La rappresentazione dei luoghi di II grado

La generica equazione di II grado in due variabili

Prima o poi, nel corso del triennio, vi diranno che il generico polinomio di II grado in due variabili rappresenta sempre una conica, una coppia di rette o l'insieme vuoto. Il teorema, nella sua generalità, si affronta nei corsi universitari di geometria o di algebra lineare e può essere dimostrato seguendo approcci diversi.
Il metodo più generale consiste nel partire da una generica forma quadratica di II grado
$F(x,y) = a\,x^2 + b\,y^2 + c\,xy + dx + ey + f$ (1)
e dimostrare che, attraverso opportune trasformazioni lineari [1] sulle variabili, la forma quadratica si può ricondurre ad una forma più semplice (mancante di uno o più termini) da cui è possibile riconoscere una conica, una coppia di rette o l'insieme vuoto.
In ambito liceale alcuni testi propongono l'utilizzo dei cosiddetti *invarianti*, cioè di relazioni sui coefficienti che non cambiano di valore quando l'equazione viene manipolata attraverso cambi di scala, simmetrie, rotazioni o traslazioni. Il valore di tali invarianti discrimina i diversi tipi di curve.
Altre tecniche si apprendono in terza e quarta e consistono nel cercare opportune rototraslazione degli assi che facciano saltare il *termine rettangolare* e consentano di evidenziare simmetrie.
Voglio qui proporre un metodo certamente meno generale ma anche meno mnemonico che consente di trarsi d'impaccio con gli strumenti dell'algebra liceale o poco più.
L'idea mi frullava in testa da tempo e l'ho messa a punto in occasione del corso di recupero per gli studenti di III PNI in occasione della sospensione delle attività ordinarie.
La mia idea è quella che nel fare matematica si debba ridurre al minimo l'aspetto mnemonico e non eccedere con quello tecnico.

La risolubilità della equazione di II grado

Se la (1) = 0 viene ordinata in una delle due variabili si ottiene una equazione di II grado che ammetterà o meno soluzioni a seconda del segno del discriminante.
Supponiamo di aver ordinato in y, allora il Δ sarà una funzione di II grado nella variabile x.

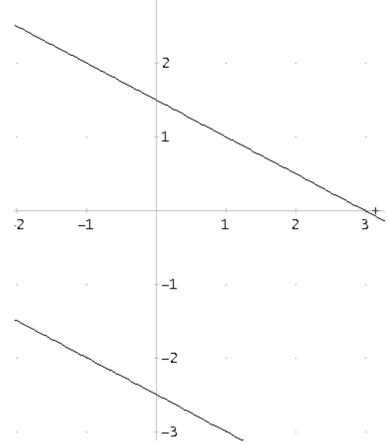
Se il Δ è sempre negativo …

L'equazione non ammette mai soluzioni e dunque l'equazione rappresenta l'insieme vuoto.

esempio

$14x^2 + 5y^2 - 8xy + 32\,x - 22y + 31 = 0 \Leftrightarrow$
$5y^2 - 2y\cdot(4x + 11) + (14x^2 + 32x + 31) = 0$
$\Delta/4 = (4\cdot x + 11)^2 - 5(14x + 32x + 31) = -54\,x^2 - 72\,x - 34$
e come si vede calcolando $\Delta'/4 = -540$ si ha che $\Delta/4 < 0\ \forall x$ e dunque l'equazione non ammette soluzioni.

Se il Δ è un quadrato perfetto …



L'equazione di II grado ammette due soluzioni del tipo y = f(x) dove f(x) è un polinomio di I grado e dunque la curva rappresenta l'unione di due rette

esempio

$x^2 + 4\,xy + 4\,y^2 + 2x + 4y - 15 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 + 2(2y + 1) + 4\,y^2 + 4y - 15 = 0 \Leftrightarrow$
$\Delta/4 = (2y + 1)^2 - (4\,y^2 + 4y - 15) = 16 = 4^2$
Non solo è venuto un quadrato perfetto ma addirittura una quantità che non dipende da y. Cosa accadrà? Pensateci prima di guardare il calcolo successivo.

[1] cioè trasformazioni di I grado nelle due variabili x' = mx + ny + p e y' = qx + ry + s

$x = 2y + 1 \pm 4 = \begin{matrix} 2y - 3 \\ 2y + 5 \end{matrix}$ è venuta una coppia di rette parallele. Affinché le rette siano parallele il coefficiente angolare deve dipendere solo dal primo termine della soluzione e perché ciò accada Δ non può dipendere dalla variabile.

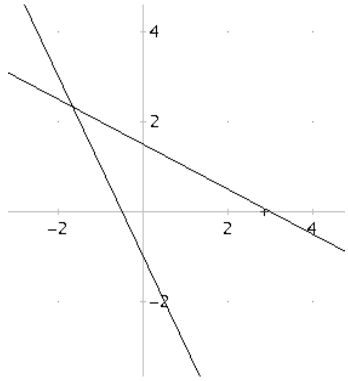
esempio

$2x^2 + 5xy - 5x + 2y^2 - y - 3 = 0$

Se viene risolta in y porta a

$2y^2 + y(5x - 1) + (2x^2 - 5x - 3) = 0$ con

$\Delta = (3x + 5)^2$ e dunque $y = \dfrac{5x - 1 \pm (3x + 5)}{4} = \begin{matrix} 1/2\ x - 3/2 \\ \\ 2x + 1 \end{matrix}$



Naturalmente si dà anche il caso che una o entrambe le rette siano parallele agli assi. Vediamo cosa accade procedendo a ritroso, cioè partendo dal risultato.

$(x-2)(2x + y - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x(y - 4) + 6 - 2y = 0$

Riuscite a prevedere cosa accadrà risolvendo l'equazione ? Come potrà sparire la dipendenza da y in una delle due equazioni? Pensateci e poi provate.

Osservate intanto che se una delle rette è parallela agli assi viene a mancare il termine di II grado della variabile corrispondente a tale asse.

Quando viene l'ellisse?

Basta pensare al fatto che l'ellisse ha sia un dominio sia un codominio rappresentati da un intervallo e dunque questa volta il Δ sarà positivo o nullo solo in corrispondenza di un intervallo di valori i cui estremi, sia in x sia in y rappresenteranno un rettangolo entro cui si viene a trovare l'ellisse.

Purtroppo con metodi elementari non riusciamo a dire di più ma si tratta già di un bel risultato.

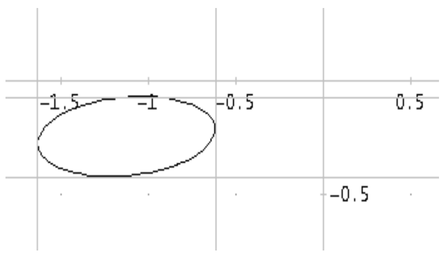
Esempio

$4x^2 + 33y^2 - 4\ xy + 8x + 12y + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$4x^2 - 4x(y - 2) + (33y^2 + 12y + 5) = 0$

$\Delta/4 = 4(y - 2)^2 - 4(33y^2 + 12y + 5) = 4(-32y^2 - 16y - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$ y è interno all'intervallo $-\dfrac{1}{4} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{8}$

e analogamente rispetto all'altra variabile. La figura risulta quella qui a lato con tracciate le limitazioni su x e su y.



Quando viene l'iperbole?

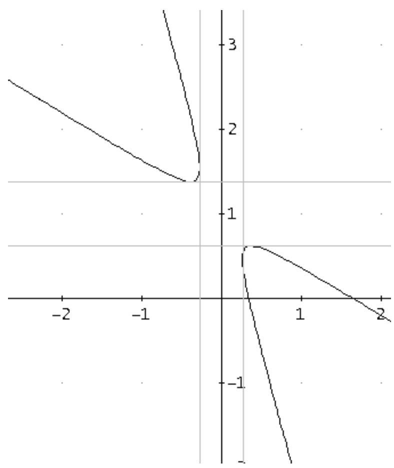
Questa volta sia il dominio sia il codominio saranno esterni ad un determinato rettangolo e il Δ risulterà positivo per valori esterni ad un dato intervallo.

Esempio

$14x^2 + 28\ xy + 7y^2 + 28\ xy + 7y + 8 = 0$

Se la si risolve in y il Δ risulta positivo per valori di x esterni all'intervallo $\pm \dfrac{1}{\sqrt{14}}$

Se la si risolve in x il Δ risulta positivo per valori di y esterni all'intervallo $1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{7}}$



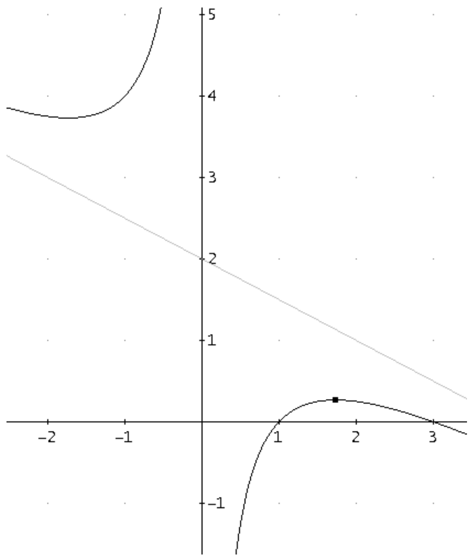
Il risultato è rappresentato qui a lato. Con metodi un po' più complessi si potrebbero anche individuare le equazioni dei due asintoti obliqui dell'iperbole ma si dovrebbero introdurre tecniche che si acquisiscono direttamente nei corsi di analisi. Pertanto si rimanda all'analisi (bisognerebbe calcolare un limite con qualche complicazione tecnica dovuta alla presenza di quantità sotto radice).

Una iperbole che si incontra frequentemente all'esame di stato

La funzione $y = \frac{ax^2+bx + c}{px + q}$ con numeratore non divisibile per il denominatore rappresenta ancora una curva del tipo (1) = 0 ma questa volta possiamo affermare che si tratta certamente di una iperbole perché per x = –q/p il denominatore si annulla e dunque la funzione va all'infinito (asintoto verticale)

Un altro asintoto si trova molto semplicemente facendo la divisione perché si ottiene $y = mx + n + \frac{R}{px + q}$ e poiché la quantità $\frac{R}{px + q} \to 0$ quando $x\to\infty$ ne consegue che la funzione all'infinito si comporta come la retta y = mx + n (asintoto obliquo)

Il punto di incontro dei due asintoti è centro di simmetria. La bisettrice dei due asintoti taglia l'iperbole nei due vertici. Le coordinate del massimo e del minimo si possono trovare con la tecnica precedentemente illustrata.



Questa funzione salta fuori molto spesso nella determinazione di luoghi e la si trovava anche nel tema d'esame 2008 del PNI. Vediamo come esempio proprio quella.

$2xy + x^2 – 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{–x^2+ 4x – 3}{2x}$

L'asintoto verticale si ha per x = 0

Facendo la divisione si ottiene $y = – ½ x + 2 – \frac{3}{2x}$ e dunque la retta y = – ½ x + 2 è asintoto obliquo

L'equazione di II grado è $x^2 – 2x(2 – y) + 3 = 0$ da ci $\Delta/4 = (2–y)^2 – 3 \geq 0$ per y esterno all'intervallo $2\pm\sqrt{3}$

I corrispondenti valori in x si trovano risolvendo l'equazione e ricordando che $\Delta/4 = 0$ e dunque $x = 2–y = \pm\sqrt{3}$

Il gioco è fatto e quello qui a lato è il diagramma

E quando viene la parabola?

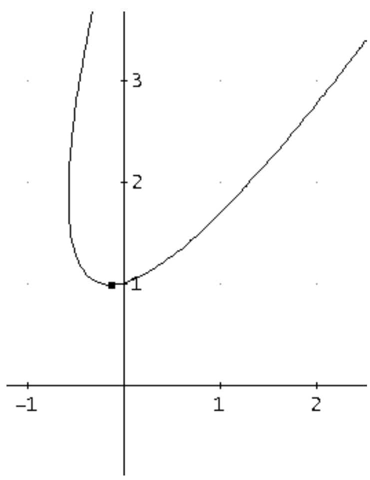
Basta riflettere sul fatto che il codominio della parabola presenta una limitazione con un solo estremo e dunque la discussione del segno di Δ dovrà portare ad una disequazione di I grado in y.

Vediamo se funziona. Consideriamo l'equazione

$4x^2 – 4xy + y^2 +5x – 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$4x^2 – x(4y – 5) + y^2 – 6y + 5 = 0$

$\Delta = (4y – 5)^2 – 16(y^2 – 6y + 5) = 56 y – 55 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 55/56$



Come prima il punto di minimo ha ascissa ottenibile dalla soluzione dell'equazione $x = \frac{4y–5}{8} = – \frac{60}{448} = – \frac{15}{112}$ ed è indicato in figura. Si rammenti che il punto di minimo non è il vertice della parabola la cui determinazione richiederebbe la individuazione dell'asse di simmetria.

Esiste un metodo elementare per trovarlo?

Se non vi siete annoiati

Pensate a qualche variante inventata da voi. E buona continuazione al Frisi.