Convenzioni di disegno e di rappresentazione

Nel corso della trattazione si adotteranno le seguenti convenzioni simboliche:

V = volume σ_b = area di base σ_l = area laterale σ_t = area totale

h = altezza *r* raggio del cerchio inscritto *R* raggio del cerchio circoscritto

Le linee nascoste saranno indicate da linee tratteggiate brevi

Le linee ausiliarie disegnate per costruzione da linee tratteggiate lunghe

☹ indica il termine del testo

☺ indica il termine della soluzione di un problema

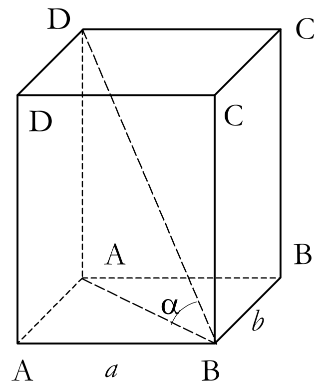
😐 indica una nota relativa alla costruzione della figura

Teorema delle 3 perpendicolari: data una retta *r* perpendicolare ad un piano α in un punto O e una retta $s \subset \alpha$ se si traccia da O la perpendicolare *n* a *s* la retta *s* risulta perpendicolare al piano *nr*

Angolo tra una retta e un piano: si trova proiettando un punto della retta nel piano e considerando l'angolo formato dai due punti con la intersezione tra retta e piano

Misura di un angolo diedro: per misura di un angolo diedro (regione di spazio compresa tra due semipiani) si intende la misura dell'angolo di una qualsiasi sua sezione normale

1. I lati di base di un parallelepipedo a base rettangolare valgono rispettivamente *a* e *b*. Determinare la superficie laterale σ del parallelepipedo sapendo che la diagonale del parallelepipedo forma un angolo α con la base. ☹



😐 Il rettangolo di base è rappresentato da un parallelogramma. L'angolo tra la diagonale e la base si ottiene proiettando il punto D' sulla base il che ci porta all'angolo D'BA' = α. 😐

Con riferimento alla figura si ha che $\sigma = 2(a + b)\, h$.

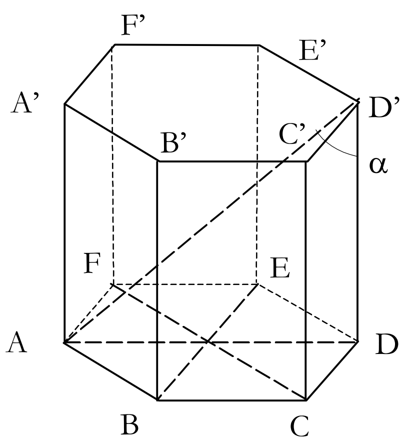
$h = \overline{A'D'} = \overline{A'B} \tan\alpha$

Inoltre: $\overline{A'B} = \sqrt{a^2 + b^2}$ e pertanto: $\sigma = 2(a + b)\, h = 2(a + b)\sqrt{a^2 + b^2} \tan\alpha$

☺

2. In un prisma esagonale regolare la diagonale maggiore di lunghezza *d* forma un angolo α con lo spigolo laterale cui si riferisce. Determinare il volume *V* del prisma. ☹

😐 Per rappresentare un esagono regolare basta costruire un parallelogramma e quindi prolungarne i lati e la diagonale per ottenere gli altri 3 vertici. Il vertice da cui si effettuano i prolungamenti costituisce il centro dell'esagono regolare. Per stabilire un confronto tra le diverse diagonali basta proiettarle sulla base ottenendo le diagonali dell'esagono che risultano facilmente confrontabili. Con riferimento alla figura le diagonali maggiori risultano essere AD' e tutte quelle che, proiettate sulla base corrispondono ad unire vertici intervallati da altri due vertici.😐



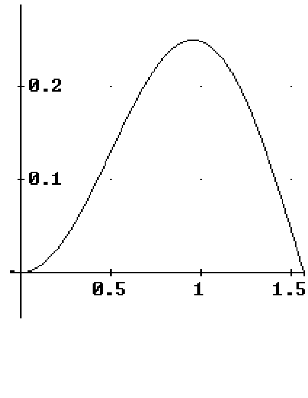
Il volume V = σ h. Ma h = d cos α mentre l'area σ può essere determinata attraverso $\overline{AD}$ = d sin α.

In effetti l'esagono regolare è formato da 6 triangoli equilateri di lato $\overline{AD}$ / 2 = d/2 sin α e l'altezza di ciascuno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ il lato.

Pertanto $\sigma = 6\,\frac{1}{2}\frac{d}{2}\sin\alpha\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{d}{2}\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{8}\,d^2\sin^2\alpha$.

Si ottiene così: $V = \sigma\, h = \frac{3\sqrt{3}}{8}\,d^2\sin^2\alpha\; d\cos\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{8}\,d^3\sin^2\alpha\cos\alpha$

Per completezza di trattazione viene rappresentata la funzione V = f(α) con $\alpha \in\,]\,0,\pi/2[$ assumendo d come unità di misura.

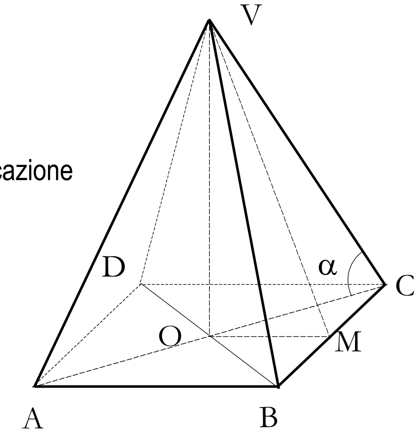


☺

3. In una piramide regolare a base quadrata lo spigolo laterale di lunghezza *s* forma con il piano di base un angolo α. Determinare il volume V della piramide. ☹

😐 Il quadrato viene rappresentato come un parallelogramma e l'altezza della piramide viene elevata dal punto di intersezione delle diagonali (centro del quadrato) e ciò consente anche di rappresentare l'angolo α tra lo spigolo e la base. L'apotema della piramide è individuato dal segmento che unisce il punto medio del lato con il vertice della piramide. 😐

Per determinare il volume ci occorrono l'altezza h = $\overline{OV}$ e il lato *l* = $\overline{AB}$ che sono entrambi determinabili attraverso lo spigolo e la sua inclinazione.



In effetti:

$h = s \sin \alpha$ e, tenendo conto delle proprietà del quadrato, $l = \sqrt{2}\ \overline{OC} = \sqrt{2}\, s \cos \alpha$

Si ottiene pertanto:

$V = \frac{1}{3} l^2 h = \frac{1}{3} 2 s^2 \cos^2\alpha\, s \sin \alpha = \frac{2}{3} s^3 \sin \alpha \cos^2$ a che, tendo conto delle formule di duplicazione del seno si può anche scrivere: $V = \frac{s^3 \sin 2\alpha \cos \alpha}{3}$

☺

4. La superficie laterale di una piramide regolare a base quadrata vale σ e l'altezza è *h*. Determinare il lato *l* del quadrato di base. ☹

😐 Si fa riferimento alla figura dell'esercizio precedente. 😐

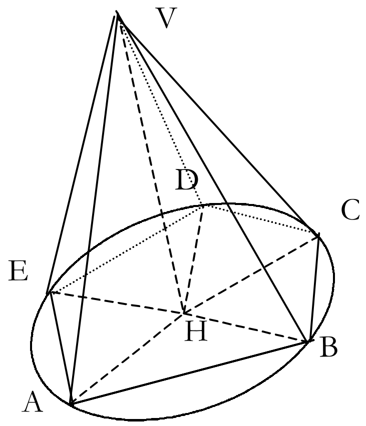
La superficie laterale della piramide è pari a 4 volte l'area del triangolo BCV ed essa a sua volta dipende dalla altezza e dal lato; infatti se indichiamo con l il lato, con a l'apotema, e con h l'altezza si ha, applicando il teorema di Pitagora e le proprietà del quadrato:

$\sigma = 2\, l\, a \ \wedge\ a^2 = h^2 + (l/2)^2 \Rightarrow \left(\frac{\sigma}{2\,l}\right)^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$ e da qui si arriva alla equazione biquadratica $l^4 + 4 h^2 l^2 - \sigma^2 = 0$

Dopo aver osservato che $\Delta/4 = 4 h^4 + \sigma^2 > 0$ e che devono essere sia l sia l^2 positivi e che è sempre $\sqrt{4h^2 + \sigma^2} - 2h^2 > 0$ si arriva all'unica soluzione $l = \sqrt{\sqrt{4h^2 + \sigma^2} - 2h^2}$

☺

5. Dimostrare che se tutti gli spigoli di una piramide formano angoli uguali con la base allora essi sono tutti uguali, la base è circoscrivibile, l'altezza della piramide passa per il centro del cerchio circoscritto. ☹



😐 Si indichi con H il piede della altezza e si considerino i triangoli rettangoli AHV, BHV, …
Essi sono tutti uguali perché sono rettangoli , hanno gli angoli in A, B, … congruenti per ipotesi e hanno il lato VH in comune. Pertanto sono congruenti tutti gli spigoli VA, VB, … e i cateti AH, BH, …. Ma per questa ultima ragione il poligono di base è circoscrivibile (non è detto che sia regolare) e il punto H è il centro di tale circonferenza.
Si osservi ulteriormente che la circonferenza nella proiezione parallela viene rappresentata mediante una ellisse.😐

6. Determinare il volume V e l'area laterale σ di una piramide regolare a base esagonale di cui sono noti lo spigolo *l* e il raggio *r* della circonferenza inscritta alla base.

$V = \frac{2r^2}{3}\sqrt{3l^2 - 4r^2}$ $\sigma = 2r\sqrt{3l^2 - r^2}$

7. Determinare l'altezza di un tetraedro regolare di dato volume *V*. ☹

☹ Il tetraedro sarà rappresentato a partire da un triangolo qualsiasi per il quale è però essenziale individuare correttamente il centro (punto di incontro delle mediane che conservano la divisione 2:1 nel rapporto di divisione). ☹

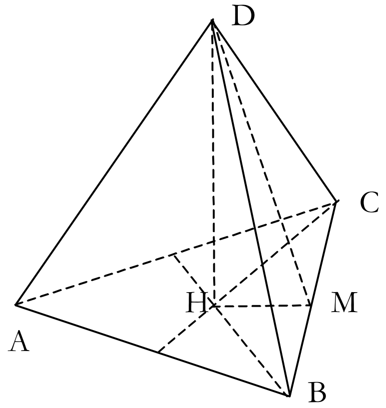
Si trova $h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{\sqrt{3}}}$ ☺

8. In un parallelepipedo la base è un parallelogramma di lati *a* e *b* e angolo acuto α. Sapendo che la diagonale maggiore della base è uguale alla diagonale minore del parallelepipedo determinare il volume *V*.

$V = 2 \sin\alpha \sqrt{(ab)^3 \cos\alpha}$

9. Lo spigolo laterale di una piramide regolare triangolare vale *l* e l'altezza è *h*. Determinare la misura dell'angolo diedro formato con la base.

☹ Per la piramide regolare a base triangolare vale la stessa costruzione che si dà per il tetraedro con la differenza che le facce laterali sono questa volta dei triangoli isosceli invece che equilateri. L'angolo diedro φ si misura costruendo un piano ortogonale alle due facce che costituiscono il diedro; allo scopo basta proiettare il vertice della piramide sulla base e da questo punto mandare la perpendicolare al lato; per il teorema delle 3 perpendicolari si ottiene un piano perpendicolare al lato e cioè una sezione normale del diedro☹



Nel caso particolare del problema le tre mediane sono uguali e in base al teorema sul baricentro $\overline{CH} = \overline{HB} = \frac{2}{3}\overline{AM} = 2\overline{HM}$

Ma se ci riferiamo al triangolo rettangolo CHD si ha $\overline{CH} = \sqrt{l^2 - h^2}$ e pertanto $\overline{HM} = ½\,\overline{CH} = ½\sqrt{l^2 - h^2}$

$\tan\varphi = \frac{h}{HM} = \frac{2h}{\sqrt{l^2 - h^2}}$

☺

10. Determinare il volume di una piramide regolare a base quadrata conoscendo l'angolo α tra lo spigolo laterale e il piano di base e l'area σ della figura determinata dal piano passante per il vertice e per la diagonale della base. Determinare infine l'angolo φ formato dalle facce laterali con la base.

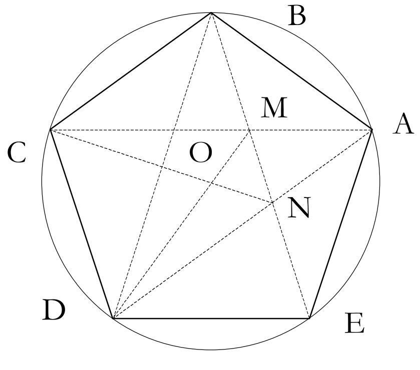
$v = \frac{2}{3}\sigma^{3/2}\frac{1}{\sqrt{\tan\alpha}}$ $\tan\varphi = \sqrt{2}\tan\alpha$

11. Una piramide regolare ha come base un poligono con somma degli angoli interni pari a 540°. Dopo aver stabilito di quale poligono si tratti, disegnare la figura e determinare il volume conoscendo lo spigolo *l* e la sua inclinazione α rispetto alla base. ☹

☹ Se la somma degli angoli interni è 540° il poligono è un pentagono. Infatti, tenendo conto che il poligono può essere decomposto in n triangoli unendo i vertici con un punto interno e che l'angolo giro vale 360° si ha sempre $n\alpha + 360° = n\,180°$ e dunque $\alpha = \frac{n-2}{n}180°$

Nel nostro caso $n = \frac{n\alpha + 360°}{180°} = \frac{900}{180} = 5$

Poiché dovremo rappresentare un pentagono si tratta di determinare le proprietà che si conservano nella rappresentazione.

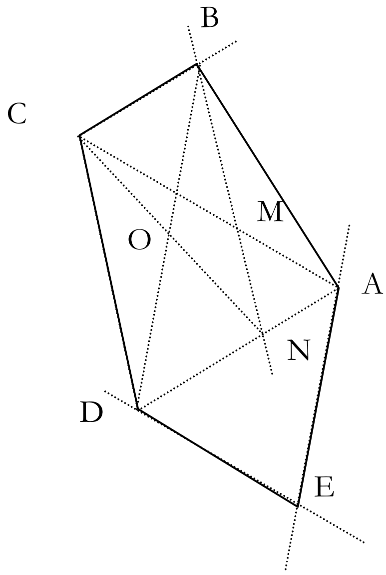


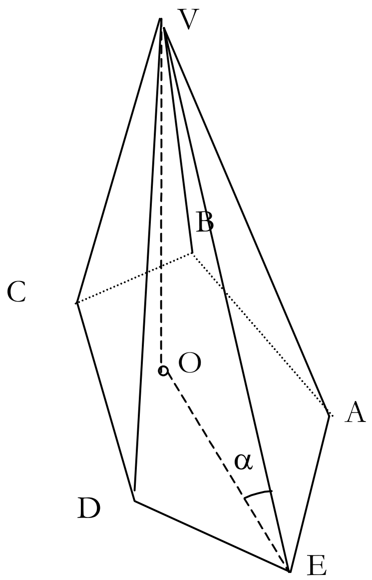
Per quanto riguarda il parallelismo osserviamo che le diagonali sono sempre parallele ai lati. Per determinare il centro del poligono osserviamo che esso è determinabile dalla intersezione tra le congiungenti un vertice con la intersezione di due diagonali. Osserviamo infine che il pentagono regolare risulta costituito da triangoli isosceli di 36° e 72° (l'angolo al centro vale 360/5 = 72° e pertanto quello alla circonferenza è di 36°).

Indicata con k la sezione aurea di un segmento ($k = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$) si ha che $\frac{\overline{MN}}{\overline{AN}} =$

$\dfrac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{NB}}$ = k ≈ 0.602. Osserviamo ancora che poiché 0.6 = 3/5 per determinare approssimativamente i rapporti richiesti basta dividere i segmenti secondo il rapporto 2/3 o 3/2 a seconda dei casi ed è questo che faremo per costruire la rappresentazione della piramide.

Supponiamo di partire disegnando il triangolo CDA (triangolo qualsiasi nella rappresentazione tridimensionale). Determiniamo ora i due punti M e N (rapporto aureo). Prolunghiamo MN sino ad incontrare in B la parallela a Da per C (i lati sono paralleli alle diagonali). Troviamo il punto E tracciando la parallela a BD per A sino ad incontrare in E la parallela a CA per D. Il punto O si trova sulla intersezione di DM e CN. A questo punto, sfruttando la costruzione descritta, possiamo tracciare l'altezza da O sino in V e disegnare la piramide come si è fatto nella figura a lato per la quale si riportano solo gli elementi indispensabili e si tracciano le linee secondo le convenzioni date in premessa. 😐





Il volume della piramide vale $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\sigma h$ e per calcolare σ dobbiamo calcolare il raggio $\overline{OE}$ (raggio del cerchio circoscritto). Infatti, noto $\overline{OE}$ σ è 5 volte l'area del triangolo isoscele DEO con angolo al vertice pari a $\frac{2}{5}\pi$.

Pertanto $\sigma = \frac{5}{2}\,\overline{OE}^{\,2} \sin\frac{2}{5}\pi$

Ma $\overline{OE} = l \cos\alpha$ mentre $\sin\frac{2}{5}\pi = \sin 72°$ si determina osservando che si tratta del complementare di 18° le cui funzioni sono note dalla sezione aurea.

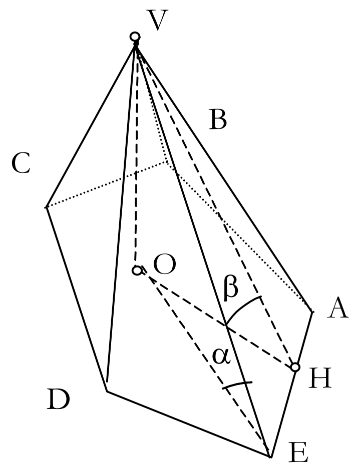
Infatti, poiché il lato del decagono regolare è la sezione aurea del raggio del cerchio circoscritto si ha in base al teorema della corda $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ e $\sin 72° = \cos 18° = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$

Poiché h = l sin a e $\overline{OE}$ = l cos α si ha dunque $V = \frac{5}{6} l^3 \sin 72° \cos^2\alpha \sin\alpha$

☺

12. Determinare gli angoli α tra la base e lo spigolo laterale e β tra la faccia laterale e la base in una piramide pentagonale regolare le cui facce laterali sono dei triangoli equilateri. ☹

😐 Si fa riferimento alla costruzione della figura precedente osservando solo che se si proietta il centro O sul lato di base il punto H che si ottiene è il punto medio di AE . Osserviamo ancora che occorrerà fissare un elemento lineare per ragionare sulla figura ma che tale elemento scomparirà nei rapporti attraverso cui si procederà alla determinazione delle caratteristiche angolari.😐



Indichiamo con b il lato di base e teniamo presente che, trattandosi di un pentagono regolare, allora $E\hat{O}H = \frac{\pi}{5}$ e pertanto $\overline{OE} = \dfrac{b}{2\sin\frac{\pi}{5}}$ mentre $\overline{OH} = \dfrac{b}{2\tan\frac{\pi}{5}}$ $\overline{VE} = \dfrac{\overline{OE}}{\cos\alpha}$ = b poiché il triangolo delle facce laterali è equilatero e pertanto si può determinare $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OE}}{b} = \dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}$ Dalla determinazione di $\overline{VH}$ e $\overline{OH}$ si trova $\cos\beta = \dfrac{\overline{OH}}{\overline{VH}} = \dfrac{b}{2\tan\frac{\pi}{5}\frac{\sqrt{3}}{2}b} =$

$$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{5}\sqrt{3}}$$

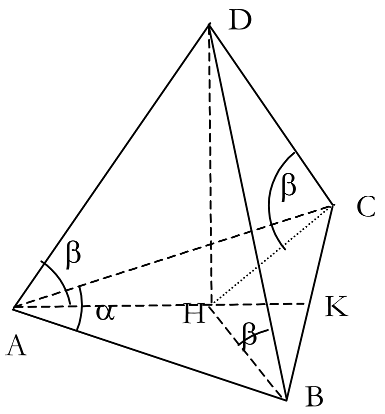
☺

13. Determinare l'angolo di inclinazione α tra lo spigolo laterale l e il piano di base di una piramide regolare di n lati di volume V.

$$\tan\alpha = \frac{24\,V \sin\frac{\pi}{n}\tan\frac{\pi}{n}}{n\,l^3}$$

14. Determinare il volume di una piramide a base rettangolare di cui si conoscono la diagonale l del rettangolo, l'angolo α tra le diagonali e quello β tra gli spigoli laterali e la base.

15. Una piramide ha come base un triangolo isoscele di lati a e angolo alla base α. Sapendo che le tre facce laterali hanno spigoli inclinati di β rispetto alla base determinare il volume. ☹



😐 Con ragionamento analogo a quello del problema 5 si può affermare che, indicata con H la proiezione di D, risulta $\overline{AH} = \overline{HC} = \overline{HB}$ e pertanto H è il centro del cerchio circoscritto. Ne consegue che A, H , K sono allineati e che AK è una altezza. 😐

Per determinare il volume ci occorrono l'area di base $\sigma = \frac{1}{2} a^2 \sin\alpha$ e l'altezza $h = \tan\beta\ \overline{AH}$

Ma $\overline{AH}$ è il raggio del cerchio circoscritto che può essere determinato attraverso il teorema della corda: $\overline{AC} = 2R\sin\frac{\pi-\alpha}{2} = 2R\cos\alpha/2$ da cui $R = \frac{a}{2\cos\alpha/2}$

Si ha dunque $V = 1/3\,\sigma h = \frac{1}{6}a^2\sin\alpha\,\frac{a}{2\cos\alpha/2}\tan\beta = \frac{1}{6}a^3\sin\alpha/2\tan\beta$

☺

16. La base di un parallelepipedo rettangolo è inscritta in una circonferenza di raggio R e il lato minore del rettangolo forma un angolo alla circonferenza α. Determinare il volume del parallelepipedo conoscendo la superficie laterale σ_l.

17. La base di un prisma retto è un triangolo isoscele di base a e angolo al vertice α. Sapendo che l'area laterale e l'area di base sono uguali determinare il volume.

18. Di una piramide regolare esagonale sono noti l'angolo diedro α alla base e l'apotema l. Determinare la superficie totale σ_t.