolarità nei raggi riflessi. In questo caso si parla di *diffusione della luce*.<sup>2</sup>

### 3.2.3 ESERCIZI SULLA RIFLESSIONE

#### Cammino dei raggi luminosi

*Esercizio:* Due sorgenti  $S_1$  e  $S_2$  emettono raggi in tutte le direzioni. Individuare quelli in grado di raggiungere il punto  $P$ . Dati riferiti a un sistema  $xOy$ :  $S_1 \equiv (0,10)$   $S_2 \equiv (5,10)$   $P \equiv (30,5)$



☹

I raggi che arrivano in  $P$  possono essere individuati costruendo le sorgenti virtuali  $S_1'$  e  $S_2'$  da cui si determinano i punti  $H_1$  e  $H_2$ . A questo punto si può operare per similitudine (indichiamo  $HH_1$  con  $x_1$  e  $HH_2$  con  $x_2$ ):

$$\frac{10}{x_1} = \frac{5}{30 - x_1} \Leftrightarrow 300 - 10x_1 = 5x_1 \Leftrightarrow x_1 = 20$$

$$\tan \hat{h} = \frac{20}{10} = 2 \text{ da cui } \hat{h} = 63.4^\circ$$

$$\frac{10}{x_2 - 5} = \frac{5}{30 - x_2} \Leftrightarrow 300 - 10x_2 = 5x_2 - 25 \Leftrightarrow x_2 = 21.7$$

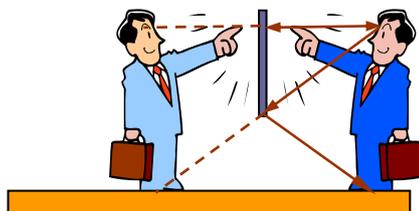
$$\tan \hat{h}' = \frac{30 - 21.7}{5} = 1.67 \text{ da cui } \hat{h}' = 59.0^\circ$$

☺

#### La dimensione di uno specchio piano

*Esercizio:* Una persona osserva la propria figura in uno specchio verticale. Quanto deve essere grande lo specchio affinché si possa osservare nello specchio l'intera figura?

☹

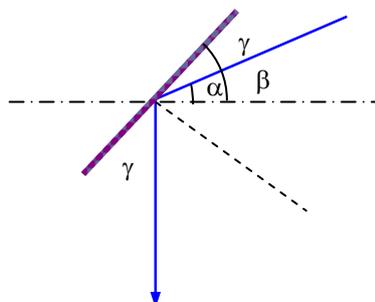


Lo specchio deve partire dalla parte superiore della testa e giungere sino a metà altezza come si può osservare dalla immagine qui a lato tenendo conto che la immagine virtuale si trova attraverso una simmetria assiale. In effetti, dopo aver costruito l'immagine virtuale, basta tracciare il raggio che va dagli occhi ai piedi per rendersi conto che lo specchio deve essere lungo almeno quanto metà figura.

☺

#### Illuminare il fondo di un pozzo con uno specchio

*Esercizio:* Inclinando opportunamente uno specchio piano si vuole illuminare il fondo di un pozzo sfruttando la luce solare mentre il Sole forma un angolo  $\alpha = 36^\circ$  sopra l'orizzonte. Determinare l'angolo  $\beta$  formato tra lo specchio e l'orizzontale.



☹

Si disegna dapprima il percorso dei raggi solari dopo aver collocato un asse orizzontale necessario per i riferimenti angolari. A questo punto si traccia la bisettrice dell'angolo formato dal raggio incidente e da quello riflesso. In base alla legge della riflessione, la bisettrice è la normale allo specchio che ora può essere disegnato.

Se indichiamo con  $\gamma$  l'angolo tra il raggio riflesso e lo specchio avremo che  $\gamma + 90 + \alpha + \gamma = 180$ . Ma  $\gamma = \beta - \alpha$  e pertanto l'equazione diventa:

<sup>2</sup> *Scattering* in inglese, mentre *diffusion* viene tradotto in italiano con *dispersione*.

$$2(\beta - \alpha) + \alpha = 90 \Leftrightarrow \beta = \frac{90 + \alpha}{2} = 63^\circ$$



### Immagini virtuali

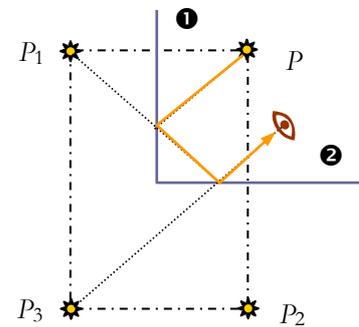
*Esercizio:* Un oggetto puntiforme P viene posto nella regione compresa tra due specchi piani ortogonali. Stabilire il numero e la posizione delle immagini virtuali del punto considerato e da dove può essere osservato guardando verso lo specchio ②



Bisogna disegnare le due immagini P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub> ed osservare quindi che esiste anche una terza immagine P<sub>3</sub> che può essere vista sia come immagine virtuale di P<sub>2</sub> prodotta dallo specchio ① che come immagine di P<sub>1</sub> prodotta dallo specchio ②).

Nella figura qui a lato, dopo aver determinato P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub> è stato tracciato il percorso dei raggi con cui si osserva P attraverso P<sub>3</sub> dopo aver eseguito delle riflessioni su entrambi gli specchi.

Il problema che abbiamo proposto si presta ad una interessante generalizzazione da svolgere con il software Cabri che proponiamo nel prossimo esercizio.



### Riflessioni multiple attraverso un poligono con i lati a specchio

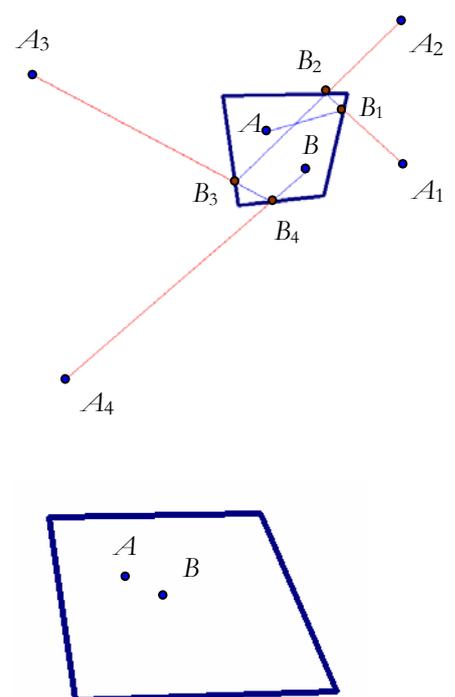
*Esercizio:* Dato un quadrilatero di forma qualsiasi si considerino al suo interno due punti A e B. Determinare il percorso che un raggio di luce percorre per andare da A verso B passando per i quattro lati del quadrilatero.



Con Cabri si incomincia disegnando un quadrilatero e scegliendo i punti A e B. A questo punto si costruiscono le immagini virtuali di A definite dai quattro lati del poligono; indichiamole con A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, A<sub>4</sub>. Le immagini vengono ottenute sfruttando il comando di simmetria assiale che fa parte delle funzioni predefinite di Cabri.

Si unisce B con A<sub>4</sub> e si individua il punto di intersezione B<sub>4</sub>, successivamente con A<sub>3</sub> si individua B<sub>3</sub> e così via sino ad arrivare a B<sub>1</sub> che viene congiunto con A.

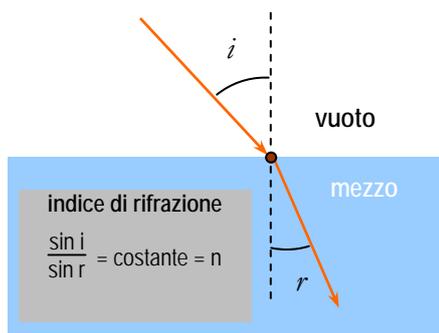
La cosa interessante della costruzione eseguita con Cabri è che si osserva muovendo A o B o uno qualsiasi dei vertici del quadrilatero la deformazione della costruzione nel pieno rispetto delle leggi della riflessione. Si vede anche immediatamente che esistono posizioni di A e B o forme del quadrilatero del tutto incompatibili con una soluzione come nel caso rappresentato qui a lato che si lascia al lettore come utile esercitazione.



### 3.3 La legge della rifrazione

#### 3.3.1 L'ENUNCIATO DELLA LEGGE CON RIFERIMENTO AL VUOTO

Quando un raggio luminoso attraversa la superficie di separazione di due mezzi o, rimanendo in uno stesso mezzo, passa attraverso zone con proprietà fisiche variabili quali la densità, esso subisce un cambiamento di direzione (brusco nel primo caso e graduale nel secondo). Questo fenomeno è detto *rifrazione* (il termine deriva dal latino *refringere*: irrompere, squarciare).



In ottica geometrica la *legge delle rifrazione* viene assunta come fatto sperimentale: *quando un raggio luminoso colpisce la superficie di separazione tra due mezzi il raggio incidente, la normale e il raggio rifratto giacciono in uno stesso piano e inoltre il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza e quello dell'angolo di rifrazione rimane costante al variare dell'angolo di incidenza.*

Se si ipotizza di eseguire l'esperimento nel caso di passaggio della luce dal vuoto ad un particolare mezzo, *il rapporto costante tra il seno dell'angolo di incidenza e seno dell'angolo di rifrazione viene detto indice di rifrazione del mezzo e si tratta di un numero sempre maggiore di 1.*

Dire che l'indice di rifrazione è maggiore di 1 equivale ad affermare che il raggio rifratto, nel passare dal vuoto ad un mezzo materiale, tende ad avvicinarsi alla normale.

La legge si scrive:

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \text{costante} = n \tag{IV.3.3}$$

I valori tipici di indice di rifrazione per alcune sostanze sono riportate in tabella IV.3.1 e sono riferiti alla luce corrispondente alla riga gialla del sodio.

Gas			
Materiale	<i>n</i>	Materiale	<i>n</i>
Aria	1.0003	Acqua	1.0002
CO <sub>2</sub>	1.0004	Acetone	1.001
Idrogeno	1.0001		
Liquidi			
Acetone	1.36	Acqua	1.33
Alcool et.	1.36	Benzene	1.50
Paraffina	1.48	Petrolio	1.45
Sangue	1.35	Glicerina	1.47
Solidi			
SiO <sub>2</sub>	1.46	Calcite	1.66
NaCl	1.54	Ghiaccio	1.31
Plexiglass	1.49	Quarzo	1.54
Vetro crown	1.55	Vetro flint	1.65
Diamante	2.42		

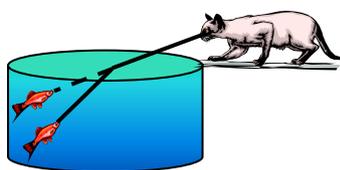
Tabella IV.3.1

Si nota che i gas hanno un indice di rifrazione quasi indistinguibile rispetto al vuoto mentre liquidi e solidi si scostano tra il 30 e il 50% con la eccezione del diamante che presenta un valore molto elevato.<sup>3</sup>

I mezzi di indice di rifrazione elevato sono detti *otticamente densi*.

Il fenomeno della rifrazione è responsabile di alcune *false percezioni ottiche* che appartengono alla esperienza comune. La più nota riguarda l'impressione che si ha, osservando dall'aria, un corpo immerso in acqua: esso appare in una posizione più alta di quanto non sia in realtà a causa della deflessione verso il basso che i raggi luminosi subiscono nel passaggio aria acqua. Ovviamente accade la stessa cosa (rovesciata) a chi si trovi entro l'acqua. Se si punta lo sguardo verso l'alto si ha una visione dell'esterno verso zone più basse rispetto alla direzione prescelta.

#### Cambiamenti di visuale per rifrazione



inganni della rifrazione: il gatto prende la mira ma sbaglia bersaglio perché il pesce si trova più in basso di quanto non gli appaia

*Esercizio:* In un recipiente cilindrico di diametro  $d = 15.0$  cm e altezza  $h = 25.0$  cm un osservatore vede esattamente lo spigolo inferiore ma non vede alcun punto del fondo. Determinare il dislivello  $x$  di acqua da collocare nel recipiente per rendere visibile un oggetto posto alla distanza  $d' = 2.0$  cm dalla parete.

<sup>3</sup> Il vetro flint e il vetro crown sono due varietà di vetro particolarmente utilizzate nella costruzione di apparati ottici per la loro trasparenza. Il primo contiene ossido di piombo oltre che i tipici costituenti del vetro (SiO<sub>2</sub>, Na<sub>2</sub>O, CaO).



Non ci si facci ingannare dal carattere tridimensionale del problema che può invece essere analizzato su un rettangolo di cateti  $h$  e  $d$  come mostrato nella seconda delle due figure.

Dalla conoscenza di  $h$  e  $d$  deriva la conoscenza dell'angolo  $\alpha$  di incidenza; in effetti

$$\tan \alpha = \frac{d}{h} = \frac{15.0}{25.0} = 0.6. \text{ E dunque sono noti anche } \alpha = 30.96^\circ \text{ e } \sin \alpha = 0.5145$$

Ciò ci consente di trovare l'angolo di rifrazione in base alla legge della rifrazione; si ha infatti (tenendo conto che l'indice di rifrazione dell'aria è circa 1 e pertanto il passaggio aria acqua è del tutto equivalente a quello vuoto acqua)  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{\text{acqua}}$  da cui

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{0.5145}{1.33} = 0.3868 \text{ con } \beta = 22.76^\circ$$

La relazione tra  $\beta$  e gli elementi geometrici della figura è di calcolo più complesso perché la quantità  $x'$  che consente poi di determinare  $\tan \beta = \frac{d - x' - d'}{x}$  dipende a sua volta da  $x$ .

$$\text{Infatti } x' = (h - x) \tan \alpha = (h - x) \frac{d}{h} = d - x \frac{d}{h}$$

$$\text{Si ha dunque: } \tan \beta = \frac{d - x' - d'}{x} = \frac{x \frac{d}{h} - d'}{x} = \frac{d}{h} - \frac{d'}{x} \text{ e infine:}$$

$$\frac{d'}{x} = \frac{d}{h} - \tan \beta = \tan \alpha - \tan \beta = 0.6000 - 0.4195 = 0.1805$$

$$x = \frac{d'}{0.1805} = 11.1 \text{ cm}$$

Si osservi che il problema non ammette soluzione quando  $x > h$  cioè quando  $d' > 0.1805 h$ .



### Relazioni tra raggio riflesso e raggio rifratto

*Esercizio:* Un raggio luminoso che viaggia nel vuoto colpisce la superficie piana di un recipiente contenente petrolio. Determinare l'angolo di incidenza  $\alpha$  tale che l'angolo  $\gamma$  tra il raggio riflesso e il raggio rifratto vale  $120^\circ$



Si vede subito che deve essere  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  e d'altra parte  $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} =$

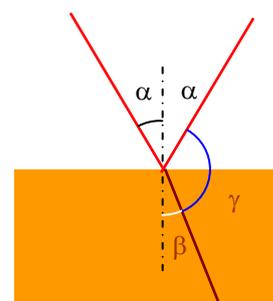
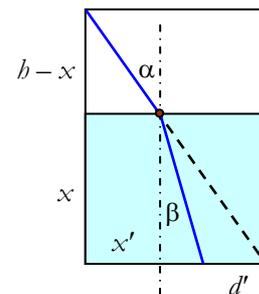
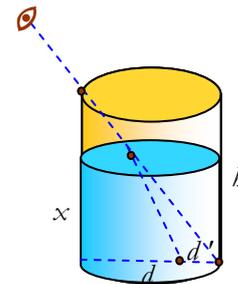
$$\frac{\sin \alpha}{1.45} = 0.690 \sin \alpha$$

$$\text{Ma } \sin \beta = \sin[180 - \gamma - \alpha] = \sin(60 - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha$$

Il problema porta alla equazione lineare omogenea:

$$(0.690 + 0.500) \sin \alpha - 0.866 \cos \alpha = 0 \text{ e dividendo per } \cos \alpha \text{ si ottiene:}$$

$$1.190 \tan \alpha = 0.866 \Leftrightarrow \tan \alpha = 0.840 \Leftrightarrow \alpha = 40.0^\circ$$



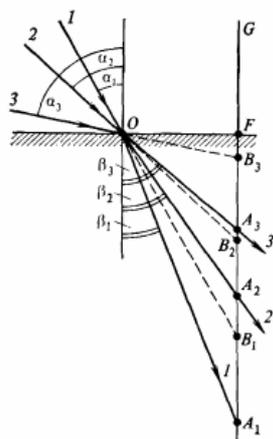
### 3.3.2 IL PRIMO ENUNCIATO CORRETTO DELLA LEGGE: SNELL



Come capita abbastanza spesso nella storia della scienza, la scoperta sperimentale della legge della rifrazione non corrispose alla sua affermazione.

*Willebrord van Roijen Snell* era un matematico e astronomo olandese (Leiden 1580-1626) che scoprì la legge della rifrazione anche se in una forma espressa in maniera diversa da come la enunciamo oggi. La scoperta è del 1621 ma divenne nota dopo la sua morte e dopo che si era innescato il dibattito tra le posizioni di Descartes e Huyghens di cui si tratterà prossimamente.

Con riferimento alla figura qui a lato, *Snell* sostiene che la luce, nel propagarsi da un mezzo ad un altro <sup>4</sup> la luce segue dei percorsi tali che:



$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_3}{OB_3} = \dots$$

Basta ora osservare che:

$$OA_i = OF / \sin \alpha_i \text{ mentre } OB_i = OF / \sin \beta_i$$

Ma gli angoli  $\alpha$  sono gli angoli di incidenza e gli angoli  $\beta$  sono quelli di rifrazione; pertanto, passando al rapporto e semplificando per  $OF$  si ottiene che:

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \text{costante}$$

### 3.3.3 IL SECONDO ENUNCIATO DELLA LEGGE: LA QUERELLE TRA DESCARTES E FERMAT

Nel 1637 *René Descartes* nella *Diottrica* dà il primo enunciato pubblico e corretto della legge ma lo fa entro una teoria sbagliata e proprio sulla interpretazione entra in conflitto con le tesi sostenute da *Pierre Fermat*.

Entrambi sostenevano la costanza del rapporto  $\sin i / \sin r$  che ponevano eguale al rapporto della velocità della luce nei due mezzi, ma le loro opinioni divergevano su un punto importante, ma sperimentalmente in-verificabile a quei tempi.



Per Descartes si aveva  $\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{v_2}{v_1}$  mentre per Fermat  $\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{v_1}{v_2}$ .

Le due tesi venivano enunciate entro quadri di riferimento teorici diversi. L'approccio di Cartesio denota una buona conoscenza delle problematiche fisiche delle leggi di conservazione che si applicano nell'urto (sarà lui tra i primi a intuire il ruolo della quantità di moto), ma è il modello che costruisce sulla natura della luce a portarlo fuori strada.

Scrive *Cartesio* nella *Diottrica*:

Poi pensate che, non essendoci assolutamente vuoto in natura, come quasi tutti i filosofi riconoscono, mentre vi sono molti pori in tutti i corpi che vediamo d'intorno, come l'esperienza può mostrare molto chiaramente, è necessario che questi pori siano riempiti da qualche materia sottilissima e fluidissima, che si estende senza interruzione dagli astri sino a noi.

E così quando analizza il fenomeno della rifrazione dopo aver discusso il movimento di palle che attraversano la superficie di separazione tra

<sup>4</sup> Come si vede a inizio seicento non si parla di vuoto

mezzi meno densi e mezzi più densi perdendo velocità, egli sostiene che con la luce funziona tutto come con le palle ma ... al contrario: la luce quando va dai mezzi meno densi a quelli più densi aumenta la sua velocità.

Tutto ciò tuttavia non vi apparirà più strano se richiamate alla mente la natura che ho attribuito alla luce, quando ho detto essa non esser altro che un certo moto o un'azione ricevuta da una materia sottilissima che riempie i pori degli altri corpi, e se considerate che, come una palla perde più movimento urtando un corpo molle che uno duro e meglio rotola su una tavola levigata che su un tappeto, così l'azione di questa materia sottile può essere molto più ostacolata dalle parti dell'aria che, essendo come molli e mal congiunte, non le oppongono molta resistenza, che da quelle dell'acqua che gliene oppongono una maggiore; e ancor più da quelle dell'acqua che da quelle del vetro o del cristallo.

Così, quanto più le particelle d'un corpo trasparente sono dure e stabili, tanto più facilmente lasciano passar la luce; questa infatti non deve cacciarne nessuna dal rispettivo posto come invece deve fare una palla per aprirsi un varco tra le particelle dell'acqua.

Il ragionamento di Cartesio è il seguente: quando un corpuscolo di luce attraversa la superficie di separazione tra due mezzi la sua velocità orizzontale non cambia mentre si modifica quella verticale (che aumenta nel passare da mezzi meno densi a mezzi più densi per la ragione esposta nella citazione). Si ha pertanto

$$v_{1x} = v_{2x} \Leftrightarrow v_1 \sin i = v_2 \sin r \Leftrightarrow \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_2}{v_1}$$

Pierre de Fermat <sup>5</sup> è l'inventore di alcune tecniche di soluzione dei problemi di massimo e minimo che, pur non esplicitandosi nell'uso dei differenziali, si pongono su quella strada.

Dopo aver polemizzato lungamente con Descartes, Fermat nel 1662 pubblica due brevi trattati "analisi ..." e "sintesi sulla rifrazione" in cui enuncia il suo principio di minimo.

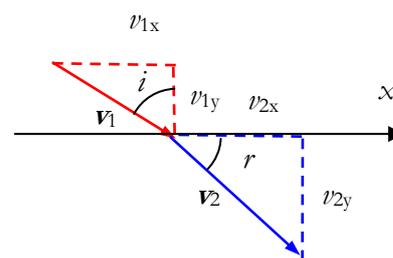
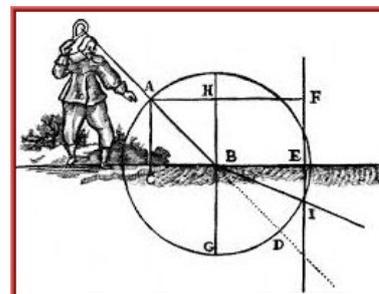
*Anche la rifrazione gode di una proprietà simile a quella della riflessione relativa al cammino di lunghezza minima. Il cammino rettilineo spezzato percorso dal raggio rifratto è quello che corrisponde al tempo di percorrenza minimo.*

Per verificarlo incominciamo con l'osservare che, se nei due mezzi si hanno velocità di propagazione diverse, la durata minima non si realizza sul percorso in linea retta. Se infatti supponiamo che nel mezzo 2 la luce abbia una velocità inferiore a quanto si verifica nel mezzo 1 converrà abbreviare leggermente il percorso nel mezzo 2 a condizione che il corrispondente aumento di percorso nel mezzo 1 abbia una durata inferiore in modo di diminuire il tempo totale.

Consideriamo dunque la figura qui a fianco e supponiamo che un raggio di luce che parte da S debba raggiungere il punto S' seguendo la traiettoria spezzata che corrisponda al tempo di percorrenza minimo.

Il punto P si troverà alla destra di S'' in modo di diminuire la lunghezza del tratto a velocità inferiore (PS' < S''S'). Confrontiamo ora due percor-

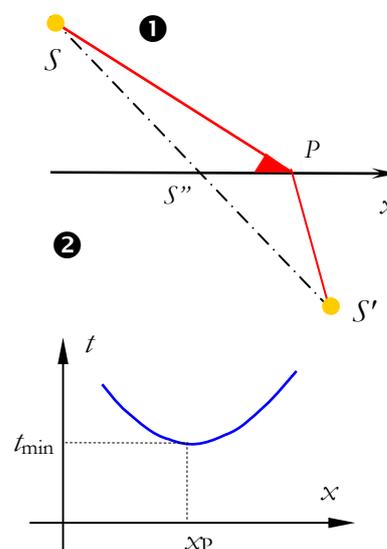
<sup>5</sup> Pierre de Fermat ha enunciato numerosi teoremi di teoria dei numeri in forma congetturale. Questi teoremi hanno resistito a lungo a tentativi di dimostrazione. Il più famoso, noto come ultimo teorema di Fermat e rappresentato nel francobollo di questa pagina, è stato dimostrato solo alla fine del 900. Esso afferma che la equazione:  $x^n + y^n = z^n$  non ha mai soluzioni intere per  $n > 2$ .

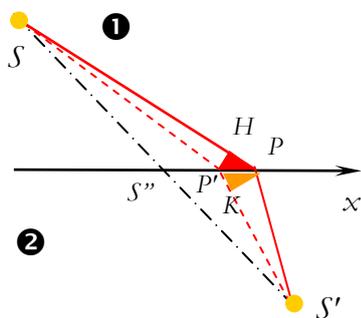


la rifrazione interpretata secondo il modello corpuscolare



come si spiega la rifrazione attraverso il percorso di durata minima





si vicini quali SPS' e SP'S'. Se rappresentiamo su un diagramma l'andamento del tempo di percorrenza al variare della ascissa del punto di contatto del raggio con la superficie di separazione si avrà un minimo per  $t$  quando ad uno spostamento elementare di P non corrisponde una variazione apprezzabile di  $t$ .

Pertanto, tracciate da P e P' le perpendicolari alle traiettorie dovrà essere  $\delta t_{HP} = \delta t_{P'K}$ . Se ora teniamo presente che gli angoli HP'P e KP'P sono rispettivamente l'angolo di incidenza e quello di rifrazione avremo che  $HP = P'P \sin \hat{i}$  e  $KP' = P'P \sin \hat{r}$ . Pertanto dalla uguaglianza degli intervalli di tempo si ottiene:

$$\frac{P'P \sin \hat{i}}{v_1} = \frac{P'P \sin \hat{r}}{v_2} \text{ e quindi}$$

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{v_1}{v_2} \tag{IV.3.4}$$

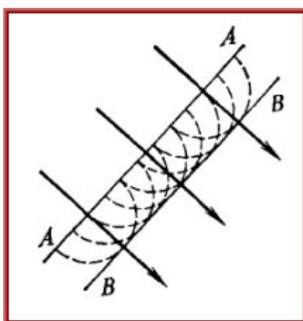
Dunque: dalla applicazione del principio del minimo tempo di percorrenza si deduce la legge della rifrazione e si dà anche un significato al valore dell'indice di rifrazione che corrisponde al rapporto della velocità della luce tra primo e secondo mezzo.

Secondo i sostenitori del modello corpuscolare l'indice di rifrazione è  $\frac{v_2}{v_1}$  mentre per i sostenitori delle teorie di minimo e per i sostenitori della teoria ondulatoria esso vale  $\frac{v_1}{v_2}$ . Per i primi la luce ha una velocità maggiore nei mezzi più densi e presenta la velocità minima nel vuoto, per i secondi accade il contrario.

La controversia avrà fine solo con la misurazione (nel corso dell'800) della velocità della luce nei mezzi materiali da cui emergerà che essa è tanto più bassa quanto maggiore è l'indice di rifrazione.

Dopo aver studiato anche la rifrazione possiamo enunciare un unico principio di minimo per le traiettorie dei raggi luminosi: essi seguono sempre le traiettorie che corrispondono al minor tempo di percorrenza. Nel caso della riflessione, a causa della costanza della velocità di propagazione, ciò corrisponde a minimizzare la lunghezza del percorso. Invece, nel caso della rifrazione è solo il percorso temporale ad avere il valore minimo.

### 3.3.4 LA LEGGE DELLA RIFRAZIONE SPIEGATA DA HUYGHENS ENTRO LA TEORIA ONDULATORIA



Christian Huygens<sup>6</sup> (1629-1695) fu il primo a sostenere in maniera esplicita, contrapponendosi anche a Newton, l'ipotesi della natura ondulatoria della luce (la luce come onda che si propaga nell'etere).

Secondo Huygens ogni punto di un fronte d'onda è sorgente di onde sferiche che per involucri successivi formano gli altri fronti d'onda. Come vedremo trattando in uno dei prossimi capitoli la diffrazione e la interferenza in ottica il principio di Huygens è ancora oggi lo strumento esplicativo principale.

Vediamo dunque come il principio di Huygens consente di dedurre la legge della rifrazione.

<sup>6</sup> Si legge Oighens e non Uighens come mi capita spesso di sentire.

Con riferimento alla figura qui a lato consideriamo un fronte d'onda rettilineo  $A_1B_1$  che incontra progressivamente la superficie di separazione tra due mezzi I e II con un angolo di incidenza  $\alpha$ .

Man mano che il fronte d'onda incontra la superficie si vengono a creare delle onde circolari che si propagano nel mezzo II (dando luogo all'onda rifratta) e nel mezzo I dando luogo a quella riflessa; ma tali onde vengono create a istanti diversi.

Quando il raggio 1 arriva in  $A_1$  il raggio 4 si trova in  $B_1$  e giungerà in  $A_4$  dopo un tempo  $\Delta t = \frac{B_1A_4}{v_1}$ . Dopo questo intervallo di tempo l'onda che

è stata generata in  $A_1$  ha percorso lo spazio  $A_1C_1 = v_2 \Delta t = \frac{v_2}{v_1} B_1A_4$

Ma  $A_1C_1 = A_1A_4 \sin \beta$  mentre  $B_1A_4 = A_1A_4 \sin \alpha$ ; semplificando per  $A_1A_4$  si conclude che:

$$\sin \beta = \frac{v_2}{v_1} \sin \alpha \text{ e cioè: } \frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{v_1}{v_2} \quad 7$$

### 3.3.5 LA REVERSIBILITÀ DEI CAMMINI E L'INDICE DI RIFRAZIONE RELATIVO A DUE MEZZI

La luce, tanto nei fenomeni di riflessione, quanto in quelli di rifrazione gode di una completa reversibilità di comportamento rispetto alla inversione del cammino e questo fatto è una conseguenza del carattere ondulatorio della radiazione luminosa oltre che del principio di minimo appena illustrato.

Attraverso la (IV.3.4) si può calcolare l'indice di rifrazione quando la luce si propaga da un mezzo ① ad un mezzo ② che indicheremo con  $n_{12}$ .

Infatti, indicata con  $c$  la velocità della luce nel vuoto si ha:

$$n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{v_2} \times \frac{v_1}{c} = n_2 \times \frac{1}{n_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{(IV.3.6)}$$

tale valore è detto *indice di rifrazione relativo del mezzo ② rispetto al mezzo ①* mentre l'indice riferito al vuoto è detto *indice di rifrazione assoluto*. Ovviamente si ha che  $n_{21} = 1 / n_{12}$ .

La (IV.3.6) è particolarmente utile perché ci consente di determinare l'indice di rifrazione rispetto ad una qualsiasi coppia di mezzi una volta che siano stati tabulati gli indici assoluti.

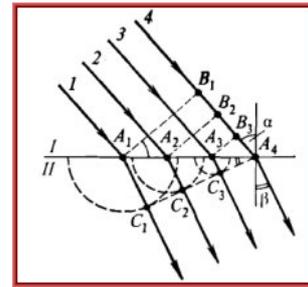
### 3.3.6 LA RIFLESSIONE TOTALE

Quando la luce si propaga da un mezzo otticamente più denso ad uno meno denso, quando cioè l'indice di rifrazione relativo è  $< 1$  la luce si allontana dalla normale ed esiste pertanto un angolo di incidenza per il quale il raggio rifratto forma un angolo di  $90^\circ$  e non riesce più ad uscire. Tale angolo è detto *angolo limite*  $i_l$  e, tenendo conto che  $\sin 90^\circ = 1$  si ha

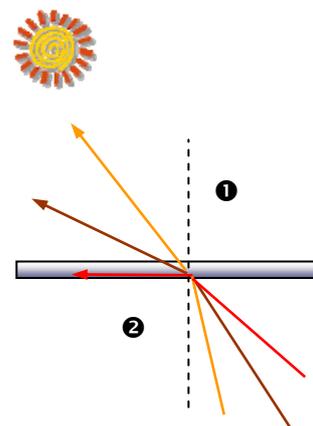
$$\sin i_l = n_{21} \text{ o anche } i_l = \arcsin(n_{21}) \quad \text{(IV.3.7)}$$

La tabella contiene i valori tipici di angolo limite, riferiti all'aria, per alcune sostanze di uso comune in ottica:

<sup>7</sup> Non ci vuol molto a capire, osservando la figura, che un fronte d'onda rettilineo produce, anche nel secondo mezzo un fronte d'onda rettilineo.



L'indice di rifrazione relativo nel passaggio  $1 \rightarrow 2$  è dato dal rapporto degli indici assoluti dei mezzi 2 e 1



#### riflessione totale e angolo limite

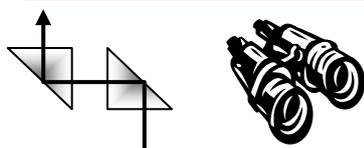
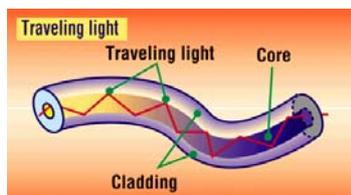
quando si passa da un mezzo più denso ad uno meno denso l'angoli di rifrazione è maggiore di quello di incidenza e al crescere di questo raggiunge i  $90^\circ$ . Oltre questo limite si ha solo riflessione

$$i_l = \arcsin(n_{21})$$

Materiale	$i_1^\circ$	Materiale	$i_1^\circ$
Acqua	49	Vetro flint	34
Glicerina	43	Diamante	24
Vetro crown	40	Plexiglas	42

Il fenomeno della *riflessione totale* può essere osservato facilmente ponendosi sott'acqua e osservando la zona sovrastante con angoli sufficientemente ampi. Man mano che l'angolo aumenta si ha una visione sempre meno luminosa finché raggiunto l'angolo limite non si riesce più ad osservare ciò che accade fuori dall'acqua. Per la stessa ragione le bolle d'aria presenti in un liquido riflettono la luce in tutte le direzioni e danno effetti ottici particolarmente gradevoli.

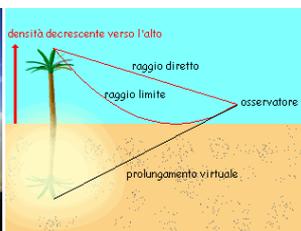
La riflessione totale trova applicazione sia nelle *guide di luce*, ormai ampiamente utilizzate in ambito biomedico e per la chirurgia non invasiva (endoscopia), sia più comunemente nei binocoli.



applicazioni della riflessione totale: fibre ottiche, binocolo

Nel primo caso si utilizzano fibrille in quarzo o in materiale plastico del diametro di una decina di  $\mu\text{m}$  circondate da materiale a basso indice di rifrazione. In questo modo ogni singola fibra ha una sua individualità e la luce che penetra da un estremo (raggio sottile limitato solo dalle problematiche di diffrazione) può uscire solo all'altro estremo perché, sulle pareti laterali subisce la riflessione totale. Disponendo le fibre in fasci ordinati si può trasmettere, con risoluzione elevata, una immagine da un punto interno al corpo umano e inaccessibile all'occhio del chirurgo.

Nel secondo caso si utilizzano prismi aventi sezione di un triangolo rettangolo isoscele. Ogni prisma dà riflessione totale sull'ipotenusa e in questo modo si può deviare di  $90^\circ$  un raggio di luce. Disponendo due prismi come in figura è possibile traslare i raggi adeguando l'apertura degli occhi alla necessità di mantenere gli obiettivi distanti per migliorare la profondità della visione.



inganni della rifrazione: il miraggio e la fata morgana sono due illusioni ottiche prodotte dalla rifrazione continua, sino alla riflessione totale, in presenza di una densità del mezzo variabile da punto a punto; una penna immersa in acqua sembra spezzarsi per effetto della rifrazione. l'arcobaleno è dovuto alla dispersione della luce da parte di piccole gocce d'acqua presenti nell'aria

### 3.3.7 LA DISPERSIONE DELLA LUCE

$\lambda$ (nm)	$n$
Hg 404.7	1.5560
Hg 435.8	1.5519
H 486.1	1.5470
Hg 546.1	1.5428
He 587.6	1.5407
H 656.3	1.5379
K 768.2	1.5348

L'affermazione secondo cui l'indice di rifrazione è una costante tipica del materiale va corretta per tenere conto di un fenomeno noto come *dispersione*. In effetti l'indice di rifrazione delle diverse sostanze dipende in maniera più o meno sensibile dalla frequenza della radiazione utilizzata e pertanto un raggio di luce composto da radiazioni di diversa frequenza verrà scomposto nelle sue componenti quando gli si fa subire la rifrazione da parte di un vetro per il quale questo fenomeno sia particolarmente significativo.

È quanto si ottiene con il vetro crown, una miscela contenente il 72% di  $\text{SiO}_2$  il 13% di  $\text{CaO}$  e il 15% di  $\text{Na}_2\text{O}$  con tracce di boro che produce un vetro particolarmente duro e trasparente.

In tabella si riportano le sue variazioni di *indice di rifrazione* al variare della lunghezza d'onda (riferita a righe spettrali tipiche di alcuni gas).

variazioni dell'indice di rifrazione con il colore per il vetro crown; i valori riportati si riferiscono alle righe spettrali di alcuni gas che hanno quindi valori di lunghezza d'onda ben definiti

Come si nota la variazione percentuale tra la zona del violetto e quella del rosso non è particolarmente elevata ma comunque in grado di dar luogo ad effetti osservabili. Essa vale  $100 \frac{1.5560 - 1.5348}{1.5348} \approx 1.38 \%$ .

La *dispersione* si osserva in natura in particolari contesti caratterizzati dalla presenza di gocce d'acqua nell'aria (arcobaleno) e viene ricercata come strumento di scomposizione (analisi) delle componenti spettrali delle radiazioni utilizzando i prismi.

Nella immagine qui a lato il fascio di luce bianca proviene da destra colpisce un prisma subendo una prima riflessione e rifrazione; il raggio rifratto viene in parte riflesso ed esce verso il basso mentre la parte prevalente viene nuovamente rifratta con una ben visibile e suggestiva dispersione.



### Rifrazione tra due mezzi

*Esercizio:* Un raggio di luce viene rifratto nel passaggio acqua vetro. Determinare l'angolo di rifrazione. Dati:  $n_a = 1.333$ ,  $n_v = 1.57$ , angolo di incidenza  $i = 60.0^\circ$ .

☹

$$n_{av} = \frac{n_v}{n_a} = \frac{1.57}{1.33} = 1.18$$

$$\sin r = \frac{\sin i}{n_{av}} = \frac{\sin 60.0}{1.18} = 0.734 \Rightarrow r = 47.2^\circ$$

### Rifrazione e riflessione totale

*Esercizio:* Su una lastra di materiale trasparente e di forma rettangolare incide della radiazione luminosa. Si considerino i raggi che dopo aver inciso sulla faccia orizzontale ed essere stati rifratti incidono su quella verticale. A che condizione deve soddisfare l'indice di rifrazione affinché tali raggi subiscano tutti la riflessione totale?

☹

Indichiamo con  $n$  l'indice di rifrazione relativo al passaggio aria-lastra. Affinché ci sia riflessione totale dovrà essere  $\sin \gamma > \frac{1}{n}$ .

Inoltre  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$  mentre  $\beta$  e  $\gamma$  sono complementari e cioè  $\sin \gamma = \cos \beta$

Pertanto dovrà essere:

$$\frac{1}{n} < \sin \gamma = \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}$$

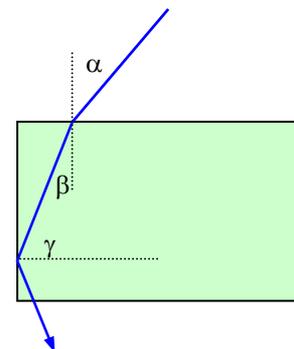
Introduciamo per comodità la variabile ausiliaria  $x = \frac{1}{n}$  avremo così la disequazione:

$x^2 < 1 - x^2 \sin^2 \alpha$  e cioè (tenendo conto della positività della variabile):

$$x < \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}} \text{ ovvero } n > \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}$$

Perché sia vera per ogni  $\alpha$  visto che  $\sin^2 \alpha \leq 1$  dovrà essere  $n > \sqrt{2}$

☺



### 3.4 Particolari fenomeni di rifrazione

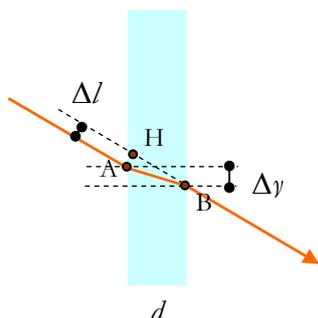
#### 3.4.1 RIFRAZIONE SU FACCE PIANE E PARALLELE

le lastre piane e parallele traslano i raggi luminosi senza deformazioni e ciò fa sì che le moderne lastre di vetro, perfettamente piane, non deformino le immagini

Se si effettua un passaggio aria/vetro/aria su una superficie vetrosa a facce parallele il raggio luminoso subisce una doppia rifrazione e, per il principio di reversibilità dei cammini, la direzione di uscita è identica a quella di ingresso, ma il raggio risulta leggermente traslato di una quantità che dipende dallo spessore della lastra. Il fatto che le immagini prodotte con passaggio attraverso superfici di vetro piane non risultino deformate è condizionato dal perfetto parallelismo delle due superfici.

**Calcoliamo lo spostamento dovuto ad una lastra**

*Esercizio:* Un raggio di luce viene rifratto nel passaggio attraverso una lastra di vetro a facce piane parallele. Spiegare perché il raggio subisce una traslazione. Determinare lo spostamento  $\Delta y$  nella direzione della lastra e quello  $\Delta l$  nella direzione del raggio. Infine calcolare gli spostamenti per il caso in cui sia  $n_v = 1.55$ , angolo di incidenza  $i = 30.0^\circ$ , spessore della lastra  $d = 4.0$  mm.



☹

Il raggio subisce una doppia rifrazione e come si vede dalla figura per il principio della reversibilità dei cammini emerge con la stessa direzione ma traslato di  $\Delta y$  nella direzione della lastra.

$$\sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{0.500}{1.55} = 0.322 \Rightarrow r = 18.8^\circ$$

$$\frac{\Delta y}{d} = \tan r \Rightarrow \Delta y = 4.0 \tan 18.8^\circ = 1.36 \text{ mm}$$

La relazione generale è  $\Delta y = d \tan r = d \frac{\sin r}{\cos r} = d \frac{\sin i}{n \sqrt{1 - \sin^2 i / n^2}} = d \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$ . Il suo valore massimo si quando  $i \rightarrow 90^\circ$  e in quel caso:

$$\Delta y \rightarrow d \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} = 3.38 \text{ mm}$$

Per calcolare la traslazione  $\Delta l$  nella direzione del raggio osserviamo che  $\Delta l = \overline{AB}$

$\sin(i - r)$  mentre  $\overline{AB} = \frac{d}{\cos r}$  si ottiene così:

$$\Delta l = \frac{d}{\cos r} \sin(i - r) = \frac{4.00}{\cos 18.8} \sin(30.0 - 18.8) = 0.82 \text{ mm}$$

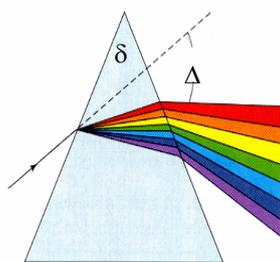
☺

#### 3.4.2 RIFRAZIONE E DISPERSIONE NEI PRISMI

I prismi utilizzati in ottica sono dei prismi geometrici retti solitamente a base triangolare realizzati per sfruttare le leggi della rifrazione nella deviazione dei raggi luminosi.

Entro le approssimazioni dell'ottica geometrica si dimostra che un *prisma a base triangolare isoscele* produce un angolo di deflessione che dipende esclusivamente dall'indice di rifrazione e dall'angolo di apertura del prisma. Se indichiamo con  $\Delta$  e  $\delta$  questi due angoli si ha:

$$\Delta = (n - 1) \delta \tag{IV.3.8}$$



la deviazione del prisma

$$\Delta = (n - 1) \delta$$



Dunque se l'indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda anche l'angolo di deviazione dipende da esso e le radiazioni di indice di rifrazione più elevato (violetto) saranno deviate di più di quelle di indice più basso (rosso). Ciò determina la scomposizione della luce dei prismi fenomeno che sta alla base della analisi spettrale cioè della indagine sulle componenti della luce emessa da una determinata sostanza, indagine da cui si può risalire alla composizione della sostanza stessa.

La dimostrazione che segue va considerata alla stregua di un esercizio da cui emergono le tipiche relazioni geometriche dell'ottica geometrica e le relative approssimazioni; essa può tranquillamente essere evitata in sede di prima lettura.

### Deduzione della legge sulla deflessione nei prismi

*Esercizio:* Dimostrare che in un prisma isoscele si ha:  $\Delta = (n - 1) \delta$



La figura che utilizzeremo per la dimostrazione non rispetta perfettamente le approssimazioni che faremo, ma è necessaria per una buona comprensione dei ragionamenti di natura geometrica su cui si fonda la dimostrazione.

Il raggio AB viene rifratto in BC con angolo di incidenza  $i$  e angolo di rifrazione  $r$ , in C subisce una nuova rifrazione in CD con angolo di incidenza  $r'$  e angolo di rifrazione  $i'$ . L'angolo complessivo di deflessione è indicato con  $\Delta$ . Nella figura i due angoli indicati con  $\delta$  sono congruenti perché formati da rette tra loro perpendicolari.

Consideriamo ora il quadrilatero BFCE ed osserviamo che gli angoli in B e in C sono rispettivamente  $i$  e  $i'$  (opposti al vertice). L'angolo BEC vale  $180^\circ - \delta$  mentre BFC vale  $180^\circ - \Delta$ . Poiché la somma degli angoli interni vale  $360^\circ$  si ha dunque:

$$i + i' + (180^\circ - \delta) + (180^\circ - \Delta) = 360^\circ$$

e pertanto:

$$\Delta = i + i' - \delta$$

Ma, con riferimento a BEC si ha (angolo esterno)

$$\delta = r + r'$$

dove  $r$  e  $r'$  sono legati a  $i$  e  $i'$  attraverso le leggi della rifrazione:

$$\sin i = n \sin r \quad \sin i' = n \sin r'$$

Queste 3 equazioni consentono, noti  $i$ ,  $n$ ,  $\delta$  di determinare  $\Delta$ . Il calcolo che risulta in generale complesso perché richiede la inversione di equazioni goniometriche associate ad equazioni algebriche si semplifica notevolmente applicando le due seguenti semplificazioni:

- prisma sottile: cioè angolo  $\delta$  piccolo
- angolo di incidenza  $i$  piccolo

In questo caso anche  $i'$  sarà piccolo e si potrà identificare il seno con l'angolo (in radianti). In questo caso si ha:

$$\Delta = i + i' - \delta \approx nr + nr' - \delta = n\delta - \delta = (n - 1) \delta$$



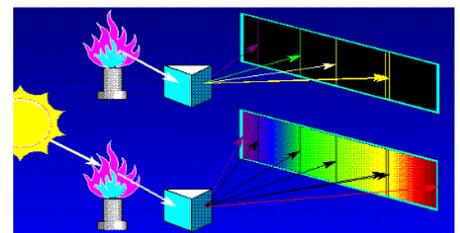
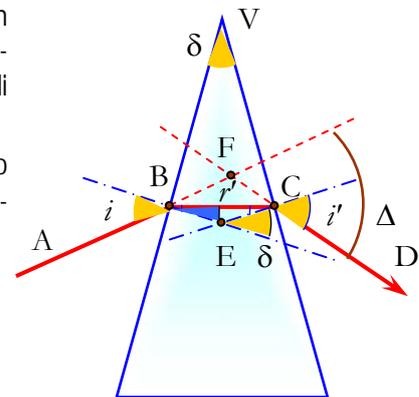
### Spaziatura delle radiazioni disperse da un prisma

*Esercizio:* Un raggio di luce bianca incide orizzontalmente su un prisma di vetro con apertura di  $30.0^\circ$  ed emerge dal prisma disperso nelle sue componenti. Determinare ad una distanza  $l = 1.00$  m dal prisma la spaziatura verticale tra il rosso e il violetto essendo noti gli indici di rifrazione pari a  $n_r = 1.6444$  e  $n_v = 1.6852$



uno spettroscopio di fine 800

È grazie a strumenti di questo tipo che si è sviluppata la spettroscopia, la disciplina che, attraverso lo studio della regolarità degli spettri della luce emessa dalle diverse sostanze ha consentito l'accumulo di conoscenze da cui si è sviluppata la fisica atomica



sopra lo spettro della luce emessa da un gas ad alta temperatura; sotto lo spettro della luce bianca con sovrapposte le righe di assorbimento della luce della sostanza precedente che ha assorbito le radiazioni della propria frequenza presenti nella luce bianca



come ci ricorda questo francobollo commemorativo Newton analizza per primo la luce solare nelle sue componenti spettrali



Poiché la differenza dei due angoli di deviazione è piccola, come si può vedere osservando i due valori degli indici di rifrazione si può tranquillamente identificare l'angolo in radianti con la tangente dello stesso. Pertanto se si indica con  $y$  la ordinata del raggio misurata sullo schermo si avrà:  $\Delta \approx \frac{y}{l}$

$$y_v - y_r \approx l(\Delta_v - \Delta_r) = l\delta(n_v - n_r) = 1.00 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (1.6852 - 1.6444) = 0.021 \text{ m}$$



### 3.4.3 IL DIOTTRO SFERICO

Nel prossimo paragrafo ci occuperemo in dettaglio del funzionamento delle lenti nelle quali si sfrutta la rifrazione dovuta al passaggio della luce attraverso una doppia superficie trasparente e curva; ma esiste un particolare fenomeno di rifrazione in cui il passaggio avviene tra due mezzi attraverso una unica superficie. E' quanto avviene nell'occhio dei mammiferi in cui la deviazione della luce avviene prevalentemente nel passaggio tra l'aria e la cornea dietro cui si trovano sostanze trasparenti diverse ma caratterizzate da piccole variazioni di indice di rifrazione tra di loro ma con una grande differenza rispetto all'aria.

Un *diottro sferico* è costituito da una calotta sferica trasparente a cui si applicano le due *approssimazioni dell'ottica geometrica*:

- l'ampiezza della calotta deve essere *piccola* rispetto al raggio di curvatura
- i raggi che vengono emessi dall'oggetto devono formare *angoli piccoli* con l'asse di simmetria (asse ottico principale).

Sotto queste condizioni si dimostra:

- che il *diottro* risulta in grado di formare *immagini non distorte* di punti di uno stesso oggetto; ciò vuol dire che la luce emessa da un punto converge tutta in uno stesso punto e che le immagini rispettano gli stessi rapporti metrici che si hanno nell'oggetto.
- che se si indicano con  $n_1$  e  $n_2$  gli indici di rifrazione dei due mezzi, con  $R$  il raggio di curvatura della calotta sferica e con  $p$  e  $q$  le distanze dell'oggetto e della immagine dal punto di intersezione dell'asse ottico con la superficie (vertice della calotta) vale la relazione (detta *equazione dei punti coniugati*):

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{IV.3.9}$$

Se si fa tendere all'infinito la distanza dell'oggetto (e ciò equivale a pensare all'utilizzo di raggi paralleli all'asse ottico) si ottiene che:

$$q \rightarrow R \frac{n_2}{n_2 - n_1}$$

Ciò significa che dalla parte del mezzo 2 i raggi paralleli provenienti dal mezzo 1 convergono in un punto a distanza  $f_2 = R \frac{n_2}{n_2 - n_1}$ . Tale punto è detto *secondo fuoco del diottro*.

Se poi il primo mezzo è l'aria ( $n_1 \approx 1$ ) si ha:  $f_2 = R \frac{n}{n - 1}$ .

il *diottro sferico* è il dispositivo ottico più semplice da analizzare ed è costituito da un mezzo entro cui è immersa una superficie sferica caratterizzata da un indice di rifrazione diverso; nelle approssimazioni dell'ottica geometrica si ottiene:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$



Per esempio nel caso dell'occhio in cui si passa dall'aria ad una sostanza con indice 1.33 si ha  $f_2 = R \frac{1.33}{0.33} \approx 4 R$ .

Il ragionamento che è stato compiuto per il mezzo 2 si può ripetere invertendo i ruoli per il mezzo 1 e si ottiene in quel caso  $f_1 = R \frac{n_1}{n_2 - n_1}$ .

Trattandosi di un sistema non simmetrico il diottro presenta dunque due fuochi collocati a distanze diverse dal vertice. Con riferimento al caso dell'occhio si ha:  $f_1 = R \frac{1}{0.33} \approx 3 R$

Il diottro e le sue leggi saranno ripresi proprio con riferimento allo studio del funzionamento dell'occhio umano.

### 3.5 Il funzionamento delle lenti sottili

#### 3.5.1 IMMAGINE DI UNA SORGENTE DI LUCE

Data una sorgente puntiforme di luce attraverso dispositivi basati sulla riflessione o sulla rifrazione è possibile far convergere una quota dei raggi emessi dalla sorgente in tutte le direzioni in un particolare punto dello spazio. Se i raggi convergono in esso è anche vero che successivamente divergono. Un tale tipo di punto è detto *immagine della sorgente* ed esso differisce dalla sorgente per due ragioni:

differenze tra oggetto e immagine

- ◆ la quota di energia che si concentra in esso è solo una parte della energia emessa dalla sorgente
- ◆ mentre la sorgente è osservabile da tutte le posizioni non altrettanto avviene per le immagini perché la loro visualizzazione corrisponde a percepire il fascio divergente proveniente dalla immagine e ciò può non accadere per particolari posizioni dell'osservatore

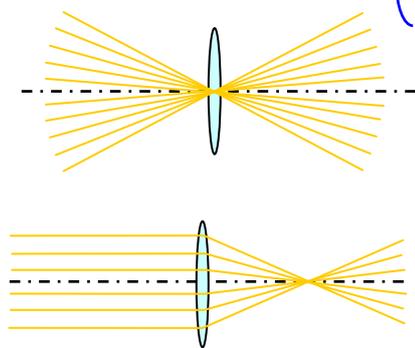
#### 3.5.2 IL FUOCO DI UNALENTE

La lente è un pezzo di vetro dotato di due superfici a forma sferica, ma né la forma sferica né la scelta del vetro come sostanza rifrangente sono indispensabili; qualsiasi sostanza trasparente va bene.<sup>8</sup>

In una *lente* si individuano immediatamente alcuni descrittori particolari:

lenti: la terminologia di base  
centri di curvatura, asse ottico, raggio, diametro

- ◆ i centri di curvatura  $C_1$  e  $C_2$  e i raggi di curvatura  $r_1$  e  $r_2$  delle due superfici
- ◆ una retta che passa per i due centri di curvatura e che è detta *asse ottico principale*
- ◆ uno *spessore* della lente cioè la distanza misurata sull'asse ottico principale tra le due superfici curve
- ◆ un *centro della lente* e cioè il punto in cui l'asse ottico principale interseca la lente supposta di spessore trascurabile (si ipotizza di operare con le cosiddette *lenti sottili* cioè con lenti per le quali il raggio di curvatura sia molto maggiore dello spessore)
- ◆ gli *assi ottici secondari* e cioè una generica retta passante per il centro
- ◆ un *diametro della lente* che fornisce la dimensione della lente in direzione perpendicolare all'asse ottico principale



Nella *approssimazione delle lenti sottili* un raggio passante per il centro della lente non subisce una deviazione apprezzabile: si può infatti supporre che le due superfici coinvolte siano parallele e che lo spostamento di traslazione da facce parallele sia trascurabile perché la lente è sottile.

Quando invece un raggio cade sulla lente senza passare per il centro esso subirà una deflessione; tra i molti casi possibili ce ne è uno particolarmente rilevante: il comportamento dei raggi paralleli.

Se si invia un fascio di raggi paralleli all'asse ottico principale e tali raggi non sono molto distanti dall'asse ottico essi convergono in un unico punto situato sull'asse ottico principale dall'altra parte della lente. Tale punto è detto *fuoco* della lente e la sua distanza dal centro è detta *distanza focale*. Quando si verifica questa situazione si parla di *approssimazione dei raggi parassiali*.

le due leggi basilari che governano la formazione delle immagini nelle lenti sottili

- 1) i raggi per il vertice non vengono deviati
- 2) i raggi paralleli vengono rifratti in uno stesso punto (fuoco)

<sup>8</sup> Quando ero bambino pensavo che le lenti fossero fatte con qualche materiale speciale capace di far convergere i raggi luminosi.

Naturalmente vale anche il viceversa: *un raggio passante per il fuoco emerge dalla lente parallelo all'asse ottico principale*:

L'esistenza del fuoco e la distanza focale possono essere dedotti dalle leggi della rifrazione attraverso considerazioni geometriche e si trova in particolare che l'inverso della distanza focale  $f$  vale:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (\text{IV.3.10})$$



distanza focale di una lente sottile

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

La quantità  $\frac{1}{f}$  è solitamente detta *potere diottrico* della lente e viene misurata in *diottrie* (quando si indica la distanza focale in metri).

### Legame tra distanza focale e raggio di curvatura in una lente

*Esercizio:* Una lente sottile piano convessa è costruita con vetro di indice  $n = 1.60$  e presenta una distanza focale di 150 mm. Determinare il raggio di curvatura.



In base alla (IV.3.10) si ha:

$$f = \frac{1}{(n - 1) \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\infty} \right)} = \frac{r}{0.60} \text{ da cui } r = 0.60 f = 90 \text{ mm}$$



### 3.5.3 PERCHÉ I RAGGI PARALLELI CONVERGONO NEL FUOCO ?

La dimostrazione della relazione (IV.3.10) che definisce la *distanza focale* di una lente si basa sulla applicazione delle approssimazioni dell'ottica geometrica alle leggi della rifrazione e può essere svolta agevolmente anche utilizzando la assimilazione di una lente sottile ad un prisma di piccola apertura ed usando la relazione (IV.3.8).

Presenteremo invece una deduzione di tipo diretto che consente di comprendere meglio come intervengano le approssimazioni dell'ottica geometrica.

Consideriamo dunque una lente sferica di centri di curvatura  $O_1$  e  $O_2$  e raggi di curvatura  $O_1A = r_1$  e  $O_2B = r_2$  e supponiamo di inviare un raggio RA parallelo all'asse ottico principale.

Indichiamo con  $\alpha_1$  l'angolo di incidenza. Il raggio viene rifratto lungo il percorso ABF ed è caratterizzato da un angolo finale di rifrazione  $\alpha_2$ .

Indichiamo con  $\beta_1$  e  $\beta_2$  i due angoli BAO<sub>1</sub> e ABO<sub>2</sub> con cui il raggio entra ed esce dal vetro e con  $\gamma$  l'angolo ADB. Dunque il triangolo DAB ha angoli  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\gamma$ .

Se prolunghiamo i raggi RA e FB essi si incontrano in C'. Il piano passante per C' e perpendicolare all'asse ottico principale è detto *piano principale della lente*. In una lente non simmetrica i piani principali sono due, ma se lo spessore della lente è piccolo essi possono essere assimilati (*lenti sottili*). Il punto C in cui il piano principale interseca l'asse ottico principale è detto *centro della lente*.

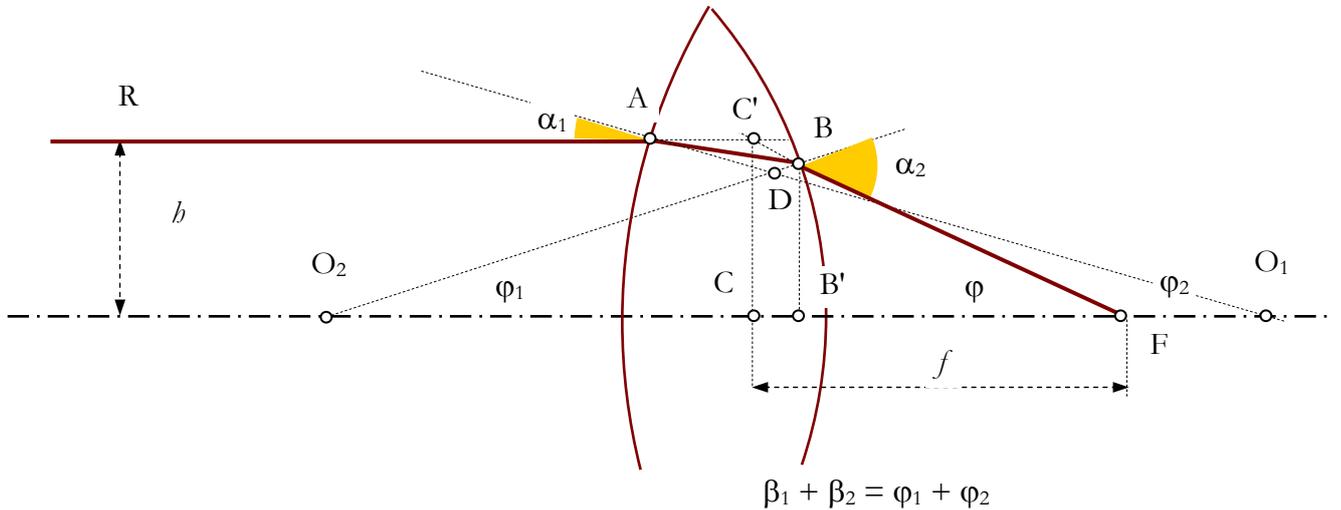
Supponiamo inoltre che la distanza  $h$  del raggio dall'asse ottico principale sia trascurabile rispetto ai raggi di curvatura della lente. In queste condizioni sia gli angoli di incidenza che quelli di rifrazione sono piccoli e

possono essere approssimati sia con il valore del seno che con quello della tangente. Applicando le leggi della rifrazione si ha:

$$\alpha_1 \approx \sin \alpha_1 = n_{12} \sin \beta_1 \approx n_{12} \beta_1 \text{ e analogamente } \alpha_2 \approx n_{12} \beta_2.$$

Ma, come si osserva dalla figura:  $\alpha_1 = \varphi_2$  (angoli corrispondenti).

Inoltre:



$$\beta_1 + \beta_2 = \varphi_1 + \varphi_2$$

perché entrambi sono pari all'angolo esterno  $O_2DA$  (basta riferirsi nel primo caso al triangolo  $ADB$  e nel secondo al triangolo  $O_2DO_1$ ).

Infine, con riferimento al triangolo  $O_2BF$  si ha per il teorema dell'angolo esterno che:

$$\alpha_2 = \varphi_1 + \varphi$$

Dall'insieme delle relazioni trovate si può trovare una utile relazione tra gli angoli  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$  infatti:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \varphi_2 + \alpha_2 = \varphi_2 + (\varphi_1 + \varphi) = (\varphi_2 + \varphi_1) + \varphi$$

Ma per le leggi della rifrazione:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \approx n_{12}(\beta_1 + \beta_2) = n_{12}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

E dal confronto delle due eguaglianze si ha infine:

$$(\varphi_2 + \varphi_1) + \varphi = n_{12}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

La relazione trovata consente di trovare  $\varphi$ :

$$\varphi = (n_{12} - 1)(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Dalla conoscenza di  $\varphi$  si passa infine alla relazione tra le lunghezze sfruttando le relazioni sui triangoli rettangoli e la eguaglianza tra tangente ed angolo. Precisamente:

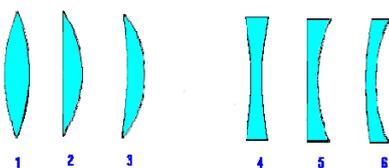
$$\frac{b}{f} = \tan \varphi \approx \varphi = (n_{12} - 1)(\varphi_1 + \varphi_2) \approx (n_{12} - 1)(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)$$

$$\frac{b}{f} \approx (n_{12} - 1) \left( \frac{b}{r_2} + \frac{b}{r_1} \right)$$

Da qui semplificando per  $b$  si ottiene una relazione che non dipende (entro le approssimazioni fatte) dal valore di  $b$  e che ci consente di affermare che un raggio parallelo incontra l'asse ottico principale in un punto a distanza  $f$  dal centro della lente con  $f$  dipendente esclusivamente dai raggi di curvatura e dall'indice di rifrazione relativo, cioè la (IV.3.10).

determinazione geometrico fisica delle proprietà delle lenti sottili; la deduzione va letta come un esercizio prestando attenzione all'uso che viene fatto in essa delle approssimazioni dell'ottica geometrica e alle leggi della rifrazione

come cambiano le lenti al variare della forma; biconvessa, piano convessa, concavo convessa, biconcava, piano concavo convesso concava



### 3.5.4 IL SEGNO DELLA DISTANZA FOCALE

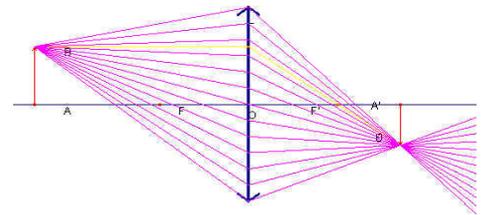
Se si ripete il calcolo effettuato con riferimento ad una lente per la quale i centri di curvatura non siano disposti come nel caso della lente biconvessa, si osserva che sono possibili altre configurazioni ma che la relazione continua a valere a condizione di dare un segno negativo ai raggi di curvatura quando essi determinano una *superficie concava* invece che convessa.

Si possono dunque avere lenti biconvesse con distanza focale positiva, lenti biconcave con distanza focale negativa e lenti concavo-convexe con distanza focale sia positiva sia negativa a seconda dei valori di  $R_1$  e  $R_2$ . Nel caso in cui una delle due facce risulti piana si avrà  $R \rightarrow \infty$  e  $1/R \rightarrow 0$ .

Quando la distanza focale risulta negativa si dice che la lente possiede un fuoco virtuale.

Quando si scambiano i due mezzi, l'indice di rifrazione relativo passa da  $n$  a  $1/n$ . Dunque quando la luce attraversa una lente *otticamente meno densa* del mezzo circostante le lenti divergenti diventano convergenti e quelle convergenti diventano divergenti a causa del cambiamento di segno del termine  $(n_{12} - 1)$ .

Per ragioni di comodità di rappresentazione indicheremo d'ora in poi le lenti convergenti come se fossero piano-convexe.



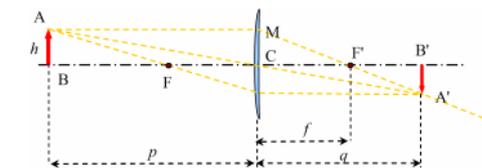
i raggi che escono da un punto dell'oggetto e vengono rifratti in uno stesso punto dell'immagine

costruzione geometrica delle immagini in una lente sottile attraverso i raggi paralleli e i raggi passanti per il centro della lente

### 3.5.5 LA FORMAZIONE DELLE IMMAGINI DI UNALENTE SOTTILE

Consideriamo un punto  $A$  che si trovi ad una distanza  $d > 2f$  da una lente sottile convessa. La lente taglia una parte del fascio luminoso emesso da  $A$  e lo fa convergere in un punto  $A'$  che viene chiamato immagine di  $A$ . Per individuare la posizione di  $A'$  basta utilizzare due raggi particolari tra quelli disponibili e di semplice costruzione

- il raggio  $AM$  parallelo all'asse ottico che viene rifratto nel fuoco della lente
- il raggio  $AC$  passante per il centro della lente e che non viene deviato
- il raggio  $AF$  passante per il fuoco e che emerge dalla lente parallelo all'asse ottico

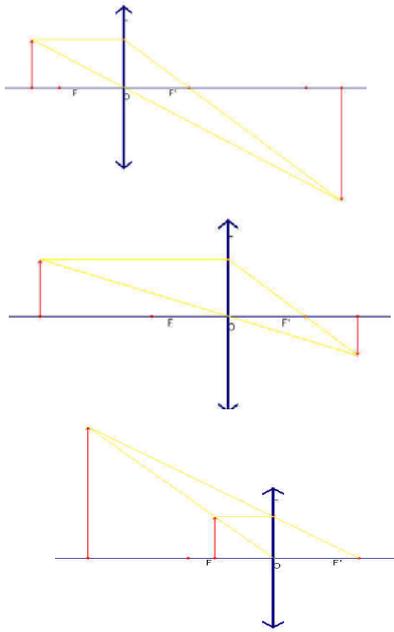


$A'$  viene determinato dalla intersezione di 2 di essi (si lascia al lettore il compito di dimostrare attraverso considerazioni di natura geometrica che tracciati due raggi in grado di individuare  $A'$  anche il terzo raggio passa per  $A'$ ).

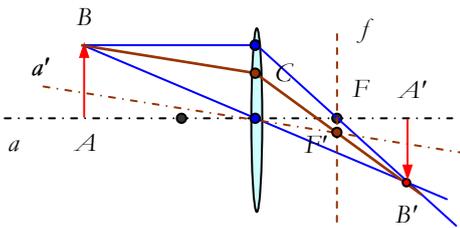
Naturalmente  $A'$  risulta prodotto da tutti i raggi che escono da  $A$  e convergono in  $A'$ ; ma la cosa interessante è che ci possiamo disinteressare di essi ed occuparci della sola tecnica di determinazione di  $A'$ .

Cosa accade dei rimanenti punti compresi tra  $B$  e  $A$ ? Come vedremo tra breve, essi vengono rifratti tutti in maniera da determinare la proiezione di un segmento, ovvero tutto i punti finiscono su una perpendicolare da  $A'$  all'asse ottico principale.

Lasciamo come esercizio al lettore il compito di esercitarsi nella costruzione dell'immagine di una lente convergente al variare della distanza  $p$ . Come si osserverà si hanno comportamenti diversi per i casi in cui  $p > 2f$ ,  $f < p < 2f$ , e  $p < f$ .



man mano che si sposta l'oggetto lungo l'asse ottico cambiano le caratteristiche della immagine (verso, dimensioni e realtà)



costruzione delle immagini basata sull'utilizzo di un **asse ottico secondario**; la costruzione proposta costituisce una conferma indiretta del fatto che tutti i raggi che emergono da un punto convergono poi in uno stesso punto

Il caso  $p=2f$  corrisponde alla formazione di una immagine delle stesse dimensioni, mentre il caso  $p=f$  corrisponde ad una immagine che si forma all'infinito e che discrimina tra immagine reale ed immagine virtuale.

Consideriamo ora una *lente divergente* ed osserviamo immediatamente che i due raggi necessari alla costruzione della immagine di A emergono dalla lente divergendo e dunque non possono produrre una immagine. Ma essi divergono come se provenissero da una zona al di qua della lente; si viene cioè a formare una *immagine virtuale*.

L'immagine virtuale è caratterizzata da non oggettività. Se si pone uno schermo al suo posto non viene visualizzato nulla, ma se al di là della lente si pone un osservatore che guarda verso l'oggetto egli, colpito dai raggi divergenti, forma nel suo occhio la visualizzazione della immagine virtuale. La stessa cosa accade se i raggi divergenti vanno a colpire un'altra lente in grado di formare *immagini reali*.

I risultati sono condensati nella tabella seguente:

posizione oggetto	tipo di immagine	verso immagine	dimensioni immagine	posizione immagine
$p > 2f$	reale	rovesciata	rimpicciolita	oltre $F'$
$f < p < 2f$	reale	rovesciata	ingrandita	si allontana
$p=f$			infinite	infinito
$0 < p < f$	virtuale	diritta	ingrandita	si avvicina

Quando si effettua una costruzione grafica della immagine di una lente sottile si può utilizzare anche un *raggio generico* che non sia né parallelo all'asse ottico principale né passante per il fuoco. Consideriamo infatti un generico raggio BC e tracciamo l'asse ottico secondario  $a'$  passante per il centro della lente e parallelo al raggio.

Indichiamo con  $F'$  l'intersezione tra il piano focale (piano per il fuoco F e perpendicolare all'asse ottico principale) e l'asse ottico secondario. Si osserva che il raggio  $CF'$  passa sempre per  $B'$  (immagine di B).

Ciò significa che, volendo costruire la immagine di un punto esterno all'asse ottico principale possiamo utilizzare oltre ai due raggi già citati anche un qualsiasi altro raggio a condizione di costruire il corrispondente  $F'$  del fuoco F.

Prima si determina il punto  $F'$  e quindi si determina  $B'$  come intersezione tra  $CF'$  e il raggio passante per il vertice della lente.

### 3.5.6 L'EQUAZIONE DEI PUNTI CONIUGATI

Oltre che per via geometrica è possibile determinare la posizione della immagine e, indirettamente la sua dimensione, per via analitica. Si dimostra infatti che:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \tag{IV.3.11}$$

La quantità  $p$  è sempre positiva,  $q$  è positivo quando si trova da parte opposta rispetto all'oggetto (immagine reale) mentre è negativo nel caso delle immagini virtuali;  $f$  è positivo per le lenti convergenti e negativo per quelle divergenti.

La dimostrazione della (IV.3.11) si basa sulla similitudine dei triangoli ABC e A'B'C' da cui si ha che l'*ingrandimento*:

l'equazione dei punti coniugati

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$



$$\eta = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{q}{p} \quad (\text{IV.3.12})$$

La (IV.3.12) ci consente, noti  $p$  e  $q$  di determinare l'ingrandimento e va tenuta presente in sede applicativa. Dalla similitudine di  $MCF'$  e  $F'A'B'$  si ha che

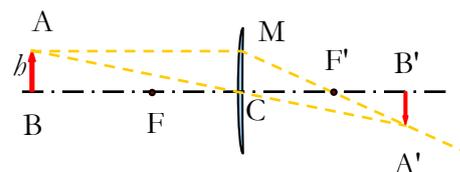
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{q-f}{f} \text{ e pertanto } \frac{q}{p} = \frac{q-f}{f} \Leftrightarrow qf = pq - pf \Leftrightarrow qf + pf = pq$$

e da qui dividendo per  $pq$  si ottiene il risultato.

L'equazione che collega i due punti oggetto e immagine è detta *equazione dei punti coniugati*.

Si osservi che *poiché la distanza  $q$  dell'immagine dipende solo da  $p$  resta indirettamente dimostrato che un segmento perpendicolare all'asse ottico ha come immagine ancora un segmento*.

È utile, per lo studente simularne la applicazione in un contesto dato anche nel caso in cui siano presenti numeri negativi.

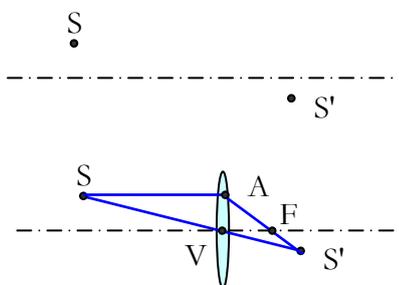


una volta accettato che i raggi paralleli convergono nel fuoco la dimostrazione della equazione dei punti coniugati è molto semplice e si basa su semplici relazioni di tipo geometrico

### 3.6 Costruzione delle immagini nelle lenti sottili: esempi ed applicazioni

Data una sorgente la sua immagine e l'asse ottico trovare la lente e il fuoco

*Esercizio:* Una lente sottile ha l'asse ottico indicato in figura e si sa che la sorgente S forma l'immagine S'. Determinare graficamente la posizione della lente e quella del fuoco. Descrivere a parole la costruzione effettuata.



☹

Il vertice V della lente sta sulla retta SS' ed è il punto di incontro del raggio SS' con l'asse ottico. Una volta individuato il vertice si traccia la lente (perpendicolare all'asse ottico) e, mandato da S un raggio parallelo all'asse ottico (che incontra la lente in A) lo si fa rifrangere in S'. Il punto di incontro con l'asse ottico è il fuoco F.

La costruzione è stata effettuata sotto la figura che definisce i dati del problema.

☺

**Determinazione della immagine con uso della equazione dei punti coniugati**

*Esercizio:* Una lente di distanza focale  $f = 15$  cm viene usata per proiettare l'immagine di un oggetto ortogonale all'asse ottico e che si trova immediatamente prima del fuoco ad una distanza  $p = 16$  cm. Determinare il tipo di immagine, la sua posizione e l'ingrandimento.

☹

Dalla equazione dei punti coniugati si ha:

$$1/q = 1/f - 1/p = 1/15 - 1/16 = 0.00417 \text{ cm}^{-1}$$

$$q = 240 \text{ cm.}$$

L'ingrandimento è dato da  $q/p = 15$  e l'immagine è reale ( $q$  è positivo) e rovesciata (come tutte le immagini reali delle lenti convergenti).

Come si nota l'aver preso un punto vicino al fuoco ha determinato un ingrandimento molto elevato (ciò che si fa nei proiettori di diapositive).

☺

**Uso combinato della equazione dei punti coniugati**

*Esercizio:* Due sorgenti  $S_1$  e  $S_2$  sono poste alla distanza  $d = 35$  cm lungo l'asse ottico di una lente sottile con distanza focale  $f = 12$  cm e, tramite una lente convergente formano due immagini coincidenti. Indicare con  $x$  la distanza tra  $S_1$  e la lente, con  $q$  la distanza tra la immagine reale e la lente (si consiglia di esplicitare i segni). a) Perché una delle due immagini è necessariamente virtuale? b) scrivere le equazioni dei punti coniugati per le due sorgenti e utilizzarle per determinare  $x$  e  $q$ . Spiegare perché le due soluzioni corrispondono ad un unico caso

☹

Una delle immagini è virtuale (cioè dalla stessa parte della sorgente) perché se fossero entrambi reali o entrambi virtuali dalla equazione delle lenti sottili si avrebbe che dovrebbe essere  $S_1 \equiv S_2$ .

Se applichiamo la equazione delle lenti sottili avremo:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \wedge \frac{1}{d-x} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f} .$$

Basta ora fare la somma per ottenere una equazione in x:

$$\frac{1}{d-x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{f}$$

e sostituendo i dati:

$$\frac{1}{35-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6(35-x) + 6x = x(35-x) \Leftrightarrow x^2 - 35x + 210 = 0; \sqrt{\Delta} \approx 19.6 \text{ da cui } x_1 = 7.7 \text{ e } x_2 = 27.3 \text{ (le due soluzioni corrispondono alla inversione dei ruoli tra } S_1 \text{ e } S_2).$$

Ci interessa quella che produce un q positivo e cioè la più grande.

$$q = \frac{fx}{x-f} = \frac{12 \cdot 27.3}{27.3 - 12} = 21.4 \text{ cm}$$



### Funzionamento di una lente di caratteristiche fisiche assegnate

*Esercizio:* Una lente biconvessa con raggi curvatura  $r_1 = 80 \text{ mm}$  e  $r_2 = 60 \text{ mm}$  è costruita con vetro di indice di rifrazione  $n = 1.60$  viene usata per proiettare su uno schermo posto a distanza  $q = 25.0 \text{ cm}$  un oggetto alto  $h = 3.00 \text{ cm}$ . Determinare dove debba essere posto l'oggetto, la dimensione dell'immagine e cosa si deve fare per illuminarlo in maniera uniforme.



In primo luogo si deve determinare la distanza focale della lente per poter poi utilizzare la equazione dei punti coniugati.

$$f = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{1}{n-1} \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{1}{0.60} \frac{80 \cdot 60}{140} = 57.1 \text{ mm}$$

Dalla equazione dei punti coniugati si ha, invertendo:

$$p = \frac{qf}{q-f} = \frac{57.1 \cdot 250}{250 - 57} = 74 \text{ mm}$$

Le dimensioni di immagine e oggetto sono proporzionali alle distanze dal centro della lente e pertanto:

$$y_i = y_o \frac{q}{p} = 30.0 \frac{25.0}{74.0} = 10 \text{ mm}$$

Per illuminare l'oggetto basta collocare dietro di esso una lente convergente con una sorgente puntiforme nel fuoco.

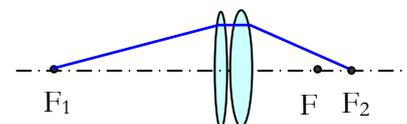


### La distanza focale di due lenti sottili accostate

*Esercizio:* Due lenti sottili di distanze focali  $f_1$  e  $f_2$  sono collocate l'una dopo l'altra a distanza trascurabile. Determinare la distanza focale del sistema costituito dalle due lenti.



Si può arrivare al risultato in molti modi ma il più semplice consiste nell'osservare che un raggio che parte dal fuoco  $F_1$  della prima lente deve finire nel fuoco della seconda lente (si veda la figura qui a lato) e pertanto si può utilizzare la equazione dei punti coniugati con  $f_1$  al posto di  $p$  e  $f_2$  al posto di  $q$  mentre  $f$  indicherà la distanza focale del sistema. Si ha pertanto:



Le diottrie di un sistema ottico formato da lenti ravvicinate si sommano



$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$$

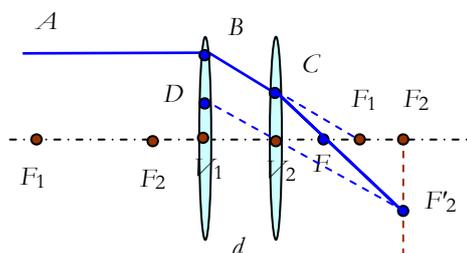
Ovvero, quando le lenti vengono messe una dietro l'altra a contatto tra loro, le diottrie si sommano.

Si osservi che (grazie ad una proprietà matematica secondo cui *l'inverso della somma degli inversi di due numeri positivi è sempre minore del minore dei due numeri di cui si sommano gli inversi*<sup>9</sup>) si ottiene sempre una lente di distanza focale minore.



### La distanza focale di un sistema formato da due lenti sottili poste a distanza assegnata

*Esercizio:* Due lenti sottili di distanze focali  $f_1$  e  $f_2$  sono collocate l'una dopo l'altra a distanza  $d$  tra i due centri  $V_1$  e  $V_2$ . Determinare la distanza focale del sistema costituito dalle due lenti.



Per determinare il fuoco posteriore si tratta di inviare dal lato sinistro un raggio parallelo all'asse ottico principale e determinare il punto di intersezione  $F$  che il raggio rifratto dalle due lenti determina con l'asse ottico.

A differenza di quanto visto nel caso precedente non possiamo usare l'equazione dei punti coniugati una sola volta e saremmo costretti ad applicarla due volte con tutte le complicazioni connesse al fatto che, dopo la prima rifrazione, il punto immagine diventa il punto oggetto della seconda ma le coordinate vanno riferite a centri diversi.

Utilizzeremo per questo una costruzione grafica che sfrutta la costruzione della immagine di raggi non paralleli all'asse principale.

In effetti il raggio  $AB$  viene rifratto in  $BC$  (il cui prolungamento termina in  $F_1$ ) e qui subisce una nuova rifrazione da parte della seconda lente nella direzione  $CF'_2$ . Per determinare  $F'_2$  tracciamo l'asse ottico secondario  $DV_2$  parallelo a  $BC$  e determiniamo  $F'_2$  come intersezione con il piano focale passante per  $F_2$ .

Dopo aver determinato  $F'_2$  lo congiungiamo con  $C$  e ciò ci consente di trovare il fuoco  $F$  del sistema composto.

Eseguita la costruzione grafica indichiamo con  $x$  la misura di  $V_2F$  e proponiamoci di determinarne il valore.

Dalla similitudine di  $CV_2F$  e  $FF_2F'_2$  abbiamo che:

$$\frac{\overline{CV_2}}{\overline{F_2F'_2}} = \frac{x}{f_2 - x}$$

Dalla similitudine di  $CV_2F_1$  e  $V_2F_2F'_2$  abbiamo che:

$$\frac{\overline{CV_2}}{\overline{F_2F'_2}} = \frac{f_1 - d}{f_2} \text{ e dalla eguaglianza dei secondi membri si ottiene:}$$

$$\frac{x}{f_2 - x} = \frac{f_1 - d}{f_2} \Leftrightarrow x f_2 = f_1 f_2 - f_2 d - x f_1 + x d \Leftrightarrow$$

$$x(f_2 + f_1 - d) = f_1 f_2 - f_2 d \Leftrightarrow x = \frac{f_1 f_2 - f_2 d}{f_2 + f_1 - d} = \frac{f_2(f_1 - d)}{f_2 + (f_1 - d)}$$

<sup>9</sup> La dimostrazione di questa proprietà si può fare con metodi elementari e la proponiamo al lettore come utile *disfida*. La proprietà viene utilizzata in diversi altri ambiti della fisica, per esempio nel collegamento in parallelo delle resistenze o in quello in serie dei condensatori.

o anche:

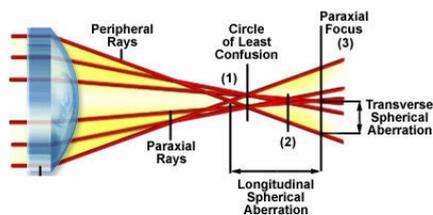
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1 - d}$$

Il risultato trovato si riduce al precedente quando  $d \rightarrow 0$ .



### 3.7 Aberrazioni delle lenti

Fino ad ora si è tacitamente assunto che le lenti si comportino in maniera ideale e cioè che l'immagine prodotta da una lente corrisponda ad una perfetta rappresentazione punto a punto dell'oggetto. Ma ci sono molti casi in cui ciò non si realizza e, in quel caso, si parla di *aberrazioni*. La conoscenza delle aberrazioni è importante per trovare modi e mezzi di evitarle o correggerle.



#### 3.7.1 L'ABERRAZIONE DI SFERICITÀ

Nel derivare la relazione che fornisce la distanza focale di una lente si è assunto che la dimensione dell'oggetto fosse trascurabile rispetto al raggio di curvatura della lente cioè che fosse  $b \ll R$ . Quando ciò si verifica la zona centrale della lente fa sì che il fascio converga in uno stesso punto, il fuoco.

Ma se il fascio è largo la parte più esterna della superficie della lente non riesce più a far convergere i raggi in uno stesso punto e si crea una macchia nella immagine di un punto, nota come *aberrazione di sfericità*.

Uno dei modi per eliminare tale aberrazione consiste nell'inserire un diaframma sul cammino dei raggi luminosi in modo di restringerlo. Ma così facendo si determina una diminuzione dell'energia che va sulla lente e l'immagine perde di luminosità.

Un altro metodo consiste nell'associare una lente convergente ed una divergente in modo che la distanza focale complessiva non si annulli ma si riducano comunque in maniera molto sensibile gli effetti di aberrazione. Infatti le lenti convergenti e quelle divergenti si comportano in maniera opposta rispetto a tale aberrazione.



due immagini con aberrazione di sfericità e di coma (da cometa): nella prima i raggi più esterni hanno un fuoco diverso; nella seconda i raggi che convergono lontano dall'asse ottico si sfuocano

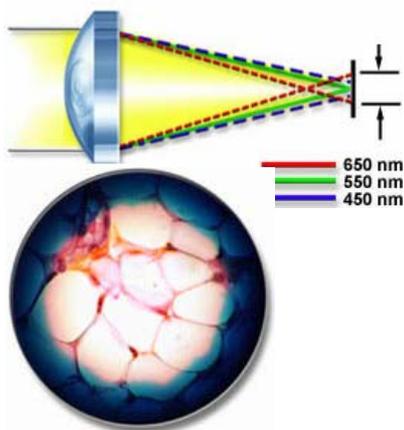
#### 3.7.2 L'ABERRAZIONE CROMATICA

Come si è evidenziato nel paragrafo 3.3 la luce non monocromatica subisce il fenomeno della dispersione e in base a ciò la distanza focale di una lente dipende dalla lunghezza d'onda della luce e, in una lente convergente, è maggiore per il rosso che per il violetto (mentre accade il contrario per le lenti divergenti).

Ne consegue che l'immagine di una sorgente puntiforme bianca risulterà rossa con sfumature blu e viola o viola con sfumature giallo rosse a seconda della posizione dello schermo. Si parla in questo caso di *aberrazione cromatica*.

Anche in questo caso si sfrutta il comportamento opposto di lenti convergenti e divergenti che vengono accoppiate per ridurre l'aberrazione. Si opera inoltre sugli indici di rifrazione dei diversi componenti utilizzando vetri di diverso indice di rifrazione e si interviene sul raggio di curvatura.

Di solito correggendo l'aberrazione cromatica si corregge anche quella di sfericità e le lenti con queste caratteristiche, dette *lenti acromatiche*, sono il componente base di tutti gli strumenti ottici.



l'aberrazione cromatica focalizza i diversi colori in punti diversi e produce distorsioni di colore come nei bordi di questa immagine al microscopio

#### 3.7.3 L'ASTIGMATISMO

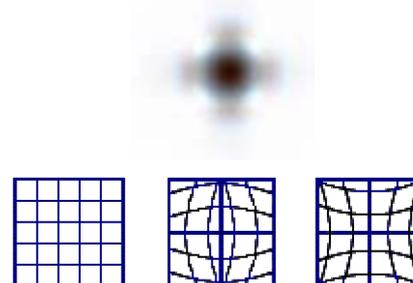
L'immagine di un punto notevolmente distante dall'asse ottico viene prodotta da raggi a grande angolo di incidenza. Invece di formarsi una immagine puntiforme, qualsiasi sia la posizione dello schermo, si viene a

formare una coppia di segmenti tra loro perpendicolari e a distanza leggermente diversa dalla lente. Il termine *astigmatismo* significa, in greco, senza punto.

Si tratta di un difetto che può presentarsi anche in lenti già corrette per le due precedenti aberrazioni e lo si corregge utilizzando lenti appositamente sagomate, dette anastigmatiche.

Insieme all'astigmatismo i raggi che formano grandi angoli subiscono una ulteriore distorsione che deforma le immagini. Una griglia di quadrati può deformarsi a botte o a cuscino come se si adagiasse su di una superficie curva.

Questo tipo di distorsione deve essere corretta per le rilevazioni di tipo *aereo fotogrammetrico* perché determina una perdita di dettaglio sulle parti laterali della fotografia e non consente la necessaria sovrapponibilità dei diversi fotogrammi.



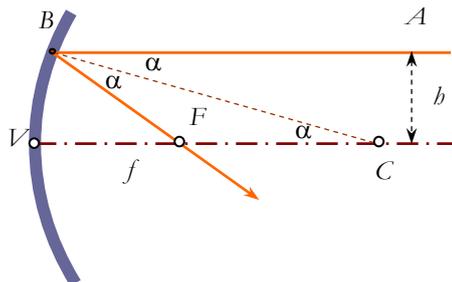
### 3.8 Gli specchi sferici e quelli parabolici

#### 3.8.1 IL FUOCO DEGLI SPECCHI SFERICI

È ben noto dall'esperienza che quando un fascio di raggi paralleli incide sulla superficie concava di uno *specchio sferico* parallelamente al diametro passante per il vertice i raggi vengono tutti riflessi in uno stesso punto detto fuoco.

Ci proponiamo di dimostrare la validità di questa affermazione e di determinare contestualmente i suoi limiti ed il valore della distanza focale.

Se indichiamo con BC il raggio dello specchio avremo che il raggio AB viene riflesso in BF e gli angoli indicati con  $\alpha$  sono congruenti in quanto alterni interni e per la legge della riflessione. Pertanto il triangolo FCB è



isoscele e  $\overline{FC} = \frac{R/2}{\cos \alpha}$

Si ha pertanto:

$$f = \overline{VF} = \overline{VC} - \overline{FC} = R - \frac{R}{2\cos \alpha}$$

Ma  $\sin \alpha = b / R$  e pertanto  $\cos \alpha = \sqrt{1 - (b / R)^2}$

Sostituendo si ha dunque:

$$f = R - \frac{R}{2\cos \alpha} = \frac{R}{2} \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{1 - (b / R)^2}} \right)$$

Come si vede il valore di  $f$  dipende da  $b$  ma ricordando l'approssimazione già utilizzata in teoria della relatività<sup>10</sup> e cioè trascurando i termini di grado superiore a  $(b / R)^2$  si ha che

$$f = \frac{R}{2} \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{1 - (b / R)^2}} \right) \approx \frac{R}{2} \left( 2 - \frac{1}{1 - 1/2(b / R)^2} \right) \approx$$

$$\frac{R}{2} \{ 2 - [1 + 1/2(b / R)^2] \} = \frac{R}{2} [1 - 1/2(b / R)^2]$$

Dunque se  $(b/R)^2$  può essere trascurato si ottiene:

$$f = \frac{R}{2} \tag{IV.3.13}$$

da cui si conclude che, con buona approssimazione, in uno *specchio sferico* i raggi paralleli vengono riflessi in uno stesso punto che si trova a metà del raggio di curvatura e che è detto fuoco.

Se si volesse quantificare l'errore connesso alle approssimazioni fatte basterebbe osservare che  $\Delta f / f = 1/2 (b/R)^2$  e che pertanto per avere una variabilità sulla distanza focale inferiore all'1% = 0.01 basta che sia  $b/R < \sqrt{0.02} = 0.14$

#### 3.8.2 SPECCHI SFERICI, ABERRAZIONI E SPECCHI PARABOLICI

Anche gli specchi sferici, come le lenti, risentono di una *aberrazione* di sfericità che può essere completamente eliminata se, invece della super-

<sup>10</sup> Quando si trascurano i termini in  $x^2$  rispetto a quelli in  $x$  si ha  $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$  e  $\sqrt{1+x} \approx 1 + 1/2 x$

ficie sferica, si adotta la superficie generata per rotazione dalla parabola (*paraboloide di rotazione*).

Si dimostra infatti che nella parabola una generica parallela all'asse di simmetria incontra la curva in un punto P che, quando viene congiunto con il fuoco forma un angolo che viene sempre bisecato dalla retta normale (la perpendicolare alla tangente per P).

Questa proprietà delle parabole è utilizzata sia nella realizzazione degli specchi per i telescopi (perché consente di utilizzare specchi di grande apertura senza pagarne il prezzo in termini di aberrazione di sfericità), sia nella realizzazione delle superfici riflettenti dei fari delle automobili (il filamento dei fari di profondità viene collocato nel fuoco e ciò consente di ottenere dei fasci di luce quasi paralleli).

Poiché queste proprietà delle coniche vengono spesso trascurate nei corsi di geometria analitica presentiamo una sintetica dimostrazione di questa proprietà.

Consideriamo dunque una parabola (*luogo geometrico dei punti per i quali è costante la distanza da una retta fissa detta direttrice e da un punto fisso detto fuoco*)

e tracciamo una retta  $r$  parallela all'asse di simmetria che incontra la direttrice  $d$  nel punto H e la parabola in P.

Dopo aver unito P con il fuoco F tracciamo la bisettrice  $b$  dell'angolo FPH e supponiamo che tale semiretta incontri la parabola in Q.

I due triangoli PQF e PHQ risultano congruenti per il I criterio (PQ in comune,  $\widehat{FPQ} \cong \widehat{QPH}$  per costruzione e  $PF \cong PH$  per proprietà della parabola)  $\Rightarrow FQ \cong QH$  ma ciò è assurdo perché QH è maggiore della distanza di Q da  $d$ .

Dunque l'ipotesi fatta che la bisettrice incontri la parabola in un secondo punto è assurda e  $b$  è la tangente. Ma se  $b$  è la tangente ne consegue che la normale  $n$  a  $b$  biseca l'angolo rPF e dunque, se  $r$  corrisponde ad un raggio di luce e la parabola ad una superficie riflettente, il raggio riflesso finisce nel fuoco.

Dalla dimostrazione discende che la proprietà non dipende dalla distanza di  $r$  dall'asse di simmetria a differenza di quanto accade con le superfici sferiche.

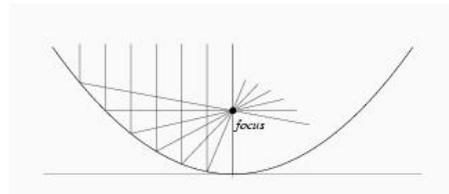
### 3.8.3 LA FORMAZIONE DELLE IMMAGINI NEGLI SPECCHI SFERICI

Se confrontiamo l'equazione che fornisce la distanza focale di una lente sottile  $\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$  con la relazione  $\frac{1}{f} = \frac{2}{R}$  possiamo notare che uno specchio sferico concavo corrisponde ad una lente sottile di indice di rifrazione -1 con un raggio di curvatura infinito e con l'altro  $r_1 = 1/R$ . In effetti, così facendo si ha:

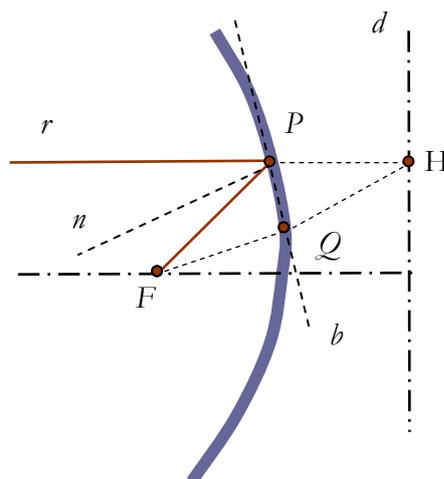
$$\frac{1}{f} = (-1 - 1) \left( -\frac{1}{R} + 0 \right) = \frac{2}{R}$$

Questa analogia, unita al fatto che un raggio che passa per il centro di curvatura dello specchio viene riflesso su se stesso, ci consente di utilizzare sia le stesse espressioni analitiche, sia le stesse tecniche di costruzione grafica per costruire le immagini prodotte da uno specchio sferico.

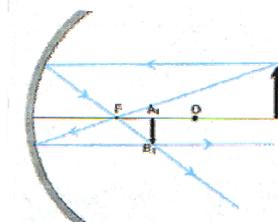
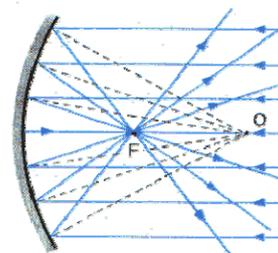
Precisamente si opera come segue:

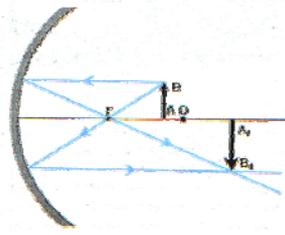


lo specchio parabolico non ha aberrazioni di sfericità; è la particolare curvatura della parabola a garantire che tutti i raggi paralleli convergano in uno stesso punto



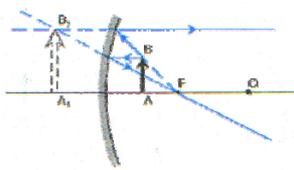
Reflection from Convex and Concave Surfaces





dal punto di vista grafico basta usare, a scelta, due dei seguenti tre raggi:

- un raggio parallelo all'asse ottico principale che viene riflesso nel fuoco
- un raggio passante per il fuoco che viene riflesso parallelamente all'asse ottico
- un raggio passante per il centro di curvatura che non viene deviato



dal punto di vista analitico vale una relazione identica a quella dei punti coniugati con la stessa convenzione sui segni di  $p$  e  $q$  e con  $R$  preso positivo per le superfici concave e negativo per quelle convesse.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \quad (\text{IV.3.14})$$

### 3.9 Quesiti di fine capitolo

1. Spiegare la differenza tra dispersione e diffusione della luce <sup>11</sup>
2. Scrivere l'equazione che fornisce la distanza focale per una lente sottile di raggi di curvatura  $r_1$  e  $r_2$  e indice di rifrazione rispetto al mezzo  $n$ . Precisare la convenzione sui segni di  $r$ . <sup>12</sup>
3. Cosa dice il principio di reversibilità dei cammini ottici? <sup>13</sup>
4. Perché per avere la riflessione totale quando un raggio passa da un mezzo 1 ad un mezzo 2 l'indice di rifrazione  $n_{12}$  deve essere  $< 1$ ? In tale caso quanto vale l'angolo limite  $i_l$ ? <sup>14</sup>
5. Su cosa si basa la capacità dei prismi di scomporre la luce bianca? <sup>15</sup>
6. Data l'equazione delle lenti sottili e una lente convergente ( $f > 0$ ) dedurre risolvendo la disequazione come deve essere scelto  $p$  per avere una immagine virtuale ( $q < 0$ )? <sup>16</sup>
7. Perché in una lastra a facce piane e parallele un raggio di luce viene rifratto parallelamente a se stesso? <sup>17</sup>
8. Un fascio di raggi paralleli incide su una scatola virtuale ed esce cambiando direzione con i raggi ancora paralleli. Cosa ci deve essere al posto della scatola? <sup>18</sup>

<sup>11</sup> La dispersione è la proprietà per la quale l'indice di rifrazione dipende debolmente dalla frequenza e viene usata per scomporre la luce non monocromatica nei prismi; la diffusione è la proprietà per cui una superficie non regolare o un gas localmente non omogeneo determinano la riflessione di un fascio di raggi paralleli in tutte le direzioni.

<sup>12</sup>  $\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$   $r$  è preso positivo per superfici convesse e negativo per superfici concave

<sup>13</sup> Il percorso seguito da un raggio di luce in un sistema ottico non dipende dal verso di percorrenza

<sup>14</sup> Due possibili modelli di risposta:

1) Perché si verifichi la riflessione totale deve poter essere  $r = 90^\circ$  e ciò richiede che  $\sin i = n_{12}$  ma il seno è sempre minore di 1. L'angolo limite è quello che corrisponde a  $r = 90^\circ$  pertanto  $\sin i_l = n_{12}$  e  $i_l = \arcsin(n_{12})$

2) Per avere la riflessione totale il raggio rifratto al di sotto dell'angolo limite deve allontanarsi dalla normale cioè  $\sin i < \sin r \Rightarrow \frac{\sin i}{\sin r} < 1$  e dunque  $n_{12} = \frac{\sin i}{\sin r} < 1$ . L'angolo limite è quello che corrisponde a  $r = 90^\circ$  pertanto  $\sin i_l = n_{12}$  e  $i_l = \arcsin(n_{12})$

<sup>15</sup> La luce bianca è composta da onde di frequenza variabile con continuità e l'indice di rifrazione del vetro dipende debolmente dalla frequenza (per alcuni vetri il fenomeno è più evidente). Così un fascio di luce bianca che colpisce un prisma subisce rifrazioni con angoli diversi nell'attraversare il vetro ed esce scomposto.

<sup>16</sup> Da  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$  si ottiene  $\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$  ma se  $q < 0$  deve essere  $\frac{1}{f} - \frac{1}{p} < 0 \Leftrightarrow \frac{p-f}{pf} < 0$  e poiché il denominatore è sempre positivo (lente con  $f > 0$ ) deve essere  $p - f < 0$  o anche  $p < f$ .

<sup>17</sup> Avvengono due rifrazioni aria vetro e vetro aria in cui l'angolo di rifrazione diventa quello di incidenza (le due normali sono parallele) e per il principio di reversibilità dei cammini ottici l'angolo di rifrazione finale risulta uguale a quello di incidenza iniziale.

<sup>18</sup> Affinché un fascio di raggi paralleli si trasformi ancora in un fascio di raggi paralleli con direzione diversa deve aver luogo una riflessione su uno specchio piano o su un prima che produca riflessione totale.

9. Cosa caratterizza l'ombra di un oggetto quando viene creata da una sorgente puntiforme rispetto a quando viene creata da una sorgente estesa? Precisare cos'è la penombra.<sup>19</sup>
10. Si chiama indice di rifrazione relativo del mezzo 2 rispetto al mezzo 1: ...<sup>20</sup>
11. A cosa corrisponde fisicamente l'indice di rifrazione  $n_{12}$  del mezzo 2 rispetto al mezzo 1?<sup>21</sup>
12. Perché quando fa caldo si può determinare la riflessione totale in aria?<sup>22</sup>
13. Secondo l'equazione dei punti coniugati  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ . Cosa sono p, q e f? Che convenzione si fa sui loro segni?<sup>23</sup>
14. A quali restrizioni deve soggiacere una lente affinché esista un fuoco e formi immagini senza aberrazioni?<sup>24</sup>
15. Considera due punti S e I da una stessa parte di uno specchio piano; costruisci il raggio riflesso che incide in P (ignoto); dimostra che SP + PI è minimo; perché S' è detta immagine virtuale di S.
16. Considera due punti S e I da parti opposte rispetto alla separazione tra due mezzi con velocità  $v_1$  e  $v_2$ . Sia P il punto di intersezione del raggio con la linea di separazione dei due mezzi. Dimostra che se  $t_{SP} + t_{PI}$  è minimo allora  $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$
17. Con quali argomentazioni Descartes sostiene che nei mezzi meno densi la luce si propaga con una velocità minore?
18. In un diottro sferico di raggio di curvatura R ed indici di rifrazione  $n_1$  e  $n_2$  vale la relazione  $\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ . Definisci a partire da essa la distanza focale.

<sup>19</sup> Nel primo caso si ha un'ombra netta; nel secondo caso si ha presenza di ombra e penombra; quest'ultima è una regione in cui i raggi emessi dalla sorgente arrivano solo parzialmente, cioè una zona in cui guardando verso la sorgente se ne vede solo una parte.

<sup>20</sup> La quantità costante  $n_{12} = \sin i / \sin r$  quando un raggio di luce passa dal mezzo 1 al mezzo 2. Gli angoli i e r sono formati dal raggio incidente e rifratto con la normale alla superficie di separazione.

<sup>21</sup>  $n_{12} = \frac{v_1}{v_2}$  dove  $v_1$  e  $v_2$  sono le velocità della luce nei due mezzi. L'indice di rifrazione è un dato sperimentale tipico della coppia di corpi; la teoria ondulatoria ha consentito di specificarne il senso fisico.

<sup>22</sup> Perché la luce proveniente dall'alto subisce una serie di rifrazioni da un mezzo più denso ad uno meno denso (aria calda più rarefatta vicino al terreno) e pian piano la traiettoria si curva fino a raggiungere la condizione per cui si ha la riflessione totale.

<sup>23</sup> p e q sono le distanze dell'oggetto e della immagine dal centro della lente sottile e sono assunte positive quando stanno da parti opposte (immagini reali) mentre q è preso negativo se l'immagine (virtuale) sta dalla stessa parte dell'oggetto. La quantità f (distanza focale) è la distanza tra il fuoco e il centro ed è positiva per le lenti convergenti e negativa per quelle divergenti.

<sup>24</sup> La lente deve essere sottile (spessore piccolo rispetto ai raggi di curvatura) e i raggi devono essere poco inclinati rispetto all'asse ottico (raggi parassiali) il che accade quando il diametro della lente è molto minore della distanza focale.

19. In una lente sottile cos'è l'immagine di una sorgente? In cosa differisce dall'oggetto?
20. L'approssimazione dei raggi parassiali definisce l'ambito di validità dell'equazione dei punti coniugati. Spiega.
21. Perché se in una lente sottile conosci  $p$  e il potere diottrico conosci automaticamente anche l'ingrandimento?
22. Data la relazione che fornisce il potere diottrico di una lente sottile  $\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$  in quale caso si parla di lente divergente? Come può essere fatta tale lente (casistica)
23. Si dice che  $P'$  è l'immagine reale di un punto  $P$  quando i raggi luminosi uscenti da  $P$  convergono in  $P'$ .<sup>25</sup>
24. Una immagine virtuale può sempre essere resa reale ponendo uno schermo in corrispondenza di essa.<sup>26</sup>
25. Un raggio luminoso che colpisce una superficie rifrangente piana a facce parallele non subisce deviazioni. Su questa proprietà si basa l'utilizzo delle lastre di vetro per le finestre.<sup>27</sup>
26. La approssimazione dei raggi parassiali riguarda il concetto di parallasse, cioè l'angolo sotto cui viene visto da un punto un oggetto di dimensioni finite.<sup>28</sup>
27. Preso uno specchio sferico di raggio  $r$  e un punto collocato sul diametro passante per il vertice, comunque si inviino dei raggi verso lo specchio essi sono sempre riflessi in uno stesso punto dell'asse ottico detto punto immagine.<sup>29</sup>
28. In uno specchio sferico concavo un raggio emesso dal centro verso lo specchio viene sempre riflesso su se stesso.<sup>30</sup>
29. Preso uno specchio sferico di raggio  $r$ , indicate con  $p$  e  $q$  le distanze dal vertice di un oggetto collocato sull'asse ottico e della sua immagine si può affermare entro la approssimazione dei raggi parassiali che  $1/p + 1/q = 2/r$ <sup>31</sup>

---

<sup>25</sup> Vero

<sup>26</sup> Falso: una immagine virtuale non ha realtà fisica. E' un punto geometrico da cui un insieme di raggi divergenti sembra provenire. Sembra significa che se si prolungano i raggi in zone da cui non provengono si ottiene un punto.

<sup>27</sup> Falso: un raggio luminoso viene deviato nel passaggio aria vetro e nuovamente deviato dello stesso angolo in quello vetro aria, in modo di uscire parallelo, ma traslato. La traslazione dipende dallo spessore del vetro ed è, nella maggioranza dei casi trascurabile.

<sup>28</sup> Falso: un raggio è para-assiale se si può considerare allineate con l'asse cioè se forma angoli piccoli rispetto ad un asse dato.

<sup>29</sup> Falso: la affermazione vale solo per gli specchi convergenti e nella approssimazione dei raggi parassiali

<sup>30</sup> Vero: l'angolo di incidenza è zero.

<sup>31</sup> Vero: sia  $\alpha$  l'angolo formato dal raggio incidente,  $\beta$  quello dal raggio e  $\gamma$  quello dal raggio riflesso con l'asse ottico; sia  $\theta$  l'angolo di incidenza. Applicando due volte il teorema dell'angolo esterno si ha che:  $\beta = \alpha + \theta$  e  $\gamma = \alpha + 2\theta \Rightarrow \gamma = \alpha + 2(\beta - \alpha) \Rightarrow 2\beta = \gamma + \alpha$ . Nella approssimazione dei raggi parassiali si può esprimere ciascuno dei tre angoli come rapporto tra l'arco e il lato (come se i tre triangoli fossero isoceli). Si ha pertanto  $2l/r = 1/q + 1/p \Rightarrow 2/r = 1/p + 1/q$

30. In uno specchio sferico per costruire le immagini di oggetti posti lungo l'asse ottico bisogna tracciare tre raggi: uno parallelo, uno per il fuoco e uno per il centro <sup>32</sup>
31. In uno specchio sferico se  $p > 2r$  l'immagine è reale, rovesciata, rimpicciolita e compresa tra il fuoco e il vertice. <sup>33</sup>
32. In uno specchio sferico se  $p < r/2$  l'immagine è virtuale, diritta e ingrandita <sup>34</sup>
33. In uno specchio sferico se  $p = 2r$  allora  $q = r/3$  <sup>35</sup>
34. In uno specchio sferico l'ingrandimento lineare vale in ogni caso  $G = y_q/y_2 = -q/p$  ma la dimostrazione non può essere data in termini elementari <sup>36</sup>
35. Gli specchi convessi formano sempre immagini virtuali, diritte e rimpicciolite. <sup>37</sup>
36. Condizione necessaria affinché la legge degli specchi valga in ogni caso è di considerare  $p$ ,  $q$  e  $f$  come numeri relativi con  $r$  e  $f > 0$  per lo specchio convesso. <sup>38</sup>
37. Si parla di oggetto virtuale quando l'oggetto è collocato dietro lo specchio. In tal caso si deve porre  $p < 0$ ? <sup>39</sup>
38. Gli oggetti virtuali sono solo una estensione matematica della legge sugli specchi <sup>40</sup>
39. Lenti sottili: si considerino due lenti sottili di uguale distanza focale  $f$  e siano  $d_1$  e  $d_2$  i rispettivi diametri. Siano  $p$  e  $q$  la distanza dell'oggetto e dell'immagine. La lente con diametro maggiore forma una immagine più luminosa <sup>41</sup>

---

<sup>32</sup> Falso: ne bastano due dei tre citati

<sup>33</sup> Falso: l'immagine è compresa tra il centro e il vertice e man mano che l'oggetto va all'infinito rimpicciolisce e si sposta verso il fuoco. Eseguire la costruzione grafica

<sup>34</sup> Vero: eseguire la costruzione ed osservare che l'immagine risulta tanto più ingrandita quanto ci si avvicina al fuoco. In effetti se  $1/p \rightarrow 2/r$  ne segue che  $1/q \rightarrow 0$  e dunque  $q \rightarrow \infty$ . Questo infinito può essere positivo (immagine reale) o negativo (immagine virtuale) a seconda del lato da cui ci si avvicina a F.

<sup>35</sup> Falso: applicando la relazione degli specchi si ha  $1/q = 2/r - 1/(2r) = 3/(2r) \Rightarrow q = 2/3 r$

<sup>36</sup> Falso: la relazione è corretta e la sua dimostrazione si basa sulla similitudine dei due triangoli che si ottengono considerando il raggio che incide nel vertice.

<sup>37</sup> Vero: il raggio parallelo viene riflesso in direzione divergente e converge virtualmente al fuoco collocato nella parte concava. Il raggio ortogonale allo specchio (passante per il centro di curvatura che si trova nella parte concava) non viene deviato e il suo prolungamento incontra il prolungamento del precedente sempre sopra l'asse ottico e in una zona compresa tra il fuoco e il vertice. L'affermazione proposta è immediatamente verificabile sulla figura.

<sup>38</sup> Falso: se lo specchio è convesso bisogna porre  $r$  e  $f < 0$

<sup>39</sup> Vero

<sup>40</sup> Falso: un oggetto virtuale può essere determinato quando, per esempio, si trova una lente davanti allo specchio e la sua immagine cadrebbe al di là dello specchio. In tal caso i raggi rifratti dalla legge convergerebbero a un valore  $p < 0$ . In realtà la convergenza non si realizza perchè i raggi, arrivati allo specchio vengono riflessi.

<sup>41</sup> Vero: ma al crescere del diametro si corre il rischio di perdere la capacità di focalizzazione che vale per raggi parassiali

40. Lenti sottili: si considerino due lenti sottili di uguale distanza focale  $f$  e siano  $d_1$  e  $d_2$  i rispettivi diametri. Siano  $p$  e  $q$  la distanza dell'oggetto e dell'immagine. A parità di  $p$  il valore di  $q$  dipende dal diametro della lente <sup>42</sup>
41. Lenti sottili: si considerino due lenti sottili di uguale distanza focale  $f$  e siano  $d_1$  e  $d_2$  i rispettivi diametri. L'ingrandimento dipende da  $d_1/d_2$  <sup>43</sup>
42. Lenti sottili: si considerino due lenti sottili di uguale distanza focale  $f$  e siano  $d_1$  e  $d_2$  i rispettivi diametri. Siano  $p$  e  $q$  la distanza dell'oggetto e dell'immagine. L'ingrandimento, in valore assoluto, vale  $q/p$  e, fissata la posizione dell'oggetto, dipende solo dalla distanza focale e non dalle dimensioni dell'oggetto. <sup>44</sup>
43. Il diametro della lente non può essere preso di dimensioni qualsiasi perché per valori grandi rispetto alla distanza focale si esce dalla approssimazione dei raggi parassiali <sup>45</sup>
44. Lenti sottili: le immagini formate da una lente hanno le seguenti caratteristiche: a) Indicate con  $p, q, f$  le distanze dell'oggetto, dell'immagine e del fuoco, affinché valga la relazione  $1/p + 1/q = 1/f$  bisogna considerare  $f < 0$  se la lente è divergente b) Sono sempre reali, qualunque sia la collocazione dell'oggetto, se la lente è convergente c) Sono reali e diritte se l'oggetto è collocato tra il fuoco e il vertice e la lente è convergente d) In virtù della relazione  $1/p + 1/q = 1/f$  affinché l'immagine sia reale in una lente convergente, deve essere  $1/p < 1/f$  e cioè  $p > f$  <sup>46</sup>
45. In una lente divergente si possono formare solo immagini virtuali perché può esistere solo una pseudoconvergenza dallo stesso lato dell'oggetto <sup>47</sup>
46. L'approssimazione delle lenti sottili impone di far crescere il diametro della lente al crescere della curvatura della lente e ciò è in contraddizione con l'esigenza di rispettare l'approssimazione dei raggi parassiali. <sup>48</sup>
47. Lenti sottili: siano  $y_p$  e  $y_q$  le dimensioni trasversali dell'oggetto e della immagine formata da una lente sottile a) L'ingrandimento  $y_q/y_p$  vale

<sup>42</sup> Falso: nella approssimazione delle lenti sottili  $1/p + 1/q = 1/f$ . I diametri, pur di rimanere entro la approssimazione delle lenti sottili, influiscono solo sulla luminosità dell'immagine e non sulle sue dimensioni o sulla sua posizione.

<sup>43</sup> Falso: poiché i raggi passanti per il centro della lente non subiscono deviazioni si può considerare la similitudine dei triangoli formati da oggetto e immagine e si ha che  $G = y_q/y_p = -q/p$

<sup>44</sup> Vero: poiché  $G = -q/p$  e poiché con l'equazione dei costruttori di lenti, fissati  $f$  e  $p$  si determina  $q$  e dunque l'ingrandimento è determinato.

<sup>45</sup> Falso: il confronto va fatto tra  $D$  e  $p$  e non tra  $D$  e  $f$  perché la approssimazione dei raggi parassiali richiede che i raggi uscenti dall'asse ottico formino angoli piccoli rispetto all'asse stesso.

<sup>46</sup> a) Vero b) Falso: per avere immagini reali deve essere  $q > 0 \Leftrightarrow 1/f - 1/p > 0 \Leftrightarrow f < p$ . Si formano immagini reali se l'oggetto è posto oltre il fuoco c) Falso: in questo caso le immagini sono virtuali. d) Vero: vedi punti precedenti

<sup>47</sup> Vero

<sup>48</sup> Vero: la lente è sottile se il suo spessore è piccolo rispetto al diametro

- $f/(p-f)$  b) Dalla equazione delle lenti sottili si deduce che  $q-f = \frac{f^2}{p+f}$
- c) L'approssimazione dei raggi parassiali richiede che  $p$  e  $q$  siano molto maggiori di  $f$  d) L'approssimazione dei raggi parassiali va in contrasto con la necessità di usare lenti di grande diametro per aumentare la luminosità delle immagini <sup>49</sup>

---

<sup>49</sup> a) Falso: è sbagliato il segno; infatti  $G = y_q/y_p = -q/p = -1/p \cdot \frac{1}{(1/q)} = -1/p \cdot$

$$\frac{1}{1/f - 1/p} = -1/p \cdot \frac{pf}{(p-f)} = \frac{f}{f-p}$$

$$b) \text{ Falso: } q-f = \frac{1}{(1/q)} - f = \frac{1}{1/f - 1/p} - f = \frac{pf}{(p-f)} - f = \frac{f^2}{p-f}$$

c) Falso: l'importante è che siano piccoli gli angoli e ciò si può ottenere riducendo i diametri delle lenti quando  $p$  si avvicina a  $f$

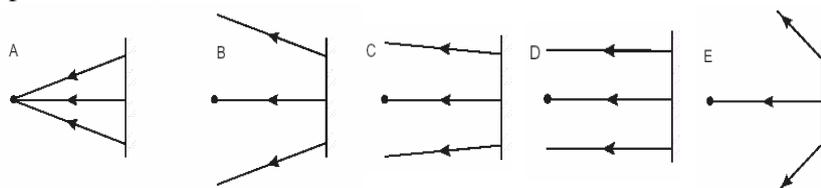
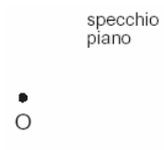
d) Vero

### 3.10 Quesiti dalle Olimpiadi di Fisica

L'elevato numero di quesiti presenti rispecchia abbastanza bene l'orientamento degli organizzatori delle Olimpiadi. L'ottica geometrica fa parte delle conoscenze di base considerate fondamentali.

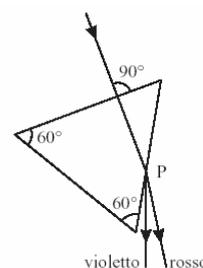
- Un'asticciola dritta immersa parzialmente nell'acqua può apparire spezzata in corrispondenza alla superficie dell'acqua. Ciò è dovuto al fatto che: ... (Juniores 1995)<sup>50</sup>
  - ...la luce proveniente dalla parte immersa dell'asticciola viene parzialmente riflessa dalla superficie dell'acqua.
  - ...i raggi di luce provenienti dall'occhio che guarda sono rifratti alla superficie di separazione dell'aria dall'acqua.
  - ...l'acqua è sempre meno profonda di quanto non appaia a chi la guardi dall'alto.
  - ...la luce proveniente dalla parte immersa dell'asticciola viene rifratta nel passaggio dall'acqua all'aria.
  - ...l'occhio può ricevere solamente la luce contenuta in un cono abbastanza stretto.

- In figura è schematizzato un piccolo oggetto, O, posto davanti a uno specchio piano. Quale delle figure seguenti rappresenta meglio i raggi di luce provenienti dall'oggetto dopo che sono stati riflessi dallo specchio? ... (Juniores 1995)



A B C D E

- In figura è riportato il disegno fatto da Pierino per descrivere un esperimento in cui un fascio di luce bianca veniva fatto incidere perpendicolarmente su una faccia di un prisma di vetro. Gli angoli dei piani del prisma sono di  $60^\circ$  e l'indice di rifrazione del vetro è 1.51. Il disegno è sbagliato perché... (Juniores 1996)<sup>51</sup>



- ...i raggi rosso e violetto avrebbero dovuto essere scambiati.
- ...passando dall'aria al vetro il fascio di luce bianca deve cambiare direzione.

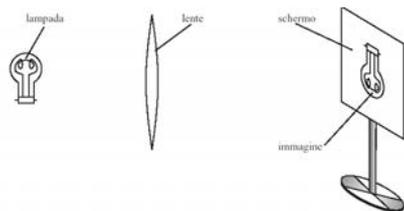
- ...passando dall'aria al vetro il fascio di luce bianca si disperde in più fasci di luce colorata.

- ...il raggio, all'interno del prisma, nel punto P viene riflesso.
- ...il raggio emerge dal prisma senza subire nessuna deviazione.

- In figura si vede una lente, una lampada ed uno schermo messo in modo che l'immagine della lampada formata dalla lente sia a fuoco

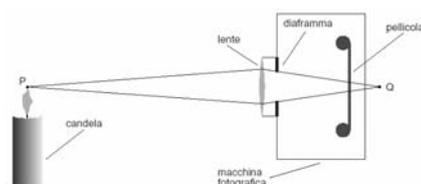
<sup>50</sup> Il caso A è vero ma non pertinente; il B è non pertinente nel senso che la luce di cui si parla non è quella emessa dall'occhio e che ci consente di vedere l'occhio; C è falso; E è falso e non pertinente

<sup>51</sup> All'interno del vetro l'angolo di incidenza è di  $60^\circ$  e se l'indice di rifrazione è 1.51 l'angolo limite, oltre il quale si ha la riflessione totale, è  $\arcsin(1/1.51) \approx 41.5^\circ$ . Pertanto non si ha rifrazione in uscita ma solo riflessione. La A è errata: il violetto viene rifratto più del rosso



su di esso. Successivamente la lampada viene spostata verso sinistra, allontanandola dalla lente, e lo schermo viene messo in modo che l'immagine su di esso sia sempre a fuoco. Fatto questo... (Juniores 1996)<sup>52</sup>

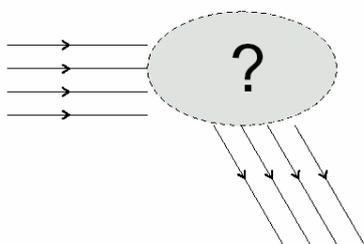
- A ...l'immagine è più piccola e lo schermo più vicino alla lente.
- B ...l'immagine è più piccola e lo schermo più lontano dalla lente.
- C ...l'immagine ha le stesse dimensioni di prima e lo schermo si trova nella stessa posizione.
- D ...l'immagine è più grande e lo schermo è più vicino alla lente.
- E ...l'immagine è più grande e lo schermo è più lontano dalla lente.



5. Il seguente diagramma mostra lo schema di una macchina fotografica. La luce che proviene da un punto P della fiamma della candela è focalizzata dalla lente nel punto Q che si trova scostato rispetto alla pellicola; perciò la luce che proviene da P impressiona una macchiolina sulla pellicola. La fotografia della candela risulterà quindi sfuocata.

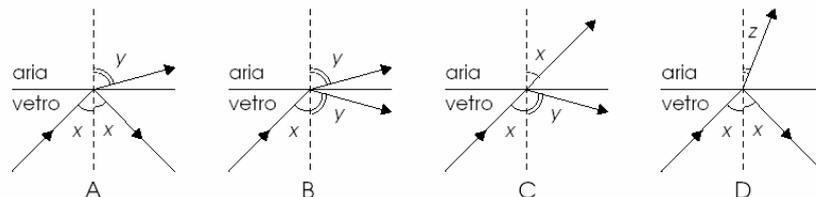
Per rendere la fotografia più nitida si restringe l'apertura del diaframma perché... (Juniores 1997)

- A ...il punto Q in cui si forma l'immagine di P è più vicino alla pellicola.
- B ...il punto Q in cui si forma l'immagine di P è più lontano dalla pellicola.
- C ...la macchiolina di luce che investe la pellicola è più piccola.
- D ...passa più luce attraverso la lente.
- E ...passa meno luce attraverso la lente.



6. In figura sono disegnati un fascio di raggi luminosi che incide su un dispositivo ottico ed il fascio di raggi emergente da esso. Il disegno del dispositivo è stato però cancellato. Quale dei seguenti dispositivi avrebbe potuto essere rappresentato nel disegno? ... (Juniores 1997)
- A ...Una lente convergente.
  - B ...Una lastra di vetro molto spessa.
  - C ...Uno specchio piano.
  - D ...Uno specchio parabolico.
  - E ...Una sfera di vetro.

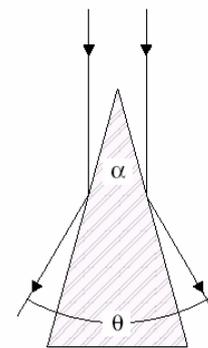
7. Un sottile raggio di luce rossa passa attraverso una spessa lastra di vetro. Quando il raggio arriva alla superficie che separa il vetro dall'aria una parte della luce viene riflessa e una parte passa nell'aria. Quale delle seguenti figure rappresenta meglio il percorso della luce? ... (Juniores 1998)



<sup>52</sup> Utilizzando l'equazione dei punti coniugati si ha che p aumenta e poiché la somma degli inversi è costante q deve diminuire (1/p diminuisce e 1/q aumenta). Poiché

**A** B C D E

8. Due specchi piani sono disposti in modo da formare un angolo acuto  $\alpha$  con le superfici riflettenti all'esterno. Un fascio di luce parallelo alla bisettrice di  $\alpha$  viene proiettato sullo spigolo formato dai due specchi; la luce viene riflessa dalle due superfici speculari e i due fasci riflessi formano fra loro un angolo  $\theta$ , come si vede nella figura seguente. Se  $\alpha = 30^\circ$ , l'angolo  $\theta$ ... (Juniores 1998)



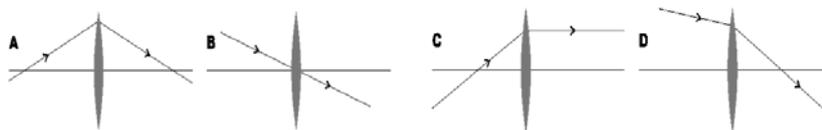
**A** ...misura  $60^\circ$ .

B ...misura  $120^\circ$ .

C ...dipende dal materiale di cui sono fatti gli specchi.

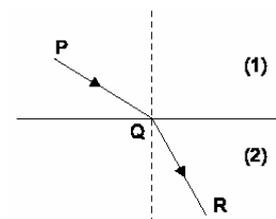
D ...dipende dalla lunghezza d'onda della luce incidente.

9. Quale delle seguenti figure rappresenta un raggio di luce che passa per uno dei fuochi della lente convergente L? ... (Juniores 1999)



A B C **D** E

10. Un raggio di luce monocromatica passa da un mezzo trasparente (1) ad un altro mezzo trasparente (2) seguendo il cammino PQR indicato nella seguente figura. Quando la luce passa dal mezzo (1) al mezzo (2) ... (Juniores 1999)



A ...la sua frequenza diminuisce

B la sua lunghezza d'onda rimane invariata

C la sua velocità aumenta

**D** la sua velocità diminuisce

11. In figura si vede l'immagine formata in uno specchio di un orologio a muro. L'ora effettivamente indicata dall'orologio è ... (Juniores 2000)

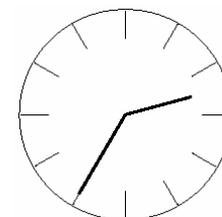
53

A ...2:25

B ...2:35

C ...8:35

**D** ...9:25



12. Una ragazza si guarda in un grande specchio appeso ad una parete a 5 m di distanza. Di quanto deve camminare verso lo specchio per trovarsi alla fine a 2 m di distanza dalla sua immagine? ... (Juniores 2000) <sup>54</sup>

**A** ...4m

B ...3m

C ...2m

D

...1m

13. Una ragazza guarda la Luna piena attraverso un foro circolare praticato in un cartoncino e trova che quando il cartoncino è messo a 90 cm dal suo occhio il foro copre esattamente il disco lunare.

l'ingrandimento in valore assoluto è  $q/p$  si ha una diminuzione (aumenta il denominatore e diminuisce il numeratore).

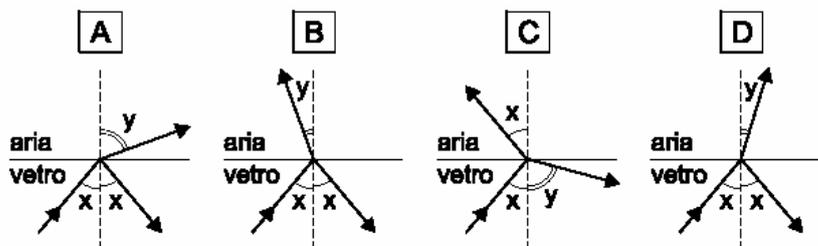
<sup>53</sup> Il modo migliore per arrivare rapidamente alla soluzione è quello di guardare il disegno in controluce

<sup>54</sup> Ricordarsi che l'immagine è virtuale e si trova in posizione simmetrica rispetto allo specchio. Dunque la ragazza deve stare a 1 m dallo specchio.

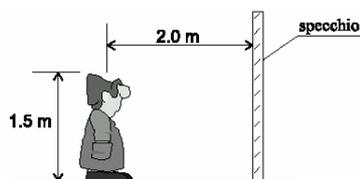
Quale delle seguenti stime si avvicina di più al valore del diametro della Luna se il foro ha un diametro di 8 mm e la Luna dista dalla Terra  $3.8 \times 10^5$  km? ... (Juniors 2000) <sup>55</sup>

- A ...  $2.7 \cdot 10^9$  m    **B** ...  $3.4 \cdot 10^6$  m    C ...  $2.7 \cdot 10^6$  m  
D ...  $3.4 \cdot 10^4$  m

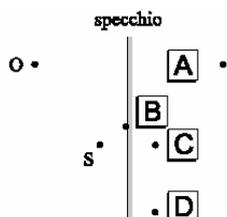
14. Se si guarda un foglio di carta bianca attraverso un vetro blu, il foglio sembra avere colore blu. Ciò accade perché... (Juniors 2000)  
A ... la luce blu viene assorbita dal vetro colorato.  
B ... la luce blu si propaga più rapidamente nel vetro colorato di blu.  
**C** ... il vetro assorbe tutti i colori tranne il blu.  
D ... il vetro aggiunge una luce blu a quella che proviene dal foglio di carta.
15. Un raggio di luce attraversa un blocco di vetro e ne colpisce la superficie a contatto con l'aria. Sulla superficie una parte della luce si riflette e una parte viene rifratta. Quale delle seguenti figure descrive correttamente la riflessione e la rifrazione del raggio di luce? ... (Juniors 2001)



- A**    B    C    D    E



16. Una persona si trova in piedi a 2 m da uno specchio piano, come mostrato in figura. Quanto è lontana dalla persona la sua immagine? ... (Juniors 2001)  
A ... 2 m    B ... 3 m    C ... 3.5 m    **D** ... 4 m
17. Una lente sottile convergente ha una lunghezza focale di 10 cm. Se guardiamo l'oggetto attraverso la lente, qual è la massima distanza dalla lente a cui lo dobbiamo mettere per vederlo ingrandito? ... (Juniors 2002) <sup>56</sup>  
A ... 5 cm    **B** ... 10 cm    C ... 15 cm    D ... 20 cm



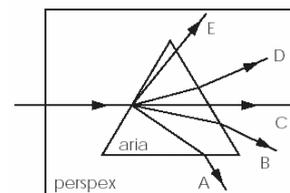
18. Stando davanti ad uno specchio piano uno sperimentatore, nel punto O, osserva un piccolo oggetto che sta nel punto S. Dove localizzerà l'immagine dell'oggetto che vede riflessa nello specchio? ... (Juniors 2004)  
A    B    **C**    D    E

<sup>55</sup> Si fa una proporzione e si presta attenzione all'utilizzo, nei rapporti, di unità omogenee

<sup>56</sup> Se l'oggetto è posto tra la lente e il fuoco si forma una immagine virtuale diritta che cresce di dimensione sino a che il raggio passante per il vertice e quello rifratto nel fuoco diventano paralleli

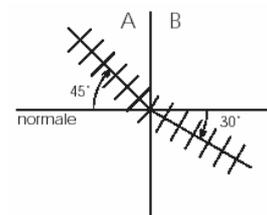
19. Un pesce si trova ad una certa profondità. Una persona lo osserva dal punto O' proprio sulla sua verticale. La persona stima che il pesce sia ... (Juniores 2004)
- A ... ad una profondità maggiore di quella a cui è realmente.  
 B ... alla stessa profondità di quella reale.  
**C** ... ad una profondità minore di quella a cui è realmente.  
 D ... ad una profondità che appare maggiore, uguale o minore di quella reale a seconda della profondità a cui sta il pesce.
20. Il benzene è un liquido incolore. L'indice di rifrazione del benzene e del vetro è, per entrambi, 1.5. Ne consegue che ... (I livello 1995)
- A ... benzene e vetro hanno la stessa densità (massa per centimetro cubo)  
**B** ... il vetro trasparente è invisibile se immerso nel benzene  
 C ... una lente convergente di vetro immersa nel benzene ha una distanza focale minore che nell'aria  
 D ... l'angolo limite per il passaggio della luce dal vetro al benzene è vicino a 0°  
 E ... la velocità della luce nel benzene è 1.5 volte maggiore che nel vetro

21. Il disegno in figura rappresenta un blocco di materiale trasparente (perspex) dal quale è stato asportato un pezzo a sezione triangolare. Quale sarà il percorso seguito dal raggio di luce attraverso il blocco? ... (I livello 1995)<sup>57</sup>



A B C **D** E

22. La figura mostra dei fronti d'onda piani che viaggiano da un mezzo A ad un mezzo B. In A la loro direzione di propagazione forma con la normale un angolo di 45° e in B di 30°. Se la velocità di propagazione delle onde nel mezzo A è di 0.283 m/s la velocità in B è di ... (I livello 1995)

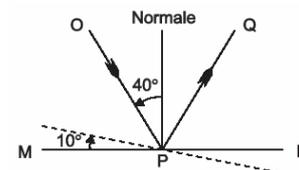


**A** ... 0.200 m/s      B ... 0.231 m/s      C ... 0.347 m/s  
 D ... 0.400 m/s      E ... 0.425 m/s

23. Un fascio di raggi paralleli giunge su una lente convergente di distanza focale 25 cm. A che distanza da questa lente deve essere posta una seconda lente convergente di focale 10 cm affinché i raggi emergenti siano ancora paralleli? ... (I livello 1995)

**A** ... 35cm      B ... 25cm      C ... 15cm  
 D ... 10cm      E ... non esiste una posizione possibile

24. In figura è mostrato un raggio di luce OP diretto verso lo specchio piano MN con un angolo di incidenza di 40° e successivamente riflesso in direzione PQ. Lo specchio viene ruotato di 10° nella posizione indicata dalla linea tratteggiata, mentre la direzione della luce incidente non viene modificata. L'angolo di riflessione vale adesso: ... (I livello 1996)

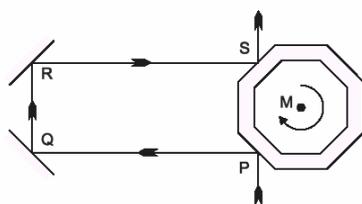


A ... 20°      B ... 30°      C ... 40°      **D** ... 50°  
 E ... 60°

<sup>57</sup> Si passa da un mezzo più denso a uno meno denso e dunque il raggio si allontana dalla normale (esclusi A, B, C); E viene escluso perché in uscita non si ha rifrazione

25. Un raggio di luce, avente lunghezza d'onda di 500nm, si propaga in un certo mezzo con la velocità di  $2.00 \times 10^8$  m/s. Il raggio passa, quindi, in un altro mezzo avente indice di rifrazione 1.25 volte maggiore del precedente. Quali sono la lunghezza d'onda e la velocità della luce nel secondo mezzo? ... (I livello 1996) <sup>58</sup>

lunghezza d'onda (nm)	velocità (m/s)
<b>A</b> 400	$1.6 \times 10^8$
B 400	$2.5 \times 10^8$
C 500	$2.5 \times 10^8$
D 625	$1.6 \times 10^8$
E 625	$2.0 \times 10^8$

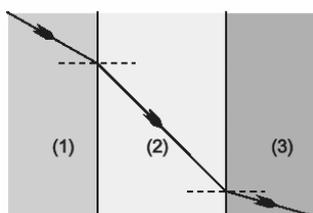


26. La figura mostra un dispositivo per misurare la velocità della luce,  $c$ . Un raggio di luce colpisce la faccia di uno specchio ottagonale M nel punto P e quindi segue la traiettoria PQRS. La lunghezza del cammino è  $L$ . Il raggio viene nuovamente riflesso da un'altra faccia dello specchio M. Lo specchio M può ruotare attorno al proprio asse di simmetria e la velocità angolare viene regolata in modo che la luce sia riflessa nel punto S nella stessa direzione che si avrebbe se lo specchio fosse fermo. Qual è la minima velocità angolare per cui si raggiunge questa condizione? ... (I livello 1996) <sup>59</sup>

- A  $\frac{\pi c}{8L}$       B  $\frac{\pi c}{4L}$       C  $\frac{\pi c}{2L}$       D  $\frac{\pi c}{L}$       E  $\frac{2\pi c}{L}$
- A      B      **C**      D      E

27. Un produttore afferma che la propria fotocopiatrice impiega una sola lente convergente per produrre sul dispositivo fotosensibile un'immagine dell'originale, in grandezza naturale. A che distanza dalla lente deve essere posto l'originale? ... (I livello 1996) <sup>60</sup>

- A ...Minore della distanza focale  
 B ...Esattamente ad una distanza focale  
 C ...Tra una e due distanze focali  
**D** ...Esattamente a due distanze focali  
 E ...Maggiore di due distanze focali



28. La figura mostra schematicamente un raggio di luce che si propaga attraverso acqua, aria, vetro. I tre mezzi non sono necessariamente posti in questa sequenza. Sapendo che la luce si propaga più velocemente nell'acqua che nel vetro, i tre mezzi (1), (2), (3) sono nell'ordine? ... (I livello 1996) <sup>61</sup>

<sup>58</sup> La velocità e la lunghezza d'onda sono proporzionali (perché la frequenza non cambia) e per la legge della rifrazione  $v_1/v_2 = n_2/n_1$

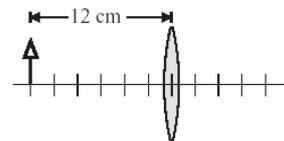
<sup>59</sup> L'apparato deve compiere un quarto di giro  $\omega = \Delta\alpha/\Delta t = \pi/2 / (L/c)$

<sup>60</sup> Per avere ingrandimento unitario deve essere  $p = q$  e basta ora applicare l'equazione delle lenti sottili

<sup>61</sup> Dal fatto che  $\sin i / \sin r = n_2 / n_1$  si ottiene  $n_1 > n_2$  e  $n_3 > n_2$ . Dalla prima disuguaglianza si deduce che le possibilità sono vetro acqua aria, vetro aria acqua, acqua aria vetro. Se si guarda alla seconda si scarta la prima. La D viene scartata confrontando 1 con 3 da cui si vede che il mezzo 3 è più denso del mezzo 1; rimane dunque la E

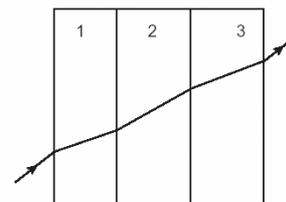
- A ...aria acqua vetro
- B ...acqua vetro aria
- C ...vetro acqua aria
- D ...vetro aria acqua
- E ...acqua aria vetro**

29. La figura mostra un oggetto posto a 12 cm da una lente sottile convessa di lunghezza focale 4 cm. In quale posizione si forma l'immagine? ... (I livello 1998)



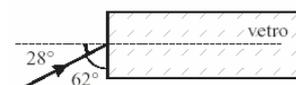
- A ...a 6 cm a sinistra della lente
- B ...a 6 cm a destra della lente**
- C ... a 8 cm a destra della lente
- D a ...10 cm a destra della lente
- E ...a 12cm a sinistra della lente

30. Un raggio di luce monocromatica attraversa tre diversi mezzi trasparenti (1, 2 e 3 in figura) separati da superfici piane e parallele. Cosa si può dire circa la velocità di propagazione della luce nei tre mezzi? ... (I livello 1998) <sup>62</sup>

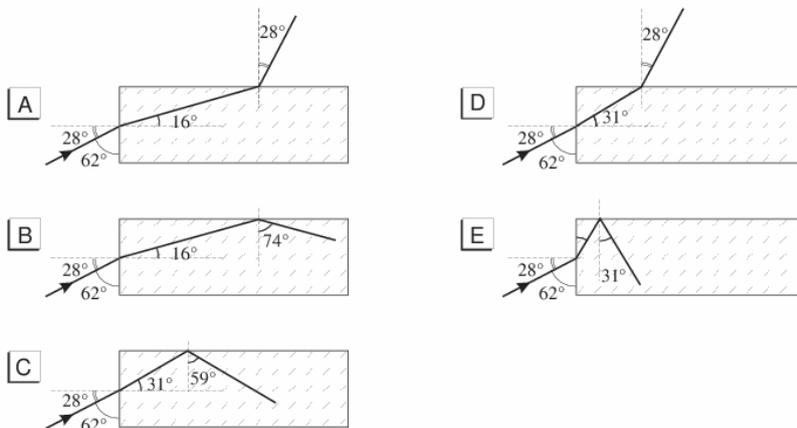


- A ... La figura non è sufficiente per poter dire qualcosa
- B ...La luce si propaga con la stessa velocità nei tre mezzi
- C ...La luce si propaga più rapidamente nel mezzo 1
- D ...La luce si propaga più rapidamente nel mezzo 2**
- E ...La luce si propaga più rapidamente nel mezzo 3

31. Un raggio di luce monocromatica che si propaga in aria incide su una faccia di un blocco (parallelepipedo) di vetro, di indice di rifrazione  $n = 1.7$  come mostrato in figura.



Quale dei seguenti diagrammi mostra correttamente il successivo percorso del raggio? ... (I livello 1999) <sup>63</sup>



- A
- B**
- C
- D
- E

32. Quando la luce passa da un mezzo a un altro, con indice di rifrazione diverso, si ha una variazione... (I livello 2000)

- A ... della frequenza e della velocità
- B ... della frequenza e della lunghezza d'onda
- C ... della lunghezza d'onda e della velocità**

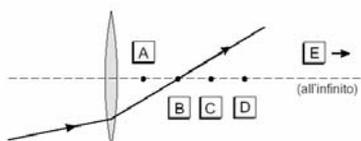
<sup>62</sup> Quando l'angolo aumenta si va verso mezzi con velocità maggiore. Pertanto  $v_2 > v_1$  e  $v_2 > v_3$

<sup>63</sup> Nella prima rifrazione  $\sin i / \sin r = 1.7$  da cui  $r = 16^\circ$ . L'angolo di incidenza della II rifrazione  $72^\circ$  è maggiore dell'angolo limite  $\text{invsin}(1/1.7) = 36^\circ$  e pertanto si ha riflessione totale

D ... della frequenza, della lunghezza d'onda e della velocità  
 E ... solo della velocità

33. La focale di una lente sottile convergente è di 10 cm. Un oggetto sta a 30cm dalla lente e di questo la lente produce un'immagine reale. Per ottenere un'immagine reale due volte più grande, occorre spostare l'oggetto (I livello 2000) <sup>64</sup>

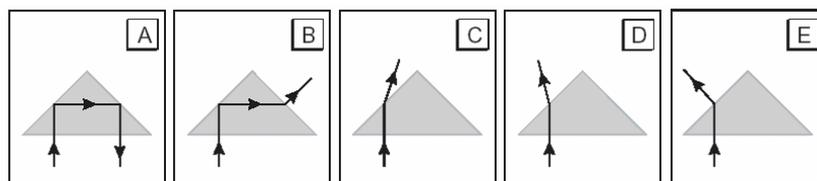
- A ... di 10 cm, allontanandolo dalla lente
- B ... di 20 cm, allontanandolo dalla lente
- C** ... di 10 cm, avvicinandolo alla lente
- D ... di 20 cm, avvicinandolo alla lente
- E ... di 28 cm, avvicinandolo alla lente



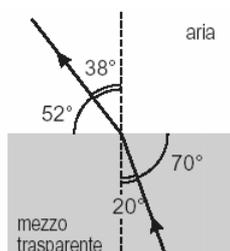
34. La figura mostra un raggio di luce incidente e quello rifratto da una lente sottile convergente. Quale dei punti indicati rappresenta meglio la posizione del fuoco della lente? (I livello 2000) <sup>65</sup>

- A B **C** D E

35. Quale delle seguenti figure mostra correttamente il percorso di un raggio di luce che dall'aria entra in un prisma di vetro il cui indice di rifrazione vale 1.5 e i cui angoli sono di 45°, 90°, 45°? ... (I livello 2001) <sup>66</sup>

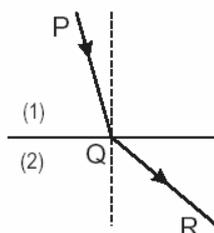


- A** B C D E



36. Il diagramma a fianco mostra un raggio di luce che passa da un mezzo trasparente all'aria. Qual è l'indice di rifrazione del mezzo trasparente? ... (I livello 2001)

- A ... 1.2 B ... 1.3 **C** ... 1.8 D ... 1.9
- E ... 2.3



37. In figura la linea PQR rappresenta un sottile fascio di luce monocromatica che passa dal mezzo 1 al mezzo 2. In tale fenomeno si può dire che: ... (I livello 2002)

- A la frequenza della luce aumenta
- B la frequenza della luce diminuisce
- C la lunghezza d'onda della luce rimane invariata
- D la lunghezza d'onda della luce aumenta
- E** la lunghezza d'onda della luce diminuisce

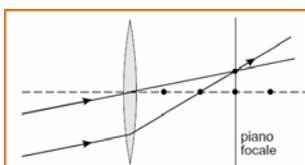
<sup>64</sup> Perché l'immagine risulti ingrandita bisogna spostare l'oggetto verso il fuoco. L'ingrandimento, per similitudine dei triangoli individuati dall'oggetto, dall'immagine e dal raggio passante per il centro della lente è  $I = q/p$  e dalla equazione dei punti coniugati si ricava il legame tra p e l'ingrandimento. Infatti si ha  $I = 1/p \frac{pf}{p-f} = \frac{f}{p-f}$ .

Se ora l'ingrandimento deve raddoppiare sarà:  $2I = \frac{f}{p + \Delta p - f}$  e passando al rapporto si

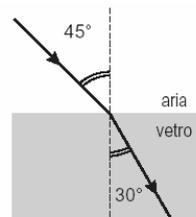
avrà:  $2 = \frac{p-f}{p + \Delta p - f} \Leftrightarrow p + 2\Delta p - f = 0 \Leftrightarrow \Delta p = \frac{1}{2}(f - p) = 10 \text{ cm}$

<sup>65</sup> Si traccia un raggio parallelo a quello dato e passante per il vertice; così facendo si individua il piano focale

<sup>66</sup> L'angolo limite è 41°



Un raggio di luce passa dall'aria al vetro come mostrato in figura. Qual è la migliore stima della velocità della luce nel vetro? ... (I livello 2002)



- A ...  $2.00 \cdot 10^8$  m/s
- B ...  $2.12 \cdot 10^8$  m/s**
- C ...  $3.00 \cdot 10^8$  m/s
- D ...  $4.24 \cdot 10^8$  m/s
- E ...  $4.50 \cdot 10^8$  m/s

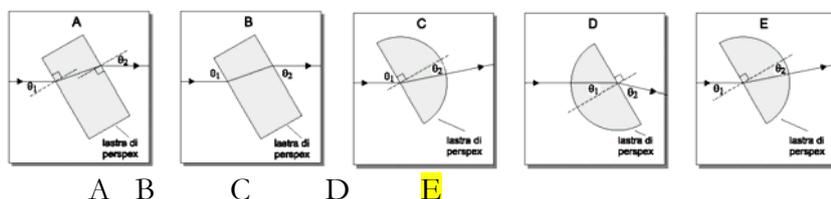
38. La Luna ha un diametro di 3480km e la sua distanza media dalla Terra è di 386'000km. Qual è il diametro dell'immagine reale della Luna formata da un telescopio il cui specchio sferico ha un raggio di curvatura di 3.2 m? ... (I livello 2002)

- A ... 1.4 cm
- B ... 2.8 cm
- C ... 3.6 cm
- D ... 14 cm
- E ... 36 cm

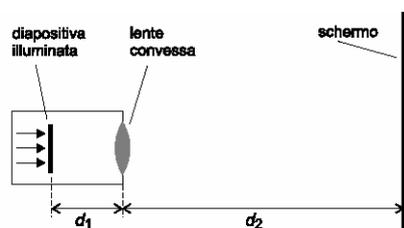
39. Un fascio di raggi paralleli giunge su una lente convergente di distanza focale 25 cm. A che distanza da questa lente deve essere portata una seconda lente convergente di distanza focale 10 cm affinché i raggi emergenti siano ancora paralleli? ... (I livello 2003)

- A ... 35 cm
- B ... 25 cm
- C ... 15 cm
- D ... 10 cm
- E ... Non esiste una posizione possibile.

40. Quando un raggio di luce passa da un mezzo trasparente ad un altro la sua direzione di propagazione in genere viene modificata. In questo caso esiste un rapporto costante  $\sin \theta_1 / \sin \theta_2$  dove  $\theta_1$  e  $\theta_2$  sono certi angoli definiti in base alla direzione di propagazione della luce. In quale delle seguenti figure sono rappresentati correttamente gli angoli  $\theta_1$  e  $\theta_2$  e l'apparecchiatura che consente di confermare la relazione fra di essi? ... (I livello 2003)



41. In figura è schematizzato un proiettore da diapositive posto di fronte a uno schermo. Se l'immagine messa a fuoco sullo schermo è troppo piccola, in che modo bisogna correggere le distanze  $d_1$  e  $d_2$  per ottenere un'immagine a fuoco che riempra tutto lo schermo? ...

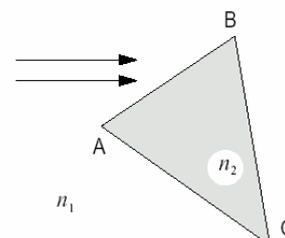


	Distanza $d_1$	Distanza $d_2$
<b>A</b>	diminuire	aumentare
B	aumentare	aumentare
C	lasciare invariata	aumentare
D	diminuire	diminuire
E	aumentare	diminuire

(I livello 2003)

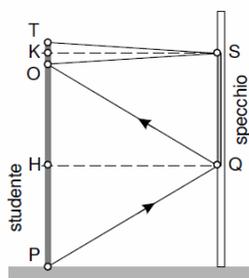
- A**
- B
- C
- D
- E

42. La figura mostra un fascio di raggi paralleli di luce bianca diretti verso la faccia AB di un prisma trasparente. Il prisma è fatto di vetro avente indice di rifrazione  $n_2$  ed è immerso in un liquido trasparente di indice  $n_1$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere? 1 – Se  $n_1 >$



$n_2$  la luce bianca potrebbe essere totalmente riflessa dalla faccia AB del prisma. 2 – Se  $n_1 = n_2$  il prisma non è visibile. 3 – Se  $n_1 < n_2$  la luce bianca viene parzialmente riflessa da AB. ... (I livello 2003)

- A ... Tutte e tre
- B ... Solo la 1 e la 2
- C ... Solo la 2 e la 3
- D ... Solo la 1 e la 3
- E ... Solo la 2



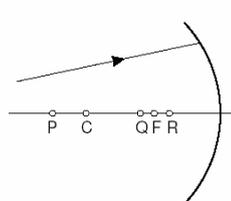
43. Uno studente alto 2 metri, stando in piedi, riesce a vedere interamente il proprio corpo in uno specchio verticale. L'altezza minima dello specchio per cui questo sia possibile è: (I livello 2004)<sup>67</sup>

- A ... 0.5m
- B ... 1.0m
- C ... 1.5m
- D ... 2.0m
- E ... 2.5m

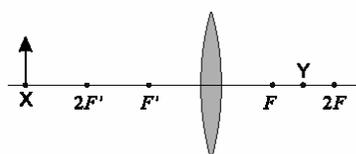
44. Un oggetto alto 2 cm è posto a 30 cm da una lente convergente. La lente forma un'immagine reale di 4 cm di altezza. Determinare la lunghezza focale della lente. (I livello 2004)

- A ... 5 cm
- B ... 10 cm
- C ... 20cm
- D ... 40 cm
- E ... 810 cm

45. La figura mostra un raggio di luce che incide su uno specchio sferico. I punti F e C sono rispettivamente il fuoco e il centro di curvatura dello specchio. Successivamente, il raggio riflesso passerà dal punto ... (I livello 2004)<sup>68</sup>



- A ... B
- B ... F
- C ... Q
- D ... C
- E ... P



46. Un oggetto si trova nel punto X a 60 cm da una lente sottile, che ne forma un'immagine reale nel punto Y a 30 cm dalla lente. Se l'oggetto viene gradualmente spostato avvicinandolo al fuoco  $F'$ , cosa succede all'immagine? (I livello 2005)

- A ... Si allontana dalla lente e diventa più piccola.
- B ... Si avvicina alla lente e diventa più piccola.
- C ... Si allontana dalla lente e diventa più grande.
- D ... Si avvicina alla lente e diventa più grande.
- E ... Si allontana dalla lente e rimane delle stesse dimensioni.

47. Con riferimento alla situazione descritta nel quesito precedente, se l'oggetto è alto 3 cm, quanto è alta l'immagine? (I livello 2005)

- A ... 0.090m
- B ... 0.060m
- C ... 0.030m
- D ... 0.015m
- E ... 0.010m

48. Un fascio di luce incide dall'aria in un blocco di materiale trasparente. L'angolo di incidenza è  $49^\circ$ , e quello di rifrazione è  $30^\circ$ . Qual è la velocità della luce nel materiale trasparente, in m/s? (I livello 2005)

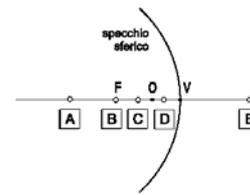
- A ...  $1.8 \cdot 10^8$
- B ...  $2.0 \cdot 10^8$
- C ...  $2.3 \cdot 10^8$
- D ...  $3.0 \cdot 10^8$
- E ...  $4.5 \cdot 10^8$

<sup>67</sup> Già discusso nel testo; il sito delle Olimpiadi argomenta utilizzando l'immagine pubblicata a fianco del quesito. Con O = occhi e T = punto sommitale della testa

<sup>68</sup> Detto D il punto in cui il raggio incontra lo specchio si unisce D con C e questa è la normale. Se ora si traccia un angolo di riflessione uguale a quello di incidenza si arriva in Q

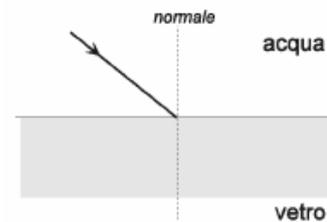
49. In figura è mostrato uno specchio sferico concavo; sono indicati il fuoco F e la posizione di un oggetto O. In quale dei punti indicati si trova l'immagine? (I livello 2005)<sup>69</sup>

- A B C D **E**



50. Il disegno schematizza un raggio di luce monocromatica che viaggia in acqua e incide sulla superficie di separazione tra l'acqua e il vetro del contenitore. Che cosa accade al raggio di luce nel passaggio dall'acqua al vetro? ... (I livello 2006)

- A** ...La velocità della luce diminuisce per cui il raggio si avvicina alla normale.  
 B ...La velocità della luce diminuisce per cui il raggio si allontana dalla normale.  
 C ...La velocità della luce non diminuisce, ma il raggio si avvicina alla normale.  
 D ...La velocità della luce aumenta per cui il raggio si avvicina alla normale.  
 E ...La velocità della luce aumenta per cui il raggio si allontana dalla normale.

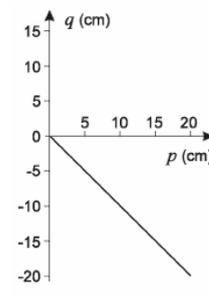


51. Un oggetto viene posto a 60 cm da una lente convergente. L'immagine prodotta è rovesciata e di dimensione pari a metà di quella dell'oggetto. Qual è la distanza focale della lente? ... (I livello 2006)

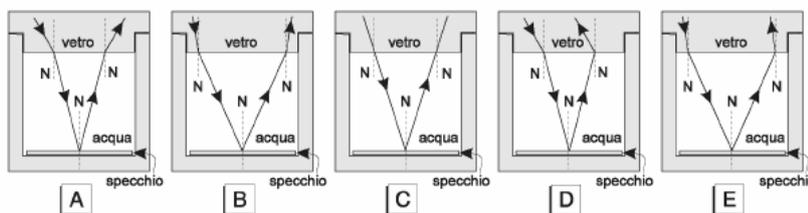
- A ...90 cm B ...60 cm C ...45 cm  
 D ...30 cm **E** ...20 cm

52. Nel grafico è rappresentato l'andamento della coordinata q dell'immagine di un oggetto, prodotta da uno specchio, in funzione della coordinata p dell'oggetto, rispetto alla posizione dello specchio stesso. Di che tipo di specchio si tratta? ... (I livello 2006)<sup>70</sup>

- A ...Specchio sferico concavo  
 B ...Specchio sferico convesso  
 C ...Specchio parabolico  
**D** ...Specchio piano  
 E ...L'andamento non si adatta a nessun tipo di specchio



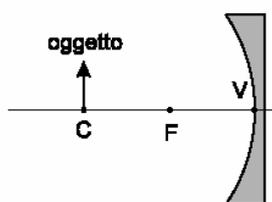
53. Un raggio di luce monocromatica entra in direzione obliqua in un recipiente pieno d'acqua, che ha un coperchio di vetro molto spesso; il raggio colpisce uno specchio posto sul fondo, viene riflesso indietro ed esce dal recipiente. Quale dei seguenti disegni rappresenta meglio il percorso descritto dal raggio di luce? NOTA: N rappresenta la direzione normale alla superficie; indice di rifrazione dell'acqua 1.33, indice di rifrazione del vetro 1.5÷1.7) ... (I livello 2007)



- A** B C D E

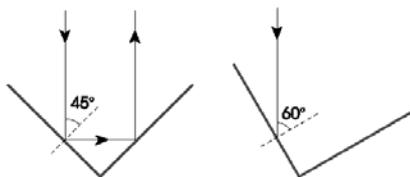
<sup>69</sup> Dalla equazione dei punti coniugati si ha  $q = \frac{pf}{p-f} < 0$  dunque l'immagine è virtuale

<sup>70</sup>  $q = -p$  immagini virtuali di uno specchio piano ottenute con simmetria assiale

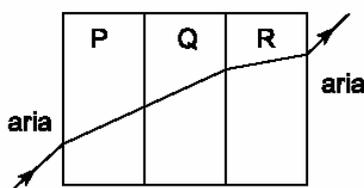


54. Un oggetto è collocato davanti ad uno specchio sferico concavo, ad una distanza di 12 cm. L'immagine è diritta ed è due volte più grande dell'oggetto. L'immagine è: ... (I livello 2007)
- A ...davanti allo specchio, a 6 cm di distanza, e reale.
  - B ...dietro allo specchio, a 6 cm di distanza, e virtuale.
  - C ...davanti allo specchio, a 12 cm di distanza, e virtuale.
  - D ...davanti allo specchio, a 24 cm di distanza, e reale.
  - E** ...dietro allo specchio, a 24 cm di distanza, e virtuale.

55. Nella figura è schematizzato uno specchio sferico concavo ed un oggetto sottile perpendicolare all'asse ottico e posto con una estremità nel centro di curvatura dello specchio C. Se l'oggetto viene spostato lungo l'asse, mentre si avvicina al fuoco, l'immagine ... (I livello 2008) <sup>71</sup>
- A ...rimpicciolisce e si avvicina allo specchio
  - B ...rimpicciolisce e si allontana dallo specchio
  - C ...mantiene le medesime dimensioni e si avvicina allo specchio
  - D ...ingrandisce e si avvicina allo specchio
  - E** ...ingrandisce e si allontana dallo specchio



56. Un raggio di luce incide su una coppia di specchi piani posti ad angolo retto e rigidamente collegati tra loro. L'angolo di incidenza sul primo specchio è di 45°, come mostrato nella figura di sinistra. Se l'insieme dei due specchi viene rigidamente ruotato in modo che l'angolo di incidenza sul primo specchio sia di 60° (figura a destra) cosa succede alla direzione del raggio riflesso del secondo specchio? ... (I livello 2008) <sup>72</sup>
- A ...ruoterà di 15°
  - B ... ruoterà di 30°
  - C ... ruoterà di 45°
  - D ... ruoterà di 60°
  - E** ... non ruoterà affatto



57. Un ingegnere, per realizzare una finestra attraverso cui osservare un esperimento, utilizza tre diverse lamine P, Q, R di materiali plastici trasparenti. Un raggio di luce attraversa la finestra come mostrato in figura. Quali sono i possibili valori degli indici di rifrazione dei tre materiali plastici? ... (I livello 2008) <sup>73</sup>

	P	Q	R
A ...	1.5	1.9	2.3
<b>B</b> ...	1.5	1.5	2.3

<sup>71</sup> Se p diminuisce q aumenta in modo che  $1/p + 1/q = 1/f$ . Inoltre poiché le dimensioni sono proporzionali alle distanze cresce anche la dimensione dell'immagine che è reale e capovolta sino a che  $p > f$

<sup>72</sup> Costruendo la figura si osserva che i due angoli di incidenza sono complementari (a causa della ortogonalità degli specchi) e dunque l'angolo tra i due raggi  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ . Il raggio riflesso è parallelo a quello incidente per ogni angolo di incidenza

<sup>73</sup> P e Q hanno lo stesso indice (non c'è deviazione) e R ce l'ha più grande. L'unica alternativa compatibile è la B

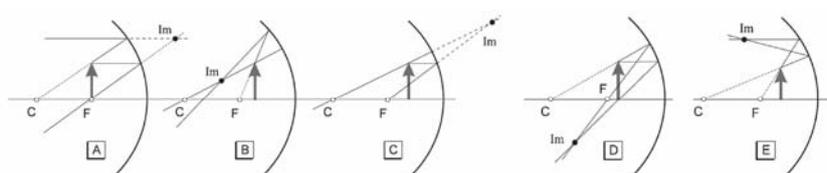
C ...	2.3	2.3	1.5
D ...	2.3	1.9	1.5
E ...	1.5	1.5	1.3

58. Un oggetto si trova ad una distanza  $p = 10$  cm da una lente convergente di focale  $f = 30$  cm. Trovare a che distanza dall'oggetto si forma l'immagine. ... (livello 2011)

- A** ... 5 cm      B ... 10 cm      C ... 15 cm  
 D ... 20 cm      E ... 25 cm

59. Un oggetto, rappresentato schematicamente da una freccia, è collocato davanti ad uno specchio concavo. Sia C il centro di curvatura dello specchio, ed F il fuoco. Quale diagramma mostra correttamente il punto (Im) in cui si forma l'immagine della punta della freccia? ... (livello 2011)

- A      B      **C**      D      E



60. Un oggetto è collocato davanti ad uno specchio sferico concavo. La lunghezza focale è 0.10 m. A quale distanza dal vertice dello specchio può trovarsi l'oggetto, fra quelle indicate sotto, perché si formi un'immagine virtuale? ... (livello 2012)

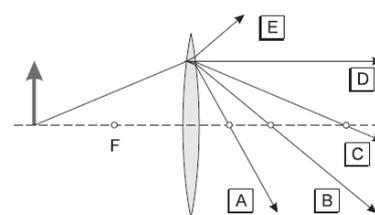
- A** ... 0.05m      B ... 0.15m      C ... 0.25m      D ... 0.35m  
 E ... 0.45m

61. Una lente convergente forma in un certo punto l'immagine di un oggetto. Cosa succede dell'immagine se la metà superiore della lente viene coperta con un cartoncino completamente opaco? ... (livello 2012)

- A ... Metà dell'immagine scompare.  
 B ... L'immagine rimane intera ma di dimensioni dimezzate.  
 C ... L'immagine scompare.  
**D** ... L'immagine appare più sbiadita.  
 E ... L'immagine si forma sul cartoncino.

62. In figura è mostrato un raggio di luce proveniente dalla base di un oggetto, che incide su una lente di cui il punto F è un fuoco, e sono mostrati cinque possibili raggi uscenti dalla lente. Qual è il corretto cammino che compie il raggio di luce? ... (livello 2012)

- A      B      **C**      D      E



63. Uno studente alto 1.6m sta in piedi a 5.0m da una lente convergente; questa ne forma un'immagine su uno schermo posto a 50 cm oltre la lente. Quanto è alta l'immagine dello studente sullo schermo? ... (livello 2012)

- A ... 0.016m      **B** ... 0.16m      C ... 0.80m  
 D ... 1.6m      E ... 8.0m

64. Un raggio luminoso di frequenza  $f = 5.0 \times 10^{14}$  Hz entra in un blocco di vetro di indice di rifrazione pari a 1.5, provenendo dall'aria. Quale

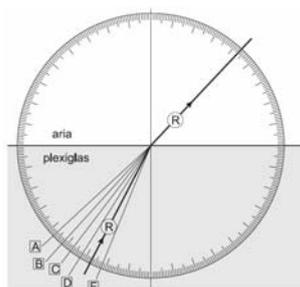
	$v$ [ $\text{m s}^{-1}$ ]	$f$ [Hz]	$\lambda$ [m]
A	$2.0 \times 10^8$	$5.0 \times 10^{14}$	$4.0 \times 10^{-7}$
B	$3.0 \times 10^8$	$5.0 \times 10^{14}$	$6.0 \times 10^{-7}$
C	$3.0 \times 10^8$	$5.0 \times 10^{14}$	$4.0 \times 10^{-7}$
D	$2.0 \times 10^8$	$3.3 \times 10^{14}$	$6.0 \times 10^{-7}$
E	$3.0 \times 10^8$	$3.3 \times 10^{14}$	$4.0 \times 10^{-7}$

riga, nella tabella, indica i valori corretti per la velocità  $v$ , la frequenza  $f$  e la lunghezza d'onda  $\lambda$  della luce nel vetro? ... (livello 2013)

- A B C D E

65. La figura mostra un oggetto O e la sua immagine I che si forma quando nel punto X viene posto uno dei seguenti componenti. Si dica qual è il componente giusto. ... (livello 2013) <sup>74</sup>

- A ... Una lente convergente.  
 B ... Una lente divergente.  
 C ... Uno specchio concavo.  
 D ... Uno specchio convesso.  
 E ... Una lastra di vetro a facce piane e parallele.

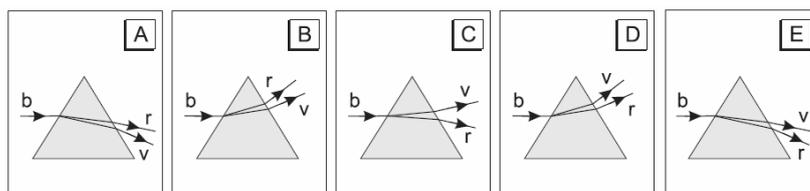


66. In figura è mostrato un raggio di luce (R) che passa da un blocco di plexiglas (in basso) all'aria (in alto). Tra i raggi indicati in figura con A, B, C, D ed E, quale corrisponde all'angolo limite? ... (livello 2013)

- A B C D E

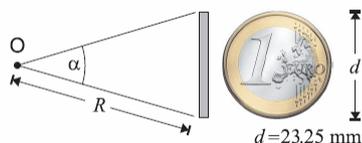
67. Un fascio di luce bianca (b in figura) incide su un prisma di vetro posto in aria e ne emerge disperso nei vari colori dal rosso (r) al violetto (v), indicati in figura. Quale delle seguenti figure rappresenta meglio un possibile percorso della luce attraverso il prisma? ... (livello 2014) <sup>75</sup>

- A B C D E



68. L'angolo di 1 secondo d'arco ( $1''$ ) è molto difficile da immaginare. Allontanando una moneta da 1 Euro la sua dimensione "apparente", cioè l'angolo  $\alpha$  sotto cui si vede la moneta dal punto O (occhio dell'osservatore), diminuisce. A quale, tra queste distanze, va posta la moneta se si vuole che tale angolo  $\alpha$  sia approssimativamente di un secondo d'arco? ... (livello 2014)

- A ... 50 cm      B ... 5m      C ... 50m      D ... 500m  
 E ... 5 km



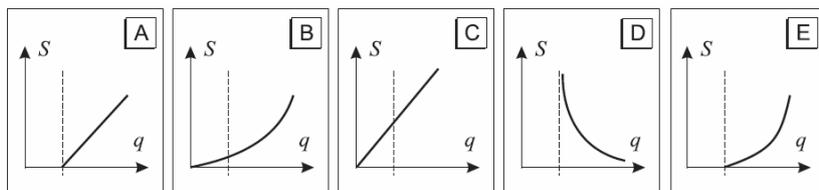
69. Si consideri l'immagine reale formata da una lente sottile convergente al variare della posizione dell'oggetto. Quale dei seguenti grafici

<sup>74</sup> Una lente divergente produce un'immagine virtuale più vicina alla lente dell'oggetto. Lo stesso fa una lastra di vetro a facce piane e parallele, anche se in questo caso la distanza tra l'oggetto e l'immagine è molto piccola. Uno specchio concavo può produrre un'immagine più lontana dell'oggetto e ingrandita – le due cose sono legate – ma in questo caso si tratta di un'immagine capovolta e non dritta come quella mostrata. Uno specchio convesso produce un'immagine virtuale dal lato opposto. Una lente convergente, invece, a seconda della distanza a cui si trova l'oggetto, può produrre un'immagine reale dal lato opposto all'oggetto oppure un'immagine virtuale, dritta, dallo stesso lato, a distanza maggiore dell'oggetto.

<sup>75</sup> Confrontare A con E

rappresenta la relazione tra la dimensione trasversale  $S$  dell'immagine e la sua distanza  $q$  dalla lente? ... (I livello 2014)

**A**      B      C      D      E



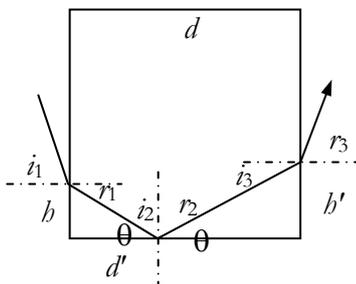
### 3.11 Problemi di fine capitolo

In questa sezione sono presenti sia problemi di tipo standard, sia problemi di approfondimento che contribuiscono ad una solida sedimentazione della teoria.

#### 1. Riflessione e rifrazione compito in classe biennio

*Esercizio:* Un raggio di luce incide verso il basso sulla faccia verticale di un cubo di vetro con  $n = 1.6$  e spigolo  $d = 10$  cm. Il raggio di luce incide a distanza  $h = 2.7$  cm dallo spigolo inferiore con angolo di incidenza  $i_1 = 62.5^\circ$ .

- Disegnare la figura in modo ordinato e arricchirla progressivamente man mano che si passa ai punti successivi
- Dopo aver trovato il seno dell'angolo di rifrazione determinare l'angolo di rifrazione  $r_1$  (indicare la funzione che consente di passare dal seno all'angolo con arc sin)
- Calcolare lo spostamento orizzontale del raggio rifratto  $d'$  e spiegare come mai il raggio rifratto colpisce la faccia inferiore e non colpisce direttamente la faccia di fronte
- Determinare l'angolo limite  $i'$  relativo al passaggio vetro aria.
- Calcolare l'angolo di incidenza  $i_2$  e spiegare perché sulla faccia orizzontale si verifica una riflessione totale.
- Il raggio riflesso incide sulla faccia verticale opposta a quella iniziale ad una distanza  $h'$  dallo spigolo inferiore. Calcolare  $h'$  e  $i_3$
- Stabilire perché questa volta si ha una rifrazione e spiegare perché il raggio rifratto forma (verso l'alto) ancora l'angolo  $i_1$ .
- Determinare il valore di  $h$  massimo per il quale si ha la riflessione nella faccia inferiore



☹

a) Si veda la figura qui a lato

b) Per la prima rifrazione si ha:  $\frac{\sin i_1}{\sin r_1} = n \Rightarrow \sin r_1 = \frac{\sin i_1}{n} = \frac{\sin 62.5}{1.6} = 0.554$  mentre  $r_1 = \arcsin 0.554 = 33.67^\circ$

c) Per calcolare  $d'$  basta osservare che nel triangolo di cateti  $h$  e  $d'$  l'angolo  $\theta$  opposto ad  $h$  è ancora  $r_1$  e pertanto:

$$\frac{h}{d'} = \tan r_1 \Rightarrow d' = \frac{h}{\tan r_1} = \frac{2.7}{\tan 33.67} = 4.05 \text{ cm}$$

Poiché  $d' < d$  il raggio rifratto colpisce la faccia inferiore.

d) L'angolo limite  $i'$  è quell'angolo per il quale l'angolo di rifrazione relativo al passaggio vetro aria (indice  $n' = 1/n$ ) vale  $90^\circ$  (e il seno vale 1);

$$\text{pertanto } \sin i' = \frac{1}{n} = 0.625 \Rightarrow i' = \arcsin 0.625 = 38.7^\circ$$

e) L'angolo di incidenza  $i_2$  è il complementare di  $r_1$  e pertanto  $i_2 = 90 - 33.67 = 56.3^\circ > i'$  pertanto sulla faccia inferiore si verifica una riflessione totale.

f) Per trovare  $h'$  ci riferiamo al triangolo rettangolo di cateti  $h'$  e  $d - d'$  con angolo  $\theta = r_1$  pertanto:  $h' = (d - d') \tan r_1 = 5.95 \tan 33.67 = 3.96$  cm

$i_3$  per ragioni geometriche è complementare di  $i_2$  e cioè pari a  $r_1$

g) Poiché  $i_3 < i'$  si ha rifrazione e accade (a rovescio) ciò che si è avuto nella prima rifrazione e dunque  $r_3 = i_1$  salvo la inversione di angolo causata dalla riflessione sulla faccia inferiore.

h) La riflessione nella faccia inferiore si ha finché  $d' \leq d \Rightarrow \frac{h}{\tan r_1} \leq d \Rightarrow$

$$h \leq d \tan r_1 = 6.66 \text{ cm}$$

☺

## 2. Lenti sottili compito in classe biennio

*Esercizio:* Lo schermo di una lente da proiezione è a distanza  $q = 4.00$  m dal vertice di una lente sottile convergente che determina un ingrandimento lineare  $\eta = 8.0$ .

- Scrivere in forma simbolica il legame tra  $p$ ,  $q$  e l'ingrandimento  $\eta$
- Determinare la distanza focale  $f$  e la distanza  $p$  tra la lente e l'oggetto.
- Se  $p$  diminuisce del 10%, indicato con  $p'$  il nuovo valore cosa accade a  $q'$ ?
- Quanto vale ora l'ingrandimento?
- Riflettendo sul risultato trovato spiegare perché nei proiettori per diapositive la regolazione della distanza tra la lente e l'oggetto viene effettuata con una vite che consenta delle regolazioni fini della distanza tra l'obiettivo e la diapositiva

⊗

- In base alla similitudine dei triangoli individuati da immagine, oggetto, asse ottico e raggi passanti per il vertice il rapporto delle distanze è uguale a quello tra immagine e oggetto pertanto:  $\eta = \frac{q}{p}$ . Si tratta di una relazione valida in generale

- in base alla relazione precedente  $p = \frac{q}{\eta} = \frac{4.00}{8.0} = 0.50$  m; la equazione dei punti coniugati ci permette di trovare  $f$ :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \text{ma} \quad \frac{1}{p} = \frac{\eta}{q} \quad \text{e pertanto} \quad \frac{\eta+1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$\text{ciò ci consente di determinare } f = \frac{q}{\eta+1} = \frac{4.00}{9.00} = 0.44(4)\text{m}$$

- se  $p' = 0.90 p = 0.45$  m basta utilizzare la equazione dei punti coniugati e si ha

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{f} \quad \text{pertanto:}$$

$$\frac{1}{q'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p'} \quad \text{e } q' = \frac{p' f}{p' - f} = \frac{0.45 \cdot 0.44}{0.45 - 0.44} = 19.8 \text{ m}$$

**Nota di correzione:** si tratta di uno splendido esempio che insegna a fare attenzione sull'uso della calcolatrice; come si nota  $f$  e  $p$  sono abbastanza vicini e come sappiamo quando l'oggetto si avvicina al fuoco la sua immagine va verso l'infinito (i raggi tendono a diventare paralleli). Per questa ragione non è molto lecito arrestare la approssimazione su  $f$  alla II cifra decimale; se si effettua lo stesso calcolo utilizzando il numero periodico si ottiene addirittura  $q' = 36.0$  m

- L'ingrandimento sarà  $\eta' = \frac{q'}{p'} = \frac{19.8}{0.45} = 44$

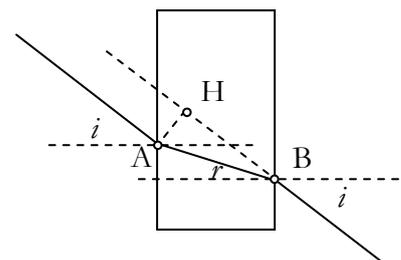
- Basta variare di poco il valore di  $q$  per avere grandi variazioni di  $p$  (e dell'ingrandimento). Per questa ragione il meccanismo di regolazione di  $p$  deve essere fine.

⊙

## 3. Rifrazione su facce parallele: compito in classe biennio

*Esercizio:* Una lastra di vetro a facce piane e parallele con distanza  $d = 6.5$  mm e indice di rifrazione del vetro rispetto all'aria  $n_{av} = 1.505$  viene investita da un raggio di luce che forma un angolo di incidenza  $i = 48.5^\circ$ . Dopo aver subito una doppia rifrazione il raggio emerge parallelo ma spostato rispetto a quello incidente. Determinare la distanza  $AH$  tra il raggio incidente e quello rifratto (si consiglia di calcolare prima  $AB$  e poi passare ad  $AH$  ragionando sugli angoli).

⊗



Per determinare AH bisogna trovare AB e l'angolo HBA.

$AB = \frac{d}{\cos r}$  mentre  $HBA = i - r$  mentre r si determina attraverso le leggi della rifrazione.

$$\sin r = \frac{\sin i}{n_{av}} = 0.4976 \text{ mentre } r = \arcsin(0.4976) = 29.84^\circ$$

$$AB = \frac{6.5}{\cos 29.84} = 7.49 \text{ mm}$$

$$AH = 7.49 \sin(48.5 - 28.8) = 2.4 \text{ mm}$$

☺

#### 4. Lente biconvessa immersa in un liquido: compito in classe biennio

*Esercizio:* La distanza focale di una lente di raggi di curvatura  $r_1$  e  $r_2$  e di indice relativo  $n$  è data da  $\frac{1}{f} = (n - 1) k$  dove  $k = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ . Una lente biconvessa con fuoco relativo al passaggio aria vetro aria  $f_{av} = 150 \text{ mm}$  e indice di rifrazione  $n_{av} = 1.6$  viene immersa in un liquido di indice di rifrazione assoluto  $n_l = 1.5$ . a) Determinare l'indice di rifrazione  $n_{lv}$  per la lente immersa nel liquido b) Dopo aver applicato ai due casi la relazione fornita utilizzarla per determinare la distanza focale  $f_{lv}$  della lente di vetro immersa nel liquido.

☹

$$n_{lv} = \frac{n_{av}}{n_l} = \frac{1.6}{1.5} = 1.07$$

Applicando ai due casi la relazione fornita si ha:  $\frac{1}{f_{av}} = (n_{av} - 1) k$  e  $\frac{1}{f_{lv}} = (n_{lv} - 1) k$ .

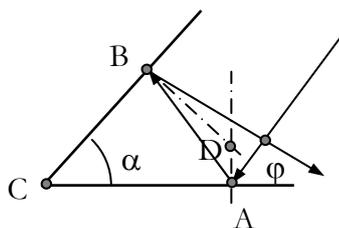
Facendo il rapporto si elimina la dipendenza da k e si ha:  $\frac{n_{av} - 1}{n_{lv} - 1} = \frac{f_{lv}}{f_{av}}$  e sostituendo

da i dati si ottiene:  $\frac{0.6}{0.07} = \frac{f_{lv}}{150}$  da cui  $f_{lv} = 1350 \text{ mm}$

☺

#### 5. Riflessioni in una coppia di specchi piani: compito in classe biennio

*Esercizio:* Due specchi piani formano tra loro un angolo acuto  $\alpha$  in C come in figura. Un raggio colpisce la prima faccia in A e, dopo la riflessione la seconda in B. Si indichi con D il punto di incontro tra le due normali.



a) Dimostrare che BDA è supplementare di BCA.

b) Utilizzare il risultato trovato per dimostrare che l'angolo formato tra il primo raggio incidente e il secondo raggio riflesso  $\varphi = 2\alpha$  ovvero che l'angolo di deflessione è sempre lo stesso per qualsiasi angolo di incidenza. Senza pasticciare la figura indicare con  $i_1, i_2, r_1, r_2$  gli angoli di incidenza e riflessione. Evitare di rifare la figura sul foglio

☹

Il quadrilatero ADBC presenta due angoli opposti retti (formati dalle normali).

Poiché la somma degli angoli interni di un quadrilatero è  $360^\circ$  (si riduce alla unione di due triangoli) si ha che  $\alpha + BDA = 180^\circ$ .

Indicato con E il punto di incontro da raggio in ingresso e raggio in uscita (che definisce l'angolo  $\varphi$ ) si osserva che  $\varphi$  è un angolo esterno del triangolo ABE e pertanto  $\varphi = 2i_1 + 2i_2 = 2(i_1 + i_2)$  (teorema dell'angolo esterno).

Ma  $i_1 + i_2 = 180 - BDA$  (triangolo BDA) e pertanto  $\varphi = 2(180 - BDA) = 2\alpha$

**Nota di correzione:** utilizzando il software Cabri si può far vedere che costruita la figura se si fanno ruotare gli specchi intorno al punto A (il che equivale a cambiare l'angolo di incidenza) il raggio in uscita non si sposta.

☺

### 6. Lente divergente: compito in classe biennio

**Esercizio:** Una lente divergente di vertice V forma una immagine virtuale A'B' di un segmento AB. Sono noti i seguenti elementi  $\overline{AB} = 10.0$  cm,  $\overline{A'B'} = 5.0$  cm,  $\overline{AA'} = 4.0$  cm. Dopo aver completato la figura con gli elementi necessari alla trattazione analitica determinare la distanza  $p = \overline{AV}$  e la distanza focale  $f$ .

☹

La quantità  $AV = p$  mentre  $A'V = -q$  e  $FV = -f$ .

Si ha (per la similitudine dei triangoli ABV e A'B'V):

$p / A'V = AB / A'B'$  da cui  $p = -2q$  ( $A'V = -q$ ). Ma  $AA' = 4.0 = p + q$  e dunque

$$4.0 = -2q + q = -q.$$

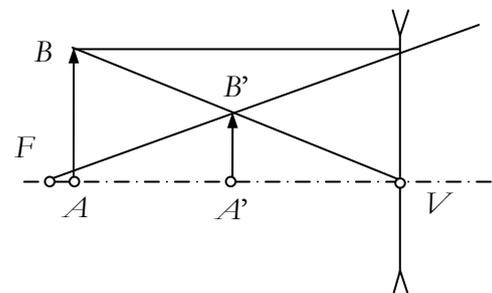
Mentre  $p = -2q = 8.0$  cm.

Il potere diottrico della lente si trova dalla equazione dei punti coniugati:

$$\phi = 1/f = 1/p + 1/q = 1/8 - 1/4 = -1/4 \text{ e pertanto } f = -4.0 \text{ cm.}$$

Ciò significa che il punto A e il punto F coincidono.

☺

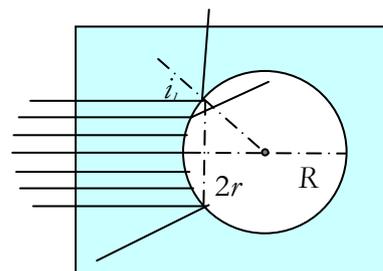


### 7. Una bolla d'aria intrappolata nel vetro

**Esercizio:** In un blocco di vetro di indice di rifrazione  $n = 1.52$ , durante il raffreddamento è rimasta intrappolata una bolla d'aria di forma sferica e raggio  $R = 2.00$  cm.

Se si mandano dei raggi paralleli nel blocco una porzione di essi (quelli più esterni) quando incide sulla sfera subisce la riflessione totale. Trovare il diametro  $2r$  dei raggi che vengono rifratti dopo aver completato la figura con lettere o simboli utilizzati nel calcolo

☹



### 8. Proiezione con lenti sottili

**Esercizio:** In una lente convergente la distanza tra l'oggetto e lo schermo su cui si forma l'immagine  $p + q$  è fissata. Di un oggetto di altezza  $h$  si forma una immagine di altezza  $h_1$ .

A questo punto, senza muovere né l'oggetto né lo schermo si sposta la lente finché si forma una nuova immagine di altezza  $h_2$ .

Dimostrare che per qualsiasi lente si ha sempre  $h_1 h_2 = h^2$ .<sup>76</sup>

☹

### 9. Il ragno e la mosca: Olimpiadi ex URSS<sup>77</sup>

**Esercizio:** Un ragno e una mosca si trovano su una sfera di vetro. Stabilire quali sono le zone in cui il ragno non vede la superficie della sfera e in cui dunque la mosca può circolare liberamente. Indicata con  $h$  l'altezza a

<sup>76</sup> Suggerimento: tener conto del legame tra dimensioni e distanze nelle lenti sottili e che poiché  $p + q$  rimane costante se  $(p_1, q_1)$  è la prima soluzione la seconda  $(p_2, q_2)$  può solo essere ...

<sup>77</sup> Da *Aptitude test problems in Physics* – MIR Publisher Moscow 1990

cui si trovano gli occhi del ragno, sia  $R$  il raggio della sfera e  $n = 1.43$  l'indice di rifrazione.

Cosa accade quando  $h \ll R$ ?

⊗

Supponiamo che il ragno si trovi nel punto  $A$ . Tracciamo da  $A$  le due tangenti  $AB$  e  $AB'$  che delimitano l'arco visuale del ragno.

Il raggio luminoso tangente viene rifratto in  $BC$  e da  $C$  viene nuovamente rifratto in  $CA'$  (reversibilità dei cammini luminosi). L'angolo di rifrazione  $\alpha$  e l'angolo  $\gamma$  sono totalmente determinabili con i dati a disposizione.

$$\text{In effetti: } \cos \gamma = \frac{R}{R+h} \text{ mentre: } \sin \alpha = \frac{1}{n} \text{ e } \alpha = \text{inv sin}(1/1.3) = 0.7744$$

Con riferimento alla figura risultano dunque visibili i due archi  $BDB'$  e  $CD'C'$  mentre  $BC$  e  $B'C'$  sono gli archi in cui La Mosca può stare liberamente.

Il punto  $B$  si trova, trattandosi di un angolo piccolo tramite il seno che può essere assimilato all'arco.

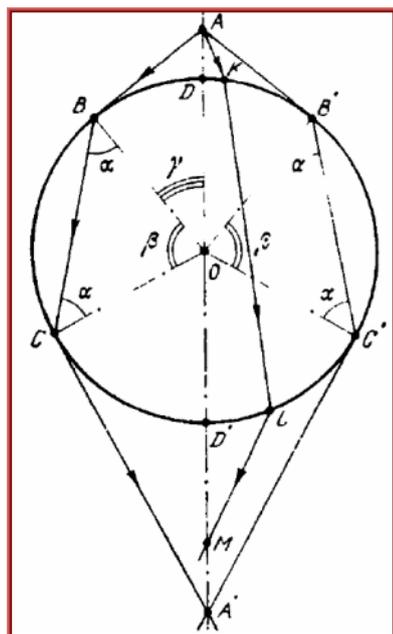
L'arco  $\beta = \pi - 2\alpha = 1.593$  mentre  $\pi/2 = 1.57$  dunque  $\beta$  è appena oltre  $\pi/2$ .

Supponiamo ora che sia  $h/R = 1/100$  allora  $\cos \gamma = 1/1.01$  e  $\gamma = 0.141$

La zona interdotta alla mosca va da  $0.141$  a  $1.593 + 0.141 = 1.734$  che in gradi significa (ragionando sugli angoli al centro) da  $8.08^\circ$  sino a  $99.3^\circ$

Se si fa tendere  $h$  a  $0$  allora anche  $\gamma \rightarrow 0$  e cioè  $B \equiv D$  mentre la zona visibile al ragno diventa poco meno della intera calotta inferiore.

⊙



### 10. Una costruzione grafica per tracciare il raggio rifratto dato quello incidente <sup>78</sup>

*Esercizio:* Si consideri il passaggio della luce da un mezzo 1 a un mezzo 2 e viceversa. Gli indici di rifrazione  $n_1$  e  $n_2$  sono assegnati. Tenuto conto che deve valere la relazione  $\sin \alpha / \sin \beta = v_1 / v_2$  descrivere una costruzione geometrica che consenta, dato il raggio incidente di costruire il raggio rifratto per qualsiasi angolo..

⊗

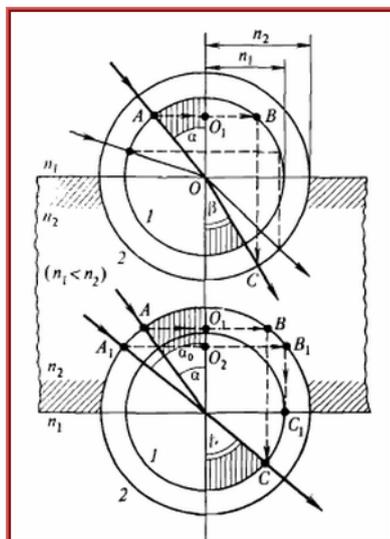
Sia  $n_1 < n_2$ . Con centro in un punto  $O$  della superficie di separazione si costruiscono due circonferenze di raggio proporzionale ai due indici di rifrazione assoluti.

Sia  $AO$  un raggio incidente che forma l'angolo  $\alpha$ . Con riferimento alla figura si costruiscono il punto  $B$  e da esso il punto  $C$ . Dimostriamo che il raggio  $OC$  è il raggio rifratto.

$$\sin \alpha = \frac{AO_1}{AO} \quad \sin \beta = \frac{O_1B}{OC} = \frac{AO_1}{OC}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{OC}{AO} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

Il caso del passaggio da un mezzo più denso a uno meno denso è illustrato nella figura sotto e la costruzione è identica ma parte dal cerchio



<sup>78</sup> Da Tarasov "Discussion on refraction of light" – collana Science for Everyone ed MIR Moscow 1984

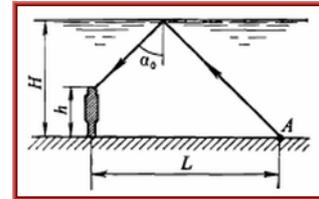
con raggio maggiore. Si noti anche la costruzione che fornisce l'angolo limite per la riflessione totale in cui si parte da  $C_1$  e si costruisce  $A_1$ .

☺

### 11. Un sub e la riflessione totale

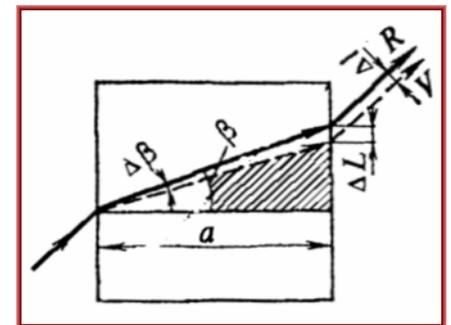
*Esercizio:* un sub di altezza  $h$  si trova sul fondo di una vasca d'acqua di profondità  $H$ . Per certi angoli di incidenza la sua visione determina riflessione totale. Determinare sino a che distanza  $L$  dai suoi piedi egli vede il fondo guardando in alto. Si assuma per l'acqua un indice di rifrazione pari a  $4/3$ .<sup>79</sup>

☹



### 12. Dispersione della luce e rifrazione da una parete a facce parallele

*Esercizio:* abbiamo già ampiamente studiato la traslazione che un raggio subisce, parallelamente a se stesso quando viene rifratto da una parete a facce parallele. Poiché però l'indice di rifrazione varia con il variare del colore della luce la traslazione subita da un raggio di luce bianca risulta variabile per le diverse componenti. Supponiamo di indicare con  $n$  l'indice per la luce rossa e con  $n + \Delta n$  l'indice per il violetto. Ci poniamo la seguente domanda: se un fascio di raggi paralleli di diametro  $d$  incide su una lastra trasparente di spessore  $a$  in quali casi si può considerare trascurabile l'effetto di dispersione dovuto alla variabilità dell'indice di rifrazione?



Suggerimento: calcolare la differenza di spostamento  $\Delta l$  tra il raggio rosso e quello viola e confrontarlo con  $d$ . In figura si indica con R il raggio Rosso e con V quello Viola e si suppone che il raggio di luce bianca incida con un angolo di  $45^\circ$ . In tale caso  $\Delta l = \frac{\Delta L}{\sqrt{2}}$ . Nel caso del vetro si supponga di andare da 1.33 a 1.34 e che lo spessore  $a = 2$  cm.

☹

$$\Delta L = a \tan \beta - a \tan (\beta - \Delta \beta)$$

D'altra parte siamo in grado di calcolare, tramite la legge di Snell, i seni degli angoli della prima rifrazione (la seconda riporta gli angoli alla situazione originaria):

$$\sin \beta = \frac{1}{n\sqrt{2}} \text{ e } \sin (\beta - \Delta \beta) = \frac{1}{(n + \Delta n)\sqrt{2}}$$

Ma la tangente può essere espressa in funzione del seno passando attraverso il coseno.

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}} = \frac{\sqrt{2n^2 - 1}}{\sqrt{2}n} \text{ pertanto si ottiene:}$$

$$\Delta L = a \left( \frac{1}{\sqrt{2n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{2(n + \Delta n)^2 - 1}} \right) = a \frac{1}{\sqrt{2n^2 - 1}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2n^2 - 1}{(2(n + \Delta n)^2 - 1)}} \right)$$

Operiamo ora alcune semplificazioni della serie  $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$  valide quando  $x \ll 1$  tenendo conto che, essendo  $\Delta n$  trascurabile rispetto a  $n$ , si potranno ignorare i termini di ordine superiore in  $\Delta n$ .

<sup>79</sup> Si trova  $L = \frac{3}{\sqrt{7}} (2H - h)$

$$\left(1 - \sqrt{\frac{2n^2 - 1}{(2(n + \Delta n)^2 - 1)}}\right) \approx \left(1 - \sqrt{\frac{2n^2 - 1}{(2n^2 + 4n \Delta n - 1)}}\right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4n \Delta n}{2n^2 - 1}}}\right) =$$

$$1 - \left(1 + \frac{4n \Delta n}{2n^2 - 1}\right)^{-1/2} \approx 1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{4n \Delta n}{2n^2 - 1} = \frac{2n \Delta n}{2n^2 - 1}$$

Pertanto  $\Delta L = a \frac{1}{\sqrt{2n^2 - 1}} \frac{2n \Delta n}{2n^2 - 1} = \frac{2a n \Delta n}{\sqrt{(2n^2 - 1)^3}}$  e infine:

$$\Delta l = \frac{\Delta L}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} a n \Delta n}{\sqrt{(2n^2 - 1)^3}}$$

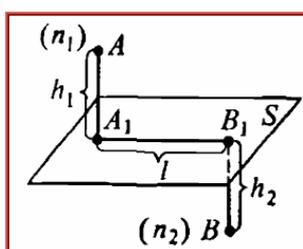
Con i dati numerici forniti si ottiene:

$$\Delta l = \frac{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 1.33 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{(2 \cdot 1.33^2 - 1)^3}} = 9.3 \cdot 10^{-5} \text{ m cioè un po' meno di un decimo di millimetro.}$$

Dunque nelle condizioni date se il raggio collimato ha dimensioni dell'ordine del millimetro la dispersione massima è pari a un decimo di tale valore.

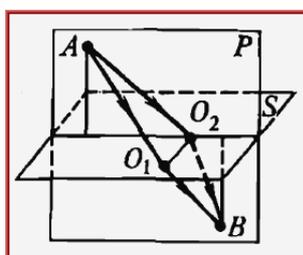
⊗

### 13. La legge di Snell dedotta dal principio di Fermat con calcoli di analisi matematica



*Esercizio:* Un raggio di luce deve andare da A a B attraversando il piano S di separazione tra due mezzi. Dimostrare, usando il principio del cammino di durata minima che: 1) la luce incontra il piano S in un punto che sta su A<sub>1</sub>B<sub>1</sub> 2) che detto O il punto di intersezione: se  $t_{AO} + t_{OB}$  è minimo allora  $\sin \alpha / \sin \beta = v_1 / v_2$

⊗



Supponiamo per assurdo che la luce passi per O<sub>1</sub>. Consideriamo il piano P ortogonale a S e passante per A e B. Proiettiamo O<sub>1</sub> su P in O<sub>2</sub>.

AO<sub>1</sub> è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo e dunque AO<sub>1</sub> > AO<sub>2</sub>. Analogamente O<sub>1</sub>B > O<sub>2</sub>B.

Dunque se il cammino deve avere durata minima il raggio deve viaggiare nel piano P.

Consideriamo ora un punto O appartenente ad A<sub>1</sub>B<sub>1</sub> e indichiamo con x la sua ascissa.

$$t_{AOB} = t_{AO} + t_{OB} = \frac{AO}{v_1} + \frac{OB}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}{v_2}$$

Calcoliamo la derivata prima della funzione  $t=f(x)$

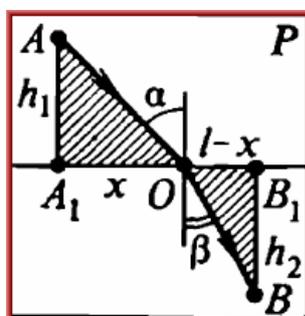
$$t' = \frac{x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{l-x}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}$$

I punti di minimo sono punti di stazionarietà cioè punti in cui si annulla la derivata prima.

Ma d'altra parte  $\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \sin \alpha$  e  $\frac{l-x}{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}} = \sin \beta$  pertanto:

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} - \frac{\sin \beta}{v_2} = 0 \text{ che è la legge della rifrazione.}$$

⊙



### 14. Il cannocchiale di Galilei – Olimpiadi 2009 Il livello

*Esercizio:* Nell'agosto 1609 Galileo presentò al Doge e al Senato della Repubblica di Venezia il suo cannocchiale costituito da due lenti, allineate su uno stesso asse, la prima convergente (detta *obiettivo*), la seconda divergente (detta *oculare*).

Il sistema può essere facilmente ricostruito disponendo due lenti di focale  $f_1 > 0$  ed  $f_2 < 0$  con  $|f_2| < f_1$  alle due estremità di un tubo di cartone di lunghezza  $l = f_1 + f_2$ ; il sistema viene detto *afocale* perché un fascio di raggi che entrano paralleli (quando la sorgente è puntiforme, come una stella o un particolare della superficie lunare) emergono dallo strumento ancora paralleli.

Nota bene: le due lenti possono essere tracciate come *sottili* e gli angoli di inclinazione dei raggi rispetto all'asse ottico sono sempre *angoli piccoli* cosicché si possono usare le consuete approssimazioni  $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$  etc.

- 1) Si consideri un raggio proveniente da una Stella S fuori asse, ovvero un raggio che si propaga obliquamente, con un angolo  $\alpha$  rispetto all'asse ottico; si supponga che dopo aver attraversato l'obiettivo in un punto a distanza  $b$  dall'asse ottico, vada a passare per il centro dell'oculare. Determinare il valore dell'angolo  $\alpha$  in funzione di  $b$  e delle focali delle due lenti.
- 2) Disegnare un diagramma che mostra il percorso corretto di un fascio di raggi che entrano paralleli nella lente-obiettivo, inclinati di un angolo  $\alpha$  rispetto all'asse ottico, ed escono paralleli dalla lente-oculare, inclinati di un angolo  $\beta$ .
- 3) Mostrare che l'ingrandimento angolare, definito come il rapporto  $G = \beta/\alpha$  dipende solo dal valore delle focali delle due lenti.

Osservata al cannocchiale la Luna appare più grande di quanto sia vista ad occhio nudo e dunque sembra più vicina ed è possibile osservarne dei particolari non puntiformi come un certo cratere non visibili ad occhio nudo.

- 4) Sapendo che Galileo aveva usato due lenti di focale  $f_1 = 98\text{cm}$  ed  $f_2 = -4.8\text{ cm}$ , e che la Luna si trova a circa  $380'000\text{km}$  dalla Terra, a che distanza sembra essere quel cratere lunare quando lo si osserva attraverso questo cannocchiale?

☹

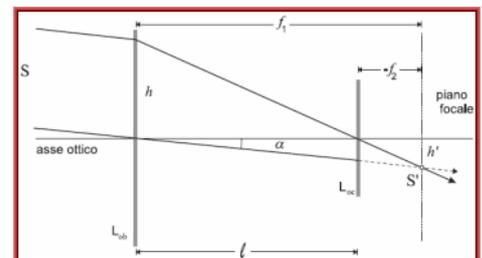
#### La soluzione proposta dagli organizzatori

- 1) Come ricordato nel testo, il sistema si dice *afocale* quando la distanza  $l$  tra le due lenti vale  $f_1 + f_2$  cioè quando i piani focali delle due lenti coincidono. La disposizione è quella mostrata in figura.

Il raggio proveniente dalla stella S che passa per il centro dell'oculare (raggio 1) non viene deflesso da questo e attraversa il piano focale, comune delle due lenti, nel punto S' che rappresenta quindi l'immagine della sorgente S formata dall'obiettivo.

Se l'oculare non ci fosse tutti i raggi paralleli provenienti dalla stella S convergerebbero nel punto S'.

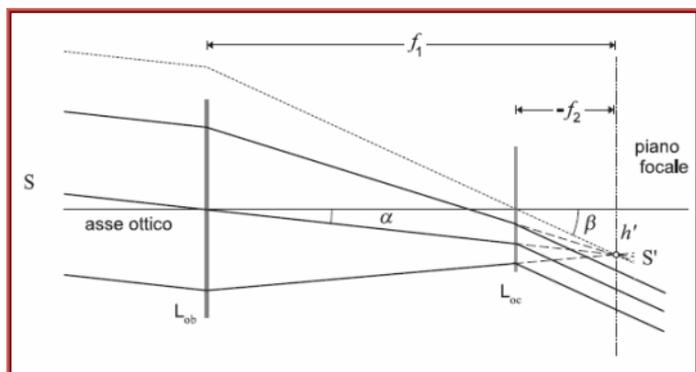
Per trovare l'angolo  $\alpha$  di inclinazione di questo fascio basterà allora considerare quel particolare raggio (2) che, passando per il centro dell'obiettivo, non viene deflesso da questo.



La distanza dell'immagine  $S'$  dall'asse ottico è  $h' = \frac{|f_2|}{\ell} h = \frac{-f_2}{f_1 + f_2} h$

e dunque l'angolo  $\alpha$  di incidenza è dato da:  $\alpha \approx \frac{h'}{f_1} = \frac{-f_2 h}{(f_1 + f_2) f_1}$

- 2) La costruzione completa del fascio che entra inclinato nel cannocchiale è riportata nella figura che segue.



Le rette dei raggi rifratti dall'obiettivo convergono in  $S'$  (immagine di  $S$  data dall'obiettivo, in assenza dell'oculare); i raggi invece vengono rifratti dall'oculare e formano nuovamente un fascio uscente ancora parallelo, come si può capire immediatamente usando il *principio di reversibilità del cammino ottico*, ovvero immaginando di invertire il verso di propagazione della luce, dato che un fascio parallelo incidente sull'oculare produce un'immagine virtuale sul suo piano focale.

Per determinare la direzione corretta, e quindi l'angolo  $\beta$  basta considerare la direzione della retta che unisce l'immagine  $S'$  con il

centro dell'oculare, come visto al punto 1.

Si noti infine che questo particolare raggio potrebbe non far parte realmente del fascio, se fosse intercettato dal diaframma di supporto dell'obiettivo.

- 3) La distanza  $h'$  già introdotta al punto 1, è legata all'angolo  $\beta$  dalla relazione:

$h' = \beta |f_2| = -\beta f_2$  e dunque si può scrivere

$$h' = \alpha f_1 = -\beta f_2 \Rightarrow G = \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{f_1}{f_2}$$

- 4) Orientando l'asse ottico del cannocchiale su un punto del bordo di un cratere lunare e considerando un secondo punto del bordo diametralmente opposto al primo, questo secondo punto è una sorgente fuori asse ad un angolo  $\alpha$  dal primo. Attraverso il cannocchiale il primo viene visto nella stessa direzione (quella dell'asse ottico) mentre il secondo appare più distante dal primo, ad un angolo  $\beta > \alpha$ .

Con i dati del cannocchiale di Galileo il rapporto tra gli angoli di uscita e di ingresso è:

$$G = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f_1}{|f_2|} \approx 20$$

Dunque il cratere appare 20 volte più grande, come se fosse 20 volte più vicino, a soli 19'000 km !

Infatti, detto  $d$  il diametro del cratere lunare,  $D$  la distanza della Luna e  $D'$  la distanza apparente attraverso il cannocchiale in approssimazione degli angoli piccoli si può porre

$$\frac{d}{D} \approx \alpha \quad \text{e} \quad \frac{d}{D'} \approx \beta = 20 \alpha \approx 20 \frac{d}{D} \Rightarrow D' = \frac{D}{20}$$



### 15. Costruzione di una lente acromatica

*Esercizio:* le prime lenti acromatiche furono realizzate nel 1758 da John Dollond che utilizzò le idee espresse da Leonard Eulero nel 1746. Una lente acromatica è realizzata accostando una lente convergente biconvessa (in vetro crown) ad una divergente piano concava (in vetro flint).

Ricordando la relazione (IV.3.10) che fornisce il potere diottrico di una lente sottile  $\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$  determinare il potere diottrico del sistema. Quindi stabilire, fissati due colori, quale sia la relazione che gli indici di rifrazione devono soddisfare per garantire il carattere acromatico della lente.

⊗

Sia  $r$  il raggio di curvatura della lente biconvessa; per la piano concava si avrà  $-r$  e  $\infty$  e dunque il potere diottrico sarà:

$$\frac{1}{f} = (n_1 - 1) \frac{2}{r} - (n_2 - 1) \frac{1}{r} = \frac{1}{r} (2n_1 - n_2 - 1)$$

Affinché la lente risulta acromatica per una coppia di frequenze (indichiamo con  $r$  il rosso e con  $v$  il violetto) dovrà essere:

$$2n_{1r} - n_{2r} = 2n_{1v} - n_{2v} \Leftrightarrow 2(n_{1r} - n_{1v}) = n_{2r} - n_{2v}$$

⊙

**16. Costruzione di immagini in una lente sottile e uno specchio piano - Olimpiadi 2011 II livello**

*Esercizio:* L'oggetto in figura si trova tra uno specchio piano e una lente convergente, come mostrato in figura. Determina la posizione rispetto allo specchio di tutte le immagini che si formano.<sup>80</sup>

⊗

**17. Costruzione di immagini in una lente sottile - Olimpiadi 2012 II livello**

*Esercizio:* Il sistema ottico in figura è costituito da una lente sottile per la quale si suppone che i raggi incidenti siano vicini all'asse ottico e formino con questo angoli piccoli, in modo da rendere trascurabili gli effetti di ogni tipo di aberrazione ottica; in questa approssimazione (detta di Gauss)

si può dimostrare che le immagini dei punti di una retta sono allineate su un'altra retta.

La lente è rappresentata dalla doppia freccia verticale e i punti  $F'$  e  $F''$  sono i suoi fuochi. Copiare la figura sul foglio protocollo delle soluzioni, accostandola al bordo sinistro e tracciare l'immagine reale della freccia prodotta dalla lente, giustificando opportunamente, mediante il disegno o calcoli algebrici, il risultato ottenuto

⊗

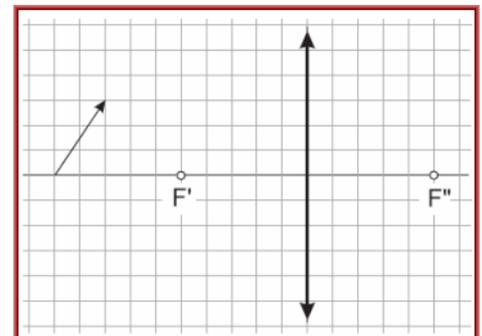
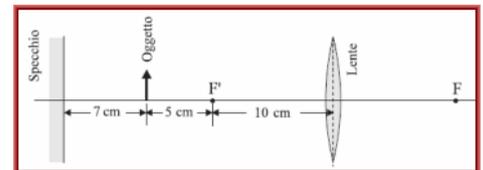
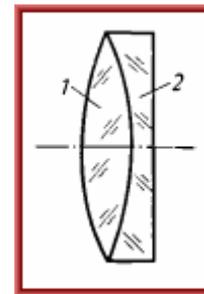
Attenzione alla costruzione del secondo piano focale necessario alla determinazione della posizione della origine della freccia.

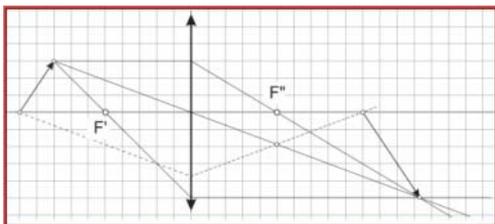
Operando con l'equazione dei punti coniugati se si esplicita  $q$  (posizione della immagine) si ha:

$$q = \frac{p f}{p - f}$$

Se ora si assume come unità di misura il quadretto  $\square$  si ha  $f = 5 \square$  e, dalla relazione appena trovata, si ha:

<sup>80</sup> Si formano tre immagini: quella virtuale dello specchio con  $x_1 = 7 \text{ cm}$ ; quella della lente che assume come oggetto l'immagine virtuale  $x_2 = 37.3 \text{ cm}$ , e quella della lente con l'oggetto originario  $x_3 = 52 \text{ cm}$





- per il punto sull'asse ottico il valore  $p'$  si legge dalla figura  $p' = 10 \square$  da cui  $q' = 10 \square$

- per la punta, la sua proiezione sull'asse ottico dà  $p'' = 8 \square$  da cui  $q'' = 13.3 \square$

La punta ha una dimensione verticale  $h$  di  $3 \square$  e pertanto la nuova dimensione si determina con una similitudine  $h'' = - 5 \square$

☺

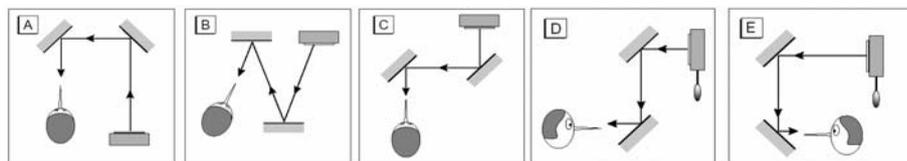
### 18. Equazione delle lenti sottili - Olimpiadi 2013 II livello

*Esercizio:* Ponendo un piccolo oggetto sull'asse ottico di una lente sottile convergente, a 15 cm dalla lente stessa, si forma un'immagine virtuale a 30 cm dalla lente. Se lo stesso oggetto viene posto a 30 cm dalla lente, dove si forma l'immagine? <sup>81</sup>

☹

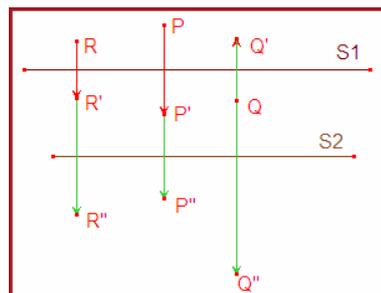
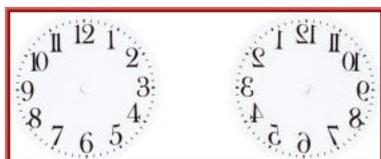
### 19. Riflessioni da specchi piani: Olimpiadi 2000 I livello

*Esercizio:* Le figure riprodotte sotto mostrano Pinocchio mentre guarda l'orologio a pendolo di mastro Geppetto attraverso la doppia riflessione di due specchi piani.



Nelle prime tre (A, B, C) la scena è vista dall'alto, nelle altre due (D, E) di fianco. In quale caso Pinocchio non vede correttamente il quadrante dell'orologio?

☹



Esercizio decisamente impegnativo per le gare di I livello che poteva essere risolto nella maniera elegante qui proposta solo da alunni che avessero seguito dei corsi di geometria basati sulle simmetrie e le trasformazioni.

Bisogna premettere che gli specchi piani formano delle immagini virtuali mediante delle simmetrie assiali e che l'immagine virtuale che osserviamo presenta la caratteristica inversione speculare come nella immagine qui a lato.

Dimostriamo dapprima due lemmi che hanno a che fare con i casi separati (B, C, D) in cui gli assi sono paralleli e (A, E) in cui gli assi sono incidenti.

**[L1]** Quando la riflessione avviene da parte di due specchi paralleli tutti i punti immagine risultano traslati di una stessa quantità pari al doppio del vettore che definisce la distanza tra i due specchi S1 e S2.

Per non appesantire la trattazione (visto che questo non è un corso di matematica) mi sono limitati, utilizzando il software Cabri, a costruire alcune riflessioni di punti (da P a P' e da P' a P'', e così via per Q ed R).

La conseguenza di questo lemma è che nei casi B, C, D Pinocchio vede un quadrante traslato e dunque legge le ore correttamente.

**[L2]** Quando gli specchi sono incidenti si determina una rotazione di un angolo  $\alpha = 2\theta$  dove  $\theta$  è l'angolo formato dai due piani degli specchi.

<sup>81</sup>  $f = 30$  cm; la seconda immagine va all'infinito

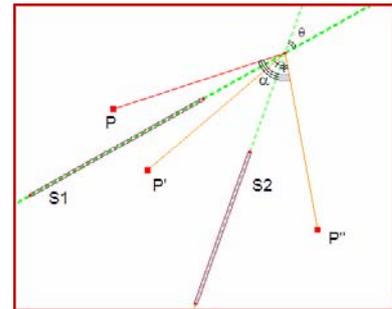
La dimostrazione discende immediatamente dalla figura osservando che i triangoli formati dai segmenti che vanno dai punti all'intersezione dei piani degli specchi sono isosceli con lo specchio che fa da bisettrice.

Nel caso delle figure A ed E l'angolo  $\theta = 90^\circ$  e dunque la rotazione è di  $180^\circ$

Nel caso A l'asse di rotazione è verticale e dunque la rotazione avviene in un piano orizzontale e si conserva la corretta visibilità del quadrante.

Nel caso E l'asse di rotazione è orizzontale e dunque la rotazione avviene in un piano verticale determinando il rovesciamento del quadrante.

☺

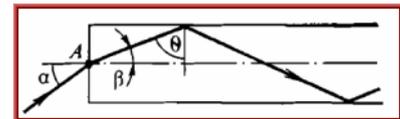


## 20. Angolo massimo di incidenza in una fibra ottica rettilinea

*Esercizio:* In una fibra ottica rettilinea di indice di rifrazione  $n$  l'angolo di incidenza massimo  $\alpha$  deve garantire che la riflessione avvenga con un angolo  $\theta$  pari all'angolo limite.

Determinare  $\alpha$ .<sup>82</sup>

☹



## 21. Di quanto si può curvare una fibra ottica senza perdere il potere di riflessione totale interna?

*Esercizio:* Una fibra ottica di indice  $n$  deve essere curvata mantenendo un angolo del raggio di ingresso pari ad  $\alpha$ . Quanto vale il raggio di curvatura minimo (curvatura massima)?

☹

Ci riferiamo al triangolo AOB per mettere in relazione l'angolo limite  $\theta$  con il raggio di curvatura  $R$ .

In base al teorema dei seni i lati sono proporzionali al seno degli angoli opposti; dunque:

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{R + D/2}{\sin(\beta + \pi/2)} = \frac{R + D/2}{\cos\beta}$$

Determiniamo  $\sin\beta$  dalla legge della rifrazione  $= \sin\alpha \cdot \frac{1}{n}$

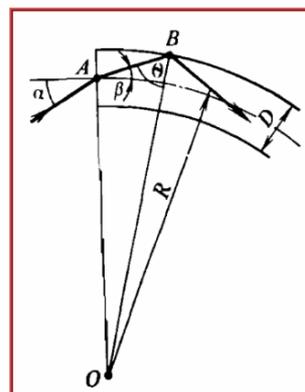
E quindi  $\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2\alpha}$  mentre  $\sin\theta$  è fissato dalla condizione della riflessione totale ( $\sin\theta = 1/n$ ); si ottiene così:

$$nR = \frac{R + D/2}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2\alpha}} \text{ che, esplicitando } R, \text{ porta a:}$$

$$R = \frac{D}{2(\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - 1)}$$

Poiché, solitamente l'accesso della luce alla fibra avviene in maniera tangenziale, è interessante il caso  $\alpha = 0$  che porta a

$$R = \frac{D}{2(n - 1)}$$



<sup>82</sup>  $\alpha = \arcsin\sqrt{n^2 - 1}$

Assumendo per le materie plastiche un valore di  $n = 1.5$  si trova che  $R = D$  e cioè, prescindendo dalle problematiche di stress della fibra che determinano variazioni di indice di rifrazione, si possono ottenere curvature molto elevate.



## Indice analitico

- aberrazione*: astigmatismo - 32; cromatica - 31; sfericità - 31; specchio sferico - 33
- aberrazioni*: lenti - 31
- angolo limite* - 14
- approssimazione dei raggi parassiali* - 21
- camera oscura* - 4
- Cartesio*: citazione - 11
- Cartesio versus Fermat*: due interpretazioni opposte - 11
- centro della lente* - 22
- Christian Huygens* - 13
- costruzione delle immagini*: lente sottile - 24
- diffrazione*: fenomenologia - 2; immagini - 4; porzione di fronte d'onda - 1; quando si può ignorare - 3
- diffusione della luce* - 7
- Diottrica* - 11
- diottra*: leggi - 19; sferico; definizione - 19
- dispersione*: definizione; fenomenologia - 15
- distanza focale*: dimostrazione - 22
- equazione dei punti coniugati* - 19
- Equazione dei punti coniugati*: lente sottile - 25
- Esercizio*: Angolo massimo di incidenza in una fibra ottica rettilinea - 68; Calcoliamo lo spostamento dovuto ad una lastra - 17; Cambiamenti di visuale per rifrazione - 9; Cammino dei raggi luminosi - 7; Costruzione di immagini in una lente sottile - Olimpiadi 2012 II livello - 66; Costruzione di immagini in una lente sottile e uno specchio piano - Olimpiadi 2011 II livello - 66; Costruzione di una lente acromatica - 65; Data una sorgente la sua immagine e l'asse ottico trovare la lente e il fuoco - 27; Deduzione della legge sulla deflessione nei prismi - 18; Determinazione della immagine con uso della equazione dei punti coniugati - 27; Di quanto si può curvare una fibra ottica senza perdere il potere di riflessione totale interna? - 68; Dispersione della luce e rifrazione da una parete a facce parallele - 62; Equazione delle lenti sottili - Olimpiadi 2013 II livello - 67; Funzionamento di una lente di caratteristiche fisiche assegnate - 28; Il cannocchiale di Galilei – Olimpiadi 2009 II livello - 64; Il ragno e la mosca; Olimpiadi ex URSS - 60; Illuminare il fondo di un pozzo con uno specchio - 7; Immagini virtuali - 8; La dimensione di uno specchio piano - 7; La distanza focale di due lenti sottili accostate - 28; La distanza focale di un sistema formato da due lenti sottili poste a di-stanza assegnata - 29; La legge di Snell dedotta dal principio di Fermat con calcoli di ana-lisi matematica - 63; Legame tra distanza focale e raggio di curvatura in una lente - 22; Lente biconvessa immersa in un liquido; compito in classe biennio - 59; Lente divergente; compito in classe biennio - 60; Lenti sottili compito in classe biennio - 58; Proiezione con lenti sottili - 60; Relazioni tra raggio riflesso e raggio rifratto - 10; Riflessione e rifrazione compito

in classe biennio - 57; Riflessioni da specchi piani; Olimpiadi 2000 I livello - 67; Riflessioni in una coppia di specchi piani; compito in classe biennio - 59; Riflessioni multiple attraverso un poligono con i lati a specchio - 8; Rifrazione e riflessione totale - 16; Rifrazione su facce parallele; compito in classe biennio - 58; Rifrazione tra due mezzi - 16; Spaziatura delle radiazioni disperse da un prisma - 18; Un sub e la riflessione totale - 62; Una bolla d'aria intrappolata nel vetro - 60; Una costruzione grafica per tracciare il raggio rifratto dato quello incidente - 61; Uso combinato della equazione dei punti coniugati - 27

*fasci di raggi paralleli* - 2

*fasci di tipo conico* - 2

*fascio luminoso* - 2

*Fermat*: la luce segue percorsi di tempo minimo; deduzione della legge - 12

*fuoco* - 21; diottrio - 19

*guide di luce* - 15

*Huygens*: principio; fronti d'onda - 13

*immagine* - 21

*immagine reale*: definizione - 5

*immagine virtuale*: definizione - 5; specchio piano; simmetria - 6

*immagini*: lenti sottili; tabella riassuntiva - 25

*indice di rifrazione*: assoluto - 9; tabella - 15

*indice di rifrazione relativo*: relazione con quello assoluto - 14

*ingrandimento* - 25

*legge delle rifrazione*: enunciato - 9

*lente*: descrittori; centri di curvatura, assi ottici, centro, spessore, diametro - 21

*lente divergente*: immagini virtuali - 25

*lenti sottili*: approssimazione - 21

*minimo cammino* - 6

*ottica geometrica*: di cosa si occupa - 1; particolarità dei fenomeni luminosi - 1; zona di frontiera - 1

*parabola*: proprietà delle tangenti - 34

*paraboloide di rotazione* - 34

*piano principale* - 22

*Pierre de Fermat* - 12

*Pierre Fermat* - 11

*potere diottrico*: diottrie - 22

*principio di Huygens*: deduzione legge della rifrazione - 13

*prisma*: base triangolare isoscele; angolo di deflessione - 17

**Problemi di fine capitolo** - 57–69

**Quesiti dalle Olimpiadi di Fisica** - 42–56

**Quesiti di fine capitolo** - 36–41

*raggi* - 1

*raggio generico*: asse ottico secondario; piano focale - 25

*René Descartes* - 11

*riflessione*: bilancio energetico con il raggio rifratto - 5; immagini - 5; leggi  
- 5

*riflessione totale* - 15

*rifrazione*: etimologia - 9; false percezioni ottiche - 9

*Rifrazione*: facce piane parallele - 17

*segno della distanza focale* - 24

*Snell*: primo enunciato corretto della legge - 11

*specchi sferici*: costruzione delle immagini - 34

*specchio sferico* - 33; fuoco - 33

*superficie concava*: convessa - 24

*Willebrord van Roijen Snell* - 11

