

VI.2 Dalle onde elettromagnetiche ai fotoni

- ⌘ **Lo spettro del corpo nero:** la radiazione interagisce con la materia in modo discreto
- ⌘ **L'effetto fotoelettrico:** la radiazione è fatta di granuli di energia
- ⌘ **L'effetto Compton:** i fotoni hanno quantità di moto
- ⌘ **Il fotone:** una nuova particella
- ⌘ **Il dualismo ondulatorio corpuscolare**

2.1 Lo spettro del corpo nero: la radiazione interagisce con la materia in modo discreto

2.1.1 IL CORPO NERO QUESTO SCONOSCIUTO

Quando ero un giovane studente di fisica mi chiedevo perché quando si giungeva al termine del corso di termodinamica o al termine del corso di elettromagnetismo ci si metteva a parlare del corpo nero e della *radiazione di corpo nero* e devo dire di non aver trovato delle spiegazioni particolarmente convincenti sui testi che mi proponevano di studiare.

Ci si occupava del corpo nero o al termine del corso di termodinamica o al termine di quello di elettromagnetismo; seguivano rapidi cenni anche in occasione della introduzione ai corsi dedicati alla fisica moderna (struttura della materia o istituzioni di fisica teorica). In tutti i casi si aveva l'impressione che si trattasse di una appendice cui i fisici professionisti erano particolarmente affezionati ma che lasciava in bocca il gusto di una *caramella alla sabbia*. Perché ne abbiamo parlato?

In effetti il problema del corpo nero ha un interesse ed una rilevanza all'interno di una storia della fisica della II metà dell'800 perché il suo studio:

- ha consentito di approfondire e sviluppare le conoscenze della termodinamica matura,
- ha consentito di chiarire i legami tra termodinamica ed elettromagnetismo,
- ha costretto ad introdurre, per la prima volta, l'idea che l'energia non fosse una grandezza continua ma (almeno nei processi di scambio tra radiazione e materia) avesse natura granulare.

Probabilmente se la quantizzazione dell'energia fosse stata scoperta per una via diversa ci si limiterebbe agli aspetti di natura applicativa che riguardano prevalentemente l'astrofisica mentre il diagramma con lo spettro di emissione del corpo nero o la legge di Stefan e Boltzmann avrebbe un contenuto meno sacrale.

La vicenda si origina quando, al confine tra ottica e termodinamica, si inizia lo studio delle proprietà dei corpi di emettere, assorbire e riflettere la radiazione. E' stata osservata la dipendenza di queste proprietà dalla frequenza della radiazione e dalla temperatura, si è osservata una sorta di dualità di comportamento per cui i corpi che sono dei buoni emettitori sono anche dei buoni assorbitori e che i corpi neri sono in grado di emettere ed assorbire radiazioni su un ampio ventaglio di frequenze.

In questo quadro viene definito *potere assorbente* il rapporto tra la quantità di radiazione assorbita ad una data frequenza e la corrispondente radia-

Lo studio del **corpo nero** inizia come un normale capitolo di fisica applicata legato alla capacità della materia di emettere ed assorbire radiazione elettromagnetica nella zona del visibile e dell'infrarosso

Il **potere emissivo** è la potenza emessa per unità di superficie su un intervallo unitario di frequenze mentre il **potere assorbente** è un numero puro che fornisce la frazione di energia assorbita rispetto a quella incidente

zione incidente,¹ mentre viene definito *potere emissivo* ϵ_{vT} la potenza che un corpo alla temperatura T emette per unità di superficie e per intervallo unitario di frequenze:

$$\epsilon_{vT} = \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta t \delta v \delta S} \quad (\text{VI.2.1})$$

Il potere emissivo, come il potere assorbente, è una caratteristica del corpo considerato. Esisteranno corpi che hanno una grande capacità di emettere radiazioni e corpi che ne hanno meno. Ma applicando la II legge della termodinamica nel 1860 Kirchhoff scopre una legge generale²: *mentre il potere emissivo e il potere assorbente cambiano da corpo a corpo il rapporto tra i due è una funzione universale dipendente solo dalla temperatura e dalla frequenza considerate* e cioè:

$$\frac{\epsilon_{vT}}{\alpha_{vT}} = f(v, T) \quad (\text{VI.2.2})$$

Chi è $f(v, T)$? Come determinarla? E' questo il punto di partenza della nostra storia.

Kirchhoff osserva che se si considera un corpo con potere assorbente uguale a 1 si ha che ϵ_{vT} prende il suo valore massimo ed inoltre che in quel caso la funzione universale cercata è proprio il potere emissivo.

E' ufficialmente nato il corpo nero: si tratta di un corpo in grado di assorbire senza rifletterle tutte le radiazioni che incidono su di esso e che gode della proprietà duale di essere il miglior emettitore possibile di radiazioni.

Il corpo nero gioca lo stesso ruolo che in fisica hanno altre astrazioni come il punto materiale o il corpo rigido: si tratta di una idealizzazione per la quale le leggi fisiche risultano particolarmente semplici o generali e dunque vengono fatti oggetto di indagine.

Ai tempi di Kirchhoff degli ottimi corpi neri erano le fornaci delle locomotive o gli alti forni e i forni di fusione in via di perfezionamento. Queste strutture si trovano ad una temperatura definita e, se si fa penetrare in essa una radiazione (dallo sportello di ispezione) essa dopo aver subito un certo numero di riflessioni alle pareti si porta in equilibrio con il sistema.

Oggi noi riteniamo molto più interessanti altri corpi neri quali la Terra, le stelle o l'universo.

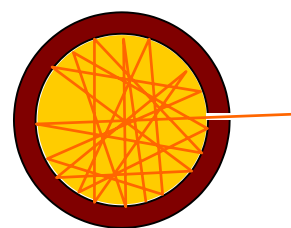
2.1.2 LA LEGGE DI STEFAN E BOLTZMANN

La quantità ϵ_{vT} , ammesso di conoscere la funzione che la rappresenta, non ci dà informazioni su quanta energia il nostro corpo nero emette ad una certa temperatura. Sappiamo che un corpo ad una certa temperatura emette della energia che possiamo percepire in modo rozzo attraverso i sensi e in modo più raffinato con della strumentazione specifica.

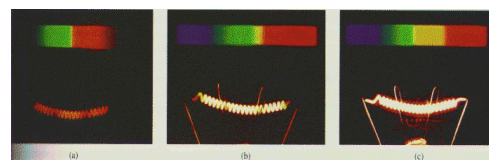
Per esempio se osserviamo il filamento di una lampadina attraverso un prisma osserveremo che le caratteristiche dello spettro cambiano con la



Robert Kirchhoff 1824–1887: il rapporto tra potere emissivo e potere assorbente è una funzione universale



il corpo nero come cavità in equilibrio: è un perfetto assorbitore di radiazioni e, per converso, un ottimo emettitore; il modello sono le fornaci delle locomotive



perché al crescere della temperatura lo spettro di emissione si sposta verso il violetto mentre il colore del filamento passa dal rosso al bianco?

¹ Si tratta di un numero puro compreso tra 0 e 1

² a sua volta figlia di una legge molto generale ed è questo aspetto di generalità che intriga i fisici



Joseph Stefan 1835–1893 e Ludwig Boltzmann in versione giovanile

il **potere emissivo** di un corpo nero calcolato su tutte le frequenze è **proporzionale a T^4** ; ciò ci consente di associare agli spettri di emissione una corrispondente temperatura di riferimento

temperatura così come cambia il colore del filamento che passa da un grigio rossastro al rosso ad un bianco sempre più brillante.

Quanto energia emette un corpo nero ad una data temperatura? La risposta a questa domanda è stata fornita da Joseph Stefan nel 1879 con una legge di tipo empirico relativa ad un corpo generico.

Indichiamo con ϵ_T il *potere emissivo totale* e cioè la somma delle energie emesse sull'intero spettro delle frequenze da un corpo nero alla temperatura T , esso sarà rappresentato dall'area della curva del potere emissivo che ancora non conosciamo. Scriveremo:

$$\epsilon_T = \int_0^{\infty} \epsilon_{\nu T} \delta \nu \quad (\text{VI.2.3})$$

e in base alla relazione di Stefan diremo che la potenza irradiata da un corpo nero per unità di superficie (*potere emissivo totale*) è proporzionale alla quarta potenza della temperatura del corpo.

Il perfezionamento della relazione venne 5 anni dopo da Boltzmann che riuscì a dedurre la legge da considerazioni di natura termodinamica e a leggi relative alla pressione di radiazione derivabili dalla teoria di Maxwell del campo elettromagnetico. Boltzmann mostrò che la legge valeva solo per il corpo nero (a differenza da quanto aveva sostenuto Stefan) e fornì una stima della costante di proporzionalità; la legge si scrive allora:

$$\epsilon_T = \sigma T^4 \text{ con } \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (\text{VI.2.4})$$

La temperatura esterna del Sole

Dalla conoscenza della costante solare che, in corrispondenza degli strati alti della atmosfera, vale $C = 1350 \text{ W/m}^2$ determinare la temperatura degli strati esterni del sole ipotizzando che per esso valgano le leggi del corpo nero.



La potenza irradiata dal sole è determinabile se si ipotizza che essa venga emessa in maniera isotropa e pertanto sia:

$$P = C 4\pi R_{TS}^2 = 1.35 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot (1.496 \cdot 10^{11})^2 = 3.80 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Per calcolare ϵ_T basta dividere il valore trovato per le dimensioni della corona solare; poiché il raggio solare $r_s = 6.96 \cdot 10^8 \text{ m}$ si ha:

$$\epsilon_T = \frac{P}{4\pi r_s^2} = 6.24 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2$$

e infine:

$$T = \sqrt[4]{\frac{\epsilon_T}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{6.24 \cdot 10^7}{5.67 \cdot 10^{-8}}} = 5760 \text{ K}$$



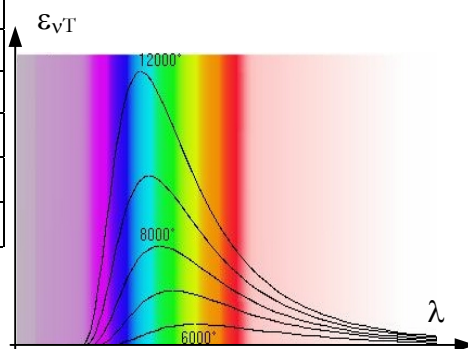
Dalle osservazioni astronomiche è possibile risalire al potere emissivo totale di diverse sorgenti. Esse vengono qui riportate insieme alla temperatura corrispondente e al valore della lunghezza d'onda prevalente all'interno dello spettro.

Da questi dati dovrebbe cominciare a risultare chiara l'importanza del corpo nero per discutere di temperatura quando si ragiona di astrofisica o di cosmologia.

Oggetto	T equival (K)	λ nel massimo	Regione spettro e.m.
---------	---------------	-----------------------	----------------------

Oggetto	T equival (K)	λ nel massimo	Regione spettro e.m.
Radiazione di fondo	3	1mm	Microonde
Nubi molecolari	10	300 μ m	Infrarosso
Esseri umani	310	9.7 μ m	Infrarosso
Lampada a filamento	3000	1 μ m	Infrarosso/Visibile
Sole	6'000	5 $\cdot 10^{-7}$ m	Visibile
Stelle calde	30'000	1 $\cdot 10^{-7}$ m	Ultravioletto
Gas ammassi interstellari	10 ⁸	3 $\cdot 10^{-11}$ m	Raggi X

Rimane a questo punto da illustrare la funzione che fornisce $\epsilon_{\nu T}$ descrivendone le caratteristiche, le informazioni sul mondo che da essa si possono estrarre e la genesi che ha portato alla sua formulazione.



potere emissivo del corpo nero in funzione della lunghezza d'onda per temperature diverse

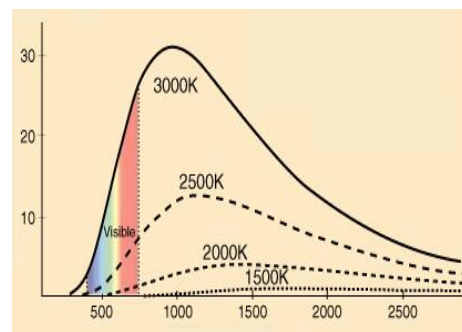
2.1.3 IL CORPO NERO E IL SUO SPETTRO DI EMISSIONE

Lo spettro del corpo nero è oggi ben noto sia dal punto di vista teorico sia dal punto di vista sperimentale e vogliamo discuterne le caratteristiche prima di vedere i problemi che esso porta con sé.

Nella figura qui a lato abbiamo rappresentato sovrapposto allo spettro continuo della luce bianca (che ci aiuta a collocare i valori di lunghezza d'onda) l'andamento delle curve di $\epsilon_{\nu T}$ per diverse temperature in funzione della lunghezza d'onda.

Si osservano i seguenti elementi:

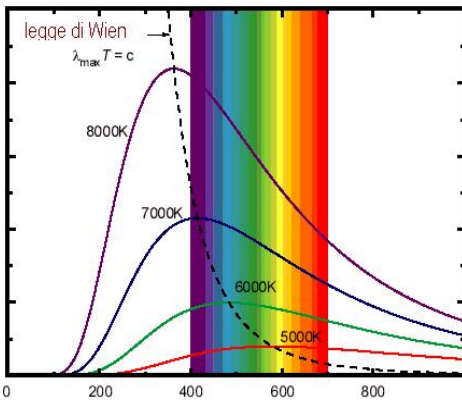
- l'ascissa del punto di massimo (che corrisponde alla radiazione più probabile a quel valore di temperatura) si sposta dal rosso verso il violetto al crescere della temperatura
- l'area sottesa dalle curve cresce molto rapidamente con la temperatura (la legge di Stefan e Boltzmann ci dice che è proporzionale a T^4)
- le curve tendono a zero molto rapidamente in corrispondenza delle basse lunghezze d'onda mentre la zona delle onde lunghe ha un decremento più morbido (questo comportamento si inverte se si rappresenta la frequenza sull'asse delle ascisse).



lo spettro del corpo nero si sposta progressivamente verso l'infrarosso man mano che la temperatura si sposta verso valori tipicamente terrestri e ciò rende difficoltosa la effettuazione di misure precise

Il diagramma che abbiamo rappresentato è stato dedotto attraverso lunghe e faticose osservazioni che hanno richiesto la messa a punto di apposite strumentazioni e tecniche sperimentali. Infatti, alle temperature tipiche della dimensione umana, lo spettro si trova prevalentemente ed esclusivamente nella zona dell'infrarosso che è una parte dello spettro piuttosto ampia. Essa confina con le onde centimetriche (ancora sconosciute a fine 800) e, per essere indagato, richiede di sfruttare fenomeni diversi ciascuno sensibile ad un piccolo intervallo di frequenze.

Le ipotesi rivoluzionarie avanzate da Planck hanno avuto bisogno di queste misure per essere pensate perché si scontravano con il *senso comune* della conoscenza scientifica consolidata secondo cui le onde interagivano con la materia attraverso processi di tipo continuo: in una cavità dovevano esistere onde stazionarie e gli scambi tra esse e la parete dovevano avvenire attraverso assorbimenti e riemissioni in condizioni di risonanza da parte degli oscillatori armonici di cui si pensava fosse costituita la parete.



In base alla **legge di Wien** i valori di λ corrispondenti al massimo dello spettro sono **inversamente proporzionali alla T** e ciò consente di associare alla λ (colore) tipica dello spettro una **temperatura equivalente**.

Nel 1893 Wilhelm Wien (1864–1928) ragionando su base termodinamica riuscì a far compiere al processo di deduzione della legge del potere emissivo un importante passo in avanti.

Egli riuscì a dimostrare che la legge richiesta doveva essere del tipo $\nu^3 f(\nu/T)$ dove la funzione f era ancora sconosciuta, ma questa particolarezzazione consentì una nuova dimostrazione della legge di Boltzmann e la deduzione di una seconda legge che porta il nome di *legge dello spostamento di Wien* secondo cui il prodotto della lunghezza d'onda del massimo per la temperatura assoluta è costante:

$$\lambda_M T = \text{costante} = b$$

③

(VI.2.5)

La costante b non poteva essere dedotta dalla teoria ma doveva essere ottenuta per via sperimentale. Il valore oggi accettato e che dipende solo da calcoli su alcune costanti universali è di:

$$b = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$$

La legge di Wien associa la lunghezza d'onda prevalente nella radiazione (quella che fissa il colore) alla temperatura del corpo che la emette ed è

attraverso essa che oggi si assegna una temperatura ai diversi tipi di stelle in base alla osservazione del loro spettro di emissione.

Nella immagine qui a lato viene fornita un comodo diagramma di conversione. La scala logaritmica consente di trasformare la relazione della legge di Wien in una retta perché $\log(\lambda T) = \log \lambda + \log T$ e dunque la iperbole diventa una retta.

Nel diagramma si osserva molto bene come le caratteristiche dello spettro si spostino dalle radio onde sino ai raggi gamma al variare della temperatura e come lo spettro visibile si collochi nella zona tra i mille e i diecimila kelvin.

Ma in che misura siamo autorizzati a considerare le stelle o

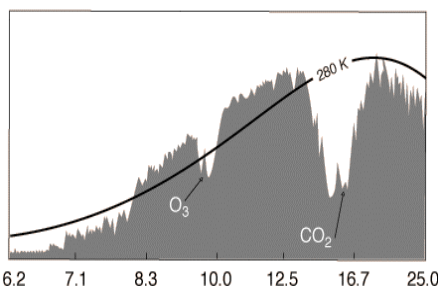
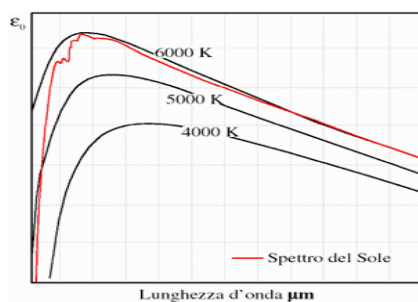
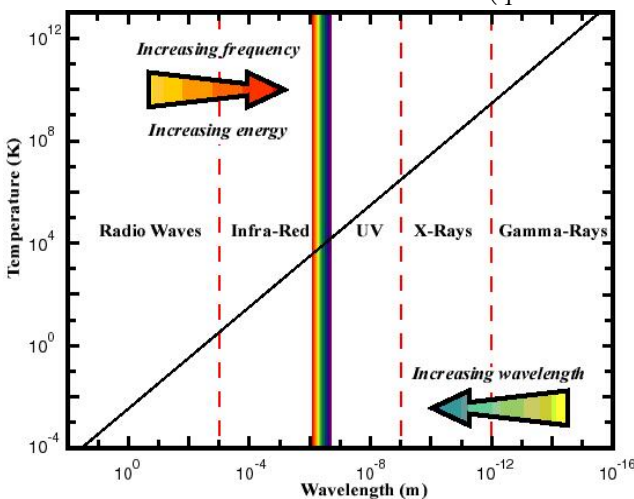
la terra alla stregua di un corpo nero? Per rispondere alla domanda osserviamo le immagini qui a lato. Nella prima vediamo lo spettro di emissione del sole (in rosso) associato allo spettro di un corpo nero a 6000 e 5000 K.

Nella seconda immagine vediamo il confronto tra lo spettro di emissione della Terra con quello di un corpo nero a 280 K.

Relativamente allo spettro solare ci sono da fare poche osservazioni: salvo una più rapida caduta nella zona dell'ultravioletto, il Sole è un corpo nero con massimo di emissione nella zona tra il giallo e il verde.

Più singolare è la osservazione dello spettro della terra con due interessanti deviazioni dalla curva teorica dovute all'assorbimento elettivo di alcune frequenze da parte dell'ozono e del biossido di carbonio atmosferici. La Terra può essere assimilata ad un corpo nero con temperatura di 280 K la cui emissione avviene nella zona dell'infrarosso e del lontano infrarosso (lunghezze d'onda tra i 6 e i 25 μm).

Nelle considerazioni svolte sino ad ora e anche in quelle che seguiranno capita di esprimere il potere emissivo sia riferito alla frequenza sia alla lunghezza d'onda. Vale la pena di osservare che per passare dall'uno all'altro non è sufficiente sostituire λ con ν utilizzando la relazione $\lambda \nu =$



confronto dello spettro di emissione del Sole e della Terra con quelli teorici del corpo nero; si osservano nel caso della Terra le cadute dovute all'assorbimento selettivo da parte della atmosfera

c . Infatti nella definizione del potere emissivo intervengono fattori di tipo differenziale e si ha che l'area elementare del diagramma, la cui somma è il potere emissivo totale, dovrà essere la stessa e cioè: $\epsilon_{\nu T} \delta \nu = \epsilon_{\lambda T} \delta \lambda$. Da qui segue che

$$\epsilon_{\nu T} = \epsilon_{\lambda T} \frac{\delta \lambda}{\delta \nu} = \epsilon_{\lambda T} \frac{c}{\nu^2} = \epsilon_{\lambda T} \frac{\lambda^2}{c} \quad (VI.2.6)$$

ovvero i due poteri emissivi sono proporzionali al quadrato della lunghezza d'onda e pertanto le due curve rappresentative e le due funzioni matematiche sono strutturalmente diverse.

Come conseguenza dei lavori di Wien fu possibile dedurre una legge del potere emissivo che risultava in buon accordo con i dati sperimentali tranne nella zona dell'infrarosso.

A questo punto Sir John Rayleigh⁴ e sir James Jeans seguirono un approccio diverso basato su oscillatori armonici ed onde stazionarie all'interno della cavità e riuscirono a ricavare una legge *duale* rispetto a quella di Wien: la loro legge si adattava ai dati sulle grandi lunghezze d'onda mentre portava a risultati palesemente assurdi al diminuire della lunghezza d'onda.

Infatti la legge aveva la forma:

$$\epsilon_{\nu T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} k_B T \quad (VI.2.7)$$

e per $\nu \rightarrow \infty$ si aveva $\epsilon_{\nu T} \rightarrow \infty$.

Per tenere conto di questo assurdo si coniò il termine di *catastrofe ultravioletta* ad indicare che un corpo nero doveva emettere una quantità di radiazione infinita al crescere della frequenza.

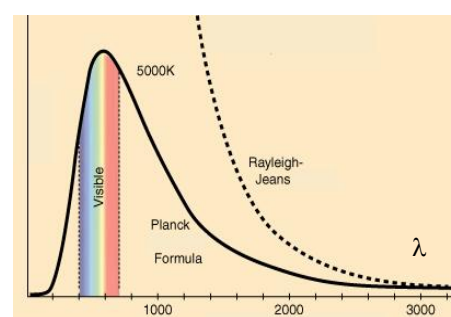
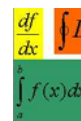
D'altra parte la emissione di onde di frequenza grande a piacere era perfettamente sensata in base all'ipotesi delle onde stazionarie per le quali sono teoricamente possibili infinite armoniche multiple di quella fondamentale.

Inoltre, in base al principio di equipartizione della energia, si doveva ammettere in linea di principio che, fissata la temperatura, tutti gli oscillatori (di qualsiasi frequenza) dovessero avere lo stesso diritto di cittadinanza. Dunque, se il modello da seguire per spiegare la interazione tra radiazione e materia, era quello secondo cui in una cavità in equilibrio ci fosse la presenza di onde stazionarie in grado di scambiare energia con una parete fatta di oscillatori, si arrivava all'assurdo della *catastrofe ultravioletta*.

³ Poiché $\lambda \nu = c$ si ha che $\lambda = c / \nu$ e derivando si ottiene $\frac{\delta \lambda}{\delta \nu} = -\frac{c}{\nu^2}$. Il segno – non viene preso in considerazione nella definizione

⁴ William Strutt (Lord Rayleigh) (1842–1919) ebbe il premio Nobel nel 1904 per la scoperta dell'Argon e fu il primo a studiare a fondo la diffusione della luce scoprendo la legge che spiega le diversità di colore del cielo dal rosso all'azzurro.

James Jeans (1877-1946) dopo gli studi sullo spettro del corpo nero (era molto giovane) si occupò lungamente di cosmologia e fu uno dei maggiori sostenitori delle teorie sulla morte termica dell'universo basate sulla crescita progressiva dell'entropia di un sistema isolato



La relazione di Rayleigh e Jeans basata sull'elettromagnetismo classico è in accordo con lo spettro solo alle alte λ , non prevede il massimo di Wien e determinerebbe per le alte frequenze la cosiddetta *catastrofe ultravioletta*. Secondo questa relazione l'energia emessa tenderebbe a ∞ al crescere della frequenza

2.1.4 L'IPOTESI DI PLANCK: UN ESEMPIO DI IPOTESI AD HOC CHE AVRÀ MOLTE RIPERCUSSIONI

L'ipotesi di Planck consiste nell'*ipotizzare che gli scambi tra le pareti del corpo nero e la radiazione in equilibrio nella cavità avvengano secondo grandezze discrete* secondo la legge:

$$\Delta \mathcal{E} = h \nu \quad (\text{VI.2.8})$$

dove h è una opportuna costante universale il cui valore lo stesso Planck ricaverà dalle costanti sperimentali delle due relazioni di Boltzmann e di Wien σ e b .

La legge di Planck, scritta con la notazione di oggi, ha la seguente espressione:

$$\epsilon_{\nu T} = \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (\text{VI.2.9})$$

e da essa si possono dedurre attraverso calcoli di analisi matematica le leggi di Boltzmann e di Wien.

Osserviamo che in base ad un ben noto limite notevole, quando la quantità

$\frac{h\nu}{kT} \approx 0$ si può scrivere $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \approx \frac{h\nu}{kT}$ e pertanto la relazione (VI.2.9) diventa:

$$\epsilon_{\nu T} \approx \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \frac{kT}{h\nu} = \frac{2\pi k}{c^2} \nu^2 T \text{ e cioè la relazione trovata da Wien e che}$$

funzionava bene tranne nella zona dell'infrarosso.

Planck dedusse la sua legge seguendo un approccio che metterebbe in difficoltà uno di quei filosofi della scienza abituati a *dettare le corrette regole metodologiche per la scoperta scientifica*:

- sul piano sperimentale si basò su misure dello spettro nella zona dell'infrarosso rese disponibili in Germania nella seconda metà del 1900 da Kurlbaum. Wien nel 1896 aveva proposto per la sua originaria formulazione $\nu^3 f(\nu/T)$ una relazione del tipo $\epsilon_{\nu T} \propto \nu^3 e^{-a\nu/T}$ che, se funzionava molto bene alle alte frequenze, risultava in disaccordo con le misure di Kurlbaum anche se tendeva a zero per $\nu \rightarrow \infty$
- sul piano teorico Planck utilizzava da tempo un approccio che tentava di conciliare le previsioni della termodinamica con quelle dell'elettromagnetismo ma, a differenza degli altri teorici dell'epoca, era convinto che la soluzione corretta dovesse incentrarsi sulla ricerca di una espressione per l'entropia all'interno della cavità
- sul piano pratico egli cercò dapprima un adattamento matematico della funzione ai dati sperimentali e, solo in un secondo tempo, ne fornì una giustificazione nella quale veniva ammessa senza giustificazioni l'ipotesi (VI.1.8) che consentiva di sfuggire alla *catastrofe ultravioletta*.

Il motivo per cui, se si accetta l'ipotesi di Planck sugli scambi discreti di energia, il modello basato sugli oscillatori non produce la catastrofe ultravioletta è il seguente: se gli scambi possono avvenire solo in modo granulare e la energia media di un oscillatore ha come ordine di grandezza kT quando $h\nu > kT$ gli scambi non possono più avvenire e ciò spiega la ragione per cui quando $\nu \rightarrow \infty$ si ha $\epsilon_{\nu T} \rightarrow 0$.



la relazione di Planck contiene un termine di III grado in ν e un esponenziale decrescente in cui l'energia del fotone viene confrontata con la energia media legata alla temperatura



Planck trova una interpolazione matematica dello spettro e poi la deduce ipotizzando che gli scambi di energia entro la cavità avvengano per granuli proporzionali alla frequenza $\Delta \mathcal{E} = h \nu$

Nel primo novecento l'ipotesi avanzata da Planck, che oggi è giustamente considerata l'atto di nascita della fisica quantistica, fu giudicata una ipotesi valida quanto altre e soprattutto limitata alla sola discussione delle caratteristiche dello spettro del corpo nero.

Fu solo dopo qualche anno quando risultarono confermate le ipotesi di Einstein sulla esistenza dei fotoni che anche la ipotesi di Planck venne rivalutata e dedotta all'interno di ipotesi meno artificiali.

Le leggi della radiazione del corpo nero possono essere tutte derivate dalla legge della radiazione di Planck e, in particolare, la costante h può essere collegata con la costante σ , quella dello spostamento b e quella di Boltzmann k ; si dimostra che:⁵

$$h = \pi k^3 \sqrt{2\pi^2 k / 15 c^2 \sigma} \quad h = 4.965 b k / c$$

Con queste due relazioni si può determinare la costante h e la prima di esse fu utilizzata da Planck. I valori determinati dalle due relazioni risultano in accordo tra di loro ed entrambe si accordano con i valori di h determinati con altri metodi.

Il valore di h oggi assunto nell'ambito del S.I. è pari a:

$$h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \pm 4.0 \cdot 10^{-40} \text{ J}\cdot\text{s} \quad (\text{VI.2.10})$$

La approssimazione alla terza cifra fornisce il valore di 6.63 (spesso utilizzato nei conti rapidi così come si approssima h con $10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$).

Il valore di h può anche essere espresso in $\text{eV}\cdot\text{s}$ dividendo per la carica dell'elettrone e ottenendo:

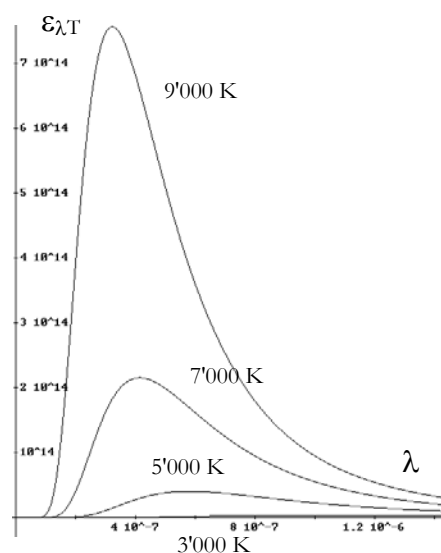
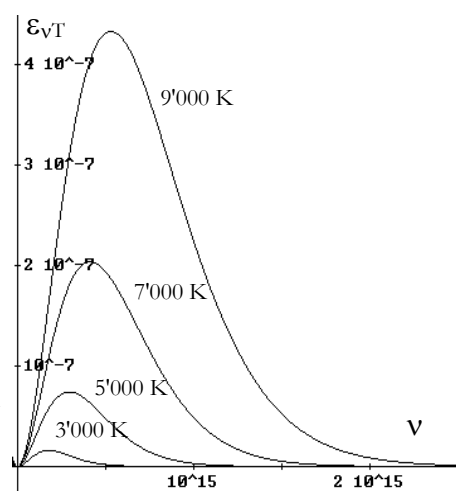
$$h = 4.1356692 \cdot 10^{-15} \pm 1.2 \cdot 10^{-21} \text{ eV}\cdot\text{s}$$

Poiché le due curve dello spettro del corpo nero vengono di volta in volta disegnate con riferimento alla frequenza ed alla lunghezza d'onda abbiamo ritenuto opportuno concludere questo paragrafo con la rappresentazione in scala dei due poteri emissivi riferiti allo stesso insieme di temperature.

In entrambi i casi ($\epsilon_{\nu T} \delta \nu$) e ($\epsilon_{\lambda T} \delta \lambda$) si misurano in W/m^2 ma poiché i valori riportati in ascissa sono diversi per molti ordini di grandezza (frequenza e lunghezza d'onda della zona del visibile), risultano diverse in maniera enorme anche le scale dei due poteri emissivi. Invece, come si nota, la forma delle due curve è molto simile nonostante nella prima il termine che viene moltiplicato per l'esponenziale sia ν^3 e nella seconda sia λ^{-5} .

Come si può notare il prodotto ascissa per ordinata, nei due casi, ha lo stesso ordine di grandezza mentre nel primo diagramma i massimi si spostano verso destra e nel secondo verso sinistra. Si osservi infine come il diagramma in funzione di λ consenta una migliore lettura ai due estremi dello spettro.

la costante di Planck risulta correlata con le altre costanti universali note e con le costanti sperimentali delle leggi di Wien e di Boltzmann



Andamento del potere emissivo in funzione di ν e di λ al variare della temperatura. Si osservi la diversa estensione delle curve in accordo con la legge di Stefan – Boltzmann.

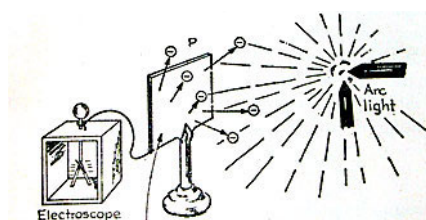
⁵ La dimostrazione si basa sull'uso di tecniche di integrazione che consentono di stimare l'area della curva sottesa dalla legge di Planck e su tecniche di derivazione che consentono di valutare la ascissa del punto di massimo. Non se ne riporta la deduzione per non appesantire la trattazione e perché, dal punto di vista fisico, è molto più importante comprendere che si è operata una generalizzazione e che da essa discenderanno le leggi sperimentali da cui tale generalizzazione è partita.

2.2 L'effetto fotoelettrico: la radiazione è fatta di granuli di energia

2.2.1 FENOMENI FOTOELETTRICI: STORIA ED ESPERIMENTI

L'effetto fotoelettrico studia la capacità che hanno le radiazioni elettromagnetiche nella zona del visibile e nelle immediate vicinanze di estrarre elettroni dalla superficie di numerosi metalli.

Il fenomeno è stato scoperto nella seconda metà dell'800 come sottoprodotto delle ricerche sulle onde elettromagnetiche e sulla interazione tra la radiazione e la materia che hanno portato alla scoperta dell'elettrone e dei raggi X. Nell'ambito di queste indagini sono emerse una serie di singularità che riguardano l'effetto fotoelettrico. Si tratta dei seguenti fatti sperimentali: ⁶



la prima evidenza sperimentale dell'effetto fotoelettrico: la luce dell'arco voltaico era in grado di scaricare una lastra metallica carica negativamente

- bombardando una superficie metallica con una sorgente di radiazione ultravioletta il metallo emette elettroni.⁷ In particolare, un oggetto metallico carico negativamente si scarica (è ciò che si osservava bombardando una lastrina di zinco collegata ad un elettroscopio) mentre uno scarico assume una debole carica positiva sino al potenziale di qualche volt (Hallwachs, 1888).
- la emissione degli elettroni (quando c'è) è tanto più intensa quanto più intensa è la sorgente di radiazione luminosa
- ogni metallo presenta una specie di *soglia di colore* nel senso che intensità luminose anche molto elevate di luce rossa non riescono ad estrarre elettroni dalla maggior parte dei metalli mentre il fenomeno si presenta anche con intensità basse nella zona dell'ultravioletto
- la emissione è praticamente istantanea e non si osserva un effetto *cumulo di energia* del tipo *se aspetto, prima o poi viene emesso un elettrone*.

I fatti sperimentali che abbiamo citato fanno parte di progetti di ricerca già tesi alla conferma della teoria del fotone e hanno bisogno di apparecchiature abbastanza raffinate. Infatti per arrivare ad osservazioni di tipo quantitativo sono necessarie le seguenti condizioni:



difficoltà connesse alla **scoperta di leggi quantitative** per l'effetto fotoelettrico

- disponibilità di sorgenti luminose in grado di operare a frequenze diverse (lampade spettrali e filtri) e con intensità variabili a piacere
- necessità di operare nel vuoto per eliminare effetti di ionizzazione del gas che potrebbero falsare le misure e nel contempo presenza di *finestre* trasparenti alla radiazione utilizzata (il vetro ferma la radiazione ultravioletta)
- capacità di preparare le superfici metalliche tagliandole sotto vuoto in modo di essere certi che la superficie metallica che viene indagata

⁶ Per una corretta comprensione dell'effetto fotoelettrico si tenga presente che la evidenza sperimentale dell'esistenza degli elettroni è del 1898, che la teoria di Einstein è del 1905 e che gli esperimenti che la confermano sono a cavallo della I guerra mondiale.

⁷ Hertz si rese conto che se sottoponeva le sferette metalliche degli spinterometri (da cui faceva scoccare le scintille necessarie alla produzione delle onde elettromagnetiche) alla luce emessa da una lampada ad arco si aveva una maggiore facilità nel formarsi delle scintille.

non sia inquinata dalla presenza di effetti di ossidazione superficiale che potrebbero falsare tutto il computo delle energie necessarie

- capacità di contare gli elettroni tenendo presente che poiché gli elettroni vengono emessi dalle zone superficiali del metallo le loro energie (a parità di energia fornita dal fotone incidente) sono diverse a causa degli urti contro le strutture reticolari superficiali

Per realizzare gli esperimenti bisogna disporre di un tubo a vuoto contenente un elettrodo metallico (catodo) opportunamente sagomato in modo che le particelle emesse da esso siano raccolte su un altro elettrodo (anodo). La corrente elettrica che si stabilisce darà una misura del numero di particelle che vengono emesse. Tra i due elettrodi si può applicare una d.d.p. ΔV (tensione anodica) di qualche volt variabile in entrambi i versi.

Applicando una tensione anodica crescente si osserva (per una data frequenza e intensità della radiazione incidente) che la corrente elettrica cresce sino ad un valore di saturazione (che risulta diverso per diverse intensità luminose ed è ad esso proporzionale). La presenza di un valore di saturazione corrisponde alla condizione per cui tutti gli elettroni strappati dal catodo finiscono sull'anodo invece di ricadere sul catodo stesso.

Se si fa diminuire la tensione anodica e si va verso valori negativi si osserva una brusca diminuzione della corrente sino a che essa cessa del tutto in corrispondenza di un ben preciso valore ΔV_a . Ciò si verifica quando la variazione di energia potenziale dovuta al controcampo è pari all'energia cinetica massima posseduta dagli elettroni emessi.

L'esperimento descritto consentì di stabilire che il numero di elettroni emessi al secondo è proporzionale alla intensità della radiazione incidente (Elster e Geitel, 1900).

Negli stessi anni Lenard (1902-1903) riuscì ad evidenziare il fatto che operando nel vuoto il valore del potenziale di arresto (cioè della d.d.p. anodica negativa a cui si arresta il passaggio di elettroni) risulta indipendente dalla intensità luminosa ma, per un dato catodo, dipende esclusivamente dalla frequenza della radiazione utilizzata. Ciò costituisce un forte indizio a favore del carattere non cumulativo dell'effetto fotoelettrico: l'energia degli elettroni emessi non dipende dalla quantità di energia luminosa che complessivamente investe il catodo ma piuttosto dal suo colore.

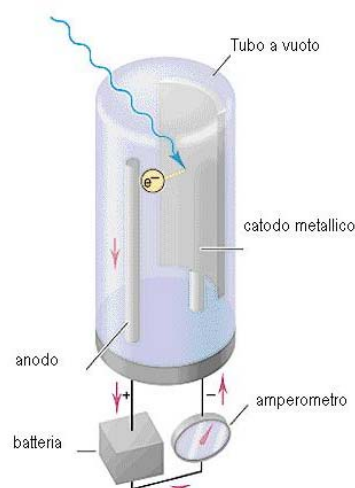
2.2.2 QUANTO TEMPO IMPIEGHEREBBE UN'ONDA PER ESTRARRE GLI ELETTRONI?

Una sorgente di energia luminosa di potenza P viene posta a distanza r da un catodo metallico del quale è noto il potenziale di estrazione V_e .⁸ Costruire un modello che consenta di calcolare il tempo minimo necessario per fornire ad un elettrone che si trovi nella buca di potenziale definita dal potenziale di estrazione la energia sufficiente ad uscire dalla buca.

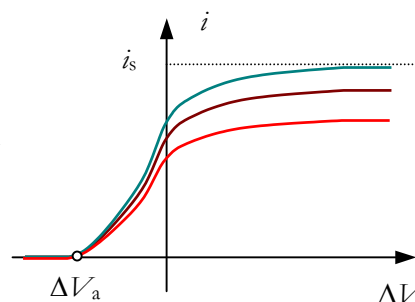
Dati numerici: si ipotizzi che sia $P = 150 \text{ W}$, che l'elettrodo sia di Zn^{65}_{30} , che $\delta_{\text{Zn}} = 7.0 \text{ kg/dm}^3$ e che $V_e = 4.2 \text{ V}$



⁸ Per la definizione del lavoro di estrazione si veda il capitolo 5 della parte V.



tubo a vuoto per lo studio delle leggi dell'effetto fotoelettrico



andamento della corrente anodica al variare della d.d.p.; la corrente di saturazione è proporzionale alla intensità luminosa nel caso in cui si utilizzi una stessa radiazione monocromatica



Ipotizziamo che la luce si propaghi secondo un modello a raggi; ciò significa che su una superficie elementare σ posta a distanza r dalla sorgente arriverà una potenza utile $p = P \frac{\sigma}{4\pi r^2}$

D'altra parte possiamo assimilare σ alla superficie di pertinenza dell'elettrone cui siamo interessati. Se ipotizziamo che sia presente un elettrone libero per atomo allora potremo determinare σ come d^2 dove d rappresenta la distanza interatomica pari alla radice cubica del volume atomico ν .

Per calcolare ν basta calcolare il volume $\mathcal{V}$ di una mole che ha massa $M = 65$ g. Dunque:

$$\nu = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{N}_A} = \frac{10^{-3}M}{\delta \mathcal{N}_A} = \frac{65 \cdot 10^{-3}}{7.0 \cdot 10^3 \cdot 6.02 \cdot 10^{23}} = 1.54 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3/\text{atomo}$$

$$\sigma = \sqrt[3]{\nu^2} = \sqrt[3]{(1.54 \cdot 10^{-29})^2} = 6 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$$

La energia $\mathcal{E}$ da fornire all'elettrone dovrà essere maggiore o uguale al valore necessario a superare la buca:

$$\mathcal{E} \geq e V_e = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 4.2 = 6.7 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

D'altra parte in un intervallo di tempo Δt si ha:

$$\mathcal{E} = p \Delta t = P \frac{\sigma}{4\pi r^2} \Delta t = 10^2 \frac{6 \cdot 10^{-20}}{4\pi} \Delta t = 4.8 \cdot 10^{-19} \Delta t \text{ J}$$

$$4.8 \cdot 10^{-19} \Delta t \geq 6.7 \cdot 10^{-19} \Rightarrow \Delta t > 1.4 \text{ s}$$

Dunque come avevamo già detto in premessa, secondo la teoria classica che ipotizza un trasferimento cumulativo di energia dalle onde elettromagnetiche alla materia, l'effetto fotoelettrico dovrebbe essere caratterizzato da un ritardo tra irradiazione ed emissione cosa che invece non si riscontra negli esperimenti. ⁹



2.2.3 LA TEORIA DI EINSTEIN DEL FOTONE: $\mathcal{E} = h \nu$



Einstein nel marzo del 1905 pubblica sugli *Annalen der Physik* la prima delle quattro famose memorie di quell'anno. Si tratta di un articolo intitolato *Un punto di vista euristico relativo alla generazione e alla trasformazione della luce*.

L'articolo di cui vedremo tra breve la premessa sarà seguito nel 1906 da un secondo articolo intitolato *La teoria della generazione e dell'assorbimento della luce* dedicato più specificatamente all'effetto fotoelettrico.

In questi due articoli Einstein riprende le idee di Planck sugli scambi discreti di energia ma opera una delle sue celebri rotture: ipotizza cioè che i quanti di luce di Planck non siano un artificio matematico necessario a

⁹ Per evitare facili entusiasmi e altrettanto facili ironie sulla ovvietà del carattere corpuscolare della radiazione si tenga presente che gli esperimenti che confermano quanto abbiamo sostenuto sono posteriori alle teorie stesse e che i nostri modelli di tipo atomistico non sono leciti e applicabili a fine 800 per la mancata conoscenza delle costanti universali che abbiamo utilizzato nel calcolo.

dar conto delle leggi sullo spettro del corpo nero ma siano invece particelle dotate di realtà fisica ed esistenza indipendente.

Le argomentazioni di Einstein si svolgono entro un quadro simbolico e formale diverso da quello che oggi utilizziamo ma la premessa è comunque interessante e comprensibile:

Fra le descrizioni teoriche che i fisici si sono formati dei gas e di altri corpi ponderabili, e la teoria di Maxwell dei processi elettromagnetici nel cosiddetto spazio vuoto, vi è una profonda differenza formale. Mentre, infatti, lo stato di un corpo si considera completamente determinato dalla posizione e dalla velocità di un numero finito, anche se grandissimo, di atomi e di elettroni, per la determinazione dello stato elettromagnetico di uno spazio si utilizzano funzioni spaziali continue, sicché a definire compiutamente un tale stato non può essere considerato sufficiente un numero finito di grandezze. Secondo la teoria di Maxwell, in tutti i fenomeni puramente elettromagnetici, e quindi anche nel caso della luce, l'energia dev'essere concepita come una funzione spaziale continua, mentre, secondo la concezione attuale dei fisici, l'energia di un corpo ponderabile dev'essere rappresentata come una somma estesa agli atomi e agli elettroni. L'energia di un corpo ponderabile non può suddividersi in parti arbitrariamente numerose e arbitrariamente piccole, mentre secondo la teoria di Maxwell (o, più in generale, secondo ogni teoria ondulatoria) l'energia di un raggio luminoso emesso da una sorgente di luce puntiforme si distribuisce con continuità su un volume via via crescente. La teoria ondulatoria della luce basata su funzioni spaziali continue si è dimostrata eccellente per la descrizione dei fenomeni puramente ottici e non sarà certo mai sostituita da un'altra teoria. Si deve tuttavia tener presente che le osservazioni ottiche si riferiscono a valori medi temporali, e non già a valori istantanei, e nonostante gli esperimenti abbiano pienamente confermato la teoria della diffrazione, della riflessione, della rifrazione, della dispersione e così via, è concepibile che una teoria della luce basata su funzioni spaziali continue porti a contraddizioni con l'esperienza se la si applica ai fenomeni della generazione e della trasformazione della luce. A me sembra in effetti che le osservazioni sulla « radiazione di corpo nero », la fotoluminescenza, la generazione dei raggi catodici tramite luce ultravioletta e altre classi di fenomeni concernenti la generazione o la trasformazione della luce appaiano più comprensibili nell'ipotesi di una distribuzione spaziale discontinua dell'energia luminosa.

Secondo l'ipotesi che sarà qui considerata, quando un raggio luminoso uscente da un punto si propaga, l'energia non si distribuisce in modo continuo in uno spazio via via più grande; essa consiste invece in un numero finito di quanti di energia, localizzati in punti dello spazio, i quali si muovono senza dividersi e possono essere assorbiti e generati solo nella loro interezza.

Secondo la teoria di Einstein la costante h diventa una costante universale di importanza notevolissima: si tratta infatti della costante che pone un limite inferiore alla dimensione dei granuli di energia elettromagnetica.

La teoria è di semplice esposizione:

Come mostra un lavoro rivoluzionario di Lenard, l'idea tradizionale di una distribuzione continua dell'energia della luce nello spazio irraggiato incontra difficoltà particolarmente gravi quando si tenti di spiegare i fenomeni fotoelettrici.

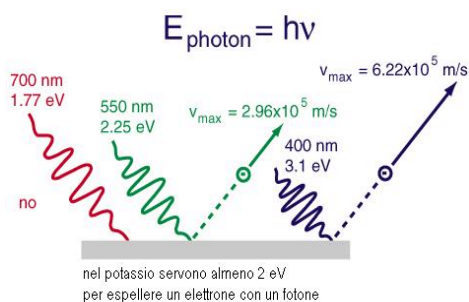
Adottando la concezione che la luce di eccitazione consista in quanti di energia $h\nu$ ¹⁰ la generazione di raggi catodici ad opera della luce può essere interpretata come segue. Sullo strato superficiale del corpo incidono quanti di energia, e la loro energia si trasforma, almeno in parte, in energia cinetica degli elettroni. La situazione più

¹⁰ Einstein non usa la costante h ma una espressione contenente le costanti R , N_A e la costante della legge di Wien; il tutto corrisponde ad h

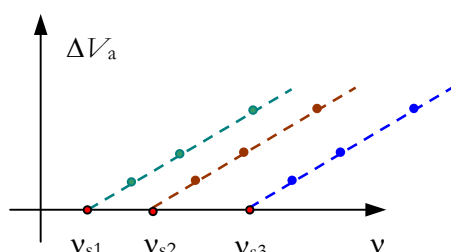


come al solito Einstein fonda le sue teorie rivoluzionarie su incongruenze delle teorie precedenti





come Einstein spiega l'effetto fotoelettrico: citazione originale



l'ipotesi di Einstein prevede che il potenziale di arresto abbia un andamento lineare con la frequenza della radiazione e che al variare del catodo si ottengano rette parallele; l'esecuzione dell'esperimento consente di determinare il valore di h



semplice si ha se un quanto di luce cede tutta la sua energia a un singolo elettrone; supporremo proprio questo, senza peraltro escludere che certi elettroni assorbano solo in parte l'energia dei quanti di luce. Quando un elettrone interno al corpo è dotato di energia cinetica raggiungerà la superficie, avrà perso parte della sua energia cinetica. Oltre a ciò si dovrà supporre che, per abbandonare il corpo, ciascun elettrone debba compiere un lavoro P (caratteristico del corpo). Gli elettroni che abbandonano il corpo con velocità normale massima sono quelli che si trovano vicinissimi alla superficie e vengono eccitati normalmente ad essa. L'energia cinetica di questi elettroni è $h\nu - P$.

Se il corpo è carico e si trova al potenziale positivo V ed è circondato da conduttori di potenziale nullo e V è esattamente in grado di impedire una perdita di elettricità del corpo, dev'essere $V = h\nu - P$ dove e indica la massa elettrica dell'elettrone...¹¹

Se la formula ricavata è corretta, allora, rappresentando V in coordinate cartesiane in funzione della frequenza della luce di eccitazione, si deve ottenere una retta, la cui inclinazione è indipendente dalla natura della sostanza studiata.

La nostra impostazione, a quanto mi è dato di vedere, non è in contrasto con le proprietà dell'effetto fotoelettrico osservate da Lenard. Se ogni quanto di energia della luce di eccitazione cede agli elettroni la propria energia indipendentemente da tutti gli altri, allora la distribuzione delle velocità degli elettroni, e cioè la qualità della radiazione catodica generata, sarà indipendente dall'intensità della luce di eccitazione; d'altra parte il numero degli elettroni che abbandonano il corpo sarà, a parità delle altre condizioni, proporzionale all'intensità della luce incidente.

Come si vede nello scritto di Einstein si ha la spiegazione di quanto è già stato ricavato da alcuni esperimenti e anche la previsione esplicita del concetto di *frequenza di soglia* (cioè di quel valore di frequenza corrispondente ad una energia pari alla energia potenziale del potenziale di estrazione) e di quanto da allora si ritroverà in tutti i manuali di fisica.

Se si riporta su un diagramma il valore sperimentale del potenziale di arresto al variare della frequenza si deve ottenere una retta che ha come intersezione con l'asse delle ascisse il valore della frequenza di soglia cioè della frequenza minima che può indurre effetto fotoelettrico; se poi si cambia il materiale di cui è costituito il catodo si ottiene una nuova retta parallela alla precedente e il coefficiente angolare di tale retta è legato al valore della costante h .

In generale si avrà:

$$\mathcal{E} = h\nu = eV_e + \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{VI.2.11})$$

Nella tabella (VI.2.1) sono stati riportati i lavori di estrazione di numerosi metalli e i corrispondenti valori della lunghezza d'onda massima necessaria per avere l'effetto fotoelettrico. Il lettore svolga il calcolo necessario a correlare le due colonne e individui in quali casi ci si trova nella zona del visibile o dell'ultravioletto.

Einstein, come farà anche nell'articolo in cui propone una metodica per la misura del numero di Avogadro, termina le sue considerazioni con una conseguenza della sua teoria che si potrà sottoporre ad indagine

¹¹ Si osservi che Einstein chiama *massa elettrica* ciò che noi chiamiamo carica dell'elettrone in ossequio al fatto che si tratta della grandezza che moltiplicata per il campo fornisce la forza elettrica. Dal punto di vista epistemologico la massa gravitazionale e la carica elettrica dovrebbero essere chiamate o carica gravitazionale e carica elettrica oppure massa gravitazionale e massa elettrica sottolineando con ciò la differenza concettuale con la massa inerziale.

sperimentale; se indichiamo con V_1 e V_2 i potenziali di estrazione di due metalli e con ν_1 e ν_2 le corrispondenti frequenze di soglia dovrà essere:

$$e(V_1 - V_2) = h(\nu_1 - \nu_2) \text{ o anche:}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{h}{e} (\nu_1 - \nu_2)$$

dove $V_1 - V_2$ rappresenta il potenziale di contatto tra i due metalli (potenziali della giunzione voltaica) e la costante h/e risulta pertanto determinabile sperimentalmente dalla misura della d.d.p. della giunzione e dalla differenza delle due frequenze di soglia relative.

2.2.4 GLI ESPERIMENTI DI MILLIKAN CONFERMANO LA TEORIA DI EINSTEIN

Si è già accennato che la conferma sperimentale e la accettazione della teoria di Einstein sui fotoni, così come di quella di Planck sul *quanto d'azione*, non sono immediate. E' necessario un processo di ripensamento della intera teoria della materia che si concluderà solo negli anni 30 del 900 con la formulazione definitiva della meccanica quantistica.

Per un po' di anni si procede a tentoni e la conferma sperimentale della teoria del fotone richiederà accurate misurazioni che tentino di confermare il diagramma della pagina precedente.

La prima misura di h con un errore relativo dello 0.5% risale al 1916 a cura di Robert Millikan reduce dal successo dell'esperimento sulla ionizzazione delle gocce d'olio per la misura della carica dell'elettrone.

L'apparato sperimentale di Millikan consentì la determinazione dell'andamento del potenziale di arresto al variare della frequenza per catodi realizzati con metalli alcalini.¹²

La grande novità che permise una elevata accuratezza sperimentale fu data dalla possibilità di lavorare i catodi (indicati con un segno rosso) direttamente con lame poste all'interno del tubo a vuoto (segno blu) il che consentì di eliminare i difetti di ossidazione che falsavano le misure ottenendo linee rette parallele che interpolavano sino a 6 o 7 punti relativi a frequenze diverse.

Millikan era un convinto assertore del carattere ondulatorio della radiazione e, anche a misura eseguita, continuò a considerare azzardata l'ipotesi dei fotoni, sostenendo di essersi limitato a verificare sperimentalmente la relazione di Einstein.

Einstein e Millikan ricevettero il premio Nobel per la teoria e poi per la misurazione di h rispettivamente nel 1922 e nel 1923.

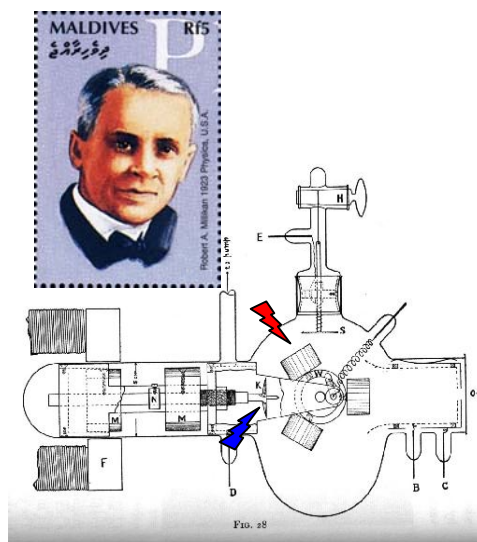
2.2.5 APPLICAZIONI TECNOLOGICHE DELL'EFFETTO FOTOELETTRICO

Oggi l'effetto fotoelettrico è utilizzato in maniera diffusa come interruttore nelle fotocellule e nelle fotoresistenze che funzionano sfruttando le tecnologie dei semiconduttori.

Su di un piano di alta tecnologia lo si usa nelle celle fotovoltaiche con cui si effettua la conversione di energia luminosa in energia elettrica e

Metallo	$\mathcal{L}$ (eV)	λ (Å)
Alluminio	4.08	$3.04 \cdot 10^{-7}$
Argento	4.73	$2.62 \cdot 10^{-7}$
Berillio	5.0	$2.48 \cdot 10^{-7}$
Cadmio	4.07	$3.05 \cdot 10^{-7}$
Calcio	2.7	$4.59 \cdot 10^{-7}$
Carbonio	4.81	$2.58 \cdot 10^{-7}$
Cesio	2.1	$5.90 \cdot 10^{-7}$
Cobalto	5.0	$2.48 \cdot 10^{-7}$
Ferro	4.5	$2.76 \cdot 10^{-7}$
Magnesio	3.68	$3.37 \cdot 10^{-7}$
Mercurio	4.5	$2.76 \cdot 10^{-7}$
Nickel	5.01	$2.47 \cdot 10^{-7}$
Niobio	4.3	$2.88 \cdot 10^{-7}$
Oro	5.1	$2.43 \cdot 10^{-7}$
Piombo	4.14	$2.99 \cdot 10^{-7}$
Platino	6.35	$1.95 \cdot 10^{-7}$
Potassio	2.3	$5.39 \cdot 10^{-7}$
Rame	4.7	$2.64 \cdot 10^{-7}$
Selenio	5.11	$2.43 \cdot 10^{-7}$
Sodio	2.28	$5.44 \cdot 10^{-7}$
Uranio	3.6	$3.44 \cdot 10^{-7}$
Zinco	4.3	$2.88 \cdot 10^{-7}$

Tabella VI.2.1

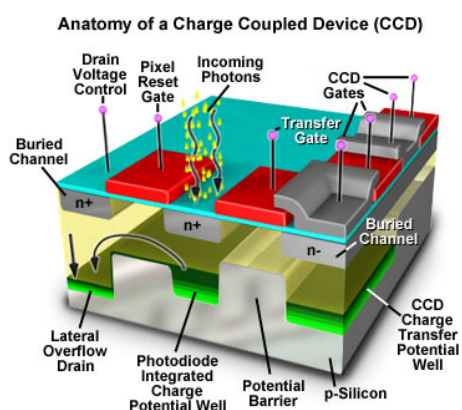


l'apparato sperimentale utilizzato Millikan consente di eseguire il taglio del catodo nel vuoto in modo di ottenere superfici esenti da fenomeni di ossidazione che determinerebbero un cattiva determinazione dei potenziali di arresto

¹² Si usano i metalli alcalini perché essi hanno un potenziale di estrazione abbastanza basso e ciò consente di operare nella regione del visibile e dell'ultravioletto vicino.

nelle unità CCD ¹³ che, sfruttando la miniaturizzazione, permettono di costruire i dispositivi che hanno sostituito le pellicole fotografiche nella fotografia digitale e nella astronomia.

La loro efficienza varia tra il 60 e l'80% dei fotoni raccolti contro il 2 o 3% delle pellicole tradizionali e le dimensioni dei sensori elementari sono ormai comparabili con i granuli della emulsione fotografica che non ha però le stesse caratteristiche di ordine, controllabilità e regolarità.



¹³ Charged Coupled Device: dispositivi ad accoppiamento di carica

2.3 L'effetto Compton: i fotoni trasportano quantità di moto

2.3.1 LA QUANTITÀ DI MOTO DEL FOTONE E GLI URTI TRA FOTONI E MATERIA

Come è noto dalla teoria della relatività la energia di una particella si connette alla energia tramite il cosiddetto invariante relativistico secondo cui in ogni sistema di riferimento inerziale si ha:

$$\mathcal{E}^2 - (pc)^2 = \text{costante} = \mathcal{E}_0^2 \quad (\text{VI.2.12})$$

Se si ha a che fare con particelle ultrarelativistiche la relazione (VI.2.12)

si semplifica perché in tal caso si ha $\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}} \rightarrow 0$ e pertanto la quantità di moto si lega alla energia in maniera molto semplice: $\mathcal{E} = pc$. Ma il fotone è una strana particella per la quale si ha $v = c$ e per cui non ha nemmeno senso parlare di massa di riposo. Pertanto si scriverà:

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (\text{VI.2.13})$$

Oggi la validità della relazione (VI.2.13) è del tutto accertata ma all'inizio del 900 la si poteva considerare poco più di una curiosità mancando una evidenza sperimentale della sua validità. Nell'ambito della teoria classica si ammette che la radiazione, anche vista sotto l'aspetto ondulatorio, trasporti quantità di moto e a fine 800 Crookes realizzò anche uno strumento in grado di misurarla; oggi tale strumento fa parte dell'offerta dei negozi di gadget.

L'effetto Compton è un fenomeno di diffusione per urto tra un fotone di alta energia (raggio X) e un elettrone debolmente legato. Quando l'elettrone è fortemente legato il fotone sparisce e al suo posto compare un elettrone la cui energia cinetica è la differenza tra l'energia del fotone e l'energia di legame (effetto fotoelettrico). Con l'effetto Compton si realizza invece un vero e proprio urto elastico piano simile a quello tra una sferetta ferma (l'elettrone) e una sferetta in moto (il fotone); dopo l'urto siamo in presenza sia del fotone diffuso (che avrà diminuito la sua energia e dunque la sua frequenza) sia dell'elettrone libero (che porta con sé la energia residua).

La relazione dell'effetto Compton correla la variazione di lunghezza d'onda del fotone con l'angolo di diffusione. La costante di proporzionalità dipende esclusivamente da alcune costanti universali e non dipende invece né dal materiale contro cui viene inviato il fotone né dalla energia (lunghezza d'onda) del fotone stesso; per la precisione si ha:

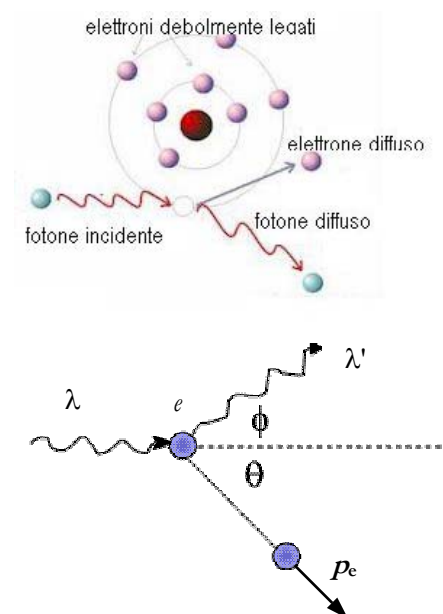
$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \phi) \quad (14)$$

La quantità $\frac{h}{m_e c}$ è detta lunghezza d'onda Compton dell'elettrone e corrisponde alla variazione di lunghezza d'onda quando l'angolo di *scattering* è di 90° .

Il suo valore si ottiene per sostituzione dei valori delle costanti universali coinvolte e vale: $2.426'309'6 \cdot 10^{-12}$ m.



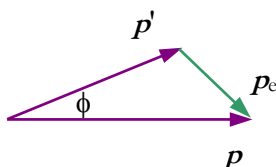
Il radiometro di Crookes sfrutta il fatto che la radiazione elettromagnetica viene riflessa da una superficie a specchio e assorbita da una superficie opaca; la diversa variazione di quantità di moto della radiazione si trasmette all'apparato mobile che gira sempre dalla stessa parte



se la radiazione ha **natura corpuscolare** nella interazione con un elettrone debolmente legato si deve avere uno **scattering del fotone** che rispetti sia la conservazione della energia sia quella della quantità di moto; ciò consente di dedurre la **relazione** qui a lato che **Compton** riuscì poi a verificare **sperimentalmente**



Congresso Solvay del 1927: dietro Einstein da sinistra **P. Dirac** che di lì a due anni fornirà la versione relativistica della meccanica quantistica, **E. Schrodinger** padre della meccanica quantistica e **A. Compton** che ha ricevuto quell'anno il premio Nobel per i lavori sperimentali sulla quantità di moto del fotone



La relazione (VI.2.14) si ottiene applicando all'urto tra le due particelle la conservazione della energia e della quantità di moto scritte nella loro forma relativistica perché ai valori di energia tipici della radiazione X ci si trova ad energie pari a $1/10$ della massa di riposo dell'elettrone e pertanto non possono essere trascurati gli effetti relativistici.

Si tratta dunque del primo fenomeno fisico in cui compaiono sia effetti di natura relativistica (quantità di moto ed energia dell'elettrone) sia effetti di natura quantistica (fotone).

Lasciamo al lettore il compito di dedurre per esercizio la $\Delta\lambda$ di Compton a partire dalle legge di conservazione:

□ conservazione dell'energia:

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + m_e c^2$$

□ conservazione della quantità di moto (già scritta in modo di non far comparire l'angolo θ che non è rilevante agli effetti del calcolo):

$$p_e^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2}{c^2}\nu\nu'\cos\phi^{14}$$

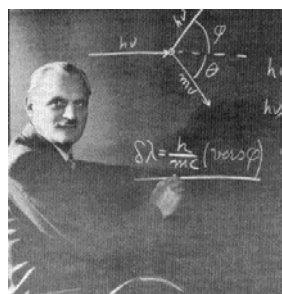
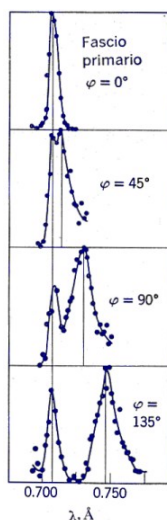
2.3.2 GLI ESPERIMENTI DI COMPTON

Sir Artur Holly Compton (1892-1962) effettuò i suoi esperimenti nei primi anni 20 del 900 proprio nel periodo in cui si cominciavano ad evidenziare le proprietà ondulatorie della materia. I risultati degli esperimenti (pubblicati nel 1923) costituivano un forte elemento a favore del cosiddetto dualismo ondulatorio corpuscolare per la radiazione (i fotoni) e per la materia (negli stessi anni si realizzano gli esperimenti di diffrazione mediante elettroni).

Dal punto di vista sperimentale il lavoro rientrava nelle indagini tese ad indagare la interazione tra i raggi X e la materia. Nell'ambito di una teoria di tipo ondulatorio ci si aspettava che la radiazione X interagendo con gli elettroni li mettesse in oscillazione e che pertanto si realizzasse la emissione di una radiazione esattamente della stessa frequenza di quella incidente (con una attenuazione di intensità dovuta all'eventuale effetto fotoelettrico).

In effetti se osserviamo la relazione trovata da Compton vedremo che essa ammette come caso limite $\Delta\lambda \rightarrow 0$ nel caso in cui $m \rightarrow \infty$ quando cioè si ipotizza che l'elettrone sia legato ad un atomo massiccio e che il quanto X non riesca a strapparli alla sua sede.

Ma nell'indagare attraverso raggi X monocromatici il comportamento di materiali di basso peso atomico (grafite e paraffina) Compton riuscì ad osservare nella radiazione diffusa la presenza di due righe spettrali; la prima di esse corrispondeva esattamente alla lunghezza d'onda della radiazione incidente ma accanto ad essa compariva una seconda riga di lunghezza d'onda superiore spostata rispetto alla precedente di una quantità che sembrava dipendere solo dall'angolo di deflessione. Di qui la costruzione di un modello di fotone in grado di spiegare la relazione che fornisce $\Delta\lambda$ in funzione dell'angolo di deflessione.



I risultati sperimentali di Compton con la progressiva comparsa della riga della radiazione diffusa con λ crescente al crescere dell'angolo di diffusione

¹⁴ Si è fatto uso del teorema del coseno.

2.4 Il fotone: una nuova particella

2.4.1 LE SUE CARATTERISTICHE

L'effetto fotoelettrico ci ha permesso di associare l'energia delle radiazioni elettromagnetiche a granuli detti fotoni di valore

$$\mathcal{E} = h\nu \quad (\text{VI.2.15})$$

L'effetto Compton ci ha indotto ad associare al fotone una quantità di moto:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} \quad (\text{VI.2.16})$$

solitamente si associa a questa particella anche una massa attraverso la relazione relativistica $\mathcal{E} = mc^2$ ottenendo:

$$m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{p}{c} \quad (\text{VI.2.17})$$

Dunque, nel fotone, le tre proprietà particellari tipiche dipendono tutte dalla frequenza ed esse si estrinsecano nella capacità dei fotoni di determinare una pressione sui corpi con cui interagiscono così come le molecole di un gas determinano una pressione dovuta alle variazioni di quantità di moto che si determinano negli urti (si vedano i capitoli della III parte dedicati alla teoria cinetica dei gas).



il fotone

$$\mathcal{E} = h\nu \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad m = \frac{p}{c}$$

2.4.2 LA PRESSIONE DELLA RADIAZIONE

La discussione sulla capacità delle radiazioni di produrre pressione è stata risolta una prima volta da Maxwell che ha determinato una relazione simile a quella che dedurremo tra breve per i fotoni; tale relazione è stata poi verificata sperimentalmente a fine 800. L'onda elettromagnetica è in grado di indurre una pressione perché il campo elettrico mette in moto gli elettroni del corpo su cui incide e questi sotto l'azione del campo magnetico (trasversale rispetto al campo elettrico) risultano soggetti ad una forza di Lorentz ortogonale ai due campi e cioè nella direzione di propagazione dell'onda.

Dal punto di vista della teoria dei fotoni le cose vanno così: quando un fotone incide su un corpo esso può essere assorbito a riflesso ¹⁵. Nel primo caso si determina una variazione di quantità di moto pari a $p = \frac{h\nu}{c}$ e nel secondo caso pari a $2p$.

La pressione ρ è determinata dalla variazione di quantità di moto per unità di area e unità di superficie:

$$\rho = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\Delta p}{\Delta t \Delta S}$$

Se indichiamo con n il numero di fotoni incidenti per unità di tempo ed unità di superficie e con R un numero puro che indica la frazione di fotoni riflessi avremo che vengono riflessi al secondo e al metro quadro nR fotoni mentre ne vengono assorbiti $n(1 - R)$ pertanto, tenendo conto della variazione di quantità di moto associata ad ogni singolo fotone sarà:

¹⁵ consideriamo per semplicità solo i due casi estremi

$p = nR2p + n(1 - R)p = np(1 + R)$ e dunque:

$$p = n \frac{h\nu}{c} (1 + R) \quad (\text{VI.2.18})$$

ma la quantità $n h \nu$ rappresenta la potenza incidente per unità di superficie e cioè l'intensità luminosa e dividendo per c si ottiene la densità di energia per unità di volume e

$$p = \frac{I}{c} (1 + R) = e (1 + R) \quad (\text{VI.2.19})$$

l'ultima relazione ha il vantaggio di risultare valida sia in ambito ondulatorio sia in ambito corpuscolare e ciò non ci deve stupire visto che eseguendo le medie su molti eventi (cosa che caratterizza il calcolo della pressione) si viene a smarrire la differenza tipica della granularità del processo elementare.

2.4.3 I FOTONI E IL CAMPO GRAVITAZIONALE: LA VARIAZIONE DI FREQUENZA E LA DEFLESSIONE

Con la equazione (VI.2.17) abbiamo associato al fotone una massa; si tratta di una massa particolare perché ad essa non corrisponde una massa di riposo ma, come per tutte le masse, avremo a che fare con coincidenza tra significato inerziale e gravitazionale (principio di equivalenza).

Detto in altri termini: i fotoni interagiscono con i campi gravitazionali?

La risposta è positiva e riguarda sia una variazione di frequenza del fotone, sia una deflessione nella traiettoria, in presenza di campi gravitazionali.

Un fotone che cade in un campo gravitazionale cambia la sua energia di una quantità molto piccola ma misurabile

La *variazione di frequenza* può essere determinata osservando che un fotone di energia $\mathcal{E} = h\nu$ nel passare da un punto a potenziale gravitazionale V a $V + \delta V$ (in base al teorema di conservazione dell'energia) cambia la sua energia di $\delta \mathcal{E} = -m \delta V = -\frac{\mathcal{E}}{c^2} \delta V$. Si ha pertanto $\frac{\delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c^2} \delta V$.



Da qui, integrando tra due generici stati ① e ② si ottiene:

$$\int_{\text{①}}^{\text{②}} \frac{\delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c^2} \int_{\text{①}}^{\text{②}} \delta V \quad \Leftrightarrow \quad \ln \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = -\frac{1}{c^2} (V_2 - V_1) \quad \Leftrightarrow$$



$$\ln \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{c^2} (V_1 - V_2) \quad (\text{VI.2.20})$$

La relazione, in presenza di campi gravitazionali molto intensi, quali quelli che si determinano in vicinanza delle stelle, determina apprezzabili variazioni di frequenza nelle righe spettrali osservabili astronomicamente ed è stata inizialmente verificata a questo livello.

A titolo di esempio calcoliamo il valore di V/c^2 a livello della superficie terrestre:

$$\frac{V}{c^2} = -G \frac{M_T}{c^2 R_T} = -6.67 \times 10^{-11} \frac{5.98 \times 10^{24}}{9 \times 10^{16} \cdot 6.37 \times 10^6} \approx 7 \times 10^{-10}$$

Il termine decisivo è dato dal rapporto $\frac{M}{R}$ e nel caso del Sole si arriva a 2×10^{-6} .

Supponiamo di voler calcolare lo spostamento spettrale di un fotone che cade di $h = 100$ m nel campo gravitazionale terrestre in prossimità della superficie terrestre stessa.

$$\frac{1}{c^2} (V_1 - V_2) = G \frac{M_T}{c^2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \approx G \frac{M_T}{c^2} \frac{h}{R_T^2} \approx 7 \times 10^{-10} \cdot \frac{h}{R_T} \approx 10^{-14}.$$

Se teniamo conto della formula sul cambiamento di base avremo allora:

$$\log \frac{v_2}{v_1} = \log e \cdot 10^{-14} \approx 0.434 \times 10^{-14}$$

e pertanto $\frac{v_2}{v_1} \approx 1.0000000000000092$ ovvero la variazione si ha a partire dalla quindicesima cifra significativa.

Sembrerebbe trattarsi di un fenomeno non verificabile sulla terra e invece nel 1960, sfruttando un particolare effetto di fisica del nucleo, noto come effetto Mössbauer, Pound e Rebka sono riusciti a rivelare la variazione energetica di un fotone in una torre dell'università di Harvard alta

solo 22.6 m rivelando un rapporto $\frac{\Delta v}{v} = 2.46 \times 10^{-15}$.

Ma il fotone che nel vuoto si muoverebbe di moto rettilineo subisce gli effetti di curvatura dello spazio connessi alla presenza di un campo gravitazionale.

Se si esegue un calcolo approssimato di tipo classico si arriva a determinare una deviazione dalla traiettoria rettilinea quando il fotone passa a distanza r da una massa M pari a:

$$\varphi = \frac{2 G M}{c^2 r}$$

Il calcolo, svolto, con il formalismo della relatività generale porta ad un risultato doppio che nel caso del Sole equivale ad una deflessione di 1.75 " di °.

2.4.4 QUALCHE DETERMINAZIONE DI TIPO QUANTITATIVO

Energia e massa dei fotoni nello spettro elettromagnetico

Consideriamo un fotone nella zona dell'infrarosso ($\lambda_1 = 2.5 \mu\text{m}$), uno nella zona della luce verde ($\lambda_2 = 0.53 \mu\text{m}$), uno nella regione dei raggi X ($\lambda_3 = 0.012 \text{ nm}$) e un fotone gamma ($\lambda_4 = 1.5 \text{ pm}$). Determinare le corrispondenti energie in eV e le masse in kg.

⊗

Se si misura la energia in J si ha $\mathcal{E} = h \nu = h \frac{c}{\lambda}$ e pertanto in eV

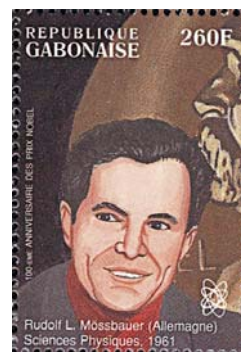
$$\mathcal{E}_{\text{eV}} = \frac{c h}{e \lambda} = \frac{2.998 \cdot 10^8 \cdot 6.626 \cdot 10^{-34}}{1.602 \cdot 10^{-19}} \frac{1}{\lambda} = 1.240 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\lambda}$$

pertanto si ha:

$$\mathcal{E}_{1\text{eV}} = \frac{1.240 \cdot 10^{-6}}{0.53 \cdot 10^{-6}} = 0.496 \text{ eV}$$

operando analogamente si ottiene:

$$\mathcal{E}_{2\text{eV}} = 2.34 \text{ eV} \quad \mathcal{E}_{3\text{eV}} = 103.3 \text{ keV} \quad \mathcal{E}_{4\text{eV}} = 0.827 \text{ MeV}$$



Per calcolare le masse equivalenti conviene calcolare la massa corrispondente a 1 eV in modo di operare poi tutte le conversioni attraverso un unico fattore moltiplicativo:

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J} = m_{\text{eq}} c^2 \text{ da cui}$$

$$m_{\text{eq}} = \frac{1.602 \cdot 10^{-19}}{(2.998 \cdot 10^8)^2} = 1.782 \cdot 10^{-36} \text{ kg/eV}$$

pertanto:

$$m_1 = m_{\text{eq}} \cdot \mathcal{E}_{1\text{eV}} = 1.782 \cdot 10^{-36} \cdot 0.496 = 8.84 \cdot 10^{-37} \text{ kg}$$

$$m_2 = 4.17 \cdot 10^{-36} \text{ kg} \quad m_3 = 1.84 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \quad m_4 = 1.47 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$



Una popolazione di fotoni che trasporta un'energia macroscopica



Quanti fotoni al secondo devono cadere su una superficie $S = 5.00 \text{ cm}^2$ per determinare una intensità luminosa di 22.4 W/m^2 ipotizzando che si tratta di fotoni nella zona dell'ultravioletto con energia di $\mathcal{E} = 4.98 \text{ eV}$?



$$\text{Il valore fornito corrisponde ad una potenza } P = 22.4 \cdot 5.00 \cdot 10^{-4} = 0.0112 \text{ W} = \frac{0.0112}{1.602 \cdot 10^{-19}} = 6.99 \cdot 10^{16} \text{ eV/s}$$

$$\text{Il numero richiesto è dunque pari a } n = \frac{P}{\mathcal{E}} = \frac{6.99 \cdot 10^{16}}{4.98} = 1.40 \cdot 10^{16} \text{ fotoni/s}$$



Il massimo potenziale a cui si può portare un metallo che perda elettroni per effetto fotoelettrico



Una piastra di Cadmio (lavoro di estrazione $\mathcal{L}_e = 4.07 \text{ eV}$) viene irradiata con luce prodotta da una lampada a vapori di mercurio con finestra di quarzo in modo che non venga fermata la radiazione ultravioletta). Sapendo che il mercurio presenta nel suo spettro una riga molto intensa a $\lambda = 0.254 \mu\text{m}$ determinare il potenziale massimo che la lastra può assumere.



I fotoni a $\lambda = 0.254 \mu\text{m}$ corrispondono ad una energia

$$\mathcal{E} = h \nu = \frac{h c}{\lambda} = 7.82 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 4.88 \text{ eV}$$

Poiché il $\mathcal{L}_e = 4.07 \text{ eV}$ gli elettroni possono venir emessi con una energia cinetica massima pari a $\mathcal{E} - \mathcal{L}_e = 0.71 \text{ eV}$.

Poiché man mano che la piastra si carica positivamente essa esercita un contro campo sugli elettroni emessi la emissione cessa quando la piastra assume il potenziale di 0.71 V .



Un elettrone libero non può assorbire completamente un fotone



Dimostrare che se si ipotizza un effetto Compton in cui il fotone di energia $\mathcal{E}$ viene completamente assorbito si perviene ad un risultato in contrasto con i postulati della teoria della relatività



Se il fotone viene completamente assorbito dovrà essere:

$\mathcal{E} = \Delta m c^2$ per la conservazione dell'energia

$\frac{\mathcal{E}}{c} = m v$ per la conservazione della quantità di moto

Se si fa il rapporto si ottiene:

$$c = \frac{\Delta m c^2}{m v} \Leftrightarrow \beta \neq 0 \wedge \beta = \frac{m - m_0}{m} = 1 - \frac{m_0}{m} = 1 - \sqrt{1 - \beta^2} \text{ ovvero}$$

$$\sqrt{1 - \beta^2} = 1 - \beta \Leftrightarrow 1 - \beta^2 = (1 - \beta)^2 \Leftrightarrow 2\beta^2 - 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \vee \beta = 1$$

L'unica soluzione si ha per $\beta = 1$ in contrasto con il carattere limite della velocità della luce nel vuoto.



Calcolo della frazione di energia ceduta all'elettrone di rinculo

Si consideri un fotone X di energia $\mathcal{E} = 25.5 \text{ keV}$ che subisce una diffusione Compton $\phi = 57.5^\circ$. Calcolare la frazione di energia ceduta all'elettrone.



In base alla relazione di Compton si ha:

$$\Delta\lambda = 2.426 \cdot 10^{-12} (1 - \cos \phi) = 2.426 \cdot 10^{-12} (1 - \cos 57.5) = 1.1225 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

$$\text{Poiché } \lambda = \frac{h c}{\mathcal{E}} = \frac{h c}{e \mathcal{E}_{\text{eV}}} = \frac{2.998 \cdot 10^8 \cdot 6.626 \cdot 10^{-34}}{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 25.5 \cdot 10^3} = 4.86 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

il fotone diffuso ha una lunghezza d'onda $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 4.97 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

a cui corrisponde una energia

$$\mathcal{E}_{\text{eV}}' = \frac{h c}{e \lambda'} = \frac{2.998 \cdot 10^8 \cdot 6.626 \cdot 10^{-34}}{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 4.97 \cdot 10^{-11}} = 24.9 \text{ keV}$$

il valore richiesto è dunque:

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{eV}} - \mathcal{E}_{\text{eV}}'}{\mathcal{E}_{\text{eV}}} = \frac{25.5 - 24.9}{25.5} = 0.023$$



Calcolo della velocità massima dei fotoelettroni

Un fascio di fotoni di lunghezza d'onda λ estrae elettroni da un metallo caratterizzato da lavoro di estrazione $\mathcal{L}_{\text{eV}}$. Determinare la relazione che fornisce la velocità massima dei fotoelettroni nel caso in cui l'energia dei fotoni e il lavoro di estrazione abbiano lo stesso ordine di grandezza



Perché i fotoni diano luogo all'effetto fotoelettrico deve essere: $\mathcal{E}_{\text{eV}} > \mathcal{L}_{\text{eV}}$. La richiesta che le due quantità abbiano lo stesso ordine di grandezza ci garantisce sul fatto che ci troviamo in zona non relativistica. Infatti il lavoro di estrazione è di qualche eV e la energia di riposo degli elettroni è di 500 keV pertanto la energia cinetica avrà valori molto minori della energia di riposo. Ciò ci permette di usare per la energia cinetica l'espressione $\frac{1}{2} m v^2$.

Sarà dunque:

$$\frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = \mathcal{E} - e \mathcal{L}_{\text{eV}} = \frac{h c}{\lambda} - e \mathcal{L}_{\text{eV}}$$

da qui si ottiene:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{h c}{\lambda} - e \mathcal{E}_{\text{eV}} \right)}$$



Calcolo della energia di un fotone X dalla osservazione della traiettoria degli elettroni di rinculo



Un fotone X di energia $\mathcal{E}$ determina il rinculo di un elettrone che, dopo essere entrato in una camera a nebbia in cui agisce un campo magnetico ortogonale $B = 0.0325$ T, viene deflesso con un raggio di curvatura $r = 1.3$ cm. Sulla base dei dati determinare la energia minima del fotone.



Dalla conoscenza di B e di r è possibile risalire direttamente alla quantità di moto dell'elettrone.

In base a quanto ampiamente discusso nel capitolo sugli acceleratori (parte V cap. 7) si ha infatti $r = \frac{p}{qB}$ e tale relazione vale anche entro i limiti relativistici.

Dunque:

$$p_e = e r B = 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 1.3 \cdot 10^{-2} \cdot 0.0325 = 6.77 \cdot 10^{-23} \text{ kg m/s}$$

A questo valore di quantità di moto corrisponde in base alla relazione che correla quantità di moto ed energia $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_0^2 + (p_e c)^2$ una energia totale:

$$\mathcal{E}_e = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (p_e c)^2} = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (p_e c)^2}$$

Per verificare se ci troviamo in ambito relativistico calcoliamo separatamente i due termini che si sommano nella radice; si ha:

$\mathcal{E}_0 = 8.19 \cdot 10^{-14} \text{ J}$ e $p_e c = 2.03 \cdot 10^{-14} \text{ J}$ (i due valori sono comparabili e dunque siamo in ambito relativistico)

$$\mathcal{E}_e = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (p_e c)^2} = 8.43 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

La energia cinetica dell'elettrone (differenza tra energia totale ed energia di riposo vale dunque): $\mathcal{E}_k = 2.48 \cdot 10^{-15} \text{ J}$

La energia necessaria al fotone assumerà il suo valore minimo quando questi fotone viene diffuso all'indietro e l'elettrone va in avanti (perché in quel caso all'elettrone viene ceduto il massimo di quantità di moto); sarà in quel caso:

$\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}_k \wedge p = -p' + p_e$ ma tenendo conto del legame tra energia e quantità di moto nei fotoni ciò equivale ad affermare che:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}_k \wedge \mathcal{E} = -\mathcal{E}' + p_e c$$

facendo la somma si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} (\mathcal{E}_k + p_e c) = \frac{1}{2} (2.48 \cdot 10^{-15} + 2.03 \cdot 10^{-14}) = 1.14 \cdot 10^{-14} \text{ J} = \\ &= \frac{1.14 \cdot 10^{-14}}{1.602 \cdot 10^{-19}} = 71.1 \text{ keV} \end{aligned}$$



Calcolo della pressione esercitata da un fascio concentrato di fotoni su di una superficie parzialmente riflettente

Una lampada da 1200 W con filamento puntiforme illumina una superficie piana $\sigma = 15.2 \text{ cm}^2$ posta ad una distanza $r = 75.2 \text{ cm}$. La superficie ha un potere riflettente $R = 0.7$ e la normale ad essa forma un angolo di 15° con i raggi centrali provenienti dalla lampada. Stimare la pressione di radiazione.



Per calcolare la pressione di radiazione dobbiamo essere in grado di stimare la intensità luminosa che colpisce la nostra superficie e ciò richiede di valutare preventivamente il grado di divergenza dei raggi luminosi che, come recita il testo sono divergenti (sorgente puntiforme).

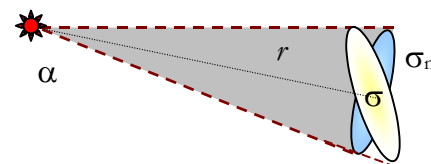
Possiamo valutare il grado di divergenza stimando l'angolo sotto cui la nostra superficie viene vista dal filamento. Tale angolo può essere stimato tramite il rapporto tra la dimensione lineare della sezione in direzione ortogonale $\sqrt{\sigma} \cos 15^\circ$ e la distanza; tale rapporto esprime in radianti l'angolo α di divergenza.

$$\alpha = \frac{\sqrt{15.2} \cos 15^\circ}{75.2} = 0.050 \text{ rad} = 2.9^\circ$$

Poiché α è piccolo possiamo ipotizzare che i raggi siano paralleli. Sarà pertanto

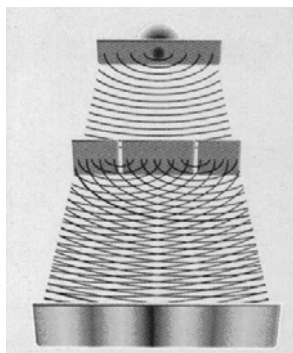
$$I = \frac{P \sigma \cos 15}{4 \pi r^2} = \frac{1200 \cdot 15.2 \cos 15}{4 \pi \cdot 75.2^2} = 0.248 \text{ w/cm}^2 = 0.248 \cdot 10^4 \text{ w/m}^2$$

$$\text{Ma } p = \frac{I}{c} (1 + R) = \frac{0.248 \cdot 10^4}{2.998 \cdot 10^8} \cdot 1.7 = 1.41 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$



2.5 Il dualismo ondulatorio corpuscolare

2.5.1 UN NUOVO MODO DI GUARDARE ALLA REALTÀ



le onde quando attraversano una doppia fenditura creano la tipica **figura di interferenza** caratterizzata da frange di massimi e minimi

Il fatto che la luce (e tutto lo spettro elettromagnetico) presenti caratteristiche sia ondulatorie sia corpuscolari ha delle notevoli implicazioni in tutti quei casi in cui i due comportamenti risultino mutuamente esclusivi. Nel primo novecento i fisici si sono dapprima stupiti e hanno poi fatto tesoro di ciò imponendo alla scienza un tipo di linguaggio più adatto a descrivere situazioni che nel linguaggio comune sono contraddizioni.

Prendiamo in esame un tipico comportamento ondulatorio: l'esperimento di interferenza della doppia fenditura che consentì a Young di misurare la lunghezza d'onda della luce.

Come sappiamo quando un fascio di radiazione monocromatica e coerente incide su due fenditure al di là si proiettano una serie di righe che indicano la presenza di zone di interferenza costruttiva e distruttiva. Alla luce della teoria dei fotoni ci chiediamo come ciò sia possibile.

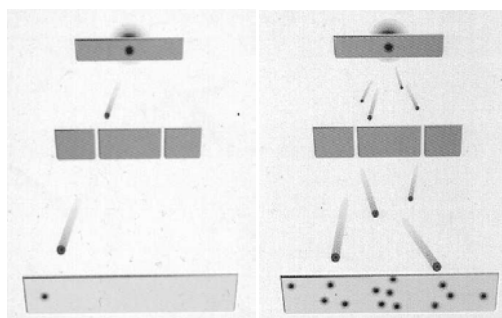
In effetti se immaginiamo di ridurre la intensità luminosa in maniera così fine da far emettere alla sorgente uno o pochi fotoni alla volta ed andiamo ad analizzare cosa succede al di là della fenditura osserveremo che i fotoni lasciano dei segni individuali su una lastra fotografica (tipico comportamento corpuscolare). Ma, se scegliamo di aspettare, cominceranno a comparire sulla lastra i chiari segni delle frange di interferenza.

Potremmo pensare che si tratti di un comportamento legato al fatto che le particelle di luce vengono diffuse in un modo particolare dai bordi delle fenditure e quindi non arrivano mai nelle zone che chiamiamo di interferenza distruttiva. Per risolvere il dubbio decidiamo di osservare il comportamento dei fotoni che attraversano una singola fenditura (basta chiudere una delle due fenditure); eseguiamo l'esperimento e siamo costretti ad ammettere che non c'è nessuna diffusione speciale: appena chiudiamo una delle due fenditure i fotoni vengono sì diffusi con preferenza in alcune regioni ma sullo schermo si osserva la tipica figura di diffrazione caratterizzata da un massimo centrale sfuocato sui bordi. Il massimo centrale si trova proprio in corrispondenza della fenditura aperta.

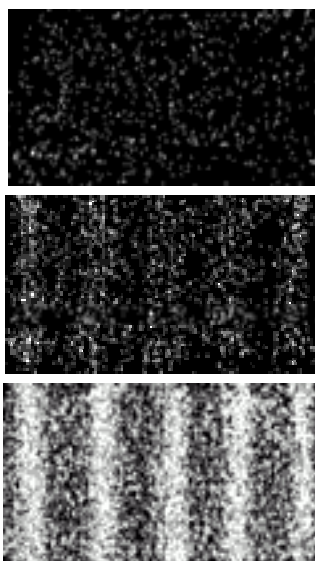
Dunque quando le due fenditure sono aperte i fotoni attraversano l'una o l'altra (o entrambe) delle due fenditure e poi interagiscono con lo schermo in maniera corpuscolare dando luogo ad un comportamento che se viene analizzato statisticamente appare come ondulatorio.

Ci rimane da fare un ultimo esperimento: decidere se i fotoni attraversano l'una o l'altra delle due fenditure. A questo scopo possiamo mettere dei rivelatori di fotoni subito al di là delle due fenditure; i rivelatori ci segnalano che il fotone passa o nell'una o nell'altra e mai attraverso entrambe ma, per quanto riguarda lo schermo, ci attende una amara sorpresa: se usiamo i rivelatori la figura di interferenza sparisce.

Dunque i fotoni hanno interazioni corpuscolari con la pellicola, sono in grado di produrre figure di interferenza anche quando eseguiamo un esperimento a bassa intensità e a lunga esposizione che esclude la possibilità di una interferenza tra due fotoni che viaggiano verso lo schermo, passano attraverso l'una o l'altra delle fenditure ma se intendiamo rivelare questo tipico comportamento corpuscolare la loro capacità di produrre



I fotoni dopo aver attraversato una doppia fenditura lasciano sulla pellicola **tracce individuali** vediamo cioè l'azione di corpuscoli



Ma, un fotone dopo l'altro, alla fine **compaiono le frange di interferenza** come risultato statistico di eventi individuali con natura corpuscolare

re interferenza sparisce e al posto delle frange compaiono due macchie sfumate e affiancate.

Cosa possiamo concludere da tutto ciò? La risposta della fisica è che ci stiamo occupando della indagine di un mondo che ha caratteristiche molto diverse da quelle della esperienza sensibile. Abbiamo cambiato scala all'indagine (ci stiamo occupando di quanti di energia) e scopriamo che persino il linguaggio che usiamo di solito è inadeguato a descrivere la realtà. Persino domande innocenti come *il fotone è passato attraverso la fenditura di sinistra o di destra?* non ammettono più risposta: stiamo scoprendo che non ha senso parlare di traiettoria del fotone.

Questo è il commento di Einstein:

La scienza ci costringe a creare nuove idee, nuove teorie, il cui primo obbiettivo è quello di abbattere il muro di contraddizioni che spesso blocca la via del progresso. Tutte le idee scientifiche fondamentali sono sorte dai drammatici conflitti tra la realtà ed i nostri tentativi per intenderla.

Ci troviamo ora di fronte ad un nuovo problema per la cui soluzione occorre fare appello a nuovi principi. Ma prima di dar conto dei tentativi fatti dalla scienza moderna per cercare di spiegare le contraddizioni fra gli aspetti quantistici ed ondulatori della luce mostreremo che la stessa difficoltà sorge non soltanto per i quanti di luce, ma anche per i quanti di materia.¹⁶

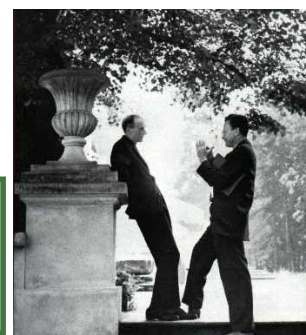
E questo è il commento di un altro premio Nobel ancora più radicale nell'affermare la necessità di adeguare il nostro linguaggio alla realtà, Richard Feynman:¹⁷

Una volta un filosofo ha detto: "È necessità stessa della scienza che le stesse condizioni producano sempre gli stessi risultati." Be', non è vero. Anche quando le condizioni rimangono uguali, non si può predire dietro a quale foro si vedrà l'elettrone. Eppure la scienza, nonostante tutto, continua ad andare avanti, anche se le stesse condizioni non sempre producono gli stessi risultati. Certo, il fatto di non poter predire esattamente quello che succederà ci rende un po' infelici...

Quello che è necessario "per l'esistenza stessa della scienza" è che quelle che sono le caratteristiche della natura non devono essere determinate da pretenziose condizioni aprioristiche, ma dal materiale con cui lavoriamo, cioè dalla natura. Noi guardiamo, vediamo quello che troviamo, e non possiamo decidere in precedenza quello che deve essere. Le possibilità più plausibili spesso risultano non essere vere. Per il progresso della scienza occorre la capacità di sperimentare, l'onestà nel riferire i risultati (che vanno riportati senza tener conto di come avremmo voluto che fossero) e infine, cosa importante, l'intelligenza per interpretarli. L'essenziale è che questa intelligenza non deve essere sicura in anticipo di come le cose devono essere. È chiaro che si possono avere pregiudizi che ci portano a dire: "Questo è molto improbabile; questo non mi piace." Pregiudizi di tal fatta sono però diversi dalla certezza assoluta, indicano soltanto un'inclinazione. Fino a che si è solo disposti sfavorevolmente ma non si ha un pregiudizio assoluto, si finirà prima o poi per tener conto degli esperimenti anche se i risultati sono diversi dalle nostre aspettative. Se invece si è assolutamente certi in anticipo di qualche precondizione che la scienza deve soddisfare si arriverà addirittura a trascurare i risultati. Per l'esistenza stessa della scienza è necessario che esistano delle menti che non ammettono che la natura debba soddisfare delle condizioni preconette, come quelle poste dal nostro filosofo.



Planck, Bohr ed Einstein: tre giganti della fisica del 900 che non si sono fermati alle certezze del senso comune nell'interpretare il reale

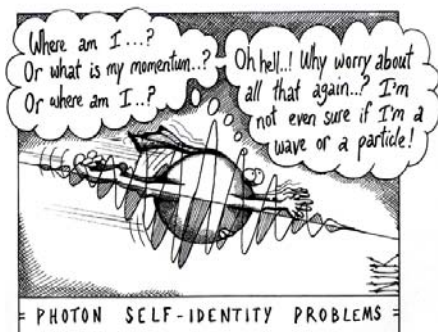


Richard Feynman (a destra) discute con Paul Dirac: "Per l'esistenza stessa della scienza è necessario che esistano delle menti che non ammettono che la natura debba soddisfare delle condizioni preconette"

¹⁶ Albert Einstein (1938), *L'evoluzione della fisica*, ed. Boringhieri pag. 274

¹⁷ Richard Feynman (1965), *La legge fisica*, ed. Boringhieri pag. 166

2.5.2 COMPORTAMENTI ONDULATORIO E COMPORTAMENTO CORPUSCOLARE NEI FENOMENI FISICI RILEVANTI



Abbiamo visto che i due fenomeni che sanciscono il comportamento corpuscolare dei fotoni sono l'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton. Ma cosa rimane delle leggi fisiche che erano state stabilite utilizzando il carattere ondulatorio della radiazione elettromagnetica?

Effetto Doppler: può essere analizzato oltre che in chiave ondulatoria anche in chiave corpuscolare ed in entrambe le trattazioni si arriva alle stesse leggi. Se si effettua la trattazione di questo effetto in chiave fotonica si opera analizzando la emissione da parte di una sorgente in moto mediante le due leggi di conservazione della energia e della quantità di moto e si arriva ad una relazione che mette in relazione le energie interne iniziali e finali della sorgente con la energia della radiazione. Se ora si introduce l'ipotesi di Einstein le energie scompaiono per far posto alle frequenze mentre la costante di Planck si semplifica e si ottengono le stesse leggi deducibili per via ondulatoria. Tale risultato non cambia se si passa alla trattazione relativistica (le leggi di conservazione valgono ancora anche se cambiano le equazioni che le rappresentano).

Riflessione e rifrazione dei fotoni: come si è visto nei capitoli di ottica una delle ragioni della vittoria del modello ondulatorio fu dovuta al fatto che i due modelli consentivano entrambi di dedurre le due leggi della riflessione e della rifrazione ma interpretavano in maniera diversa il significato dell'indice di rifrazione. Mentre per il modello corpuscolare di tipo newtoniano l'indice di rifrazione era proporzionale alla velocità di propagazione nel mezzo, per il modello ondulatorio esso era inversamente proporzionale; la misura diretta della velocità della luce nei mezzi (che risultò minore di quella del vuoto) fu considerata una prova decisiva nel respingere il modello fotonico newtoniano.

Nell'ambito del modello fotonico einsteiniano le cose vanno però diversamente: si dimostra dapprima che il numero dei fotoni incidenti è pari alla somma di quelli riflessi e trasmessi e che la frequenza degli stessi non cambia. Ma mentre nella riflessione si ha $p = p_r$ si dimostra che la quantità di moto del fotone diffuso (rifratto) p_d è legata a quella del fotone incidente p dalla relazione $p_d = n p$. Da qui si arriva a dimostrare che anche nel modello fotonico (come nel modello ondulatorio) l'indice di rifrazione è inversamente proporzionale alla velocità.

