

## VII.2 La Fisica del nucleo

- ⌘ Il neutrone
- ⌘ Conoscenze quantitative sui nuclei
- ⌘ La distribuzione degli isotopi e la valle di stabilità
- ⌘ Energia del legame nucleare e difetto di massa
- ⌘ Decadimento radioattivo
- ⌘ Radioattività artificiale e datazione radioattiva

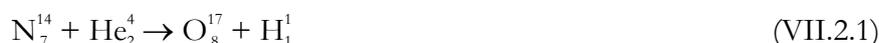
### 2.1 Il neutrone

#### 2.1.1 IL NEUTRONE: PREMESSE ALLA SCOPERTA

Nel paragrafo 4.3 della parte VI è stata presentata la relazione del 1920 in cui Rutherford presenta ai membri della Royal Society i principali risultati della sua scuola.

Tale relazione si chiude con i primi esperimenti dedicati alla trasmutazione nucleare ed in particolare alla capacità delle particelle  $\alpha$  di produrre nuclei di idrogeno dopo aver bombardato l'azoto.

Si tratta della prima evidenza sperimentale della presenza del protone come costituente dei nuclei. Essa è descritta dalla reazione nucleare:



Di solito si data da qui la nascita della fisica nucleare; se nei nuclei ci sono i protoni riprende interesse una questione già nota alla scuola di Rutherford: come mai nei diversi elementi ad una carica nucleare  $Ze$ , indicativa della presenza di  $Z$  protoni, corrisponde una massa grosso modo pari a circa  $2Z$ ?

Le prime ipotesi di Rutherford depongono a favore della possibilità che nel nucleo siano presenti, accanto a  $Z$  protoni, anche  $Z$  nuove entità caratterizzate da un legame molto stretto tra protoni ed elettroni in modo di determinarne la neutralità elettrica.

Tali nuove particelle, grazie alla neutralità, si dovrebbero muovere molto facilmente nella materia, penetrare sino all'interno dei nuclei e disgregarsi solo in vicinanza dei campi nucleari con espulsione di un protone e di un elettrone.

Si tratta esattamente della descrizione delle caratteristiche e delle proprietà del *neutrone* che, in aggiunta, ha una nuova proprietà: esso non è costituito dal legame tra due particelle pre-esistenti ma si tratta di una nuova *particella elementare*.<sup>1</sup>

La evidenza sperimentale della esistenza del neutrone riguarda gli anni dal 1930 al 1932.

Negli anni immediatamente successivi verranno osservati il decadimento del neutrone libero, la sua capacità di indurre radioattività artificiale e quella di fissionare i nuclei pesanti.

Il neutrone diventerà il protagonista di un nuovo capitolo della fisica, della storia dell'energia e della costruzione di armi di distruzione di massa. In questo processo avrà un ruolo fondamentale la nuova scuola di fisica teorica italiana guidata da Enrico Fermi.

#### 2.1.2 PERCHÉ IL NEUTRONE NON CONTIENE ELETTRONI?

<sup>1</sup> Con una precisazione: mentre la fisica dagli anni 30 agli anni 70 del 900 considererà il protone e il neutrone due stati di una particella elementare unica *il nucleone*, con il modello standard si scoprirà che né il protone né il neutrone sono particelle elementari essendo essi formati dalla unione di tre quark.



Nel 1932 la Fiat lancia la sua prima *macchina di massa* la *Balilla* a 3 marce e i manifesti pubblicitari oscillano tra il riscatto della *grande proletaria* e l'*emancipazione della donna*

La possibilità che possa esistere un aggregato *elettrone–protone* a bassissima distanza si scontra con la previsione del principio di indeterminazione sulla localizzazione delle particelle.

Se si ipotizza una dimensione tipica  $\Delta x = 10^{-14}\text{m}$  dal principio di Heisenberg si ottiene  $\Delta p = 10^{-19}\text{kgm/s}$  e, ipotizzando che sia  $p \approx \Delta p$ , si ottiene per l'elettrone un valore di  $\mathcal{E} \approx 200\text{ MeV}$  molto maggiore delle energie tipiche del decadimento beta che sono dell'ordine del MeV.

La possibilità che l'elettrone pre-esista nel neutrone si scontra anche con la misura dello spin nucleare. Infatti, poiché sia gli elettroni sia i protoni sono particelle con spin semi-intero, nel caso di nuclei con numero atomico pari e numero di massa dispari, si avrebbe un numero pari di costituenti elementari dato dai protoni e dai protoni ed elettroni legati:

$$Z + 2(A - Z) = 2A - Z \text{ che è un numero pari.}$$

Dunque essi dovrebbero avere uno spin intero mentre invece molti di tali elementi, come per esempio il  $\text{Be}_9$ , presentano un momento angolare semi intero.

### 2.1.3 I PASSI CHE PORTANO ALLA SCOPERTA DEL NEUTRONE: UNA NUOVA RADIAZIONE PENETRANTE NON ADDEBITABILE AI GAMMA

A cavallo del 1930 le ricerche di struttura della materia tramite bombardamento con le  $\alpha$  utilizzano come sorgente radioattiva il  $\text{Po}_{84}^{214}$  perché questo isotopo ha un decadimento caratterizzato dalla emissione delle sole  $\alpha$  e dunque produce sorgenti *pulite* in un contesto in cui si deve indagare l'ignoto. E' fondamentale conoscere bene le caratteristiche del proiettile per poter interpretare i risultati sperimentali.

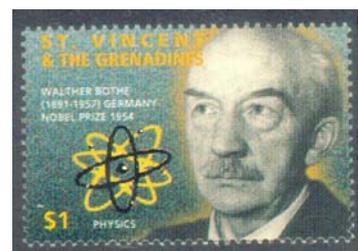
La ripetizione degli esperimenti di Rutherford aveva portato a scoprire che, ad eccezione del Li e del Be, tutte le sostanze di basso numero atomico dopo essere state bombardate con le  $\alpha$  emettevano protoni.

Nel tentativo di scoprire le ragioni di questa anomalia gli schermi di Platinocianuro di bario, con cui si osservano le scintillazioni dovute alle interazioni, vennero sostituiti con contatori Geiger e si osservò che, in realtà, il Li, il Be e il Bo emettevano una nuova radiazione molto penetrante in grado di attraversare anche lamine di Pb; poiché le radiazioni penetranti per eccellenza erano i raggi  $\gamma$  il nuovo fenomeno fu inizialmente classificato come emissione di raggi  $\gamma$ .

Poiché il potere di attenuazione dei  $\gamma$  da parte del piombo era noto si stimò in circa 7 MeV l'energia di questi *pseudogamma* (Walther Bothe <sup>2</sup>, 1930).

Questi risultati, presentati in un congresso di fisica a Roma, furono ripresi dai coniugi Frédéric Joliot e Irene Curie (figlia di Marie) che furono in grado di stimare con maggiore precisione l'energia dei raggi del berillio.

W. Bothe scoprì una nuova radiazione penetrante emessa dal Berillio bombardato con le  $\alpha$  e ipotizzò che si trattasse di raggi  $\gamma$  duri



I coniugi Joliot-Curie sottoposero ad indagine quantitativa la radiazione *pseudogamma* del Berillio. Il risultato fu sconcertante perché portava ad ipotizzare che i  $\gamma$  avessero energie dell'ordine di 50 MeV



<sup>2</sup> Walther Bothe (1891–1957) ebbe il premio Nobel nel 1954 per la scoperta del circuito a coincidenza che, utilizzando due contatori, Geiger consentì di verificare che il quanto X diffuso e l'elettrone di rinculo dell'effetto Compton si originavano da un unico evento per il quale era possibile verificare conservazione dell'energia e della quantità di moto.

L'esperimento consisteva nel interporre della paraffina tra il Berillio e il rivelatore; essa diventava emettitrice di protoni la cui energia veniva misurata attraverso il cammino in aria e il potere di ionizzazione. Si arrivò così a stimare in circa 4.5 MeV l'energia di tali protoni.

Ipotizzando che essi venissero espulsi dai raggi  $\gamma$  ipotizzati da Bothe essi applicarono le relazioni dell'effetto Compton ai protoni per risalire alla energia minima necessaria posseduta da quanti  $\gamma$  in grado di produrre protoni di rinculo da 4.5 MeV.

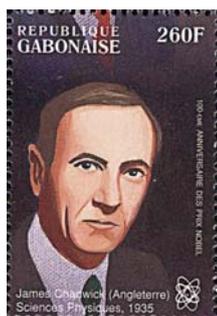
Tale calcolo viene riportato per esercizio alla fine del capitolo e porta ad una energia minima di circa 50MeV. Ma tale valore risulta in contrasto, sia con il valore misurato direttamente da Bothe, sia con la energia delle  $\alpha$  emesse dal Polonio da cui si origina il tutto (circa 5.25 MeV). Tutto ciò spinse i coniugi Joliot a ipotizzare di avere scoperto una nuova forma di interazione tra la radiazione e la materia diversa dall'effetto Compton.

A questo punto, si è all'inizio del 1932, James Chadwick <sup>3</sup> si rese conto che il risultato trovato in Francia era importante, ma andava interpretato *torlando a Rutherford* ipotizzando cioè l'esistenza di una nuova particella materiale neutra: ciò avrebbe spiegato l'elevato potere di penetrazione e anche l'energia dei protoni di rinculo senza dover immaginare l'esistenza di fotoni  $\gamma$  di energia elevatissima.

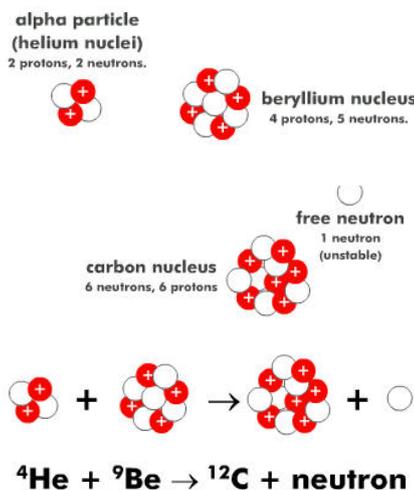
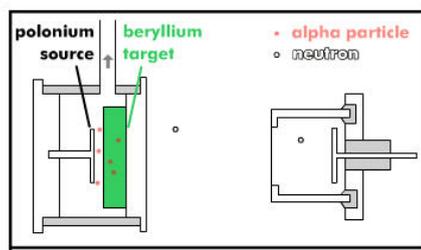
Infatti, se si urtano due particelle della stessa massa si ha, come è noto, il trasferimento integrale dell'energia cinetica e i 5 MeV delle  $\alpha$  trasferiti al *neutrone* nell'urto con il Berillio vengono poi ceduto al protone nell'urto con la paraffina.

Nella figura qui a lato sono rappresentate lo schema della apparecchiatura di Chadwick e la reazione indotta nel berillio. Attraverso questa apparecchiatura Chadwick mostrò che la capacità di emettere protoni dopo bombardamento con i raggi del berillio non era tipica solo della paraffina e che l'ipotesi della emissione dei protoni per effetto Compton era assolutamente da rigettare perché avrebbe portato, in contrasto con i dati sperimentali, a valori di energia dell'ipotetico quanto  $\gamma$  diversi a seconda del gas in cui avveniva il rinculo.

...Questi risultati ed altri ottenuti nel corso del presente lavoro sono incompatibili con l'assunzione che la radiazione del berillio sia un quanto di energia e contemporaneamente che nell'urto si debbano conservare l'energia e la quantità di moto. Ma queste difficoltà spariscono se si assume che la radiazione sia fatta di particelle di massa 1 e carica 0, o *neutroni*. La cattura delle particelle  $\alpha$  da parte del nucleo di  $\text{Be}^9$  determina la formazione di un nucleo di  $\text{C}^{12}$  e la emissione di un neutrone. Dalla conservazione dell'energia si può dedurre che la velocità del neutrone emesso in avanti debba essere di circa  $3 \times 10^9$  cm/s. L'urto del neutrone con gli atomi del mezzo attraversato dà luogo alla produzione di atomi di rinculo che possiedono energie in buon accordo con questa ipotesi. <sup>4</sup>



James Chadwick condusse esperimenti che consentirono di interpretare la radiazione del Berillio come una nuova particella neutra di cui si riuscì a stimare la massa trovando per essa  $m_n \approx 1.15 m_p$



Schema della apparecchiatura di Chadwick e reazione di produzione del neutrone

<sup>3</sup> James Chadwick (1891 – 1974) operando nel gruppo di Rutherford aveva già dimostrato il carattere continuo dello spettro dei beta. Premio Nobel nel 1935 per la scoperta del neutrone. Sembra che Rutherford si sia opposto ad una condivisione del premio con Joliot & Curie affermando che tanto avrebbero avuto tempo per altri successi visto che erano bravi: cosa puntualmente avvenuta con la scoperta della radioattività artificiale.

<sup>4</sup> James Chadwick, "Sulla possibile esistenza del neutrone", Nature, 27/2/1932

In un successivo scritto del maggio 1932 verranno forniti i dettagli dei conti e tre metodologie di conferma della ipotesi che la particella debba avere una massa dello stesso ordine di grandezza del protone.

#### 2.1.4 LA MASSA DEL NEUTRONE: IL CONTRIBUTO DI CHADWICK

Nell'articolo inviato alla rivista della Royal Society nel maggio '32 Chadwick presenta tre argomentazioni a favore del fatto che la radiazione del berillio abbia massa prossima a quella del protone.

Come sappiamo, applicando le leggi dell'urto elastico al caso di urto tra un neutrone di velocità  $v_n$  e un nucleo in quiete di massa  $m$ , si ottiene per la velocità  $v$  del nucleo di rinculo:

$$v = \frac{2m_n}{m + m_n} v_n$$

Se ora si esegue l'esperimento in eguali condizioni in atmosfera di idrogeno e poi di azoto e si esegue il rapporto si otterrà una relazione che non contiene la velocità del neutrone:

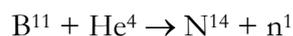
$$\frac{v_H}{v_N} = \frac{m_N + m_n}{m_H + m_n} = \frac{\frac{m_N}{m_H} + 1}{1 + \frac{m_n}{m_H}}$$

Da questa relazione si ricava immediatamente il rapporto  $\frac{m_n}{m_H}$  in funzione di  $\frac{v_H}{v_N}$  e di  $\frac{m_N}{m_H} = 14$ .

I nuclei di rinculo lasciavano tracce fotografabili nella camera a nebbia e dalla loro lunghezza era possibile risalire alle velocità. Così facendo Chadwick ottenne per  $v_H \approx 3.3 \times 10^9 \text{ cm/s}$  e per  $v_N \approx 4.7 \times 10^8 \text{ cm/s}$ . Operando per sostituzione si ottiene con un errore stimato intorno al 10% che  $\frac{m_n}{m_H} = 1.15$ .

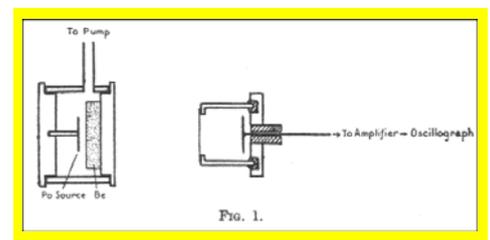
Per effettuare una stima più precisa della massa del neutrone Chadwick esaminò poi il bilancio massa energia direttamente nella prima reazione, quella da cui si origina il neutrone. Questo tipo di bilancio richiede però una buona conoscenza della massa nucleare del Be che, nel 1932, non era nota con sufficiente accuratezza. L'ostacolo venne aggirato utilizzando come bersaglio il Boro per il quale erano già note le masse nucleari (misure di Aston con lo spettrometro di massa).

Il Boro, dal punto di vista della emissione neutronica si comporta come il Berillio salvo una minore attività. La reazione è la seguente:



Nel recipiente sorgente di figura 1 il berillio venne sostituito da un bersaglio di polvere di boro depositata su della grafite. Il range dei protoni emessi dalla radiazione del boro venne misurata con la stessa tecnica usata per il berillio. Gli effetti osservati furono minori e fu pertanto più difficile misurare il range dei protoni in maniera accurata. Il massimo range in aria fu di 16 cm pari ad una velocità di  $2.5 \times 10^9 \text{ cm/s}$ . Pertanto questa è la massima velocità dei neutroni liberati dal boro quando viene bombardato dalle particelle  $\alpha$  del polonio dotate di velocità di  $1.59 \times 10^9 \text{ cm/s}$ . Supponendo che nell'urto si conservi la quantità di moto, si può determinare la velocità di rinculo del nucleo di  $\text{N}^{14}$  ed ottenere pertanto tutte le energie della particelle coinvolte. Il bilancio energetico del processo è il seguente:

Schema della apparecchiatura di Chadwick dall'articolo originale: sorgente di polonio, blocco di berillio, camera a ionizzazione mobile per misurare il range dei protoni



$$M(\text{B}^{11}) + M(\text{He}^4) + \mathcal{E}_k(\text{He}^4) = M(\text{N}^{14}) + M(\text{n}^1) + \mathcal{E}_k(\text{N}^{14}) + \mathcal{E}_k(\text{n}^1)$$

Le masse valgono  $B^{11} = 11.00825 \pm 0.0016$ ;  $\text{He}^4 = 4.00106 \pm 0.0006$ ;  $\text{N}^{14} = 14.0042 \pm 0.0028$ .

Le energie cinetiche espresse in unità di massa valgono:

particella  $\alpha = 0.00565$  ; neutrone = 0.0035 ; nucleo di azoto = 0.00061.

Troviamo così, per la massa del neutrone 1.0067. Gli errori indicati per le misure delle masse sono quelli forniti da Aston e corrispondono all'errore massimo delle sue misure e l'errore probabile può essere stimato ad  $\frac{1}{4}$  del valore indicato. Tenuto conto di ciò e degli errori di misura sembra che la massa del neutrone non possa essere inferiore a 1.003 e che probabilmente essa sia compresa tra 1.005 e 1.008.<sup>5</sup>

Chadwick conclude osservando che tale valore è compatibile con l'ipotesi che il neutrone sia fatto da un protone ed un elettrone con un difetto di massa tra 1 e 2 MeV.

Chadwick era conscio della impossibilità che il neutrone fosse la somma di un protone e di un elettrone e si occuperà di questo aspetto in occasione della Nobel Lecture in cui insiste sulla opportunità di studiare ulteriormente le proprietà della nuova particella prima di procedere ad ipotesi sulla sua costituzione.

I valori oggi accettati sono:

$$m_p = 938'272'310 \pm 280 \text{ eV} \quad m_n = 939'565'630 \pm 280 \text{ eV}$$

mentre  $m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV}$

---

<sup>5</sup> J. Chadwick, *Proc. Roy. Soc.*, (Received May 10, 1932). Traduzione di Claudio Cereda

## 2.2 Conoscenze quantitative sui nuclei

### 2.2.1 IL NEUTRONE: RUOLO NELLA STABILITÀ DEI NUCLEI ATOMICI

In prima approssimazione possiamo affermare che il ruolo del neutrone sia quello di fare da *collante nucleare*. I protoni all'interno del nucleo atomico si respingono con una forza di origine elettrica che va come  $\frac{1}{r^2}$ .

Affinché i nuclei possano essere stabili occorre che a tale forza repulsiva si contrapponga una forza attrattiva più intensa.

Tale forza è stata storicamente indicata con il nome di *interazione nucleare forte*<sup>6</sup> dove l'aggettivo *forte* stava ad indicarne l'intensità relativa rispetto alla interazione elettromagnetica.

Poiché però questa interazione decresce con la distanza molto rapidamente ed è sostanzialmente trascurabile sopra i  $10^{-14}$  m il problema della stabilità nucleare si ripresenta man mano che cresce il numero atomico. Infatti, al crescere del numero di protoni, la distanza media tra due protoni supera ben presto la soglia di rapido decremento della interazione nucleare. Detto diversamente, la forza repulsiva tra due protoni lontani continua a farsi sentire, mentre non accade altrettanto a quella attrattiva. Entrano a questo punto in gioco i neutroni che risentono della interazione nucleare ma non di quella elettrica.

Abbiamo dunque una interazione nucleare attrattiva tra p-p, p-n e n-n e una interazione elettrica repulsiva tra p-p. E' allora evidente che, al crescere delle dimensioni del nucleo, debba crescere in maniera più che lineare il numero di neutroni.

I nuclei si formerebbero allora per aggregazione di un numero di protoni pari al numero atomico con  $A - Z$  neutroni in funzione di collante. Sembrerebbe, a prima vista, che aggiungendo un opportuno numero di neutroni si possa proseguire all'infinito nella costruzione di nuovi elementi.

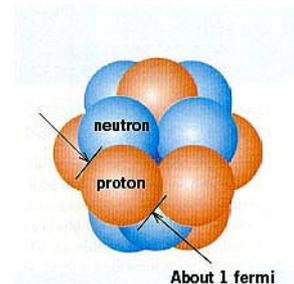
Ma, come vedremo, le cose non stanno così per ragioni di natura quantistica (*effetto tunnel*). Superato lo  $Z = 92$  dell'uranio, siamo riusciti a creare artificialmente una ventina di nuovi nuclei, ma essi risultano altamente instabili e dotati, spesso, di vite medie molto brevi che rendono del tutto convenzionale la loro dichiarazione di esistenza.

Trattando del legame nucleare abbiamo scritto *interazione nucleare forte* in corsivo perché, in realtà, non si tratta di una interazione fondamentale. Dopo i tentativi degli anni 30÷40÷50 di arrivare ad una teoria quantistica della interazione nucleare ci si è resi conto che la ragione delle continue correzioni ai modelli stava nel carattere non fondamentale di tale interazione.

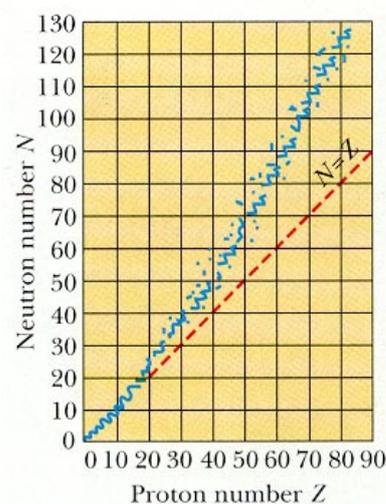
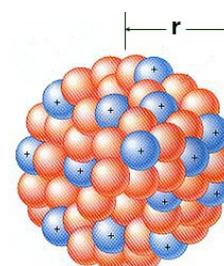
Così come il legame interatomico che forma lo stato solido o le molecole è un effetto residuo della interazione elettrica<sup>7</sup>, altrettanto si può dire per la interazione nucleonica (cioè per la interazione che riguarda i due nucleoni: il protone e il neutrone).

<sup>6</sup> Per distinguerla dalla *interazione nucleare debole* considerata responsabile della radioattività.

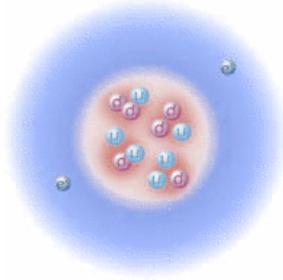
<sup>7</sup> Si pensi al dipolo elettrico che, nonostante la sua neutralità, produce azioni a distanza tramite un campo che decresce molto più rapidamente di  $1/r^2$



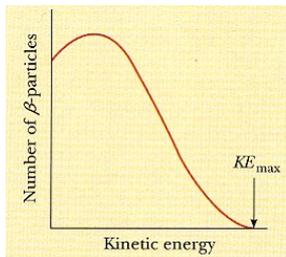
Il nucleone ha dimensioni dell'ordine di  $10^{-15}$  m ma la sua capacità di interazione decresce molto rapidamente con la distanza



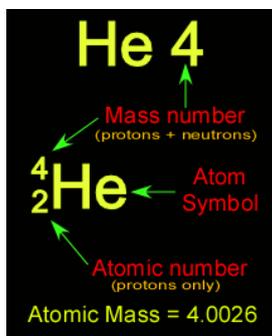
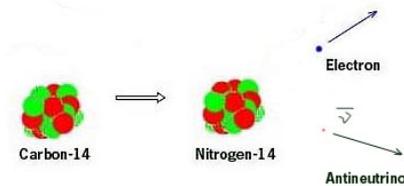
man mano che cresce la dimensione del nucleo deve crescere più rapidamente il numero di neutroni per garantire la necessaria stabilità



Rappresentazione non in scala dell'atomo di elio con la presenza dei due protoni e due neutroni ciascuno formato da tre quark



Tipico spettro in energia del decadimento beta



Rappresentazione simbolica dei nuclidi: numero atomico, numero di massa e massa atomica

Il protone e il neutrone, come vedremo nel capitolo dedicato al modello standard sono particelle composte formate da strutture più elementari chiamate *quark*. Tra i quark si esercita la *interazione forte* (detta anche *interazione adronica* o *interazione di colore*) e la interazione nucleare è l'effetto residuo, all'esterno del nucleone, della interazione adronica.

### 2.2.2 IL NEUTRONE E IL DECADIMENTO BETA

Il neutrone, appena scoperto, venne utilizzato per spiegare il *decadimento beta meno* e cioè la reazione:

$$X_Z^A \rightarrow X_{Z+1}^A + 1\beta^- \quad (\text{VII.2.2})$$

attraverso la trasformazione interna al nucleo:

$$n_0^1 \rightarrow p_{+1}^1 + 1e_{-1}^0 \quad (\text{VII.2.2})$$

secondo cui il neutrone, per ragioni legate alla presenza di un eccesso di neutroni nel nucleo, *si converte*<sup>8</sup> in una coppia protone elettrone con liberazione di energia pari al difetto di massa.

Questa energia, lo aveva scoperto Chadwick, non è però completamente posseduta dall'elettrone che viene espulso, perché lo spettro energetico degli elettroni emessi presenta un andamento continuo: segno che deve esistere *qualcos'altro* che si porta via l'energia mancante.

Inizialmente, per spiegare questo fatto venne introdotta *ad hoc* una particella neutra, che venne chiamata *neutrino*<sup>9</sup> da Enrico Fermi nel quadro della teoria della interazione debole (1934). In realtà quello che viene emesso è un *antineutrino* e la sottile distinzione per cui si tratta in realtà di una antiparticella verrà chiarita nel capitolo dedicato al modello standard.

### 2.2.3 LA MASSA E IL MOMENTO MAGNETICO DEI NUCLEONI

I nuclei atomici differiscono tra loro esclusivamente per la composizione in nucleoni; ciò determina però una massa complessiva diversa dalla pura e semplice somma delle masse dei componenti. Infatti il legame nucleare, molto intenso, genera configurazioni stabili caratterizzate da una energia totale minore della energia di massa dei singoli componenti. La energia mancante (*difetto di massa*) è perfettamente misurabile attraverso lo spettrografo di massa e si libera all'atto della fusione dei nuclidi per formare il nucleo.<sup>10</sup>

Le unità di massa utilizzate in fisica del nucleo sono l'*unità di massa atomica* (a.m.u.) che rappresenta 1/12 della massa dell'atomo dell'isotopo 12 del carbonio ed i multipli dell'eV in cui si sfrutta l'equivalenza tra massa ed energia.

Poiché 1 mole (12 g) di C<sup>12</sup> contiene un numero di Avogadro  $\mathcal{N}_A$  di atomi si ha che:

$$1 \text{ amu} = \frac{1}{12} \frac{12}{\mathcal{N}_A} 10^{-3} \text{ kg} = 1.660'540'2 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 931.494'32 \text{ MeV}$$

<sup>8</sup> si converte, non si scinde.

<sup>9</sup> neutrino = piccolo neutrone (l'unica particella con un nome italiano in tutte le lingue; e in effetti nei testi di lingua anglosassone si spiega che *ino* vuol dire piccolo).

<sup>10</sup> Si veda il § 7.6 nella parte quinta (spettrografo di massa ed energia di legame).

Così come con riferimento all'atomo si usa misurare il momento magnetico dell'elettrone a partire dal *magnetone di Bohr*:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.274'015'4 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2 \text{ (o anche J T}^{-1}\text{)}$$

in fisica del nucleo si utilizza il cosiddetto *magnetone nucleare*:

$$\mu_{\text{nuc}} = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.0507866 \cdot 10^{-27} \tag{VII.2.3}$$

pari a 1/1836 del magnetone di Bohr.

Se passiamo alle caratteristiche dei due nucleoni otterremo la seguente tabella:

Tabella VII.2.1		Caratteristiche di protone e neutrone		
particella	$m$ (amu)	$m$ (kg)	$\mathcal{E}_0$ (MeV)	$\mu$ (intrinseco)
protone	1.007'276'47	$1.672'623'1 \cdot 10^{-27}$	938.272'310	+2.792'75 $\mu_{\text{nuc}}$
neutrone	1.008'664'90	$1.674'928'6 \cdot 10^{-27}$	939.565'630	-1.913'14 $\mu_{\text{nuc}}$

I valori di massa non meritano ulteriori commenti mentre vale la pena di fare qualche osservazione sul momento magnetico anche se si tratta di questioni tecniche abbastanza specialistiche.

Sia il protone, sia il neutrone sono dotati di momento angolare intrinseco (spin) pari a  $\frac{1}{2} \hbar$  e tale proprietà (introdotta da Pauli) è rilevabile nella presenza di una *struttura iperfine* degli spettri.<sup>11</sup>

Ma come mai i momenti magnetici non sono multipli semplici del magnetone nucleare? Come mai il neutrone presenta un momento magnetico nonostante sia neutro? La risposta a queste domande è legata alla struttura interna dei nucleoni e un primo indizio può venire osservando che il rapporto dei due valori di  $\mu$  vale 3/2.

Osserviamo infine che se il neutrone contenesse degli elettroni il momento magnetico del neutrone dovrebbe avere un ordine di grandezza pari al magnetone di Bohr e non potrebbe invece essere molto più piccolo.

Come abbiamo già visto un generico nucleo viene indicato dalla assegnazione del numero di massa  $A$  e del numero atomico  $Z$ .  $A$  fornisce il numero di nucleoni e  $Z$  il numero di protoni (ovviamente  $A - Z$  ci darà il numero di neutroni) e si scrive  $X_Z^A$  dove  $X$  è il simbolo (sovrabbondante) del corrispondente elemento.

A seconda che nuclei diversi abbiano lo stesso valore di  $Z$ ,  $A$  o  $A - Z$  si parla rispettivamente di *isotopi* (stesso posto), *isobari* (stesso peso) o *isotoni*.

### 2.2.4 LE DIMENSIONI NUCLEARI E LA SEZIONE D'URTO

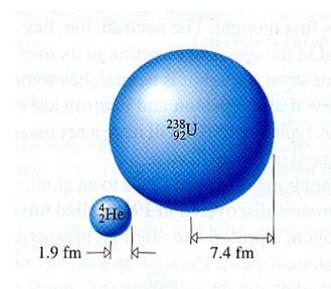
Poiché le forze nucleari diventano repulsive quando i nucleoni (pensati come sferette rigide) giungono a contatto si può ipotizzare che i nuclei presentino un volume proporzionale al numero di nucleoni che contengono o che, detto diversamente, la densità della materia nucleare, sia approssimativamente costante.

Tutto ciò è condensato in una semplice relazione che partendo dal fatto che il raggio d'azione tipico del protone è  $R_p \approx 1.2 \div 1.5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$  consente di scrivere, per un generico nucleo:

<sup>11</sup> Se si riesce a misurare lo spin del protone, quello del neutrone può essere determinato indirettamente misurando quello del nucleo di deuterio (formato da un protone e un neutrone).



Premio Nobel nel 1944 per le misure sul momento magnetico nucleare effettuate tra il 1935 e il 1939

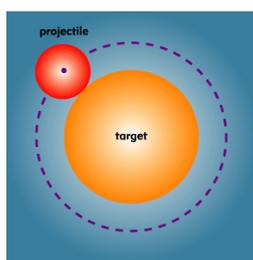


raffronto dimensionale tra un nucleo piccolo e un nucleo grande: la dimensione tipica è tra  $10^{-15}$  e  $10^{-14} \text{ m}$

$$R = R_p \sqrt[3]{A} \tag{VII.2.4}$$

La indeterminazione su  $R_p$  deriva da due fattori: dal carattere convenzionale del concetto di confine del nucleo (si tratta in realtà del campo di forza nucleare che, in una certa regione, decresce bruscamente) e dal fatto che, in esperimenti di diffusione di particelle, si ottengono comunque risultati diversi a seconda che si indaghi la distribuzione di massa o quella di carica elettrica.

Osserviamo di sfuggita che la materia nucleare ha una densità molto elevata e ciò è perfettamente plausibile se si ricorda che gli atomi sono fatti prevalentemente di vuoto ed essendo la massa confinata in una regione piccola ad essa corrisponderà una densità elevata.



idea basilare di sezione d'urto: maggiore o minore probabilità di interazione misurata attraverso una superficie

Oltre che sul raggio nucleare si ragiona molto spesso, trattando di interazioni, sulla cosiddetta *sezione d'urto* una grandezza che ci informa sul *grado di opacità* della materia nucleare nei confronti di un fascio di radiazioni che la attraversa.

Utilizzando la attenuazione che il fascio subisce si arriva ad una grandezza, delle dimensioni di una superficie, in grado di darci informazioni sulla *sezione frontale* o *sezione d'urto* del materiale nucleare.

E' bene sottolineare che, trattandosi di un concetto riferibile a diversi tipi di interazione, esso sarà in genere accompagnato dalla precisazione del processo cui si riferisce e persino al valore di energia a cui si opera.

Supponiamo dunque di avere una porzione di materiale caratterizzato da una densità nucleare  $n$  (numero di nuclei per unità di volume) e indichiamo con  $\delta x$  uno spessore elementare. Supponiamo che  $\delta x$  sia piccolo in modo di non dare luogo a cambiamenti significativi di attenuazione tra uno strato e l'altro.

Se consideriamo un fascio di radiazione composto da  $N$  entità che colpiscono il materiale considerato nella direzione in cui misuriamo il  $\delta x$  e per effetto della interazione danno luogo ad un decremento  $-\delta N$ , potremo ragionevolmente affermare che il decremento relativo sia proporzionale allo spessore elementare considerato e alla densità nucleare. La costante di proporzionalità  $\sigma$ , essendo il decremento relativo un numero puro, dovrà avere le dimensioni di una superficie. Questa costante è detta *sezione d'urto*.

$$-\frac{\delta N}{N} = \sigma n \delta x \tag{VII.2.5}$$

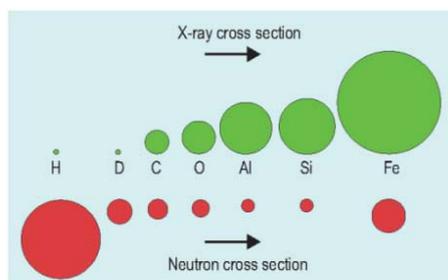
L'equazione che definisce la sezione d'urto rappresenta una equazione differenziale presente in molti processi fisici e la sua soluzione fornisce un decremento di tipo esponenziale secondo la legge:

$$N = N_0 e^{-n \sigma x} \tag{VII.2.6}$$

Si vede da qui che, misurando la attenuazione di una radiazione che attraversa la materia nucleare è possibile misurare la sezione d'urto della materia stessa.

Per esempio se indichiamo con  $x_{1/2}$  lo *strato emivalente*, cioè lo strato che riduce a metà le radiazioni avremo che:

$$\frac{1}{2} = \exp(-n \sigma x_{1/2}) \text{ e dunque}$$



comparazione visuale di sezione d'urto di materiali diversi per radiazioni di tipo diverso: i neutroni interagiscono molto con l'idrogeno e molto poco con il silicio; per i raggi X è vero l'opposto

$$\sigma = \frac{\ln 2}{n \times v_{1/2}} \quad (\text{VII.2.7})$$

Dunque la sezione d'urto e lo strato emivalente sono correlati tra loro e lo sono, ovviamente, tramite la concentrazione nucleare (legata strettamente al numero di massa).

L'unità di misura storicamente adottata per la sezione d'urto si chiama *barn* (grandezza che corrisponde alla dimensione tipica della interazione nucleare) e

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2 = 100 \text{ fm}^2 \quad (\text{VII.2.8})$$

Il prodotto  $n\sigma$  riveste una notevole importanza in tutti i processi in cui si ha a che fare con interazioni tra radiazioni e materia ed è detto *coefficiente di attenuazione lineare* (il suo inverso, che ha le dimensioni di una lunghezza, è detto *strato medio*).

Un materiale ha un elevato coefficiente di attenuazione quando presenta molti atomi per unità di volume ed una elevata sezione d'urto. Si ricordi che mentre  $n$  è tipico del materiale e crescerà con la densità e con il numero di massa,  $\sigma$  dipende invece dal tipo di interazione e dai valori di energia a cui si opera.

### 2.2.5 LE ENERGIE IN GIOCO E IL DIFETTO DI MASSA

Quando si forma un nucleo nasce un sistema fisico governato dall'equilibrio più o meno stabile tra interazione nucleare ed interazione elettrica.

All'atto della formazione si libera la energia corrispondente al legame nucleare e questa energia liberata è perfettamente valutabile attraverso il confronto tra la misura della massa di riposo del nucleo e le masse di riposo dei componenti originali.

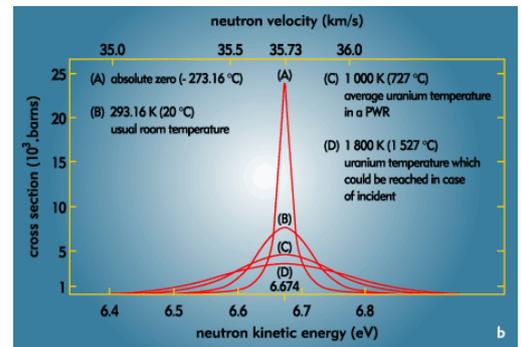
I difetti di massa del legame nucleare sono stati accuratamente misurati attraverso gli spettrografi di massa e il risultato è il fondamentale diagramma delle energie di legame per nucleone dal quale inizia qualsiasi discussione sulla *energia nucleare*.

I risultati sperimentali sono riportati sinteticamente nel diagramma delle energie di legame per nucleone in funzione del numero di massa.

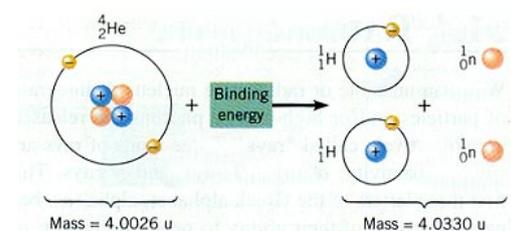
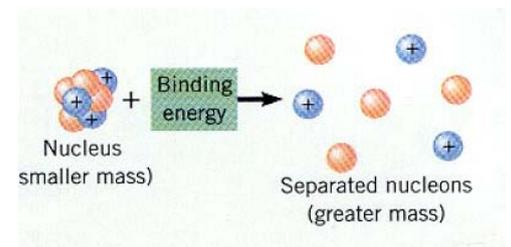
Da questo diagramma si osserva la presenza di una zona di massimo assoluto per valori di  $A$  compresi tra 50 e 80. Quando si formano nuclei in questa zona si ha liberazione di energia sia che si proceda per fissione sia che si proceda per fusione. Il punto di massimo si trova in corrispondenza del ferro e, per questa ragione, il ferro è il prodotto finale della evoluzione stellare.

Si osservi ancora la presenza di un massimo relativo, intorno ai 7 MeV, per l'Elío. Per questa ragione l'elío (e dunque le particelle  $\alpha$ ) sono particolarmente stabili e tendono anche a uscire dai nuclei come emissione radioattiva.

Il primo punto rosso sulla figura corrisponde al deuterio con un valore di poco superiore a 1 MeV/nucleone. Dunque due deuteroni hanno una energia di legame di  $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$  MeV contro  $4 \cdot 7 = 28$  MeV di una particella  $\alpha$ . Ne consegue che *fondendo* due deuteroni si ha una elevata liberazione di energia.

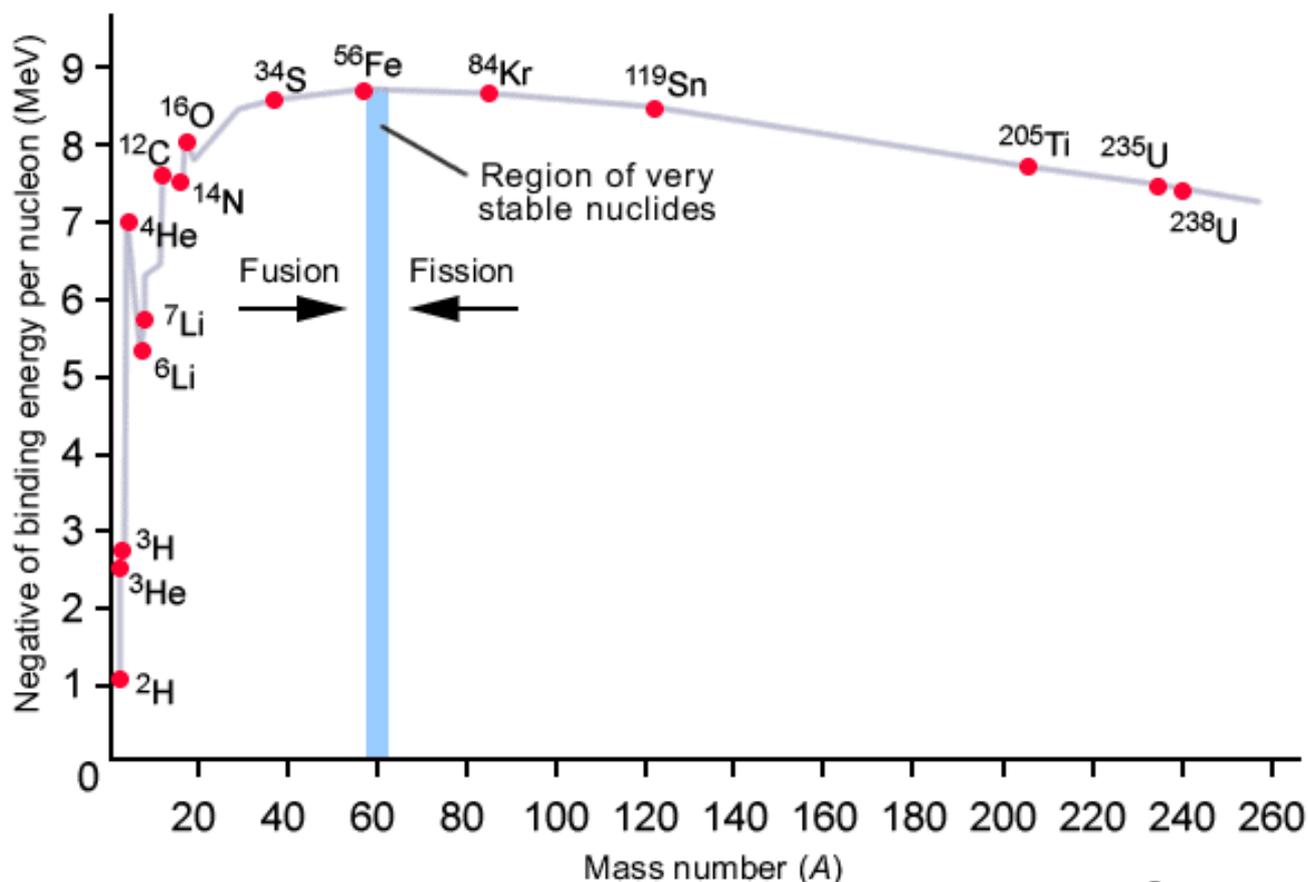


la sezione d'urto dei neutroni nei confronti dell'uranio presenta un picco importante intorno a 6.7 eV; i fisici parlano di *picco di risonanza*; è come se i neutroni a quel valore di energia vedessero improvvisamente l'uranio e avessero nei suoi confronti una notevole affinità



Il difetto di massa dell'atomo di elío attraverso il raffronto con due atomi di idrogeno e due neutroni

Si consiglia una attenta lettura delle caratteristiche di questo diagramma su cui si basa qualsiasi bilancio energetico in ambito nucleare ed in particolare l'analisi dei processi di fissione e fusione. Per questa ragione se ne fornisce una immagine in grande scala che consente la libera esecuzione di calcoli nei processi suddetti.



## 2.3 Distribuzione degli isotopi e valle della stabilità

### 2.3.1 MA QUANTI SONO GLI ISOTOPI?

Diciamo subito che la domanda, per quanto simpatica, non può avere risposta perché attraverso la possibilità di generare nuovi isotopi artificiali attraverso il bombardamento neutronica, non c'è sostanzialmente limite alla generazione di isotopi. O meglio, un limite esiste se si pretende che il nuovo nuclide abbia una esistenza propria per un tempo accettabile.

Nella immagine qui sotto viene rappresentato lo stato dell'arte vengono cioè posti a confronto gli elementi naturali con quelli artificiali, quelli stabili con quelli radioattivi.

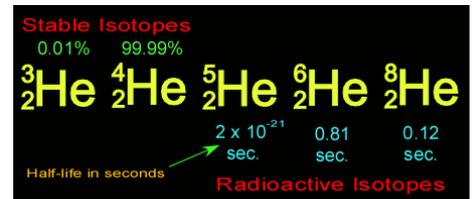
Gli isotopi stabili sono 270 mentre quelli conosciuti sono oltre 2000.

Il Bismuto con  $Z = 83$  è l'ultimo degli isotopi stabili. Per  $Z > 83$  si hanno solo elementi radioattivi.

Lo stagno con  $Z = 50$  è quello che presenta il massimo numero di isotopi stabili (10).

Una strana proprietà emerge se andiamo ad indagare il carattere pari o dispari nel numero di protoni e di neutroni. Come si nota nella tabella qui a lato il nucleo sembra privilegiare il numero pari di nucleoni e comunque disdegna il caso in cui essi sono entrambi dispari.

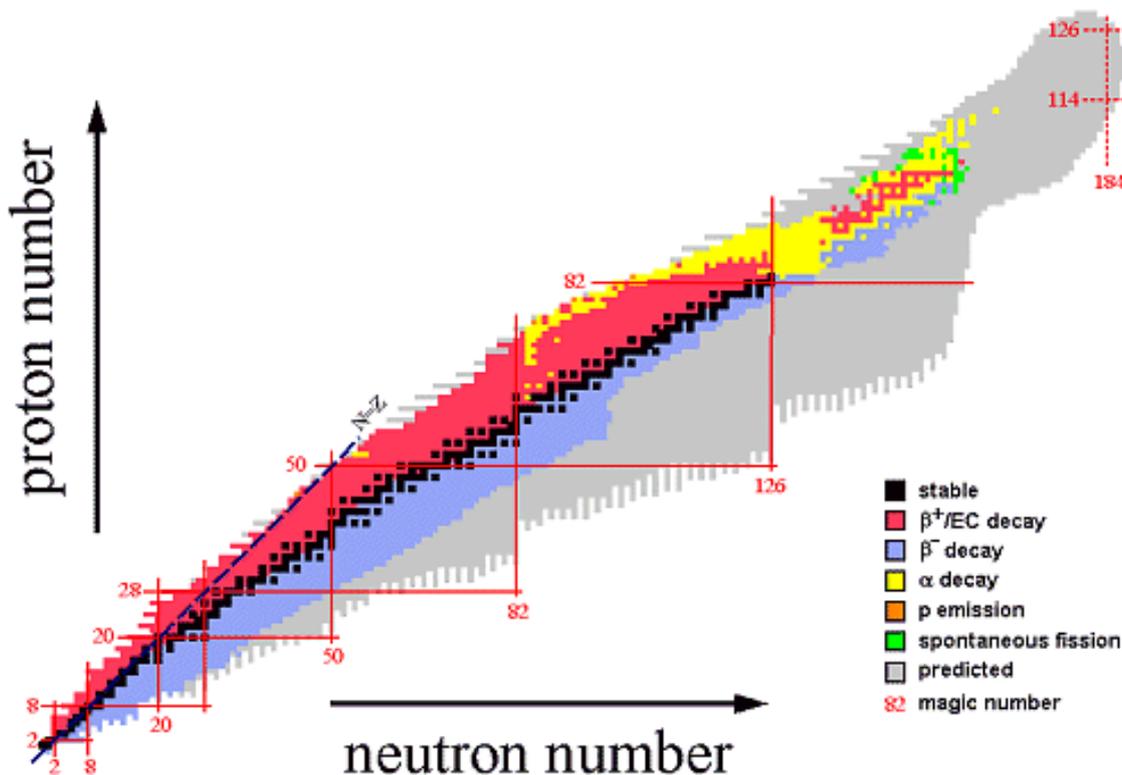
Le righe orizzontali e verticali in rosso evidenziano una elevata numerosità di isotopi stabili; si tratta dei cosiddetti *numeri magici*: 2, 8, 20, 50, 82. In corrispondenza di tali numeri si ottiene una struttura nucleare a simmetria sferica che risulta particolarmente stabile.



Gli isotopi stabili e quelli radioattivi dell'elio: da 1 a 6 neutroni con  $3 \leq A \leq 8$

N. protoni	N. neutroni	nuclidi stabili
Pari	Pari	168
Pari	Dispari	57
Dispari	Pari	50
Dispari	Dispari	4

Gli isotopi stabili preferiscono i numeri pari tra i nucleoni



La zona del decadimento  $\beta^-$  (in blu) corre lungo l'intero diagramma e si trova appena al di sotto di quella di stabilità (in nero). Ci sono troppi neutroni e dunque è agevolata la loro conversione in una coppia protone elettrone. Al di sotto si ha la presenza (in grigio) di una zona di possibile costruzione di isotopi artificiali per assorbimento di neutroni.

Nella immagine si può notare bene come la zona popolata si trovi quasi tutta al di sotto della retta  $A - Z = Z$  e come, al crescere del numero atomico gli isotopi stabili richiedano un numero via via crescente di neutroni.

In giallo si vede la zona dei decadimenti  $\alpha$  (quasi tutta al di sopra del piombo che coincide con il prodotto finale dei decadimenti radioattivi di origine naturale).

Sopra la zona di stabilità si trovano gli isotopi con pochi neutroni che decadono  $\beta^+$  trasformando i protoni in neutroni, il che garantisce una certa stabilità.

## 2.4 Il decadimento $\alpha$

### 2.4.1 IN COSA CONSISTE IL DECADIMENTO RADIOATTIVO?

Con il termine decadimento radioattivo si intende genericamente una trasformazione energetica all'interno di un nucleo caratterizzata da cambiamento di energia interna e molto spesso anche di composizione.

I decadimenti più importanti sono:

- il *decadimento  $\alpha$*  con emissione di un nucleo di elio,
- il *beta meno* con emissione di un elettrone di alta energia e trasformazione di un neutrone in un protone
- il *beta più* con emissione di un positrone e trasformazione di un protone in un neutrone
- la *cattura K* caratterizzata dalla conversione di un protone in un neutrone tramite assorbimento di un elettrone dello strato K (da cui il nome) e che è seguita dalla emissione di un raggio X monocromatico
- il *decadimento  $\gamma$*  in cui non si ha mutazione di A o di Z ma il nucleo emette un fotone di alta energia pari alla differenza dei livelli energetici iniziale e finale

Spesso questi decadimenti si susseguono dando luogo a processi in cui un nucleo padre innesca processi radioattivi a catena, come nel caso delle famiglie radioattive di cui si dirà nel seguito.

### 2.4.2 DECADIMENTO $\alpha$ : CARATTERISTICHE

È caratterizzato dalla espulsione di una particella  $\alpha$  ed è tipico di una zona particolare nella carta dei nuclidi (quella in giallo) con  $A > 200$ . Si osserva che molti nuclidi collocati in questa zona sono radioattivi ed emettono, con frequenza molto diversa tra loro, nuclei di elio monoenergetici con energie comprese tra i 4 e gli 8 MeV a seconda dei casi.

Lo schema del decadimento è descritto dalla equazione:



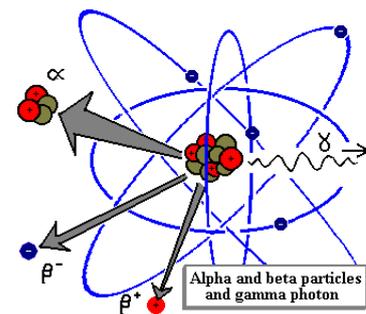
Le  $\alpha$ , molto pesanti e veloci, hanno percorsi molto brevi nella materia e perdono energia ionizzando il mezzo entro cui si muovono. Grosso modo perdono 35 eV per urto in aria secca e hanno percorsi di qualche cm.

A causa dell'elevato potere ionizzante le sorgenti  $\alpha$  sono particolarmente pericolose quando si fISSANO nel tessuto biologico perché determinano necrosi e distruzione completa di tutto ciò che rientra nel loro raggio d'azione.

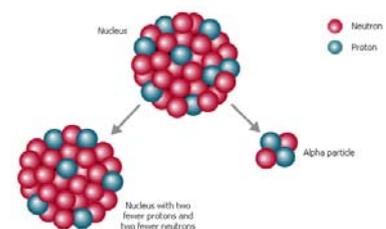
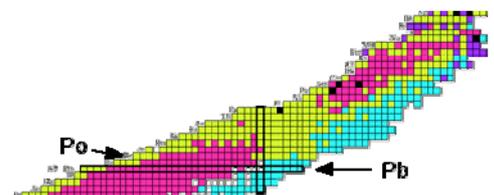
### 2.4.3 DECADIMENTO $\alpha$ : CONDIZIONI ENERGETICHE

Se guardiamo il diagramma delle energie di legame per nucleone ci rendiamo immediatamente conto del fatto che, per quanto riguarda la conservazione della energia, il decadimento  $\alpha$  è teoricamente possibile per tutti i nuclidi con numero di massa compreso tra 245 (dove l'energia di legame per nucleone vale circa 7 MeV come nelle  $\alpha$ ) sino a circa 160.

In effetti perché il decadimento sia energeticamente possibile basta che, indicata con  $\epsilon$  l'energia di legame per nucleone, sia:



rappresentazione pittorica dei decadimenti  $\alpha$ ,  $\beta^-$ ,  $\beta^+$  e  $\gamma$ ; la cattura K è equiparata a  $\beta^+$



Nel decadimento  $\alpha$  2 neutroni e 2 protoni strettamente legati abbandonano il nucleo; in questo modo aumenta nel nucleo il peso dei neutroni

$$4 \epsilon_{\alpha} + (A - 4)\epsilon_{A-4} \geq A \epsilon_A$$

$$A(\epsilon_{A-4} - \epsilon_A) \geq 4(\epsilon_{A-4} - \epsilon_{\alpha})$$

Nella zona tra 100 e 240 la curva ha un andamento quasi rettilineo con un coefficiente angolare (deducibile dal diagramma qui a lato) di circa  $(8.6 - 7.5) / (240 - 100) = 0.008$  MeV/nucleone e dunque quando si passa da  $A$  a  $A - 4$  la energia per nucleone cambia di 0.032 MeV.

Supponiamo che sia  $A = 240$

$$A(\epsilon_{A-4} - \epsilon_A) = 240 \cdot 0.032 = 7.68 \text{ MeV}$$

$$4(\epsilon_{A-4} - \epsilon_{\alpha}) = 4(7.5 - 7.0) = 2.0 \text{ MeV}$$

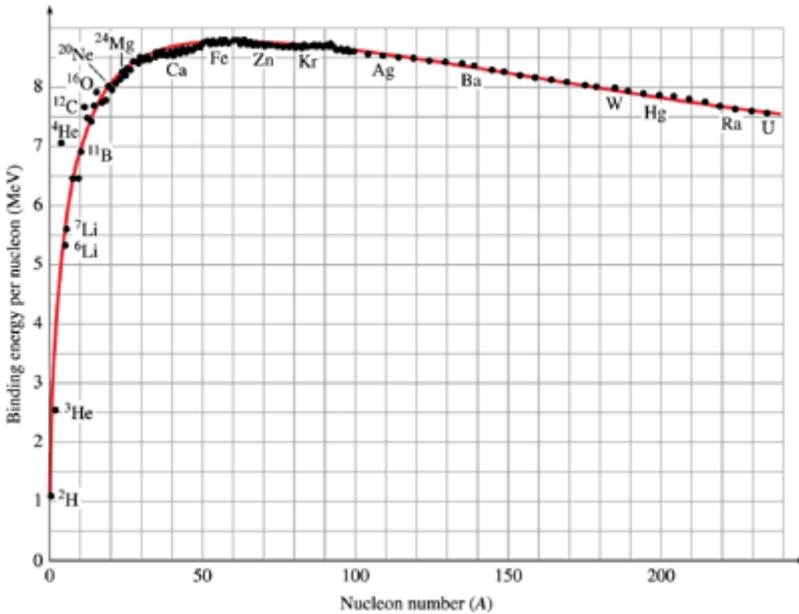
L'incremento di energia di legame nel passaggio da  $A$  a  $A-4$  è nettamente superiore alla perdita legata alla formazione delle  $\alpha$  e dunque c'è energia disponibile per il processo. La particella  $\alpha$  sarà emessa con energia tra i 5 e i 6 MeV.

Quando  $A = 160$   $\epsilon_A = 8.2$  MeV e dunque questa volta:

$$160(\epsilon_{A-4} - \epsilon_A) = 160 \cdot 0.032 = 5.1 \text{ MeV}$$

$$4(\epsilon_{A-4} - \epsilon_{\alpha}) = 4(8.2 - 7.0) = 4.8 \text{ MeV}$$

Dunque nella zona intorno ad  $A = 160$  cessano di realizzarsi le condizioni necessarie perché il decadimento  $\alpha$  possa aver luogo.



### 2.4.4 ENERGIA DELLE PARTICELLE E TEMPO DI DIMEZZAMENTO

Poiché le  $\alpha$  sono state le prime sorgenti radioattive importanti per indagare la materia il gruppo di Rutherford ne ha, a suo tempo, studiato le caratteristiche, scoprendo una correlazione tra l'energia delle particelle dei diversi nuclidi e il tempo di dimezzamento dei nuclidi stessi.

Nel 1911–1912 Geiger e Nuttal determinarono una relazione empirica della forma:

$$T_{1/2} = K \exp(H / \sqrt{\mathcal{E}}) \tag{VII.2.10}$$

dove  $K$  e  $H$  sono costanti sperimentali che non dipendono da  $A$  e dipendono debolmente da  $Z$ .

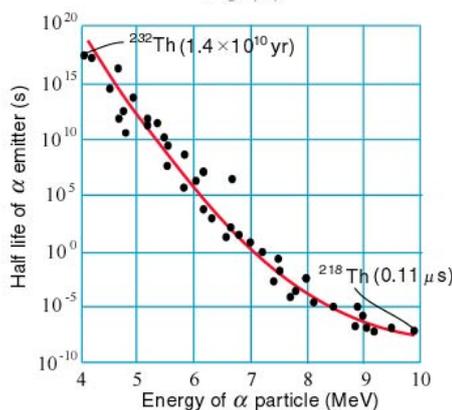
I relativi diagrammi sperimentali e teorici sono rappresentati qui a lato prendendo sulle ordinate una scala di tipo logaritmico. Allora:

$$\log_{10} T_{1/2} = A + B/\sqrt{\mathcal{E}}$$

e dunque, a meno di traslazioni e fattori di scala, l'andamento è quello della funzione  $y = 1/\sqrt{x}$  che appartiene alla famiglia delle funzioni potenza del tipo della proporzionalità inversa con un tasso di decrescita più lento.

Trattandosi di legge in scala logaritmica la dipendenza dai valori di  $\mathcal{E}$  è molto forte e ciò significa che anche una piccola differenza nella energia delle  $\alpha$  determina una grande differenza nei tempi di dimezzamento come si vede nel diagramma qui a lato.

I primi fisici nucleari erano stupiti della grande variabilità dei tempi di dimezzamento: per esempio  $U^{238}_{92}$  ha  $T_{1/2}$  di  $4.47 \cdot 10^9$  anni (con  $\mathcal{E} = 4.2$



Il tempo di dimezzamento è fortemente correlato alla energia delle particelle  $\alpha$ . La spiegazione è quantistica e si basa sull'effetto tunnel

MeV) mentre il radon  $Rn^{222}_{86}$  ha  $T_{1/2}$  di 3.82 giorni (con  $\mathcal{E} = 5.49$  MeV).

Se le energie cinetiche delle  $\alpha$  erano simili dovevano essere simili anche i meccanismi di emissione. Come si spiegava allora la diversità così forte nella *disponibilità del nucleo* ad espellere una particella  $\alpha$  ?

La risposta a questa domanda e la spiegazione della legge sperimentale di Geiger–Nuttal venne dal ventiquattrenne G. Gamow <sup>12</sup> nel 1928 e fu uno dei primi grandi successi della meccanica quantistica. La spiegazione si basa sull'*effetto tunnel* cioè sulla capacità delle particelle quantistiche di superare una buca di potenziale dotata di parete di spessore finito grazie alla capacità della funzione d'onda di propagarsi all'esterno della buca.

Prendiamo per esempio il tipico decadimento  $\alpha$  dell'Uranio 238:



In una qualsiasi carta degli isotopi è possibile leggere le masse dei 3 nuclei coinvolti:

$$m_{U^{238}} = 238.050816 \text{ uma} \quad m_{Th^{234}} = 234.043633 \text{ uma}$$

$$m_{He^4} = 4.002603 \text{ uma}$$

$$\text{pertanto } \Delta m = 234.043633 + 4.002603 - 238.050816 = -4.58 \cdot 10^{-3} \text{ uma}$$

$$\text{poiché } 1 \text{ uma} = \frac{10^{-3}}{6.022 \cdot 10^{23}} \cdot \frac{(2.9979 \cdot 10^8)^2}{1.60218 \cdot 10^{-19}} = 9.315 \cdot 10^8 \text{ eV}$$

la energia cinetica connessa al decadimento  $\alpha$  è dunque non inferiore a:

$$9.315 \cdot 10^8 \cdot 4.58 \cdot 10^{-3} = 4.26 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

in realtà, tenuto conto del rinculo del nucleo figlio (che avviene in accordo con il teorema di conservazione della quantità di moto) e del fatto che il nucleo di Th si colloca in uno stato eccitato viene emessa una particella  $\alpha$  di 4.18 MeV, dopo di che il torio emette un fotone gamma di energia pari a quella residua.

Questo processo ha un tempo di dimezzamento molto alto, di 4.47 miliardi di anni e per questa ragione sulla terra c'è ancora molto uranio (dalla sua formazione è trascorso circa un tempo di dimezzamento).

Consideriamo ora il caso di un decadimento indotto dall'uranio che attraverso una serie di trasformazioni forma il Radon



Questa volta indichiamo, invece della massa, la energia del legame nucleare in keV da cui dividendo per A si può ottenere l'energia di legame per nucleone.

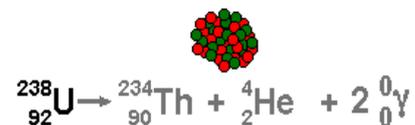
$$\mathcal{E}_{Rn} = 1'708'221 \text{ keV} = 7.6947 \text{ MeV/nuc}$$

$$\mathcal{E}_{Po} = 1'685'511 \text{ keV} \quad \mathcal{E}_{He} = 28'296 \text{ keV}$$

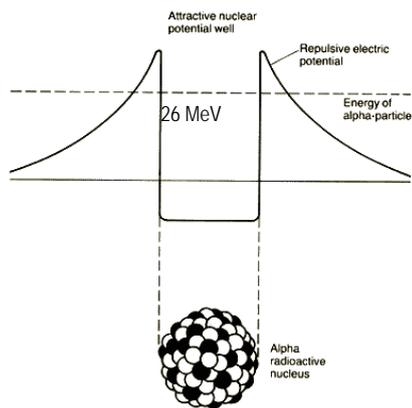
In questo caso si ottiene per differenza 5.586 MeV ma, come registrato nella relazione di Geiger, all'aumento della energia del decadimento di



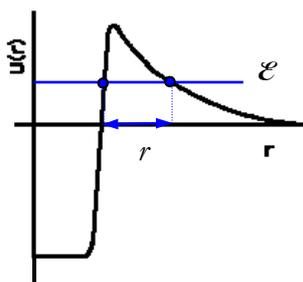
Gorge Gamow ai tempi della teoria del decadimento  $\alpha$  e Mr. Tompkins il professore di storia protagonista delle sue avventure in un mondo in cui i paradossi della fisica quantistica divengono parte della esperienza comune



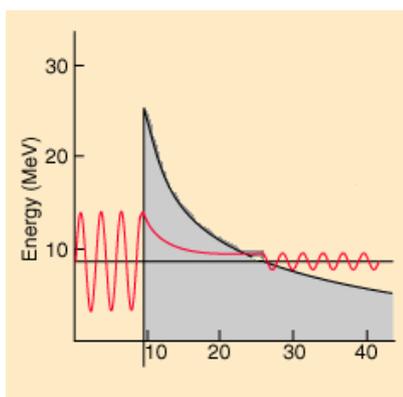
<sup>12</sup> G. Gamow (1904 – 1968) oltre alla spiegazione quantistica del decadimento alfa diede contributi fondamentali all'analisi delle reazioni nucleari nelle stelle; fu un grande divulgatore scientifico e, dopo la scoperta del DNA, fu il primo ad avanzare l'ipotesi sulla esistenza di un codice genetico.



La buca di potenziale che caratterizza, in prima approssimazione, la situazione nelle vicinanze del nucleo con il cambio di andamento in corrispondenza della zona in cui si risente della sola energia repulsiva elettrostatica. La parete ha una altezza, rispetto allo 0 (particella libera) di circa 26 MeV



Il valore della energia della particella determina lo spessore della barriera che diminuisce al crescere della energia della particella  $\alpha$



La funzione di stato quantistico  $\psi$  che descrive tramite  $|\psi|^2$  la probabilità di trovare la particella in una determinata regione subisce una attenuazione di tipo esponenziale nella zona della parete e con essa si attenua la probabilità di trovare la particella all'esterno della buca. Ma la probabilità non è nulla ed è tanto maggiore quanto minore è l'estensione della parete

poco più di 1 MeV corrisponde un tempo di dimezzamento di soli 3.8 giorni.

### 2.4.5 COME MAI LA PARTICELLA $\alpha$ RIESCE AD USCIRE? CON QUALE PROBABILITÀ LO FA?

Il fatto che il processo sia possibile dal punto di vista della conservazione della energia non significa che esso avvenga. Anzi classicamente il processo non dovrebbe avvenire.

Supponiamo infatti che, all'interno del nucleo padre la particella  $\alpha$  si sia già formata. Essa si troverà immersa in una buca di potenziale dovuta all'azione combinata del potenziale nucleare (attrattivo) e del potenziale coulombiano (repulsivo). La situazione è indicata nella immagine qui a lato.

Da calcoli di natura elettrostatica è possibile stimare l'altezza della barriera di potenziale.

In effetti se l'interazione nucleare cade bruscamente a zero nella zona di confine del nucleo al suo esterno avremo solo l'azione di repulsione elettrostatica tra il nucleo di carica  $Z - 2$  e la particella  $\alpha$ . A ciò corrisponde una energia potenziale

$$\tilde{U} = k \frac{2e(Z-2)e}{R}$$

assumendo per  $R$  il valore indicativo di  $10^{-14}m$  e  $Z = 92$  si ottiene 26 MeV e tale valore non cambia molto al variare di  $Z$  che rimane tipicamente tra 80 e 90 (si veda la carta degli isotopi, zona in giallo).

Dunque tutti i nuclei soggetti al decadimento  $\alpha$  presentano delle buche di potenziale di altezza molto maggiore della energia tipica dei decadimenti (tra 4 e 8 MeV). Come è possibile che la particella  $\alpha$  possa uscire dalla buca?

Osserviamo intanto che la particella, una volta uscita dalla buca presenta una energia all'infinito pari a quella posseduta inizialmente e che corrisponde poi alla energia del decadimento. Dunque potremo disegnare l'energia della particella (retta orizzontale) ed osservare che la buca di potenziale presenta uno spessore che dipende dalla energia della particella.

Questo fatto non avrebbe alcuna importanza se ci trovassimo in ambito classico: la particella potrebbe uscire solo se avesse una energia  $\mathcal{E}$  maggiore del massimo della buca  $\tilde{U}$ . Ma in ambito quantistico la funzione di stato  $\psi$  che descrive attraverso  $|\psi|^2$  la probabilità di trovare la particella in una determinata regione spaziale, per effetto tunnel sborda dalla buca e (nell'attraversare la parete) si attenua progressivamente con andamento esponenziale decrescente.

Dunque si ha una probabilità diversa da zero di trovare la particella all'esterno e quindi di avere il decadimento  $\alpha$ .

Il calcolo preciso della attenuazione da parte della barriera coulombiana porta ad una soluzione matematicamente complicata anche con gli strumenti quantistici mentre, nel caso della barriera rettangolare il coefficiente di trasparenza che possiamo associare alla probabilità vale:

$$\exp\left(-2r\sqrt{2m(\tilde{U}-\mathcal{E})/\hbar}\right)$$

Tanto ci basta per cogliere il nesso tra l'energia della particella  $\alpha$  e la probabilità dell'evento. L'energia incide in maniera cruciale sullo spessore  $r$  che fa da indicatore della rapidità di decremento della probabilità. Maggiore è  $\mathcal{E}$  e minori sono sia  $r$  sia la radice e dunque maggiore è la probabilità di emissione della particella  $\alpha$ .

Ecco perché i decadimenti con particelle energetiche intorno agli 8 MeV hanno tempi di dimezzamento molto piccoli e accade il contrario intorno ai 4 MeV.

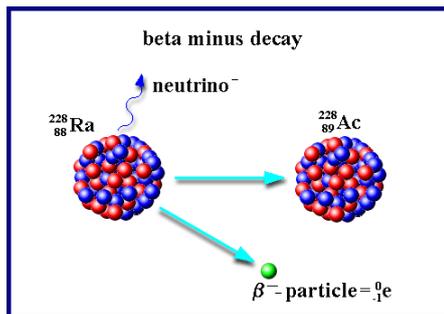
Per esempio il  $\text{Po}_{84}^{213}$  con particelle da 8.3 MeV ha  $T_{1/2} = 3.2 \cdot 10^{-6}$  s mentre  $\text{Th}_{90}^{232}$  con particelle da 4.01 MeV ha  $T_{1/2} = 1.4 \cdot 10^{10}$  anni.

## 2.5 Il decadimento $\beta$

### 2.5.1 IL DECADIMENTO $\beta$ MENO

Si tratta del processo radioattivo scoperto e studiato per primo a causa del maggiore potere di penetrazione degli elettroni e per la maggiore facilità di deviare gli elettroni attraverso campi magnetici (a parità di condizioni  $r \propto m$  e dunque è molto più facile curvare un  $\beta$  che non una particella  $\alpha$  che ha una massa 8000 volte più grande).

Lo studio del decadimento  $\beta$  è stato storicamente importante perché ha coinciso con la ipotesi della esistenza di una nuova particella *il neutrino* e con la introduzione nella teoria fisica di un nuovo tipo di interazione, la cosiddetta *interazione debole*, caratterizzata dalla capacità di trasformare le particelle le une nelle altre nel rispetto di alcune grandi leggi di conservazione.



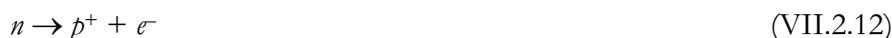
Il decadimento  $\beta^-$  degli anni 30  
il neutrone si trasforma in un protone ed un elettrone che viene espulso con energia a spettro continuo

Questo tipo di decadimento ha luogo spontaneamente in nuclei che si trovino in eccesso di neutroni e dunque avviene molto spesso dopo un decadimento  $\alpha$ , infatti il nucleo figlio ha perso 2 protoni e 2 neutroni e dunque si trova relativamente sovradimensionato in neutroni.

La reazione tipica ha la forma:



che viene associata alla trasformazione interna al nucleo:



Osservando il potere ionizzante dei  $\beta$  prodotti dai materiali radioattivi naturali si era osservato che gli elettroni emessi presentavano, a differenza delle  $\alpha$ , uno spettro energetico continuo. La cosa era piuttosto singolare e, vista l'ampiezza del range, risultava poco spiegabile ipotizzando che la energia di volta in volta mancante venisse trasferita come energia di eccitazione del nucleo. Infatti lo studio del decadimento  $\gamma$  in cui vengono emessi fotoni di ben definita energia portava ad ipotizzare che anche i nuclei (come gli atomi) fossero caratterizzati da una struttura a livelli energetici discreti.

### 2.5.2 LO SPETTRO CONTINUO E L'IPOTESI DEL NEUTRINO

La possibilità che la energia mancante finisse per diventare energia di rinculo dei nuclei che avevano subito il decadimento, per quanto poco probabile visto che l'elettrone ha una massa molto minore del nucleo, fu sottoposta ad indagine sperimentale da C. D. Ellis nel 1927.

Questi misurò la energia media rilasciata dal decadimento beta del  $\text{Bi}^{210}$  attraverso un metodo calorimetrico. Il calorimetro era in Pb e dunque era in grado di rilevare sia le energie di rinculo sia le energie rilasciate dagli elettroni (che si fermavano nel piombo). Il valore massimo della energia dei beta era noto e valeva 1.05 MeV mentre il valore medio sperimentale dello spettro dei beta era di 390 keV.

Il valore misurato dal calorimetro risultò pari a  $344 \pm 44$  keV valore incompatibile con la ipotesi che una quota dell'energia fosse trasferita ai nuclei perché in tal caso il valore sperimentale avrebbe dovuto essere dell'ordine del MeV visto che il calorimetro rivelava tutte le energie (quelle dei beta e quelle dei nuclei).

Su questa questione si aprì un serrato dibattito (Bohr sostenne che la conservazione dell'energia non valesse necessariamente su scala atomica in eventi individuali) finché nel 1930 Pauli inviò al congresso di Tubingen degli *esperti di radioattività* una lettera in cui si ipotizzava l'esistenza di una nuova particella per salvare la conservazione dell'energia:

Io ipotizzo che possa esistere nel nucleo una particella elettricamente neutra, che chiamerò neutrone <sup>13</sup>, con spin  $\frac{1}{2}$  che obbedisce al principio di esclusione e che differisce dai quanti di luce per il fatto di non viaggiare alla velocità della luce. La massa del neutrone potrebbe essere dello stesso ordine di grandezza di quella dell'elettrone e comunque non superiore allo 0.01 di quella del protone.

Lo spettro continuo del decadimento beta diventa comprensibile se si ipotizza che insieme all'elettrone venga emesso anche un neutrone in maniera che la somma delle due energie sia costante.

Mi rendo conto che la mia proposta sembra incredibile perché dovremmo avere già osservato i neutroni se essi esistessero davvero. Ma solo chi osa può vincere e la situazione difficile data dallo spettro continuo del decadimento beta può essere illuminata da una sottolineatura del mio maestro prof. Debye che recentemente, mi ha detto a Bruxelles: *"oh, è molto meglio non pensare a queste cose, come si fa con le nuove tasse..."*

Se la nuova particella interagisce debolmente con la materia atomica e nucleare la conservazione della energia e quella della quantità di moto sono salve.

Riassumiamo le ipotesi (corrette) che si fanno sul neutrino e ricordiamo che esso sarà osservato solo alla metà degli anni 50.

- La massa del neutrino deve essere piccola per spiegare il fatto che gli elettroni, in media, portino via meno della metà della energia liberata distribuendosela con il neutrino nel rispetto della conservazione della quantità di moto (che riguarda anche il nucleo di rinculo).
- Non si tratta del neutrone che, come si vide subito dopo la sua scoperta, interagisce fortemente con i nuclei.
- Deve essere dotato di spin semi intero in modo di non violare la legge di conservazione del momento angolare. Infatti il momento magnetico nucleare dipende solo da  $A$  (che non cambia nel decadimento) e pertanto visto che compare lo spin dell'elettrone deve comparire anche uno spin contrario (quello dell'antineutrino elettronico).

Dopo l'ipotesi di Pauli, e dopo la scoperta del neutrone era chiara la insostenibilità di ipotesi in cui l'elettrone fosse già presente nel nucleo (come in sostanza accade per la particella  $\alpha$  che rappresenta un modo di aggregarsi dei protoni e neutroni già presenti nel nucleo).

### 2.5.3 LA TEORIA DI FERMI DELLA INTERAZIONE DEBOLE

Così come il congresso Solvay del 1927 era stato dedicato alla meccanica quantistica, quello del 1933 (che si tenne a Bruxelles), fu dedicato alla nascente fisica del nucleo. In quella sede non furono presentate nuove teorie o scoperte (salvo la espulsione di positroni con spettro continuo per bombardamento di materiali leggeri con particelle  $\alpha$ , Joliot-Curie e

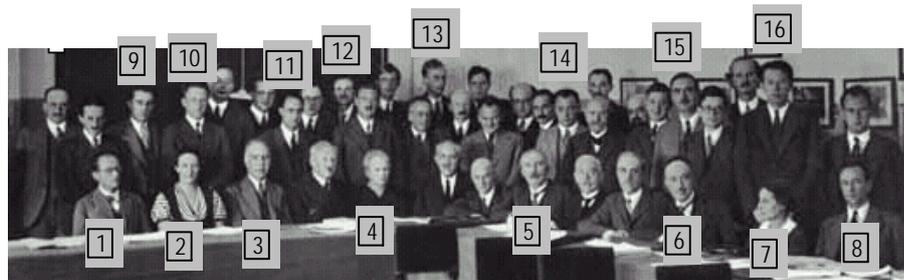


Pauli ipotizza l'esistenza del neutrino per spiegare l'esperimento di Ellis secondo cui l'energia media misurata nel decadimento è proprio tutta e sola quella dei beta; che fine fa l'energia mancante?

<sup>13</sup> Il nome *neutrino* sarà usato due anni dopo da Fermi e non ci si deve stupire visto che il vero neutrone sarà scoperto solo due anni dopo sempre nel '32.

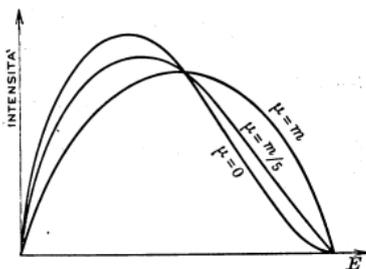
Perrin figlio) ma i partecipanti tornarono dal congresso di Bruxelles pieni di idee su cui lavorare.

foto di gruppo al congresso Solvay del 1933 con 1) Schrodinger, 2) I. Curie, 3) Bohr, 4) M. Curie, 5) Rutherford, 6) De Broglie, 7) Meitner, 8) Chadwick, 9) Joliot, 10) Heisemberg, 11) Fermi, 12) Dirac, 13) Gamow, 14) Pauli, 15) Ellis, 16) Lawrence. Manca solo Einstein, poco interessato alla fisica del nucleo ma di nuovo protagonista ai congressi successivi



Nel giro di pochissimi anni la fisica nucleare letteralmente esplose: teoria del decadimento beta (Fermi, 1933), radioattività artificiale (Joliot Curie, 1934), isotopi artificiali per bombardamento neutronico (1934–1935 gruppo Fermi), fissione nucleare indotta da neutroni (Hahn, Meitner 1937–1938), pila atomica (Fermi 1942), bomba nucleare all'uranio e al plutonio (progetto Manhattan, 1945).

Nel 1933 Fermi diede la prima teoria della *interazione debole* in cui si ipotizza che l'elettrone non sia preesistente nel nucleo che decade ma venga creato all'atto del decadimento insieme all'antineutrino <sup>14</sup> nel momento in cui il neutrone si trasforma in protone.



1934 Fermi: prima teoria dell'interazione debole e prime ipotesi sul fatto che il neutrino abbia una massa molto piccola

Fermi fu anche in grado di prevedere l'andamento teorico dello spettro dei  $\beta$  al variare della massa del neutrino ottenendo la immagine qui a fianco ripresa dal suo articolo originale e da essa, per confronto con i dati sperimentali del decadimento beta, arriva ad ammetterne il carattere pressoché nullo.

La teoria di Fermi si applica inizialmente alla coppia protone neutrone viste come particelle fondamentalmente identiche che si possono trasformare le une nelle altre attraverso i due decadimenti  $\beta^\pm$ . Il modello da cui la teoria deriva è lo stesso utilizzato nella nascente elettrodinamica quantistica per spiegare la *creazione dal nulla* dei fotoni nei riassetamenti elettronici degli atomi.



Così come la *corrente elettronica* del salto di orbitale genera un quanto del campo elettromagnetico, la *corrente debole* del passaggio neutrone protone genera la coppia *elettrone antineutrino*. Fermi non introduce un mediatore della interazione (quello che diventerà la particella *W* di Rubbia scoperta alla fine degli anni 80 al CERN) e ipotizza che la nuova interazione sia praticamente puntiforme con un mediatore di massa infinita. <sup>15</sup>

Alla fine, negli anni 30 si scriverà:



per indicare il decadimento  $\beta^-$  nei nuclei atomici.

Dopo la scoperta del neutrone e gli studi sulle sue caratteristiche il decadimento beta verrà ipotizzato anche come processo che può avvenire anche da parte del singolo neutrone che, avendo massa di riposo mag-

<sup>14</sup> Nel 1932 non era ancora chiara la distinzione tra particelle ed antiparticelle: il positrone viene scoperto proprio in quell'anno.

<sup>15</sup> Quanto più il raggio d'azione di una interazione è piccolo tanto più è piccolo l'intervallo temporale che caratterizza la vita della particella virtuale che media la interazione. Ma se  $\Delta t$  è piccolo si avrà, alla luce del principio di indeterminazione un  $\Delta \mathcal{E}$  grande e ciò significa grande massa della particella mediatrice.

giore della somma delle masse del protone e dell'elettrone, è energeticamente in grado di dar vita alla coppia  $p^+$  ed  $e^-$ ; si parla allora di *decadimento del neutrone libero* con una vita media di circa  $10^3$ s.

#### 2.5.4 IL DECADIMENTO BETA + E LA CATTURA K

Il decadimento  $\beta^+$ , come il beta meno, riguarda una fascia molto ampia di nuclei caratterizzati da carenza di neutroni. La maggiore stabilità viene raggiunta attraverso la trasformazione

$$X_Z^A \rightarrow X_{Z-1}^A + e^+ \quad (\text{VII.2.14})$$

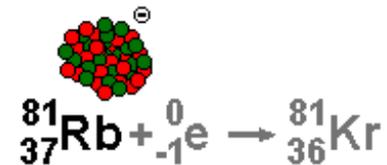
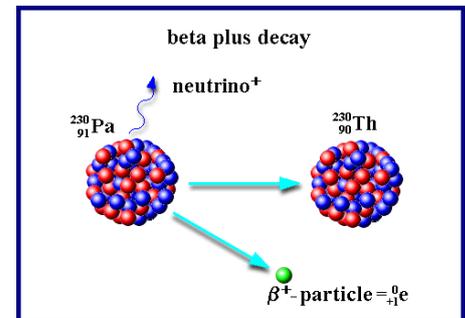
$$p^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e \quad (\text{VII.2.15})$$

Nel caso dei nuclei pesanti, però, può anche accadere che gli elettroni degli strati più interni si trovino così prossimi al protone da determinare la reazione complementare

$$p^+ + e^- \rightarrow n + \nu_e + X$$

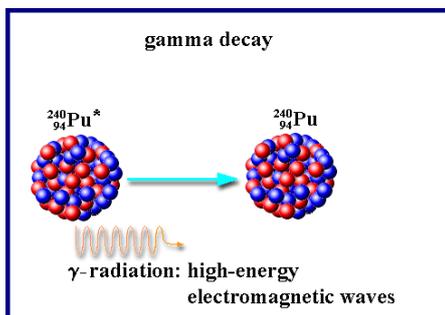
dove con X si è indicato un fotone monocromatico che viene emesso dall'atomo (non dal nucleo) per effetto dei successivi riassetamenti elettronici.

A differenza del  $\beta^-$  il decadimento  $\beta^+$  non può avvenire per il protone isolato: non ne esistono i presupposti energetici visto che si tratta di una reazione endotermica che può avvenire solo all'interno dei nuclei grazie ai riassetamenti energetici del nucleo stesso.



## 2.6 Il decadimento $\gamma$

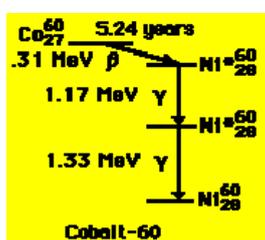
### 2.6.1 CARATTERISTICHE



Il decadimento  $\gamma$  corrisponde al riassetamento di un nucleo che si trova in uno stato energetico più alto e che ritorna ad occupare la condizione di energia minima.

E' stato il carattere intrinsecamente monocromatico della radiazione  $\gamma$  a determinare il sorgere dei modelli nucleari a strati in cui si ipotizza che esistano configurazioni energetiche dei nucleoni di tipo discreto e, come nel caso degli atomi, i nuclei tendono spontaneamente, ma in maniera del tutto probabilistica, a riportarsi nel primo stato disponibile di energia più bassa.

Di solito il decadimento  $\gamma$  è successivo o al decadimento  $\alpha$  o al  $\beta^\pm$  perché sono questi decadimenti che, mutando la struttura del nucleo, possono lasciarne i nuclei figlio in uno stato di instabilità.



Citiamo come esempio quello dell'isotopo radioattivo utilizzato come sorgente in radioterapia per il bombardamento dei tumori il  $^{60}_{27}\text{Co}$ . Si tratta di un isotopo radioattivo artificiale prodotto mediante bombardamento neutronico dotato di  $T_{1/2} = 5.27$  anni e che decade  $\beta^-$  con formazione di un nucleo eccitato di Nickel che a sua volta emette in sequenza due raggi  $\gamma$  monocromatici di 1.33 e 1.17 MeV.

## 2.7 Le leggi del decadimento radioattivo

### 2.7.1 DA COSA DIPENDE E DA COSA NON DIPENDE

Il decadimento radioattivo ha una caratteristica interessante dal punto di vista scientifico. Nonostante si tratti di un evento probabilistico che non è influenzato né dalle condizioni fisiche (temperatura e pressione) né dal legame chimico, il carattere intrinsecamente probabilistico ci consente di esaminarlo utilizzando appieno gli strumenti della matematica.

Il decadimento radioattivo, misurato in termini di numero di eventi, viene a dipendere esclusivamente dal tipo di nuclide considerato (e cioè dal numero di massa  $A$  e dal numero atomico  $Z$ ) e dalla quantità di sostanza che si sta esaminando (esprimibile o in massa o in moli o in numero di nuclei, a seconda dei casi).

### 2.7.2 LA LEGGE DEL DECADIMENTO E LA SUA ESPRESSIONE IN FORMA ESPONENZIALE

Consideriamo una quantità  $N$  di nuclei ed indichiamo con  $-\delta N$  il numero elementare di nuclei che decadono nell'intervallo di tempo elementare  $\delta t$  tra il generico istante  $t$  e  $t + \delta t$ .<sup>16</sup>

Poiché il processo ha natura intrinsecamente probabilistica dovrà essere

$$\delta N \propto N \delta t$$

e nient'altro sarà in grado di influenzarlo se non il tipo di nucleo considerato.

Introduciamo pertanto una costante positiva  $\lambda$  dipendente dal nuclide, detta *costante di decadimento*, e scriviamo:

$$\delta N = -\lambda N \delta t \Leftrightarrow -\frac{\delta N}{\delta t} = \lambda N \tag{VII.2.17}$$

La quantità  $A = -\frac{\delta N}{\delta t}$

è detta *attività radioattiva* e si misura in disintegrazioni al secondo ( $s^{-1}$ ).

Ci permettiamo, a questo punto del testo, di utilizzare una tecnica di soluzione basata sulle equazioni differenziali:<sup>17</sup>

$$\frac{\delta N}{N} = -\lambda \delta t \text{ e integrando avremo } \ln N = -\lambda t + \text{costante}$$

La costante di integrazione, come in tutte le leggi fisiche, si elimina assegnando le condizioni iniziali (sia per  $t = 0$ ,  $N = N_0$ ) e dunque:

$$\ln N_0 = \text{costante}$$

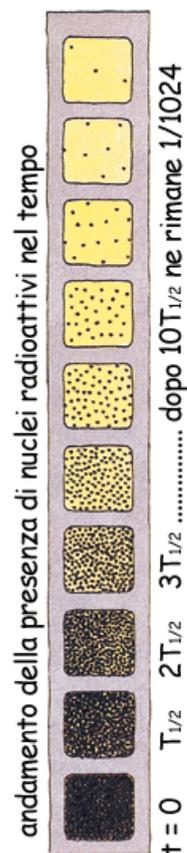
Avremo dunque  $\ln N - \ln N_0 = -\lambda t$  o anche  $\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$  e infine:

$$N = N_0 \exp(-\lambda t) \tag{VII.2.18}$$

$$A = \lambda N = \lambda N_0 \exp(-\lambda t) = A_0 \exp(-\lambda t) \tag{VII.2.19}$$

<sup>16</sup> Si è indicato tale numero con  $-\delta N$  perché si tratta di un numero positivo mentre  $\delta N$ , rappresentando la variazione della popolazione (che va diminuendo), è negativo.

<sup>17</sup> Volendo basta osservare che l'unica funzione che ammette se stessa come derivata è l'esponenziale



Le due equazioni sono sostanzialmente identiche e, come per tutte le equazioni di questo tipo, la quantità  $\lambda$  corrisponde alla intercetta sull'asse dei tempi della retta tangente passante per l'intersezione con l'asse delle ordinate.<sup>18</sup>

Visto che le curve esponenziali sono tutte identiche vale la pena di studiarne le caratteristiche della più semplice e cioè  $Y = e^{-X}$  che si ottiene dalle precedenti attraverso il cambiamento di scala:

$$Y = \frac{N}{N_0} \text{ e } X = \lambda t$$

Poiché la derivata di  $Y = e^{-X}$  è  $f'(X) = -e^{-X}$  si ha  $f'(0) = -1$  e pertanto la retta tangente interseca l'asse  $X$  in  $X = 1$ ; inoltre si ha  $f(X) = 1/2 \Leftrightarrow X = -\ln(1/2) = \ln 2 \approx 0.693$ .

L'unità di misura della *attività radioattiva*, prima dell'avvento del S.I. si chiamava *Curie* (simbolo Ci) e corrispondeva alla attività di una sorgente di 1 g di Radio<sup>226</sup> (vita media 1'580 anni).

Se si tiene conto del numero di massa si può passare da  $m$  a  $N$  e ciò consente di determinare la attività radioattiva in disintegrazioni al secondo.

Eseguito il calcolo si trova che:

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ dis/s}$$

Il sistema internazionale ha fissato come unità di attività radioattiva proprio dis/s e gli ha dato il nome di *Becquerel*. Dunque

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

### 2.7.3 TEMPO DI DIMEZZAMENTO E VITA MEDIA

Ritorniamo al nostro sistema di coordinate dotato di senso fisico e vediamo di individuare il sistema di coordinate più conveniente per l'asse delle ascisse dopo aver osservato che in ordinata vale la pena di rappresentare sempre la *abbondanza relativa* o la *attività relativa*.

Dopo aver osservato che la costante  $[\lambda]$  è l'inverso di un tempo dimostriamo in primo luogo che il suo inverso  $1/\lambda$  è la *vita media dei nuclei* cioè il tempo medio che bisogna attendere affinché un generico nucleo osservato decada.

In effetti se teniamo presente che al generico intervallo tra  $t$  e  $t + \delta t$  decadono  $-\delta N$  nuclei avremo che la vita media (media di tutti i tempi di vita) sarà, per definizione:

$$\tau = 1/N_0 \int_0^{+\infty} -\delta N \cdot t = 1/N_0 \int_0^{+\infty} \lambda N t \delta t = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t \delta t \quad (\text{VII.2.20})$$

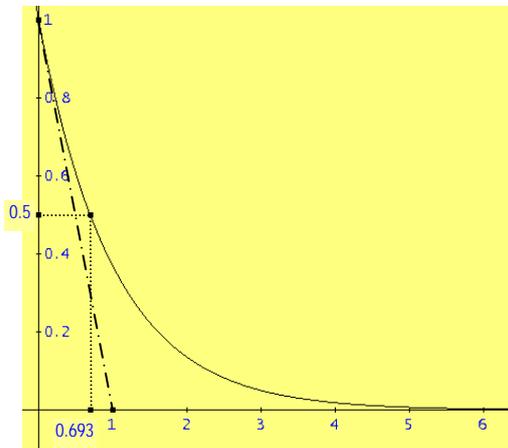
L'integrale indefinito  $\int e^{-\lambda t} t \delta t$  si fa per parti:

$$\int e^{-\lambda t} t \delta t = -1/\lambda \int t \delta(e^{-\lambda t}) = -1/\lambda [t e^{-\lambda t} - \int e^{-\lambda t} \delta(t)] = -1/\lambda [t e^{-\lambda t} + 1/\lambda e^{-\lambda t}] = -1/\lambda e^{-\lambda t} [t + 1/\lambda]$$

Valutiamo ora i valori della primitiva nei due estremi:

$$F(0) = -1/\lambda^2 \text{ mentre } F(+\infty) = 0$$

<sup>18</sup> Si veda in proposito la parte finale della appendice dedicata alla misura e



La legge del **decadimento esponenziale** è identica per tutti i nuclidi ed è caratterizzata da due indicatori importanti sostanzialmente equivalenti: la **vita media** rappresentabile tramite l'intercetta della retta tangente e il **tempo di dimezzamento**:

$$T_{1/2} = \ln 2 \tau$$

Dunque:

$$\tau = \lambda [F(+\infty) - F(0)] = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{VII.2.21})$$

La costante  $\lambda$  acquista dunque un significato fisico molto importante, il suo inverso è la *vita media* e se poniamo  $t = \tau$  nella legge otteniamo che  $A/A_0 = e^{-1} \approx 0.368$

Converrà dunque scrivere la legge del decadimento nella forma:

$$N = N_0 \exp(-t/\tau) \quad (\text{VII.2.22})$$

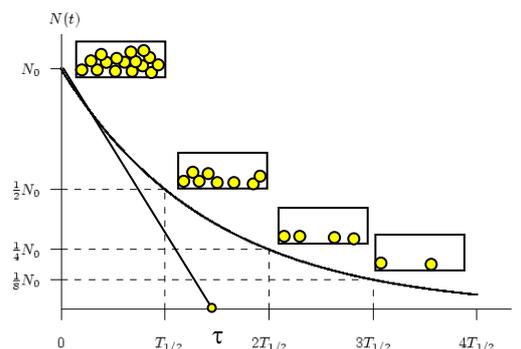
Un secondo tempo, molto importante nei processi esponenziali decrescenti è il *tempo di dimezzamento*  $T_{1/2}$  che abbiamo già ampiamente utilizzato in forma intuitiva: si tratta del tempo che riduce a metà la popolazione e la attività (che sono tra loro proporzionali).

$1/2 = \exp(-T_{1/2}/\tau)$  da cui

$$T_{1/2} = \ln 2 \tau \approx 0.693 \tau \text{ e } \tau \approx 1.44 T_{1/2} \quad (\text{VII.2.23})$$

Dunque quando si rappresenta graficamente la legge del decadimento è opportuno scegliere come unità di misura per l'asse dei tempi o la vita media o il tempo di dimezzamento. Nel primo caso, ad ogni vita media, la attività si riduce al 36.8% del valore precedente. Nel secondo caso, ad ogni tempo di dimezzamento, la attività si riduce a metà.

Poiché le potenze del 2 sono molto semplici da maneggiare si preferisce lavorare in tempi di dimezzamento. Per esempio si considera convenzionalmente esaurito un fenomeno radioattivo quando sono trascorsi 10 tempi di dimezzamento perché in quel caso la sua attività si riduce a circa un millesimo (perché  $(1/2)^{10} = 1/1024$ ).



#### 2.7.4 LE FAMIGLIE RADIOATTIVE IN EQUILIBRIO SECOLARE: CAPOSTIPITE E NUCLEI FIGLIO

Man mano che, grazie al lavoro della scuola francese e anglosassone, venivano scoperti nuovi elementi radioattivi ci si rendeva conto che esisteva un legame di tipo genetico tra i diversi elementi scoperti. La loro presenza era sempre legata alla esistenza di un *nucleo padre* che li generava e, a loro volta, i nuovi elementi producevano altri *nuclidi figlio*.

Addirittura, nella fase iniziale degli studi di radioattività i nuovi elementi o i nuovi isotopi scoperti venivano indicati come *emanazioni* del nucleo padre o con il nome del nucleo padre seguito da un suffisso alfabetico. E si parla così di Radio A, Radio B, Radio C, ...

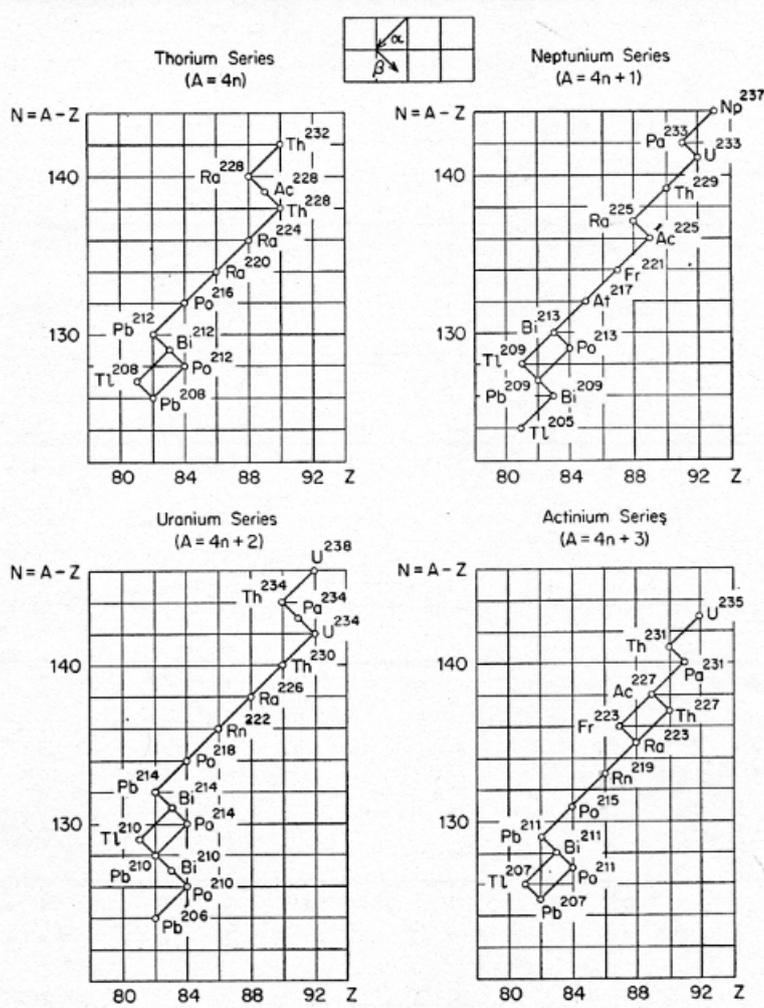
Le famiglie radioattive presentano come capostipite un nuclide di elevato tempo di dimezzamento (molto maggiore del tempo di dimezzamento dei discendenti) in modo di poter ipotizzare che la sua attività radioattiva sia costante nel tempo. Indichiamolo con A.

In questa situazione il suo decadimento produrrà un nuclide B che a sua volta inizierà a decadere in C e così via. La equazione differenziale che descrive la trasformazione di A in B e di B in C è complicata perché abbiamo la simultaneità di un processo di incremento (B che si genera da A) e di decremento (B che si trasforma in C). Il processo dopo una fase transitoria si porterà a regime e ciò avverrà quando, fissato un intervallo temporale  $\delta t$ , il numero di nuclei di A che diventano B è pari a quello di B che diventano C.

Possiamo visualizzarci la cosa come un insieme di recipienti contenenti un liquido, posti in comunicazione l'uno con l'altro attraverso dei forellini di diametro diverso e collocati l'uno sull'altro. Dove il foro di uscita è piccolo il fluido tenderà ad accumularsi (crescere di livello) e ciò ne aumenterà la pressione e conseguentemente il flusso di uscita. Saremo in equilibrio quando la portata diventa costante in tutti i recipienti e ciò può avvenire solo se il recipiente capostipite *non si consuma*, cioè se il suo tempo di dimezzamento è molto maggiore di quello di tutti i figli.

Dunque quando una famiglia radioattiva è in equilibrio la attività radioattiva è la stessa per tutti i discendenti coinvolti.

Le 4 famiglie radioattive con i decadimenti  $\alpha$  verso sinistra e  $\beta$  verso destra



Le famiglie radioattive importanti sono 3: quella dell'uranio 238 con  $T_{1/2} = 4.56 \cdot 10^9$  anni, quella del  $\text{Th}^{232}$  con  $T_{1/2} = 13.9 \cdot 10^9$  anni, quella dell'uranio 235 con  $T_{1/2} = 0.713 \cdot 10^9$  anni.

C'è poi una quarta famiglia che inizia con un transuranico il  $\text{Np}^{237}$ . Ma poiché il suo tempo di dimezzamento è solamente  $T_{1/2} = 2.2 \cdot 10^6$  anni si può considerare esaurita questa serie visto che, dalla formazione della terra, sono trascorsi oltre 4 miliardi di anni.

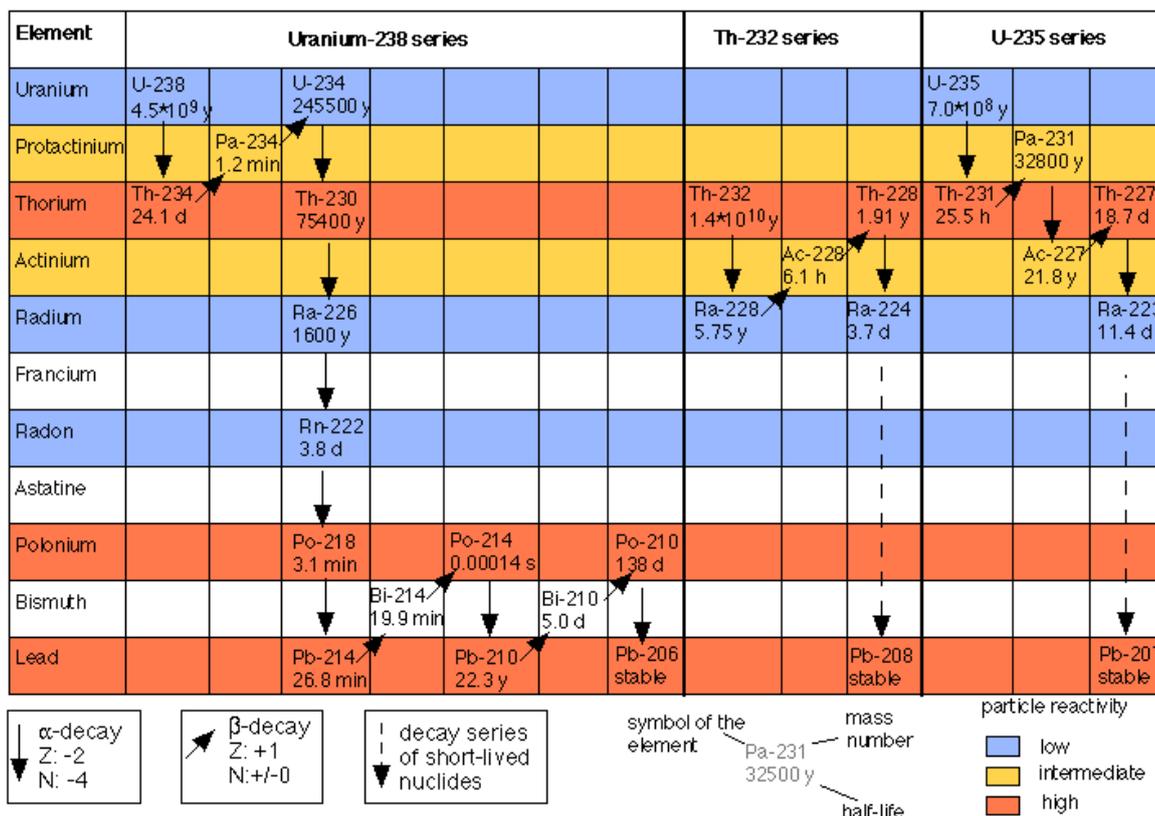
In una famiglia radioattiva in equilibrio, poiché la attività è costante, è costante anche il prodotto  $\lambda N$  e pertanto potremo scrivere per due generici elementi indicati con i pedici 1 e 2 che le quantità disponibili sono proporzionali alle vite medie:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \tag{VII.2.24}$$

Data l'importanza che rivestono per le problematiche energetiche riteniamo opportuno rappresentare in dettaglio i decadimenti principali delle due serie dell'Uranio e della serie del torio da cui si possano leggere i tempi di dimezzamento con la loro grande variabilità rappresentata pittoricamente a colori. Non sono stati riportati i decadimenti con vita media estremamente breve per non appesantire l'immagine.

Come si vede le tre famiglie terminano con un isotopo del piombo.

Se si fa il rapporto tra i tempi di dimezzamento dell'uranio 238 e quello del 235 si trova circa 6.4 ciò vuol dire che nella ipotesi che i due isotopi fossero egualmente probabili all'atto della formazione della terra oggi le popolazioni sono molto diverse. L'uranio 238 si è grosso modo dimezzato mentre il 235 si è ridotto a  $\frac{1}{2}^{6.4} = 0.012$  (circa 1/100) del valore iniziale. Il torio c'è ancora quasi tutto visto che è trascorso meno di un terzo del suo tempo di dimezzamento.



## 2.8 Esercizi di fine capitolo<sup>19</sup>

- 1) Calcolo della energia minima di fotoni necessaria a produrre, per rinculo, protoni di una data energia



Utilizzando la teoria dell'effetto Compton dimostrare che irraggiando della paraffina con fotoni, per produrre protoni di rinculo di energia pari a 4.5 MeV sono necessari fotoni con energia dell'ordine di 50 MeV o superiore



Se vogliamo stimare la energia minima necessaria dovremo ipotizzare che il fotone diffuso dopo un urto alla Compton ceda il massimo di quantità di moto al protone della paraffina e che dunque tale fotone venga diffuso all'indietro.

Così, se applichiamo la conservazione della energia e quella della quantità di moto (proiettata lungo la direzione del fotone e del protone) avremo indicando con  $\mathcal{E}'$  le caratteristiche del fotone diffuso e con il pedice  $p$  il protone di rinculo:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}_k \wedge p = -p' + p_p$$

Ma per i fotoni la relazione tra energia e quantità di moto è particolarmente semplice  $\mathcal{E}' = p' c$  e dunque la seconda relazione, dopo aver moltiplicato per  $c$ , diventa:  $\mathcal{E} = -\mathcal{E}' + p_p c$

L'artificio adottato ci consente di eliminare per somma tra le due equazioni la energia incognita  $\mathcal{E}'$  ottenendo:

$$2 \mathcal{E} = \mathcal{E}_k + p_p c$$

Ma la quantità di moto del protone è legata alla sua energia univocamente e si tratta solo di stabilire se si tratta di particelle in ambito classico o relativistico.

Poiché la energia cinetica è molto minore della energia di riposo del protone (dell'ordine di 900 MeV) potremo utilizzare la relazione classica:

$$\mathcal{E}_k = \frac{p_p^2}{2m} \text{ e pertanto } p_p = \sqrt{2m \mathcal{E}_k}$$

dunque la energia minima necessaria risulta:

$$\mathcal{E}_{\min} = \frac{1}{2} (\mathcal{E}_k + c\sqrt{2m \mathcal{E}_k})$$

Naturalmente il valore di energia va portato in unità del SI:

$$m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad c = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\mathcal{E}_k = 4,5 \times 10^6 \times 1,60 \times 10^{-19} = 7,2 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\min} &= \frac{1}{2} \left( 7,2 \times 10^{-13} + 2,998 \times 10^8 \sqrt{2 \times 1,67 \times 10^{-27} \times 7,2 \times 10^{-13}} \right) = \\ &= 7,71 \times 10^{-12} \text{ J} = \frac{7,71 \times 10^{-12}}{1,60 \times 10^{-19}} = 48,2 \times 10^6 \text{ eV} \end{aligned}$$

Dunque nel caso degli esperimenti di Joliot e Curie i protoni emessi dalla paraffina non potevano essere dovuti ad effetto Compton. Anche questo ragionamento era sbagliato; era sbagliata la assunzione che si trattasse di fotoni, si trattava di una nuova particella materiale, neutra, il neutrone e, come si spiega a inizio capitolo di qui iniziano i lavori di Chadwick.

<sup>19</sup> Gli esercizi che seguono sono stati assegnati come compiti in classe (verifica di competenze) nelle classi del PNI del Liceo Scientifico Frisi negli anni dal 2004 al 2008



2) Carbonio radioattivo e problematiche di datazione archeologica

Il rapporto tra atomi di  $C^{14}$  radioattivo e atomi di  $C^{12}$  è costante nel tempo su scala multisecolare e vale  $\alpha = 1.3 \cdot 10^{-12}$ . Un reperto archeologico osseo contiene una massa  $m = 656$  g di  $CaCO_3$



- a) Determinare la massa  $m_C$  di carbonio presente nel campione e il numero di nuclei  $N_C$  ad essa corrispondenti (in questa fase, dato il basso valore di  $\alpha$  trascurare il ruolo svolto dal  $C^{14}$ )
- b) La attività radioattiva del campione misurata con un contatore di Geiger risulta essere di 5.83 Bq. Tenuto conto che il tempo di dimezzamento del  $C^{14}$  è  $T_{1/2} = 5730$  anni calcolare la costante di decadimento  $\lambda$  e il numero  $N$  di nuclei radioattivi presenti.
- c) Tenuto conto del valore di  $\alpha$  fornito calcolare il valore  $N_0$  di nuclei radioattivi al momento della morte biologica del reperto.
- d) Attraverso  $N$  e  $N_0$  stabilire l'età  $t$  del campione.



- a) Il peso molecolare del  $CaCO_3$  è  $40+12+3 \cdot 16 = 100$

pertanto  $m = 656 \cdot \frac{12}{100} = 78.7$  g.

$$N_C = \frac{m_C}{\mu_C} \cdot N_A = \frac{78.7}{12} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 3.95 \cdot 10^{24} \text{ atomi.}$$

- b)  $\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 3.84 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$

poiché la attività radioattiva  $A = -\frac{\delta N}{\delta t} = \lambda N$

si ha  $N = \frac{A}{\lambda} = 1.52 \cdot 10^{12}$  atomi

- c)  $N_0 = \alpha N_C = 5.14 \cdot 10^{12}$  atomi

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \text{ e pertanto } \lambda t = -\ln \frac{N}{N_0} = -\ln 0.296 = 1.22$$

pertanto  $t = \frac{1.22}{3.84 \cdot 10^{-12}} = 3.18 \cdot 10^{11} \text{ s} = 10'100$  anni



3) Calcolo dell'età della Terra

L'uranio naturale contiene il 99.28% di  $U^{238}$  e lo 0.72% di  $U^{235}$ .

Calcolare l'età della terra supponendo che all'atto della sua nascita i due isotopi fossero presenti in eguale misura cioè che fosse  $N_{0,235} = N_{0,238}$ .

Dati:  $T_{1/2,238} = 4.47 \cdot 10^9$  anni;  $T_{1/2,235} = 7.04 \cdot 10^8$  anni.

Si consiglia di determinare la relazione che dà la risposta in forma simbolica per evitare calcoli inutili.



Se applichiamo la legge del decadimento radioattivo avremo che:

$N = N_0 e^{-\lambda t}$  e pertanto facendo il rapporto e sfruttando il fatto che inizialmente le due popolazioni sono uguali si ha:

$$N_{238}/N_{235} = e^{-(\lambda_{238} - \lambda_{235})t} \text{ da cui } (\lambda_{235} - \lambda_{238})t = \ln (N_{238}/N_{235})$$

e infine

$$t = \frac{\ln(N_{238}/N_{235})}{\lambda_{235} - \lambda_{238}} = \frac{\ln(N_{238}/N_{235})}{\ln 2(1/T_{1/2,235} - 1/T_{1/2,238})} =$$

$$= \frac{\ln(99.28/0.72)}{\ln 2(1/(7.04 \cdot 10^8) - 1/(4.47 \cdot 10^9))} = 5.94 \cdot 10^9 \text{anni}$$



**4) Decadimento radioattivo e bilancio energetico**

Un nucleo di  ${}_{14}\text{Si}^{31}$  ( $A = 30.97535$  amu) decade in  ${}_{15}\text{P}^{31}$  ( $A = 30.97376$  amu).

- a) che particelle vengono emesse?
- b) quanta energia  $\mathcal{E}$  si libera nella reazione. ( $1 \text{ amu} = 931.5016 \text{ MeV}$ ).



a) Il decadimento è di tipo  $\beta^-$  visto che il numero atomico aumenta di una unità e pertanto  $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$

b)  $\mathcal{E} = \Delta A \mathcal{E}_{\text{amu}} = (30.97535 - 30.97376) 931.5016 = 1.481 \text{ MeV}$



**5) Creazione di coppie e necessità di una interazione nucleare**



Il processo di creazione di coppie corrisponde alla trasformazione di un raggio  $\gamma$  di energia  $\mathcal{E}_\gamma = h\nu$  e quantità di moto  $p_\gamma = \mathcal{E}_\gamma/c$  in una coppia di particelle elettrone positrone.

Questo processo può avvenire solo se il  $\gamma$  interagisce con un nucleo pesante che rincula per effetto della interazione.

Applicare la conservazione della quantità di moto e della energia al caso della trasformazione senza la presenza del nucleo.

Supporre cioè che si verifichi quanto indicato in figura e dimostrare che ciò non è possibile perché porterebbe alla violazione del carattere limite della velocità della luce.

Dimostrare in particolare che applicando le leggi di conservazione (dell'energia e della quantità di moto) si avrebbe  $v > c$ .



Applicando la conservazione della energia si ha  $h\nu = 2mc^2$  dove  $m$  rappresenta la massa relativistica dell'elettrone e del positrone.

Applicando la conservazione della quantità di moto lungo la direzione di

movimento del fotone si ha:  $p = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{h\nu}{c} = 2mv \cos \alpha$  e, dal confronto

delle due equazioni, si ottiene  $mc = mv \cos \alpha$  da cui  $c = v \cos \alpha$  e poiché  $\cos \alpha < 1$  si ha che  $v > c$  contro il postulato del carattere limite della velocità della luce nel vuoto.



**6) Bilancio energetico del decadimento beta**

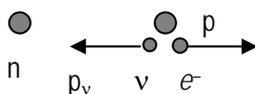
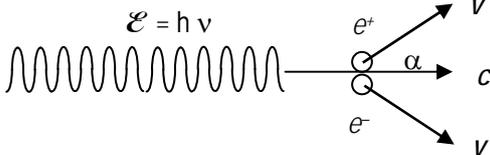


Nel decadimento  $\beta$  si ha la reazione  $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$  dove  $\bar{\nu}_e$  rappresenta l'anti-neutrino elettronico, un leptone che viaggia alla velocità della luce con massa a riposo assimilabile a zero.

Si sa che:  $m_n = 1.008665012$  amu, che  $m_p = 1.007276470$  amu, che  $m_e = 5.4858026 \cdot 10^{-4}$  amu, che  $1 \text{ amu} = 931.5016 \text{ MeV}$

Si consideri un decadimento beta nel corso del quale sia il protone sia il neutrone risultino a riposo.

- a) Si determini l'energia  $\Delta\mathcal{E}$  dovuta al difetto di massa tra protone e neutrone.
- b) Questa energia si trasforma in energia relativistica dell'elettrone  $\mathcal{E}_e$  ed energia del neutrino  $\mathcal{E}_\nu$ .



Il neutrino si comporta come una particella ultrarelativistica mentre l'elettrone è relativistico.

Applicando la conservazione della quantità di moto e della energia si dimostri

che  $\mathcal{E}_e = \frac{\mathcal{E}_{0e}^2 + \Delta\mathcal{E}^2}{2\Delta\mathcal{E}}$  e si trovino  $\mathcal{E}_e$  e  $\mathcal{E}_\nu$ .



a)  $\Delta\mathcal{E} = (m_n - m_p) \mathcal{E}_{amu} = 0.001388542 \cdot 931.5016 = 1.2934 \text{ MeV}$

b) Per la conservazione dell'energia  $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_\nu$

mentre per la conservazione della quantità di moto le due quantità di moto sono opposte e pertanto visto che la quantità di moto iniziale era nulla in modulo si ha che  $p_e = p_\nu$

$\mathcal{E}_\nu = p_\nu c$  mentre per l'elettrone relativistico  $\mathcal{E}_e^2 = \mathcal{E}_0^2 + (p_e c)^2$

si ottiene così:  $\mathcal{E}_e^2 = \mathcal{E}_0^2 + \mathcal{E}_\nu^2$ .

Abbiamo ora due equazioni nelle variabili  $\mathcal{E}_e$  ed  $\mathcal{E}_\nu$  il che ci consente di risolvere il problema.

$\mathcal{E}_e^2 = \mathcal{E}_0^2 + \mathcal{E}_\nu^2 = \mathcal{E}_0^2 + (\Delta\mathcal{E} - \mathcal{E}_e)^2 \Leftrightarrow$

$\mathcal{E}_0^2 + \Delta\mathcal{E}^2 - 2\mathcal{E}_e\Delta\mathcal{E} = 0 \Leftrightarrow$

$\mathcal{E}_e = \frac{\mathcal{E}_{0e}^2 + \Delta\mathcal{E}^2}{2\Delta\mathcal{E}} = \frac{(5.4858026 \cdot 10^{-4} \cdot 931.5016)^2 + 1.2934^2}{2 \cdot 1.2934} = 0.748$

MeV.

Per differenza si ha  $\mathcal{E}_\nu = 0.5457 \text{ MeV}$



**7) Famiglie radioattive e decadimenti**

Quando un nuclide A (padre) decade con costante di decadimento  $\lambda_A$  si ha  $N_A = N_{0A} e^{-\lambda_A t}$ .

Se tale nuclide per effetto del decadimento ne genera un altro B (figlio) con costante  $\lambda_B$  e al tempo  $t = 0$  si ha  $N_B(0) = 0$ , la legge che fornisce  $N_B$  nel tempo è data dalla relazione:



$N_B = N_{0A} \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}) \quad (1)$

Questa legge viene ricavata integrando due equazioni differenziali. La prima, che riguarda il padre, è  $\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A$  che stabilisce la proporzionalità, per piccoli intervalli di tempo, tra numero di nuclei che decadono e popolazione.

a) Sapresti scrivere la seconda che tiene conto del fatto che, mentre B decade, esso è continuamente rigenerato da A?

b) Cosa accade alla (1) se  $\tau_A \gg \tau_B$ ? Scrivi la relazione semplificata, disegna il diagramma e precisa a cosa tende  $N_B$  una volta raggiunta la situazione di regime.

c) Se  $\tau_A > \tau_B$  si ha che  $N_B$  prima cresce e poi decresce e presenta un massimo per  $t = \frac{\ln(\lambda_B/\lambda_A)}{\lambda_B - \lambda_A}$ . Prova a dimostrarlo con le tue conoscenze di analisi.

d) Sapresti spiegare fisicamente come mai  $N_B(0) = N_B(\infty) = 0$ ?



a) Alla solita legge del decadimento basta aggiungere il contributo (positivo) dei prodotti del decadimento di A.

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_A N_A - \lambda_B N_B.$$

Questa relazione vale anche per gli altri elementi della catena e porta ad un sistema di equazioni differenziali

- b) Poiché la vita media è l'inverso della costante di decadimento da  $\tau_A \gg \tau_B \Rightarrow \lambda_A \ll \lambda_B$  e dunque la (1) diventa

$$N_B = N_{0A} \frac{\lambda_A}{\lambda_B} (1 - e^{-\lambda_B t}).$$

Infatti  $\lambda_A t \approx 0$  e dunque  $e^{-\lambda_A t} \approx 1$

Si tratta di un esponenziale crescente che parte da 0 e presenta l'asintoto orizzontale  $N_{0A} \frac{\lambda_A}{\lambda_B}$

- c) Basta derivare la (1) rispetto al tempo e si ha:

$$N'_B = N_{0A} \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} (-\lambda_A e^{-\lambda_A t} + \lambda_B e^{-\lambda_B t})$$

Poiché da  $\tau_A > \tau_B \Rightarrow \lambda_B > \lambda_A$  si ha

$$N'_B \geq 0 \Leftrightarrow -\lambda_A e^{-\lambda_A t} + \lambda_B e^{-\lambda_B t} \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_B e^{-\lambda_B t} \geq \lambda_A e^{-\lambda_A t} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_A} \geq e^{(\lambda_B - \lambda_A)t} \Leftrightarrow t \leq \frac{\ln(\lambda_B/\lambda_A)}{\lambda_B - \lambda_A}$$

e dunque si ha un massimo per  $t = \frac{\ln(\lambda_B/\lambda_A)}{\lambda_B - \lambda_A}$

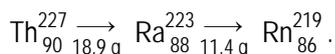
Nel discutere il segno della derivata prestare attenzione alle eventuali costanti negative

- d)  $N_B(0) = 0$  per ipotesi. Mentre  $N_B(\infty) = 0$  perché il prodotto B decade e il prodotto A cessa di alimentarlo dopo che si è esaurito.



### 8) La produzione del Radon, un gas radioattivo particolarmente pericoloso

Un segmento del decadimento di  $U_{238}$  avviene con il seguente schema in cui sono stati indicati i tempi di dimezzamento:



Supponiamo di avere ripulito chimicamente i prodotti di decadimento e di avere  $n_A = 3$  moli di  $Th_{90}^{227}$  e  $n_B = 0$  moli di  $Ra_{88}^{223}$ .

Trova dopo quanto tempo si ha la massima concentrazione di Ra e quanto vale  $n_B$  massimo?



Come è noto  $T_{1/2} = \tau \ln 2$  e poiché  $\lambda = \frac{1}{\tau}$  si ha  $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ . Inoltre  $1 \text{ g} = 86'400 \text{ s}$ .

Possiamo trovare le due costanti di decadimento:

$$\lambda_A = \frac{\ln 2}{18.9 \cdot 86'400} = 4.24 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1} \text{ e analogamente } \lambda_B = 7.04 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

Dunque, in base all'esercizio precedente,

$$t = \frac{\ln(\lambda_B/\lambda_A)}{\lambda_B - \lambda_A} = 1.81 \cdot 10^6 \text{ s} = 21.0 \text{ g}$$

Per trovare  $n_B$  bisogna sostituire i valori trovati nella (1) fornita nell'esercizio precedente e si ottiene  $n_B = 0.838$  moli



**9) Raggio nucleare e barriera di potenziale**

Determinare il raggio nucleare del  $Po_{84}^{210}$  e da esso dedurre in MeV l'altezza della barriera colombiana rispetto alla penetrazione nel nucleo di un protone.

Sapendo che la massa atomica del polonio è  $m = 209.98288$  amu determinare l'energia di legame per nucleone in MeV.

Utilizzare per i calcoli le seguenti costanti sperimentali  $R_0 = 1.4 \cdot 10^{-15}$  m,  $m_n = 1.008668$  amu,  $m_H = 1.007825$  amu,  $1 \text{ amu} = 931.48$  MeV.

Perché è stata fornita la massa di  $H_1$  e non la massa del protone?



Dalla ipotesi della densità nucleare costante si ottiene

$$R_A = R_0 \sqrt[3]{A} = 1.4 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{210} = 8.32 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Per trovare l'altezza della barriera colombiana basta calcolare il valore di  $U$  in corrispondenza del valore di  $R$  trovato e tener conto che per ottenere gli eV bisogna dividere per la carica elementare; si ha così:

$$U = k \frac{Ze^2}{R_A e} = 8.99 \cdot 10^9 \frac{84 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}}{8.32 \cdot 10^{-15}} = 1.45 \cdot 10^7 \text{ eV} = 14.5 \text{ MeV}$$

Si eseguono i calcoli successivi operando sull'idrogeno perché ciò consente di non dover introdurre in entrambi i termini dell'equazione la massa degli elettroni. Si tenga presente che a causa del basso valore delle energie di legame coinvolte, il legame atomico non determina fenomeni significativi di difetto di massa.

$$\Delta \mathcal{E} = (84m_H + (210 - 84)m_n - m) \cdot 931.48 = 1.645 \cdot 10^3 \text{ MeV}$$

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{A} = 7.83 \text{ MeV/nucleone}$$



**10) Saper leggere e interpretare gli schemi di decadimento**

Cosa si produce da  $Ra_{88}^{226}$  dopo 5 decadimenti  $\alpha$  e 4 decadimenti  $\beta^-$ ?

Il prodotto finale del decadimento dell'  $U_{92}^{238}$  è il  $Pb_{82}^{206}$ . Quanti decadimenti  $\alpha$  e quanti decadimenti  $\beta^-$  avvengono nel corso della trasformazione?



Dopo 5 decadimenti  $\alpha$  e 4 decadimenti  $\beta^-$  si ottiene l'elemento con

$$A = 226 - 4 \cdot 5 = 206 \text{ e con } Z = 88 - 2 \cdot 5 + 4 = 82.$$

Si tratta del  $Pb_{82}^{206}$

Nel caso del decadimento dell'uranio a piombo abbiamo che

$$\Delta A = 238 - 206 = 32 \text{ e pertanto si hanno } 32/4 = 8 \text{ decadimenti } \alpha$$

Invece  $\Delta Z = 92 - 82 = 10$  e poiché 8 decadimenti alfa abbassano di 16 il numero atomico si devono avere anche 6 decadimenti beta.



**11) Attenuazione di un fascio di neutroni e sezione d'urto**

Determinare la attenuazione di un fascio collimato di neutroni termici che attraversano uno strato di spessore  $\Delta x = 8.0$  cm di acqua pesante  $D_2O$  sapendo che per i neu-



troni di quella energia la sezione d'urto del deuterio è  $\sigma_D = 7.0$  barn e quella dell'ossigeno è 4.2 barn. La densità  $\delta$  dell'acqua pesante vale  $1.105 \text{ kg/dm}^3$



Come è noto la attenuazione  $I/I_0$  dei un fascio di radiazioni ionizzanti avviene con legge esponenziale secondo la relazione:  $I/I_0 = e^{-n\sigma\Delta x}$

dobbiamo pertanto calcolare la sezione d'urto e la concentrazione molecolare dell'acqua pesante.

Poiché la sezione d'urto rappresenta la superficie utile alla interazione nel caso di una molecola si sommano i contributi e non si fa alcuna media ponderata

$$\sigma_{D_2O} = 2\sigma_D + \sigma_O = 18.2 \text{ barn} = 18.2 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2.$$

Il peso molecolare di  $D_2O$  è  $A = 2 \cdot 2 + 16 = 20$

La concentrazione molecolare

$$n = \frac{N}{V} = \frac{n_m \mathcal{N}_A}{V} = \frac{n_m \mathcal{N}_A}{V} = \frac{m \cdot 10^3 \mathcal{N}_A}{A V} = \frac{\delta 10^3 \mathcal{N}_A}{A} = \frac{1.105 \cdot 10^3 \cdot 6.02 \cdot 10^{23}}{20} = 3.32 \cdot 10^{28} \text{ molecole/m}^3$$

Basta ora sostituire nella relazione  $I/I_0 = e^{-n\sigma\Delta x}$  e si ottiene un rapporto di attenuazione pari a  $8.0 \cdot 10^{-3}$ .



### 12) Elementi quantitativi sulla legge esponenziale del decadimento radioattivo

Data una certa quantità  $N_0$  di atomi di materiale radioattivo si vuol sapere quanti di essi  $|\Delta N|$  decadono in un determinato tempo  $t$ .



- Scrivere la relazione generale che consente di rispondere alla domanda indicando con  $T_{1/2}$  il tempo di dimezzamento.
- Quando tale relazione può essere approssimata con  $|\Delta N| = N_0 \ln 2 t/T_{1/2}$ ?
- Eeguire il calcolo nel caso di un milione di atomi di Radon o di Polonio in 24 ore.



- $|\Delta N| = N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t})$  con  $T_{1/2} = \ln 2 \tau$  e  $\tau = 1/\lambda$
- Basta ricordare lo sviluppo di  $e^z$  o il limite notevole  $e^z = 1 + z + o(z)$  e dunque

$$|\Delta N| = N_0 [1 - (1 - \lambda t + o(\lambda t))] \approx N_0 \lambda t = N_0 \ln 2 t/T_{1/2}$$

quando  $\lambda t$  è trascurabile ovvero quando il tempo considerato è molto più piccolo della vita media.

- Nel caso del radon 1 giorno è comparabile con la vita media e dunque bisogna usare la relazione esatta mentre nel caso del radio è vero il contrario.

$$\text{Dunque } |\Delta N|_{Rn} = N_0 \ln 2 t/T_{1/2} = 10^6 \ln 2 \frac{1}{3.82} = 0.181 \cdot 10^6$$

$$|\Delta N|_{Ra} = N_0 [1 - \exp(-\ln 2 t/T_{1/2})] = 10^6 [1 - \exp(-\ln 2 / (1590 \cdot 365))] = 0.999998806 \cdot 10^6$$



### 13) Elementi quantitativi su decadimento del Radio e del Radon

- a) Quanto tempo occorre perché la attività radioattiva del Radon si riduca al 75% del valore iniziale?
- b) Il radio, per decadimento  $\alpha$ , produce radon. Quanto vale il rapporto  $N_{Ra}/N_{Rn}$  quando il sistema è in equilibrio? Se si elimina il radio in quanto tempo la attività radioattiva del radon si riduce al 90%?
- c) Durante il decadimento il radio emette particelle  $\alpha$  di energia  $\mathcal{E} = 4.78$  MeV. Determinare la velocità  $v$  di tali particelle. Quando la particella  $\alpha$  viene emessa il nucleo di Radon che si forma rincula. Tenuto conto del fatto che il sistema è inizialmente in quiete sapresti trovare l'energia totale  $\mathcal{E}'$  che si libera durante il decadimento?



☹

- a) La attività radioattiva varia con la stessa legge esponenziale del decadimento:

$$A = - \frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 \exp(-\ln 2 t / T_{1/2}) = A_0 \exp(-\ln 2 t / T_{1/2})$$

e dunque si tratta di risolvere l'equazione esponenziale  $0.75 = \exp(-\ln 2 t / 3.82)$  dove  $t$  è espresso in giorni.

$$t = - \ln 0.75 / \ln 2 \cdot 3.82 = 1.585 \text{ giorni}$$

- b) In condizione di equilibrio l'attività radioattiva è la stessa e dunque  $N_{Ra} \lambda_{Ra} = N_{Rn} \lambda_{Rn}$  da cui:

$$N_{Ra} / N_{Rn} = \lambda_{Rn} / \lambda_{Ra} = T_{1/2 Ra} / T_{1/2 Rn} = \frac{1590 \cdot 365}{3.82} = 1.52 \cdot 10^5$$

Se si elimina il radio il radon decade con legge esponenziale (vedi problema precedente) e dunque  $t = - \ln 0.90 / \ln 2 \cdot 3.82 = 0.279$  giorni

- c) Le particelle  $\alpha$  sono non relativistiche e dunque  $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} m v^2$  da cui

$$v = \sqrt{\frac{2 \mathcal{E}_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4.78 \cdot 1.602 \cdot 10^{-13}}{4.00388 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}}} = 1.52 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Durante il rinculo le due particelle ( $\alpha$  e nucleo di Radon) ricevono la stessa quantità di moto ma l'energia cinetica, a parità di quantità di moto è inversamente proporzionale alla massa e dunque:

$$\mathcal{E}_{kRn} = \mathcal{E}_{k\alpha} \frac{m_\alpha}{m_{Rn}} = \mathcal{E}_{k\alpha} \frac{4}{222} = 0.018 \mathcal{E}_{k\alpha}$$

$$\mathcal{E}' = 1.018 \mathcal{E}_{k\alpha} = 4.866 \text{ MeV}$$

☺

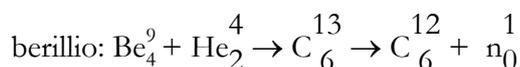
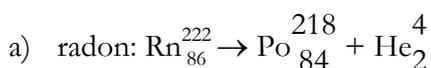
#### 14) Una sorgente di neutroni

Una provetta contenente polvere di  ${}^9_4\text{Be}$  e del Radon gassoso viene utilizzata come sorgente di neutroni che vengono prodotti quando il berillio viene colpito dalle  $\alpha$  prodotte dal Radon.

- a) Scrivere la reazione nucleare sia per il radon sia per il berillio.
- b) Sapendo che il rendimento della reazione è solo di 1/4000 dimostrare che la quantità di Radon inizialmente messo nella provetta è di 2.1  $\mu\text{g}$  sapendo che dopo 5 giorni di attività la attività di produzione neutronica è di  $1.2 \cdot 10^6$  Bq.



☹



- b) Indichiamo con  $A'$  l'attività neutronica; dato il rendimento la attività  $A''$  del radon è 4'000 volte più grande  $A'' = 4.8 \cdot 10^9$  Bq la attività iniziale  $A$  è ottenibile dalla legge del decadimento

$$A''/A = \exp(-\ln 2 t/T_{1/2}) = \exp(-\ln 2 \cdot 5/3.82) = 0.4036$$

e dunque  $A = 1.189 \cdot 10^{10}$  Bq

Ma l'attività si lega al numero di nuclei dalla relazione  $A = \lambda N$  e a

sua volta  $N = n \mathcal{N}_A = \frac{m_g}{\mu} \mathcal{N}_A$  e dunque:

$$m_g = \frac{\mu N}{\mathcal{N}_A} = \frac{\mu A}{\lambda \mathcal{N}_A} = \frac{\mu A T_{1/2}}{\ln 2 \mathcal{N}_A} = \frac{222 \cdot 1.189 \cdot 10^{10} \cdot 3.82 \cdot 3'600 \cdot 24}{\ln 2 \cdot 6.02 \cdot 10^{23}} = 2.09 \cdot 10^{-6} \text{ g}$$

