Le trasformazioni lineari nel piano [1]

Cos'è una trasformazione lineare?

Un punto del piano P viene rappresentato attraverso il vettore $\overrightarrow{OP}$ il quale, se si indicano con $\vec{e_1}$ ed $\vec{e_2}$ una coppia di vettori generatori del piano (cioè di vettori non paralleli), avrà espressione:

Sia $\vec{x} = \overrightarrow{OP} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$ dove i numeri reali x_1 e x_2 sono chiamate componenti del vettore riferite ai generatori $\vec{e_1}$ ed $\vec{e_2}$.

$\vec{x} = \overrightarrow{OP} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$ (1)

Consideriamo ora una corrispondenza univoca (trasformazione) tra i punti del piano (che indicheremo con A) la quale associ ad ogni punto del piano P un punto P', detto trasformato di P secondo A e indicato con A(P) o anche con AP se non c'è rischio di confusione.

Con riferimento al vettore $\vec{x}$ scriveremo:

$\vec{x'} = \overrightarrow{OP'} = A\cdot\overrightarrow{OP} = A\cdot\vec{x}$ (2)

Tra tutte le possibili trasformazioni restringiamo la nostra indagine alle cosiddette *trasformazioni lineari* cioè a quella classe di trasformazioni che soddisfino i due seguenti requisiti:

Indicati con λ un generico numero reale non nullo e con $\vec{x}$ e $\vec{y}$ due generici vettori del piano:

$A\cdot(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\cdot\vec{x})$ (3)

$A\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = A\cdot\vec{x} + A\cdot\vec{y}$ (4)

La prima condizione afferma che la trasformazione conserva la proporzionalità (parallelismo); la seconda afferma che il vettore somma si trasforma nella somma dei trasformati e poiché il vettore somma si costruisce attraverso un parallelogramma possiamo affermate che nelle trasformazioni lineari si devono conservare il parallelismo e che parallelogrammi si trasformano in parallelogrammi.
Si osservi che numerose trasformazioni elementari che conosciamo già sono lineari.

Esempio

La omotetia di rapporto k, cioè la trasformazione che manda $\vec{x}$ in $\vec{x'} = k\,\vec{x}$ è una trasformazione lineare.

Sia $\vec{x'} = k\,\vec{x}$; si tratta di verificare che sono soddisfatte la (3) e la (4).

$A\cdot(\lambda\vec{x}) = k(\lambda\vec{x}) = (k\lambda)\vec{x} = \lambda(k\vec{x}) = \lambda(A\cdot\vec{x})$

$A\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = k(\vec{x}+\vec{y}) = k\vec{x} + k\cdot\vec{y} = A\cdot\vec{x} + A\cdot\vec{y}$ ☺

Come si esprime analiticamente una trasformazione lineare?

Ci apprestiamo a dimostrare una condizione necessaria e sufficiente molto interessante; in base ad essa possiamo affermare che ogni trasformazione lineare è esprimibile attraverso una relazione lineare tra le coordinate i cui coefficienti altro non sono che le componenti dei vettori trasformati della coppia di vettori generatori del piano.

Teorema 1: noti i trasformati dei generatori è nota la trasformazione

Una trasformazione lineare è completamente assegnata se sono assegnate le componenti dei vettori trasformati dei generatori.
Sia dunque:

[1] Queste note corrispondono ad un lavoro monografico svolto nell'ambito del corso di matematica 4F PNI (anno 2007/2007) in cui si è deciso di affrontare la problematica delle equazioni agli autovalori e di applicarla al riconoscimento e classificazione delle coniche.
Ringrazio Luca Ciuffreda di 4F PNI che mi ha dato una mano nella stesura in formato word degli appunti grezzi (pieni di vettori e matrici noiosi da scrivere in formato professionale) da cui è stato poi prodotto (attraverso modifiche e arricchimenti) il seguente articolo

$\overrightarrow{e_1'} = A\cdot \overrightarrow{e_1} = a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2}$ (5)

$\overrightarrow{e_2'} = A\cdot \overrightarrow{e_2} = a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2}$ (6)

Consideriamo ora un generico vettore $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$ e ci proponiamo di determinare $\overrightarrow{x'} = A\cdot \overrightarrow{x}$

Ma $\overrightarrow{x'} = A\cdot \overrightarrow{x} = A\cdot (x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}) = x_1\, A\cdot(\overrightarrow{e_1}) + x_2\, A\cdot(\overrightarrow{e_2})$ in base alle proprietà di linearità e dunque se applichiamo l'ipotesi (5) e (6) avremo:

$\overrightarrow{x'} = x_1\, A\cdot(\overrightarrow{e_1}) + x_2\, A\cdot(\overrightarrow{e_2}) = x_1\,(a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2}) + x_2\,(a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2}) =$

$= (x_1\, a_{11} + x_2\, a_{12})\,\overrightarrow{e_1} + (x_1\, a_{21} + x_2\, a_{22})\,\overrightarrow{e_2} = x_1'\,\overrightarrow{e_1} + x_2'\,\overrightarrow{e_2}$

Dunque le coordinate del vettore trasformato di un generico vettore si ottengono dalle relazioni:

$x_1' = x_1\, a_{11} + x_2\, a_{12} \qquad x_2' = x_1\, a_{21} + x_2\, a_{22}$ (7) ☺

Adottiamo una simbologia più comoda

Se utilizziamo la terminologia del calcolo matriciale i nostri vettori potranno essere rappresentati sia come vettori riga sia come vettori colonna a seconda che decidiamo di rappresentarne le componenti per righe o per colonne:

$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{x} \qquad \overrightarrow{x} = [x_1 \ \ x_2] = \overline{x}$

Possiamo considerare la matrice $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e scrivere la relazione (7) nella forma:

$\underline{x'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \underline{x} = \mathbb{A} \cdot \underline{x}$ (8)

utilizzando il prodotto (righe per colonne tra matrici)

Inoltre $\lambda\, \underline{x} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$ e $\underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$

Per quanto riguarda il significato dei coefficienti della matrice:

$\underline{e_1'} = A\cdot \underline{e_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$

$\underline{e_2'} = A\cdot \underline{e_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$

ovvero la matrice A è costituita dall'accostamento dei due vettori colonna trasformati dei generatori del piano.

Teorema 2: ogni trasformazione data in forma matriciale è lineare

E' il teorema converso del precedente ed afferma che se vale la (7) allora la trasformazione definita tramite la (7) gode delle proprietà di linearità e dunque, alla fine, potremo utilizzare il linguaggio e il simbolismo delle matrici, per rappresentare una generica trasformazione lineare.

Si tratta di far vedere che la trasformazione (8) conserva il parallelismo e la somma.

a) deve essere $A\cdot(\lambda\, \underline{x}) = \lambda\, A\cdot \underline{x}$

$$A\cdot\left(\lambda\, \underline{x}\right) = \begin{bmatrix} a_{11}\lambda\, x_1 + a_{12}\lambda\, x_2 \\ a_{21}\lambda\, x_1 + a_{22}\lambda\, x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \lambda A\cdot \underline{x}$$

b) $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y} \rightarrow A\cdot \underline{z} = A\cdot \underline{x} + A\cdot \underline{y}$

$$A\cdot \underline{z} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + a_{12}(x_2 + y_2) \\ a_{21}(x_1 + y_1) + a_{22}(x_2 + y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{bmatrix} = A\cdot \underline{x} + A\cdot \underline{y}$$

☺

Possiamo dunque, d'ora in poi, identificare la trasformazione A· e la corrispondente matrice $\mathbb{A}\ \cdot$ e non distingueremo più i due simboli.

Teorema 3: la composizione di trasformazioni corrisponde al prodotto matriciale

Poiché una trasformazione lineare A trasforma un vettore in un vettore, e altrettanto fa la trasformazione B possiamo considerare la composizione $B\cdot(A\cdot \underline{x})$ che a sua volta produce un vettore.

Vale il seguente teorema: *la composizione di trasformazioni equivale al prodotto matriciale delle corrispondenti matrici*. La cosa non deve stupire: è questa la ragione per la quale il prodotto tra matrici è stato definito attraverso la moltiplicazione righe per colonne.

$$\underline{y} = A\cdot \underline{x} \wedge \underline{z} = B\cdot \underline{y} \quad \text{con } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \wedge \mathbb{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow B\cdot A = \mathbb{B}\cdot\mathbb{A} \qquad (9)$$

Dim.

Basta applicare due volte l'equazione (8):

$$\underline{z} = B\cdot \underline{y} = \begin{bmatrix} b_{11}\, y_1 + b_{12}\, y_2 \\ b_{21}\, y_1 + b_{22}\, y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\,(x_1\, a_{11} + x_2\, a_{12}) + b_{12}\,(x_1\, a_{21} + x_2\, a_{22}) \\ b_{21}\,(x_1\, a_{11} + x_2\, a_{12}) + b_{22}\,(x_1\, a_{21} + x_2\, a_{22}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (b_{11}\, a_{11} + b_{12}\, a_{21})\, x_1 + (b_{11} a_{12} + b_{12}\, a_{22})\, x_2 \\ (b_{21}\, a_{11} + b_{22}\, a_{21}) x_1 + (b_{21}\, a_{12} + b_{22}\, a_{22})\, x_2 \end{bmatrix} = (\mathbb{B}\cdot\mathbb{A}) \cdot \underline{x}$$

☺

Teoremi del calcolo matriciale da ricordare

1) Esistenza della matrice inversa: $\underline{x'} = \mathbb{A}\ \underline{x} \wedge \det \mathbb{A} \neq 0 \Rightarrow \exists!\ \mathbb{A}^{-1} \mid \underline{x} = \mathbb{A}^{-1}\, \underline{x'} \wedge A^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbb{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$

   A_{ik} indica il complemento algebrico dell'elemento a_{ik}
2) Transitività del prodotto $\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} \cdot \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \cdot \mathbb{C}$
3) Trasposta del prodotto: $(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T \cdot \mathbb{A}^T$
4) Determinante del prodotto (teorema di Binet) $\det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B}$

L'esistenza della matrice inversa corrisponde a chiedere che il determinante sia $\neq 0$ e ciò corrisponde a chiedere che i trasformati dei vettori generatori $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ non siano paralleli cioè che le componenti non siano proporzionali. Quando ciò accade il piano viene trasformato in una retta e la corrispondenza non è biunivoca. L'argomento sarà ripreso più avanti quando daremo una interpretazione geometrica di det $\mathbb{A}$.

Le trasformazioni di questa categoria sono di tipo biunivoco e saranno dette affinità. [2]

Determinazione della matrice di alcune trasformazioni lineari

Omotetia

Nella omotetia si ha $\underline{x'} = k\, \underline{x} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{bmatrix}$ deve essere $x_1' = kx_1 + 0\, x_2$ e $x_2' = 0x_1 + k\, x_2$ pertanto la matrice della omotetia

$$\mathbb{O} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Si arriva alla medesima conclusione ragionando sui trasformati dei generatori

Rotazione

Consideriamo la trasformazione per la quale il vettore $\underline{x}$ viene trasformato in un vettore $\underline{x'}$ con il medesimo modulo e ruotato di un angolo α. Restringiamo la determinazione della matrice al caso in cui i vettori siano espressi nella base canonica $\underline{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\underline{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

---

[2] In realtà la generica affinità contiene anche un termine di traslazione ed è governata da una equazione del tipo: $\underline{x'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ il che equivale a supporre che l'origine O si trasformi in un punto O' ≠ O

Sia dunque $\underline{x} = \begin{bmatrix} \rho \cos\theta \\ \rho \sin\theta \end{bmatrix}$ mentre $\underline{x'} = \begin{bmatrix} \rho \cos(\theta + \alpha) \\ \rho \sin(\theta + \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos\theta \cos\alpha - \rho \sin\theta \sin\alpha \\ \rho \sin\theta \cos\alpha + \rho \cos\theta \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{bmatrix}$ e dunque la matrice della rotazione

$$\mathbb{R}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Simmetria assiale rispetto ad una retta per l'origine di angolo α

Consideriamo la trasformazione per la quale il vettore $\underline{x}$ viene trasformato in un vettore $\underline{x'}$ con il medesimo modulo e che formi con la retta lo stesso angolo $\alpha - \theta$ e sia dunque caratterizzato dall'angolo $\alpha + (\alpha - \theta) = 2\alpha - \theta$

Restringiamo la determinazione della matrice al caso in cui i vettori siano espressi nella base canonica $\underline{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\underline{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Sia dunque $\underline{x} = \begin{bmatrix} \rho \cos\theta \\ \rho \sin\theta \end{bmatrix}$ mentre $\underline{x'} = \begin{bmatrix} \rho \cos(2\alpha - \theta) \\ \rho \sin(2\alpha - \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos\theta \cos2\alpha + \rho \sin\theta \sin2\alpha \\ \rho \sin2\alpha \cos\theta - \rho \cos2\alpha \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos2\alpha + x_2 \sin2\alpha \\ x_1 \sin2\alpha - x_2 \cos2\alpha \end{bmatrix}$ e dunque la matrice della simmetria

$$\mathbb{S}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos2\alpha & \sin2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos2\alpha \end{bmatrix} \qquad (12)$$

La (12) è molto simile alla (11) ma differisce da essa su un punto essenziale: il determinante della I vale 1 mentre quello della II vale –1. Anche di questa stranezza si darà conto più avanti.

Significato del determinante di una affinità

Richiami sul prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori può essere definito attraverso due definizioni sostanzialmente equivalenti (nel senso che a seconda della definizione data l'altra diventa un teorema).

La prima definizione si incontra per la prima volta nei corsi di fisica perché essa ha a che fare con la definizione di numerose grandezze fisiche quali la velocità angolare (intesa in senso vettoriale), il momento di una forza, il momento angolare, la forza magnetica.

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si osserva che essi definiscono un piano e dunque anche una normale ad esso (perpendicolare al piano per l'origine dei due vettori). A tale perpendicolare si assegna convenzionalmente il verso uscente dal piano per chi guarda i due vettori secondo la rotazione minima che va dal primo al secondo.

Se indichiamo con $\vec{n}$ il versore della normale (cioè il vettore unitario orientato come essa) si definisce e si scrive così il prodotto vettoriale:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a\, b \sin\gamma\, \vec{n} \qquad (13)$$

Il prodotto vettoriale è anticommutativo $\vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}$ (basta riflettere sul fatto che cambiano verso le rotazioni o che l'angolo tra i due vettori passa da γ a $-\gamma$) e inoltre il suo modulo $a\, b \sin\gamma$ corrisponde all'area del parallelogramma definito dai due vettori.

La seconda definizione del prodotto vettoriale viene scritta utilizzando un determinante simbolico del III ordine e rappresentando i 2 vettori in un sistema di riferimento ortonormale:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (14)$$

E' del tutto evidente che $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0 \vee \vec{b} = 0 \vee \vec{a} \parallel \vec{b}$

Una proprietà importante di cui gode il prodotto vettoriale, e che ci apprestiamo ad utilizzare, è la proprietà distributiva:

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$ (15)

Il modulo del prodotto vettoriale e la misura dell'area dei parallelogrammi

Ricordiamo che la misura delle superfici dei poligoni viene ricondotta, in geometria, al problema della equiscomponibilità attraverso triangoli, cioè alla riduzione di un poligono ad un certo numero di triangoli (metà di parallelogramma) tra loro equivalenti.

La unità di misura cui siamo abituati il m^2 corrisponde ad un quadrato di lato unitario ma in una teoria generale del piano in cui usiamo come basi dei vettori non necessariamente unitari e non necessariamente ortogonali l'unità di misura della superficie sarà l'area del parallelogramma dei due vettori generatori.

$| \underline{e_1} \times \underline{e_2} | = | \underline{e_1} | \, | \underline{e_2} | \, |\sin \gamma| = S_0$ (16)

La misura dell'area del parallelogramma definito da due vettori qualsiasi $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sarà allora ottenuta valutando il modulo del loro prodotto vettoriale e rapportando a quello della base.

$\underline{x} \times \underline{y} = \left[(x_1 \underline{e_1} + x_2 \underline{e_2}) \times (y_1 \underline{e_1} + y_2 \underline{e_2})\right] = x_1 y_1(\underline{e_1} \times \underline{e_1}) + x_1 y_2(\underline{e_1} \times \underline{e_2}) + x_2 y_1(\underline{e_2} \times \underline{e_1}) +$
$x_2 y_2(\underline{e_2} \times \underline{e_2}) = x_1 y_2(\underline{e_1} \times \underline{e_2}) - x_2 y_1(\underline{e_1} \times \underline{e_2}) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)(\underline{e_1} \times \underline{e_2})$

Dunque :

$\underline{x} \times \underline{y} = \det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}(\underline{e_1} \times \underline{e_2})$ (17)

Se indichiamo con S l'area intesa in senso algebrico avremo dunque che:

$\sigma = \dfrac{S}{S_0} = \det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ (18)

Il determinante dei due vettori rappresenta l'area con segno del parallelogramma definito dai vettori stessi. Si ha il segno positivo quando i due vettori hanno lo stesso verso di rotazione della base e il segno meno in caso contrario.

Il determinante della trasformazione affine

Supponiamo ora che sia assegnata una trasformazione lineare A attraverso la corrispondente matrice $\mathbb{A}$. La trasformazione che manda $\underline{x}$ in $\underline{x'}$ e $\underline{y}$ in $\underline{y'}$ può essere scritta formalmente in forma matriciale come:

$\left[\underline{x'}, \underline{y'}\right] = \mathbb{A} \cdot \left[\underline{x}, \underline{y}\right]$ (19)

Da qui se applichiamo il teorema di Binet avremo che:

$\det\left[\underline{x'}, \underline{y'}\right] = \det \mathbb{A} \cdot \det\left[\underline{x}, \underline{y}\right]$ ovvero:

$\sigma' = \det \mathbb{A} \cdot \sigma$ (20)

Il risultato trovato è notevole: $\det \mathbb{A}$ ci fornisce due informazioni relative alla nostra trasformazione.

1) Il suo modulo ci consente di valutare immediatamente come variano le aree (esse sono sempre proporzionali)
2) Il suo segno ci informa sulla conservazione o inversione dei versi di rotazione dei vettori.

Osserviamo infine che se $\det \mathbb{A} = 0$ il parallelogramma si trasforma in uno di area nulla e cioè $\underline{x'}$ e $\underline{y'}$ giacciono su una medesima retta: questa trasformazione è detta singolare e non è invertibile.

Mutamento di coordinate al variare della base

La matrice del cambio di base

Sino ad ora abbiamo affrontato il tema delle trasformazioni cioè delle modalità con cui un determinato spazio vettoriale (un piano) si trasforma attraverso le trasformazioni lineari.
Affrontiamo ora un problema simile ma diverso. Ci chiediamo, dato lo spazio, come muta la sua rappresentazione se muta la base di riferimento.
Riferendosi agli studi di geometria analitica, nel primo caso si va a vedere come un determinato luogo geometrico si modifica quando viene sottoposto ad una trasformazione lineare (ad esempio una rototraslazione o una simmetria assiale, nel secondo caso il luogo geometrico rimane lo stesso ma cambia la sua rappresentazione perché cambiano gli assi a cui viene riferito.
Un caso particolare di questo problema, che sarà affrontato più avanti, è quello consistente nel semplificare l'equazione di una conica attraverso un opportuno cambiamento del sistema di riferimento.

Consideriamo dunque due basi $\{\underline{e_1}, \underline{e_2}\}$ ed $\{\underline{\tilde{e}_1}, \underline{\tilde{e}_2}\}$ e sia assegnata la trasformazione che fa passare da una all'altra (siano cioè note le componenti di $\{\underline{\tilde{e}_1}, \underline{\tilde{e}_2}\}$nel sistema $\{\underline{e_1}, \underline{e_2}\}$.

$$\underline{\tilde{e}_1} = l_{11}\,\underline{e_1} + l_{21}\,\underline{e_2} \qquad (21)$$

$$\underline{\tilde{e}_2} = l_{12}\,\underline{e_1} + l_{22}\,\underline{e_2}$$

Osserviamo che le 4 componenti dei due vettori della nuova base espresse nella vecchia formano una matrice $\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$ formata dall'accostamento di due vettori colonna corrispondenti alle componenti del primo e secondo vettore della nuova base.

Occupiamoci ora di come mutano le componenti di un dato vettore $\underline{x}$ (un punto del piano):

A seconda che si adotti l'uno o l'altro riferimento si scriverà:

$$\underline{x} = x_1\underline{e_1} + x_2\underline{e_2} = \tilde{x}_1\underline{\tilde{e}_1} + \tilde{x}_2\underline{\tilde{e}_2} \qquad (22)$$

Ma se teniamo conto delle (21) potremo ricavare le relazioni tra le coordinate (componenti) nel nuovo e vecchio sistema.

$$\underline{x} = \tilde{x}_1\,[\,l_{11}\underline{e_1} + l_{21}\underline{e_2}\,] + \tilde{x}_2[\,l_{12}\underline{e_1} + l_{22}\underline{e_2}\,] = \underline{e_1}\,(\tilde{x}_1 l_{11} + \tilde{x}_2 l_{12}) + \underline{e_2}\,(\tilde{x}_1 l_{21} + \tilde{x}_2 l_{22})$$

Si ha dunque:

$$x_1 = \tilde{x}_1 l_{11} + \tilde{x}_2 l_{12} \qquad x_2 = \tilde{x}_1 l_{21} + \tilde{x}_2 l_{22} \qquad (23)$$

o anche

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbb{L}\cdot\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \text{con } \mathbb{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \qquad (23\text{ bis})$$

Poiché sia $\underline{e_1}, \underline{e_2}$ che $\underline{\tilde{e}_1}, \underline{\tilde{e}_2}$ sono non paralleli (condizione di indipendenza lineare necessaria a generare il piano) tanto det $\mathbb{L}$ quanto det $\mathbb{L}^T$ sono diversi da zero.

La matrice del cambio di base nel caso di basi ortonormali

Nel caso di sistemi ortonormali la matrice del cambio di base e la sua inversa (necessaria per operare il cambio in entrambi i versi) godono di una particolarità interessante: *l'inversa coincide con la trasposta*.

Supponiamo che $\underline{e_1}, \underline{e_2}$ sia ortonormale e lo sia pure $\underline{\tilde{e}_1}, \underline{\tilde{e}_2}$. Usando la notazione del prodotto scalare (·) si ha:

$$\underline{e_1}\cdot\underline{e_1} = \underline{e_2}\cdot\underline{e_2} = 1 \wedge \underline{e_1}\cdot\underline{e_2} = 0$$

$$\underline{\tilde{e}_1}\cdot\underline{\tilde{e}_1} = \underline{\tilde{e}_2}\cdot\underline{\tilde{e}_2} = 1 \wedge \underline{\tilde{e}_1}\cdot\underline{\tilde{e}_2} = 0$$

Calcoliamo il prodotto $\mathbb{L}^T\mathbb{L}$

$$\mathbb{L}^T\mathbb{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{12} & l_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 + l_{21}^2 & l_{11}\, l_{12} + l_{21}\, l_{22} \\ l_{11}\, l_{12} + l_{21}\, l_{22} & l_{12}^2 + l_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Ma, come già visto:

$\underline{\tilde{e}_1} = \begin{bmatrix} l_{11} \\ l_{21} \end{bmatrix} \wedge \underline{\tilde{e}_2} = \begin{bmatrix} l_{12} \\ l_{22} \end{bmatrix}$ e pertanto:

$\underline{\tilde{e}_1} \cdot \underline{\tilde{e}_1} = \underline{\tilde{e}_2} \cdot \underline{\tilde{e}_2} = 1 = l_{12}^2 + l_{22}^2 = l_{11}^2 + l_{21}^2$ $\qquad \underline{\tilde{e}_1} \cdot \underline{\tilde{e}_2} = 0 = l_{11}\, l_{12} + l_{21}\, l_{22}$

$\mathbb{L}^T\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}$

Dunque la trasposta coincide con l'inversa e, in base al teorema di Binet e al fatto che una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso determinante:

$\det L^T \cdot \det L = 1 \Rightarrow \det^2 L = 1 \Rightarrow \det L = \pm 1$

Il risultato trovato (*nel caso di sistemi ortonormali la matrice del cambio di base e la sua inversa sono l'una la trasposta dell'altra*) si scrive simbolicamente:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbb{L} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbb{L}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (24)$$

$$\underline{x} = \mathbb{L}\, \underline{\tilde{x}} \qquad \underline{\tilde{x}} = \mathbb{L}^T\, \underline{x} \qquad (24\text{ bis})$$

Cambio di base e trasformazioni lineari

Intendiamo ora vedere come si trasforma la matrice $\mathbb{A}$ di una trasformazione lineare quando la base dello spazio varia attraverso una matrice di trasformazione $\mathbb{L}$.

La risposta a tale questione viene fornita da un teorema e, utilizzando la simbologia usata nei paragrafi precedenti, è:

$$\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{L}^{-1}\, \mathbb{A}\, \mathbb{L} \qquad (25)$$

Dim. La dimostrazione è di tipo diretto e consiste nel calcolare $\tilde{\mathbb{A}}$ tenendo conto delle ipotesi.

La matrice $\mathbb{A}$ è definita dalla relazione $\underline{x'} = \mathbb{A}\, \underline{x}$ con $\mathbb{A}$ riferito alla base $\underline{e_1}$, $\underline{e_2}$

La matrice $\tilde{\mathbb{A}}$ è definita dalla relazione $\underline{\tilde{x}'} = \tilde{\mathbb{A}}\, \underline{\tilde{x}}$ con $\tilde{\mathbb{A}}$ riferito alla base $\underline{\tilde{e}_1}$, $\underline{\tilde{e}_2}$

La matrice $\mathbb{L}$ è definita dalla relazione $\underline{x} = \mathbb{L}\, \underline{\tilde{x}} \wedge \underline{x'} = \mathbb{L}\, \underline{\tilde{x}'}$ e dalle relative relazioni inverse

Dunque:

$\underline{x} = \mathbb{L}\, \underline{\tilde{x}} \Rightarrow \underline{x'} = \mathbb{A}\, \underline{x} = \mathbb{A}\, \mathbb{L}\, \underline{\tilde{x}} \Rightarrow \mathbb{L}^{-1}\, \underline{x'} = \underline{\tilde{x}'} = \mathbb{L}^{-1}\mathbb{A}\, \mathbb{L}\, \underline{\tilde{x}}$ e dunque:

$\underline{\tilde{x}'} = \mathbb{L}^{-1}\mathbb{A}\, \mathbb{L}\, \underline{\tilde{x}}$ ovvero $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{L}^{-1}\, \mathbb{A}\, \mathbb{L}$

☺

Il determinante di una trasformazione lineare è invariante per cambio di base

In effetti, per il teorema di Binet $\det \tilde{\mathbb{A}} = \det \mathbb{L}^{-1} \det \mathbb{A} \det \mathbb{L} = \det \mathbb{A}\, (\det \mathbb{L}^{-1} \det \mathbb{L}) = \det \mathbb{A}\, (\det \mathbb{1}) = \det \mathbb{A}$

Il risultato non deve stupire. In effetti se il cambio di base corrisponde solo ad una modifica di descrizione dello spazio e non ad una modifica dei punti, l'area delle figure trasformate non può dipendere dal sistema di coordinate prescelto.

Autovalori ed autovettori

Equazione agli autovalori

La problematica che stiamo per presentare trova, negli studi matematici di ordine superiore (calcolo degli operatori), numerose ed importanti generalizzazioni ed applicazioni (per esempio l'equazione fondamentale della meccanica quantistica è una equazione agli autovalori). Per questa ragione la anticipiamo in un ambito relativamente semplice approfittando della possibilità di semplificare la espressione di una conica attraverso il formalismo degli autovalori ed autovettori.
Data la trasformazione lineare A sia:

$$\underline{x} = \Big| \ \mathbb{A}\,\underline{x} = \lambda\,\underline{x} \quad \text{con } \underline{x} \neq 0 \text{ e } \lambda \in \Re \qquad (26)$$

In questo caso si dice che il vettore $\underline{x}$ è un autovetture di $\mathbb{A}$ relativo all' autovalore λ.

- il significato della equazione è la ricerca di quei vettori che si trasformano in vettori paralleli
- se $\underline{x}$ è un autovettore lo è anche k$\underline{x}$ infatti in base alla linearità A(k$\underline{x}$) = k(A$\underline{x}$) = k λ$\underline{x}$ = λ (K$\underline{x}$). Riflettere sulle implicazioni su rette unite e punti uniti nelle affinità.

La matrice di una trasformazione lineare ammette una espressione diagonale

Siano $\underline{e_1}$ ed $\underline{e_2}$ due autovettori non paralleli relativi a λ_1 e λ_2 e prendiamo come base del piano proprio la coppia $\underline{e_1}$,$\underline{e_2}$.
Poiché si tratta di autovettori i trasformati della base hanno la forma

$$\underline{e_1'} = A\,\underline{e_1} = \lambda_1\underline{e_1} = \lambda_1\underline{e_1} + 0 \cdot \underline{e_2}$$

$$\underline{e_2'} = A\,\underline{e_2} = \lambda_2\underline{e_2} = 0 \cdot \underline{e_1} + \lambda_2\underline{e_2}$$

ma se ripensiamo al significato originario della matrice di una trasformazione ciò significa che:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad (27)$$

La matrice di una trasformazione lineare nella base agli autovettori è diagonale con gli autovalori come elementi della diagonale.

Come si risolve una equazione agli autovalori

$$A\,\underline{x} = \lambda\,\underline{x} \Leftrightarrow \mathbb{A}\,\underline{x} - \lambda\,\underline{x} = 0 \Leftrightarrow (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{1})\,\underline{x} = 0 \qquad (28)$$

Questa equazione vettoriale corrisponde ad un sistema omogeneo di due equazioni in due incognite e come sappiamo esso ha soluzione non banale se e solo se det $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{1}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda - (a_{12}\,a_{21} - a_{11}\,a_{22}) = 0 \qquad (29)$$

Questa equazione è detta *equazione caratteristica* della matrice.

Il polinomio caratteristico di una trasformazione lineare non dipende dalla base

Si tratta di una proprietà importante perché essa ci dice che gli autovalori sono insiti nella trasformazione e non dipendono dalla sua rappresentazione.

Dim.

Abbiamo dimostrato che $\widetilde{\mathbb{A}} = \mathbb{L}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{L}$ e dunque

det $(\widetilde{\mathbb{A}} - \lambda\mathbb{1})$ = det $(\mathbb{L}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{L} - \lambda\,\mathbb{L}^{-1} \cdot \mathbb{L})$ = det$[\mathbb{L}^{-1}(\mathbb{A}\cdot\mathbb{L} - \lambda\mathbb{L})]$ = det $[\mathbb{L}^{-1}(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{1})\,\mathbb{L}]$ = det $\mathbb{L}^{-1}\cdot$ det $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{1})$ $\cdot$det $\mathbb{L}$ = det $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{1})$

Richiami sul prodotto scalare

Il prodotto scalare è una operazione del calcolo vettoriale che attraverso la composizione di due vettori produce uno scalare (numero).

L'operazione viene inizialmente definita in $\Re^2$ e utilizza implicitamente la nozione di angolo; ma poiché alcune sue proprietà possono essere stabilite senza usare la nozione di angolo lo si definisce anche in $\Re^n$ utilizzando quelle proprietà come definizione ed introducendo la nozione di angolo tra vettori proprio attraverso il prodotto scalare.

La definizione

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si scrive:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b \cos \gamma = a_b\, b = a\, b_a$ (30)

dove con a_b e b_a si sono indicate le proiezioni (con segno) di un vettore sull'altro.

Le proprietà

Le proprietà del prodotto scalare sono tutte immediate conseguenze della definizione

- commutativa
  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- associativa con gli scalari
  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- annullamento
  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0 \vee \vec{b} = 0 \vee \vec{a} \perp \vec{b}$
- determinazione del modulo
  $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$
- distributiva
  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c})$
- espressione del prodotto scalare in un sistema ortonormale
  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
  $\boxed{\text{dim}}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2}) \cdot (b_1 \vec{e_1} + b_2 \vec{e_2}) = a_1\, b_1(\vec{e_1} \cdot \vec{e_1}) + a_2\, b_2(\vec{e_2} \cdot \vec{e_2}) + a_1\, b_2(\vec{e_1} \cdot \vec{e_2}) + a_2\, b_1(\vec{e_2} \cdot \vec{e_1}) = a_1 b_1 + a_2 b$ visto che $\vec{e_1} \cdot \vec{e_1} = \vec{e_2} \cdot \vec{e_2} = 1$ mentre $\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = \vec{e_2} \cdot \vec{e_1} = 0$ per la ortogonalità
- prodotto misto
  $$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$
- definizione generalizzata di angolo
  $$\cos \gamma = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots}{a\, b} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}\,\sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}}$$
- scrittura del prodotto scalare con il formalismo matriciale
  Poiché il risultato del prodotto scalare è un numero (somma dei prodotti delle componenti) il prodotto scalare va scritto come prodotto matriciale di un vettore riga per un vettore colonna. Con questa precisazione continueremo ad usare lo stesso simbolo (·) sia per il prodotto scalare sia per il prodotto tra matrici.

Le Trasformazioni lineari simmetriche

Abbiamo già visto che le trasformazioni lineari assumono una forma semplice (diagonale) quando si usa come base una coppia di autovettori.

Ma quando tale coppia esiste? L'esito è favorevole per un certo genere particolare di trasformazioni lineari: quelle simmetriche.

Una trasformazione A in uno spazio in cui è definito il prodotto scalare si dice simmetrica se si verifica la seguente proprietà:

$\underline{x} \cdot \underline{y'} = \underline{x'} \cdot \underline{y} \Leftrightarrow \underline{x} \cdot (A\, \underline{y}) = (A\, \underline{x}) \cdot \underline{y}$ (31)

Ovvero quando si fa il prodotto scalare tra un vettore e un trasformato non ha importanza su quale dei due vettori si applichi la trasformazione.

Le trasformazioni simmetriche in base ortonormale sono tutte e sole quelle con matrice simmetrica

Si tratta di una condizione necessaria e sufficiente e dunque dimostreremo il teorema in entrambi i versi.
Supponiamo che la trasformazione sia simmetrica, si ha allora per ogni vettore e dunque anche per la base,

$A\,\underline{e_1} = a_{11}\underline{e_1} + a_{12}\underline{e_2} \Rightarrow \underline{e_2} \cdot A\,\underline{e_1} = a_{11}(\underline{e_1} \cdot \underline{e_2}) + a_{12}(\underline{e_2} \cdot \underline{e_2}) = 0 + a_{12}\cdot 1 = a_{12}$

Analogamente si dimostra che $\underline{e_1} \cdot A\,\underline{e_2} = a_{21}$.

Ma se la trasformazione è simmetrica $\underline{x} \cdot A\,\underline{y} = \underline{y} \cdot A\,\underline{x}$ e dunque in particolare $a_{12} = a_{21}$ ovvero la matrice della trasformazione è simmetrica.

Supponiamo ora che la matrice sia simmetrica ovvero che $a_{ik} = a_{ki}$

$\underline{y} \cdot A\,\underline{x} = [y_1\ y_2] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = y_1(x_1a_{11}+x_2a_{12}) + y_2(x_1a_{21}+x_2a_{22})$

Analogamente $\underline{x} \cdot A\,\underline{y} = x_1(y_1a_{11}+y_2a_{12}) + x_2(y_1a_{21}+y_2a_{22})$

Ma se la matrice è simmetrica $a_{12} = a_{21}$ e dunque :

$a_{12}\, x_2\, y_1 + a_{21}\, x_1\, y_2 = a_{12}\, x_1\, y_2 + a_{21}\, x_2\, y_1$ pertanto i due prodotti scalari sono uguali.

Le matrici simmetriche hanno 2 autovalori reali e autovettori ortogonali

Il teorema vale in $\mathfrak{R}^n$ ma a noi basta il caso n = 2 (piano) ed è in questo contesto che lo dimostreremo.
Avevamo già visto che l'equazione caratteristica è

$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda - (a_{12}\,a_{21} - a_{11}\,a_{22}) = 0$

$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 + 4a_{12}^2 - 4a_{11}\,a_{22} = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow a_{11} = a_{22} \wedge a_{12} = 0$ cioè se la matrice è del tipo k$\mathbb{1}$ cioè se si tratta di una omotetia. Per le omotetie si ha coincidenza dei due autovalori mentre negli altri casi $\Delta > 0$ e dunque $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Come si è già visto per $\lambda = \tilde{\lambda}$ il sistema ha soluzione non banale corrispondente a due equazioni proporzionali e dunque l'autovettore $\underline{\tilde{x}}$ ha forma (k,f(k)) dove f(k) è una relazione di I grado in k.

Tra gli infiniti autovettori proporzionali basta sceglierne uno semplice e poi normalizzarlo per trovare un autovettore di modulo unitario.

Supponiamo dunque che esistano due autovalori λ_1 e λ_2 e siano $\underline{u_1}$ ed $\underline{u_2}$ due autovettori. Ci resta da dimostrare che essi sono ortogonali.

$A\,\underline{u_1} = \lambda_1\underline{u_1} \wedge A\,\underline{u_2} = \lambda_2\underline{u_2}$

Moltiplichiamo scalarmente e sfruttiamo la simmetria.

$\underline{u_2} \cdot A\,\underline{u_1} = \underline{u_2} \cdot \lambda_1\underline{u_1} = \lambda_1(\underline{u_2} \cdot \underline{u_1})$

$\underline{u_1} \cdot A\,\underline{u_2} = \underline{u_1} \cdot \lambda_2\underline{u_2} = \lambda_2(\underline{u_2} \cdot \underline{u_1})$

Ma per la simmetria i membri a sinistra sono uguali e dunque

$(\lambda_1 - \lambda_2)(\underline{u_2} \cdot \underline{u_1}) = 0$

Siamo già a conoscenza del fatto che $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e quindi $\underline{u_2} \cdot \underline{u_1} = 0$.

Chiudiamo ricordando che abbiamo già visto che scegliendo come base la coppia ortonormale $\underline{u_1}$, $\underline{u_2}$ la matrice si diagonalizza e assume la forma $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

Riduzione a forma canonica di una forma quadratica

In $\Re^2$ si chiama forma quadratica di II grado un polinomio $F(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22} x_2^2$.

- si tratta del generico polinomio omogeneo di II grado e la presenza del coefficiente $2a_{12}$ non è particolare perché dato $k\, x_1x_2$ si ha $2a_{12}x_1x_2$ per $a_{12} = \frac{k}{2}$
- la forma quadratica può essere rappresentata simbolicamente attraverso un prodotto scalare con una matrice simmetrica $F(x_1, x_2) = \overline{x} \cdot A\,\underline{x} = [x_1x_2]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

  Ma noi sappiamo già che scegliendo una base ortonormale definita dagli autovettori le matrici A si sarebbero trasformate in $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

In effetti se si usa la matrice di trasformazione degli autovettori

$$\tilde{A} = L^{-1} \cdot A \cdot L = L^T \cdot A \cdot L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{12} & l_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

E in quel caso la forma quadratica assume la forma molto semplice:

$$F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \overline{x} \cdot A\,\underline{x} = \lambda_1 \tilde{x}_1^{\,2} + \lambda_2 \tilde{x}_2^{\,2}$$

Tutto quanto abbiamo visto consente di trasformare le equazioni delle coniche in una forma che permette di classificarle.

Per esempio se $\lambda_1\lambda_2 > 0$ avremo a che fare con una ellisse o con una conica degenere, mentre in caso contrario avremo a che fare con una iperbole. Inoltre se uno dei due autovalori è 0 nel corso della trasformazione oltre ad annullarsi il termine rettangolare si annulla uno dei termini quadratici e dunque si otterrà una parabola.

Se nella forma quadratica sono presenti anche i termini di primo grado non cambia nulla perché essi saranno sottoposti alla trasformazione che si ricava attraverso gli autovettori.

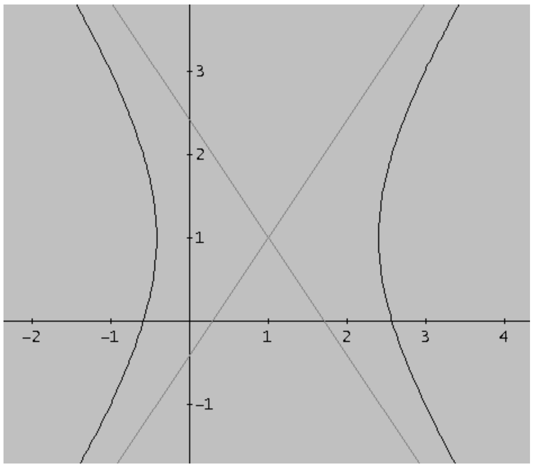
C'è un solo accorgimento da applicare prima di calcolare gli autovalori: verificare che la equazione di II II grado non di possa scomporre in un prodotto di due polinomi di I grado eguagliati a zero. In tale caso l'equazione rappresenta (in base al teorema di annullamento del prodotto) l'unione di due rette.

Per verificare se la scomposizione è possibile basta considerare l'equazione di II grado ordinata in una delle due variabili e tentare di risolverla. Se il Δ è un quadrato perfetto allora la soluzione è di tipo razionale in x e y e dunque si può fare la scomposizione (si vedano gli esercizi).

Esercizi

1) Conica traslata

Cosa rappresenta il polinomio $2x^2 – y^2 – 4x + 2y – 3 = 0$?



L'assenza del termine rettangolare consente di ricondursi rapidamente ad una forma più semplice cercando di far comparire termini quadratici.

$2x^2 – y^2 – 4x + 2y – 3 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 – 2x) – (y^2 – 2y) = 3$ si cerca ora, per addizione di quanto manca ad entrambi i membri di far comparire termini di tipo quadratico.

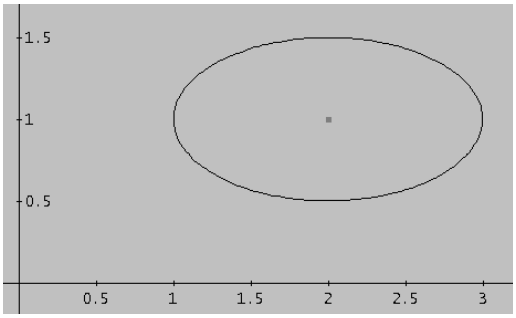
$\Leftrightarrow 2(x^2 – 2x + 1) – (y^2 – 2y + 1) = 3 + 2 – 1 \Leftrightarrow$

$2(x –1)^2 – (y –1)^2 = 4 \Leftrightarrow \dfrac{(x – 1)^2}{2} – \dfrac{(y –1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{X^2}{2} – \dfrac{Y^2}{4} = 1$

Si tratta di una iperbole di centro (1,1) con parametri $\sqrt{2}$ e 2, asintoti di coefficiente angolare $\pm \sqrt{2}$ e con i vertici nei punti $y = 1$ e $x = 1\pm\sqrt{2}$

2) Conica traslata

Cosa rappresenta il polinomio $x^2 + 4 y^2 – 4x – 8y + 7 = 0$?



Si procede come nel caso precedente, ma più speditamente nella individuazione dei termini da aggiungere:

$(x^2– 4x + 4) + 4(y^2 – 2y +1) = – 7 + 4 + 4 \Leftrightarrow (x – 2)^2 + 4(y – 1)^2 = 1$

Si tratta di una ellisse di centro (2,1) con semi assi di lunghezza 1 e ½

3) Coppia di rette passante per l'origine

$4x^2 – 9y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2x – 3y)(2x + 3y) = 0 \Leftrightarrow 2x – 3y = 0 \vee 2x + 3y = 0$

4) Singolo punto

$x^2 + 4y^2 – 4x + 12 y + 13 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 – 4x + 4) + 4(y^2 + 3y + 9/4) – 4 – 9 + 13 = 0 \Leftrightarrow (x – 2)^2 + 4(y + 3/2)^2 = 0$

La somma di due quadrati si annulla solo quando entrambi i quadrati sono nulli e dunque : $x = 2 \wedge y = – 3/2$

Il luogo rappresenta il punto (2,–3/2).

5) Generica coppia di rette

$2x^2 – 5 xy – 3y^2 + 7y – 2 = 0$

L'equazione presenta il termine rettangolare ma prima di imbarcarsi nella ricerca di cambi di base che ne semplifichino la forma conviene vedere se l'equazione risulta risolubile in forma razionale in una qualsiasi delle due variabili (si sceglierà quella dalla forma più semplice).

$\Leftrightarrow 2x^2 – 5 xy +(– 3y^2 + 7y – 2) = 0$ $\quad\Delta = 25y^2 – 8(– 3y^2 + 7y – 2) = 49y^2 – 56 y + 16 = (7y – 4)^2$

dunque $x = \dfrac{5y \pm(7y – 4)}{4} \Leftrightarrow 4x = – 2y + 4 \vee 4x = 12 y – 4 \vee y + 2x – 2 = 0 \vee x – 3y + 1 = 0$

6) Autovalori concordi ellisse roto-traslata

$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$

Questa equazione contiene il termine rettangolare e, dopo aver controllato che il Δ non corrisponda ad un quadrato perfetto si passa a ricercare la trasformazione legata alla scelta di una base di autovettori.

La matrice simmetrica della forma quadratica è: $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e la equazione caratteristica data da det ($\mathbb{A}-\lambda\mathbb{1}$) = 0 risulta:

$(3-\lambda)(3-\lambda) - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \vee \lambda_2 = 4$

Gli autovalori sono concordi e diversi da zero e pertanto potremmo arrivare ad una ellisse.

La matrice $\mathbb{A}-\lambda\mathbb{1}$ risulta:

- per $\lambda = 2$ $\mathbb{A}-\lambda\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ si hanno le due equazioni $x_1 + y_1 = 0$ ovvero gli autovettori dell'autovalore 2 hanno tutti le componenti opposte. Non deve stupire il fatto che il sistema produca due equazioni proporzionali: ciò è implicito nell'annullamento del determinante che è stato esplicitamente ricercato. Dunque un possibile autovettore è (1,–1) mentre quello normale (di modulo unitario) è $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Si osservi che al nostro scopo va altrettanto bene quello opposto.
- per $\lambda = 4$ $\mathbb{A}-\lambda\mathbb{1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ si hanno le due equazioni $-x_1 + y_1 = 0$ ovvero gli autovettori dell'autovalore 4 hanno le componenti uguali. Dunque un possibile autovettore è (1,1) mentre quello normale (di modulo unitario) è $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

La matrice L del cambio di base è quella che ha come colonne i due autovettori:

$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ e la trasformazione corrispondente legata al cambio di base è:

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' = \frac{1}{\sqrt{2}} (x' + y') \wedge y = -\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' = \frac{1}{\sqrt{2}} (- x' + y')$

E' come se l'asse x e l'asse y subissero una rotazione di $\theta = -45°$

A questo punto, se non avessimo il sostegno della teoria, dovremmo sostituire le relazioni trovate per prendere semplicemente atto che si annullerà il termine rettangolare mentre i coefficienti dei termini quadratici saranno i due autovalori.

Lo studente è invitato a fare questo compito noioso almeno una volta. Noi ci limiteremo invece a sostituire nei termini di I grado per impostare la ricerca del centro di simmetria.

$2x'^2 + 4y'^2 + 6\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') + 2\frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$2x'^2 + 2\sqrt{2}\, x' + 4y'^2 + 4\sqrt{2}\, y' + 1 = 0 \Leftrightarrow$

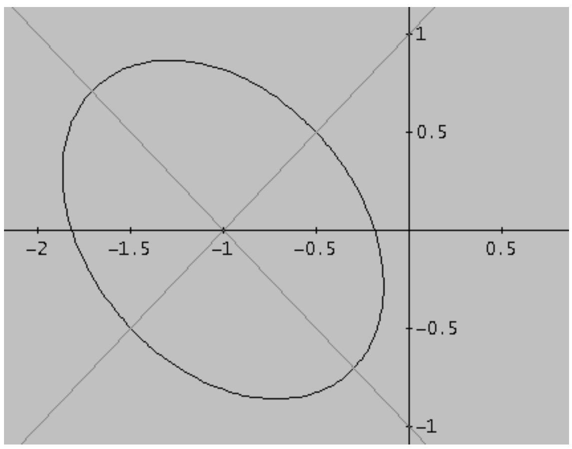
$2(x'^2 + 2/\sqrt{2}\, x' + ½) + 4(y'^2 + 2/\sqrt{2}\, y' + ½) = 3 - 1 \Leftrightarrow$

$2(x' + 1/\sqrt{2})^2 + 4(y' + 1/\sqrt{2})^2 = 2 \Leftrightarrow$

$(x' + 1/\sqrt{2})^2 + 2(y' + 1/\sqrt{2})^2 = 1$

Si tratta di una ellisse che nel nuovo sistema di riferimento ha centro in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e ha semiassi di lunghezza 1 e $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Nel vecchio sistema di riferimento il centro si trova in –1,0 come si può immediatamente controllare per sostituzione.



7) Autovalori discordi iperbole roto-traslata

$7x^2 + 8xy + y^2 + 9x - 1 = 0$

E' stato scelto questo esercizio in cui i segni dei termini di II grado sono uguali per sottolineare che la discriminante sul tipo di curva riguarda i segni degli autovalori e non quelli della diagonale principale della matrice.

La matrice simmetrica associata alla forma quadratica è:

$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e pertanto la equazione caratteristica data da det ($\mathbb{A}-\lambda\mathbb{1}$) = 0 risulta:

$(7-\lambda)(1-\lambda) - 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1 \vee \lambda_2 = 9$

Gli autovalori sono discordi e diversi da zero; ne consegue che potremmo arrivare ad una iperbole.

La matrice $\mathbb{A}-\lambda\mathbb{1}$ risulta:

- per $\lambda = -1$ $\mathbb{A}-\lambda\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ si hanno le due equazioni $2x_1 + y_1 = 0$ ovvero gli autovettori dell'autovalore –1 hanno componenti x_1 e $-2\,x_1$. Dunque un possibile autovettore è (1,–2) mentre quello normale (di modulo unitario) è $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.
- per $\lambda = 9$ $\mathbb{A}-\lambda\mathbb{1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$ si hanno le due equazioni $-x_1 + 2y_1 = 0$ ovvero gli autovettori dell'autovalore –1 hanno componenti $2y_1$ e y_1. Dunque un possibile autovettore è (2,1) mentre quello normale (di modulo unitario) è $\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

La matrice L del cambio di base è quella che ha come colonne i due autovettori:

$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ e la trasformazione corrispondente legata al cambio di base è:

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \wedge y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y')$

E' come se l'asse x e l'asse y subissero una rotazione di $\theta = -\operatorname{artan}(2)$

Tenendo conto del fatto che questa trasformazione riconduce la forma quadratica a forma normale con coefficienti pari agli autovalori si ha:

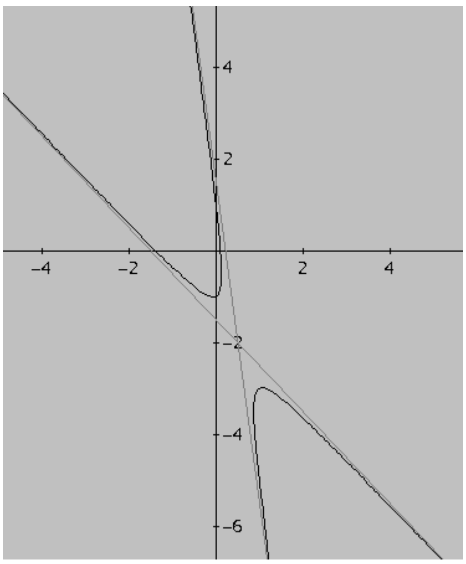
$$-x'^2 + 9y'^2 + 9\frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x'^2 - 9y'^2 - 9\frac{1}{\sqrt{5}}x' - 18\frac{1}{\sqrt{5}}y' + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x'^2 - 2\frac{9}{2\sqrt{5}}x' + \frac{81}{20}) - 9(y'^2 + 2\frac{1}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{5}) + 1 - 81/20 + 9/5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x' - \frac{9}{2\sqrt{5}})^2 - 9(y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 5/4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x' - \frac{9\sqrt{5}}{10}\right)^2}{5/4} - \frac{\left(y' + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}{5/36} = 1$$



Si tratta di una iperbole di centro $(x',y') \equiv \left(\frac{9\sqrt{5}}{10},\frac{-\sqrt{5}}{5}\right)$ che nelle vecchio coordinate corrisponde al punto:

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') = ½$

$y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y') = -2$

Gli asintoti hanno inclinazione legata ai due coefficienti $a = \sqrt{5}/2$ e $b = \sqrt{5}/6$ ma tale inclinazione è riferita ai nuovi assi e dunque il modo più rapido per determinare i coefficienti angolari dei due asintoti obliqui è quello di esplicitare dalla equazione originaria $y = f(x)$ e poi determinare la asintoticità.

$y^2 + 8xy + 7x^2 + 9x - 1 = 0$

$\Delta/4 = 16x^2 - (7x^2 + 9x - 1) = 9x^2 - 9x + 1$ che non è un quadrato perfetto (conferma che non si tratta di una coppia di rette).

$y = -4x \pm \sqrt{9x^2 - 9x + 1} \sim \begin{matrix} -4x - 3x = -7x \\ -4x + 3x = -x \end{matrix}$

E dunque i coefficienti angolari dei due asintoti, che passano per il centro di simmetria sono –1 e – 7.

Non sono stati indicati in figura e nemmeno determinate le equazioni delle due rette corrispondenti agli assi ruotati (bisettrici degli asintoti).

8) Annullamento di un autovalore: parabola roto-traslata

$x^2 - 4xy + 4y^2 + 5y - 9$

La matrice simmetrica associata alla forma quadratica è:

$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ e pertanto la equazione caratteristica data da det ($\mathbb{A}-\lambda\mathbb{1}$) = 0 risulta:

$(1 - \lambda)(4 - \lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 5$

La presenza di un autovalore nullo ci dice che dopo la riduzione a forma canonica uno dei due coefficienti dei termini di II grado si annullerà e dunque si arriverà alla equazione di una parabola.

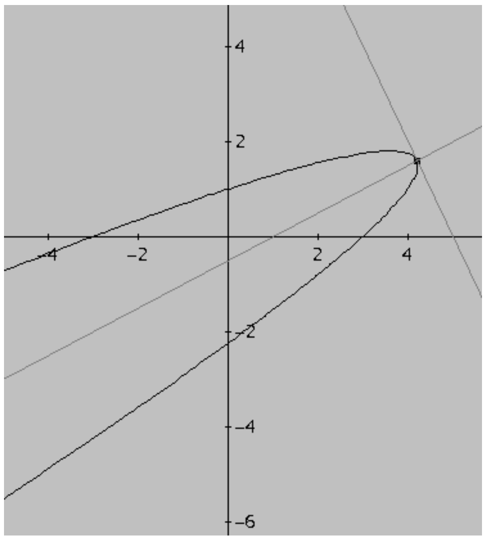
La matrice $\mathbb{A}-\lambda\mathbb{1}$ risulta:

- per $\lambda = 0$ $\mathbb{A}-\lambda\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ si hanno le due equazioni $x_1 - 2y_1 = 0$ ovvero gli autovettori dell'autovalore 0 hanno componenti $2y_1$ e y_1. Dunque un possibile autovettore è (2,1) mentre quello normale (di modulo unitario) è $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.
- per $\lambda = 5$ $\mathbb{A}-\lambda\mathbb{1} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ si hanno le due equazioni $2x_2 + y_2 = 0$ ovvero gli autovettori dell'autovalore 5 hanno componenti x_2 e $-2x_2$. Dunque un possibile autovettore è (1,–2) mentre quello normale (di modulo unitario) è $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$.

Per annullare il termine di II grado in y scegliamo $\lambda = 5$ come primo autovalore.

La matrice L del cambio di base è quella che ha come colonne i due autovettori:

$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ e la trasformazione corrispondente legata al cambio di base è:



$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \wedge y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y')$

E' come se l'asse x e l'asse y subissero una rotazione di $\theta = -$ artan(2)

Tenendo conto del fatto che questa trasformazione riconduce la forma quadratica a forma normale con coefficienti pari agli autovalori si ha:

$5x'^2 + 0y'^2 + 5\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y') - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$y' = -\sqrt{5}\,x'^2 + 2x' + \frac{9}{\sqrt{5}}$ parabola con la concavità verso il basso di vertice $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 2\sqrt{5}\right)$

Nel sistema d'assi originario le coordinate del vertice risultano (fatta la sostituzione) $\left(\frac{21}{5}, \frac{8}{5}\right)$

I nuovi assi sono stati tracciati tenendo conto del fatto che passano per il vertice ed hanno coefficienti angolari – 2 e ½ .

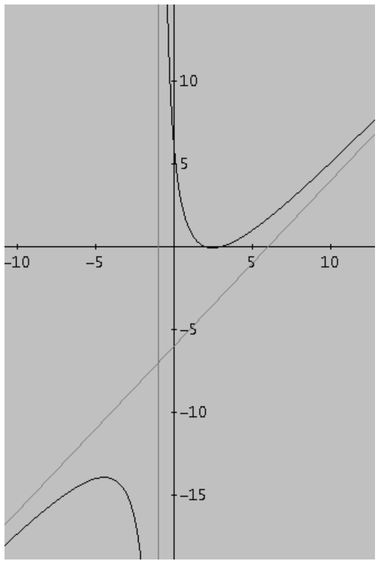
9) Iperbole con un asintoto verticale ed un asintoto obliquo

Si discute separatamente questo caso perché nel tema d'esame capita a volte da studiare (riconoscere) una funzione del tipo: $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 1}$

Si tratta di una funzione razionale fratta che si riduce in forma implicita ad un polinomio di II grado e poiché è sicuramente presente l'asintoto verticale $x = -1$ sappiamo che si tratta di una iperbole.

L'altro asintoto si trova facendo la divisione che porta a $y = x - 6 + \dfrac{12}{x + 1}$

Poiché $\dfrac{12}{x + 1} \to 0$ per $x \to \infty$ ne consegue che $y = x - 6$ è asintoto obliquo e che il punto di intersezione dei due asintoti $(-1,-7)$ è centro di simmetria.



La ricerca del massimo e minimo si può fare per via elementare (senza derivate) attraverso lo studio del codominio (che richiede di risolvere l'equazione di II grado in x)

$y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 1} \Leftrightarrow x^2 - 5x - xy + 6 - y = 0 \Leftrightarrow x^2 - x(5 + y) + (6 - y) = 0$

L'equazione ammette soluzione se $\Delta = (5 + y)^2 - 4(6 - y) = y^2 + 14\, y + 1 \geq 0$

Si risolve la disequazione e si trova il codominio e dunque, implicitamente l'ordinata del massimo e minimo.

Le ascisse si trovano dalla soluzione della equazione (con $\Delta = 0$)

I vertici della iperbole (vicini ma non coincidenti con massimo e minimo) possono essere trovati ricercando la intersezione tra la bisettrice degli asintoti e la curva.

Dunque l'intero problema può essere affrontato per via elementare. Ricordarsene in occasione della prova finale d'esame.