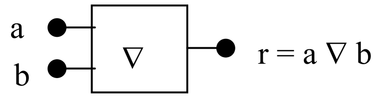
Gli insiemi numerici

Operazioni

Un insieme numerico è un insieme su cui sono state definite delle operazioni.
Una operazione è una scatola dotata di due ingressi e di una uscita che associa a due elementi dell'insieme (1° e 2° operando) un terzo elemento dell'insieme (risultato).
L'operazione viene indicata con un simbolo (per esempio ∇) e se a e b rappresentano i due *operandi* e r il *risultato* si scrive:



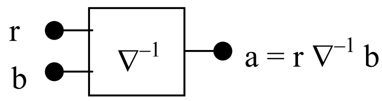
r = a ∇ b
A volte si distingue tra *operazioni interne* (quelle per le quali il risultato appartiene all'insieme di partenza) ed *operazioni esterne* (quelle che mandano verso un altro insieme).
Nel seguito intenderemo con operazione la sola *operazione interna* (in questo senso diciamo che nell'insieme dei naturali la sottrazione non è interna volendo dire che non è sempre eseguibile).

Terminologia essenziale

- Una operazione ∇ si dice *commutativa* se a∇b = b∇a cioè se non è importante l'ordine di esecuzione degli operandi.
- Una operazione ∇ si dice *associativa* se (a∇b)∇c = a∇(b∇c) cioè se in caso di operazione ripetuta non importa l'ordine di esecuzione (in una operazione associativa non è necessario specificare le parentesi).
- Data una operazione ∇ definita su un insieme numerico A si dice che l'elemento "e" di A è *l'elemento neutro rispetto a* ∇ se ∀a si ha a∇e = e∇a = a ovvero se "e" non influenza mai il risultato della operazione. In un campo numerico è sempre richiesta l'esistenza dell'elemento neutro.
- Data una operazione ∇ definita su un insieme numerico A e considerato un generico elemento "a" di A si dice che l'elemento $\overline{a}$ di A è:

  l'inverso di a rispetto a ∇ se $a\nabla \overline{a} = \overline{a}\nabla a = e$

  ovvero se $\overline{a}$ combinato con "a" produce l'elemento neutro. Dato un campo numerico non è detto che esista l'inverso; la sua esistenza, come vedremo, è strettamente collegata alla possibilità di eseguire la operazione inversa di ∇
- Si chiama *operazione inversa* di ∇ e la si indica con ∇^{-1} quella operazione che combinando il risultato della operazione diretta con il II operando produce il primo. Cioè:
  $r = a \nabla b \Leftrightarrow r \nabla^{-1} b = a$



- Quando sull'insieme sono state definite due operazioni (per esempio indicate dai simboli ☹ e ☺) si dice che vale *la proprietà distributiva di* ☹ *rispetto a* ☺ se
  a ☹ (b☺c) = (a☹b)☺(a☹c)

Come si allargano gli insiemi numerici?

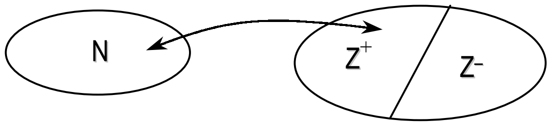
L'isomorfismo

L'isomorfismo è la nozione più importante da considerare nella costruzione dei campi numerici.
Essi vengono costruiti a partire da quello concettualmente più semplice (l'insieme dei naturali che è associato alla operazione psicologica dell'*avere lo stesso numero di elementi*) cercando attraverso *ampliamenti* di produrre insiemi che superino le limitazioni (i difetti) dell'insieme precedente.
Si tenga presente che i diversi insiemi numerici sono tra loro *eterogenei* (cioè sono fatti di cose diverse non confrontabili) e che le operazioni su di essi sono definite solo tra elementi di uno stesso insieme (non ha senso addizionare un numero naturale ad un numero intero o ad una frazione). Esiste cioè l'addizione tra i naturali che è diversa dalla addizione tra gli interi che a sua volta è diversa dalla addizione tra frazioni.

Per questa ragione (quando ci sarà rischio di confusione) racchiuderemo il simbolo di operazione in un circolino distinguendo tra "+" e "⊕".
Osserviamo ora che 2 + 3 = 5 e che (+2)⊕(+3) = (+5) e cioè che se associamo ai numeri naturali gli interi positivi e alla addizione tra naturali "+" la addizione tra interi "⊕" la corrispondenza si conserva anche nei risultati. Ovvero:

2	+	3	=	5
↕	↕	↕	⇒	↕
+2	⊕	+3	=	+5

Abbiamo semplificato al massimo, ma *l'isomorfismo tra insiemi strutturati* (cioè su cui siano state definite delle operazioni) *è una corrispondenza biunivoca tra il primo insieme ed un sottoinsieme del secondo che si conserva attraverso i risultati delle operazioni*.
Così l'insieme dei numeri naturali che avete già studiato è in isomorfismo con gli interi positivi, quello delle frazioni apparenti del tipo $\frac{n}{1}$ è in isomorfismo con quello dei naturali e così via.

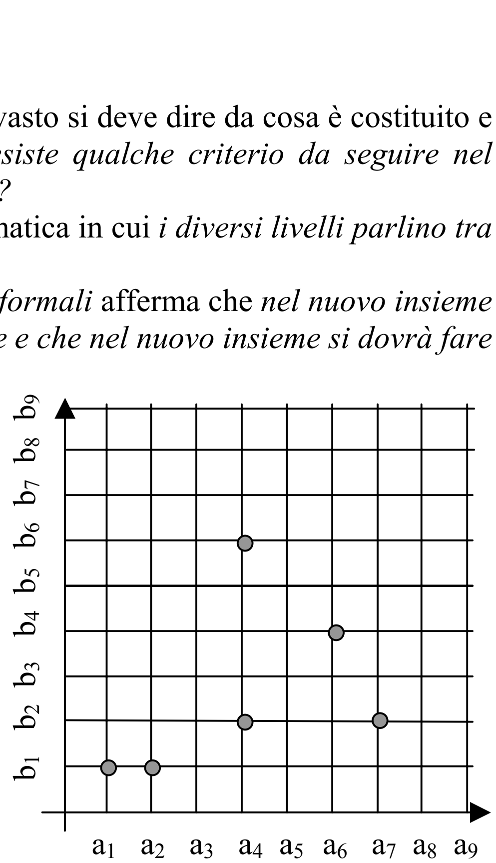


Dunque se si ragiona in maniera astratta e formale è sbagliato affermare che nella costruzione degli insiemi numerici si opera attraverso ampliamenti successivi con l'insieme precedente che fa da sottoinsieme proprio di quello successivo. Si procede per corrispondenze e generalizzazioni e non per inclusioni anche se proprio l'isomorfismo garantendo la conservazione delle corrispondenze consente di utilizzare scritture *improprie o ibride* che hanno il vantaggio di economizzare in simboli e tempo di scrittura.

2	$+$	$\frac{3}{4}$	$=$	$\frac{2\cdot 4+3}{4}=\frac{11}{4}$
↕	↕	↕	⇒	↕
$\frac{2}{1}$	$\oplus$	$\frac{3}{4}$	$=$	$\frac{2\cdot 4+3}{4\cdot 1}=\frac{11}{4}$

Il principio di conservazione delle proprietà formali

Dopo aver chiarito che quando si costruisce un insieme numerico più vasto si deve dire da cosa è costituito e come sono definite le operazioni su di esso nasce una domanda: *esiste qualche criterio da seguire nel decidere in cosa consista (cioè come sia definita) la nuova operazione?*
La risposta è affermativa e nasce dalla esigenza di costruire una matematica in cui *i diversi livelli parlino tra loro.*
Il criterio utilizzato noto come *principio di invarianza delle proprietà formali* afferma che *nel nuovo insieme devono continuare a valere le proprietà valide nell'insieme precedente e che nel nuovo insieme si dovrà fare in modo che vengano eliminati alcuni dei difetti dell'insieme precedente*.
Per esempio, nell'insieme degli interi esiste l'inverso rispetto alla addizione (detto *opposto*), si può sempre fare l'operazione di *sottrazione* (operazione inversa della addizione) e continuano a valere le proprietà commutative, associative e distributive valide sui naturali. Infine l'isomorfismo ci garantisce che le due operazioni di sottrazione costruite sui due insiemi producano risultati corrispondenti.



Relazioni

Dato A×B si chiama relazione tra A e B un suo generico sottoinsieme e si scrive $\mathscr{R} \subseteq A\times B$

Forma denotativa $\mathscr{R} = \{(a_1,b_1),(a_1,b_2)\ldots\}$, si scrive anche $a_1 \mathscr{R} b_1$; b_1 è detto *immagine* di a_1; a_1 è detta *controimmagine* di b_1.
Nella forma connotativi la relazione esprime la proprietà che consente di definire le coppie.
Saper definire il *dominio*: insieme delle controimmagini e il *codominio*: insieme delle immagini
$a\in\mathscr{D} \Leftrightarrow \exists b \mid (a,b)\in \mathscr{R}$ $\quad$ $b\in\mathscr{C}\Leftrightarrow \exists a \mid (a,b)\in \mathscr{R}$

$\mathscr{D} = \{a_1, a_2, a_4, a_6,a_7\}$ $\mathscr{C}= \{b_1, b_2, b_4, b_6\}$
$\mathscr{R} = \{(a_1,b_1), (a_2,b_1), (a_4,b_2), (a_4,b_6), (a_6,b_4), (a_7,b_2)\}$

Relazioni di equivalenza

Vengono definite in $A\times A$ con la richiesta che siano *riflessive, simmetriche e transitive*
Sia $\mathscr{R} \subseteq A\times A$
- o riflessiva: $\forall a\in\mathscr{D} \Rightarrow (a,a)\in\mathscr{R}$
- o simmetrica: $\forall(a,b)\in\mathscr{R} \Rightarrow (b,a)\in\mathscr{R}$
- o transitiva: $\forall(a,b)\in\mathscr{R} \wedge \forall(b,c)\in\mathscr{R} \Rightarrow (a,c)\in\mathscr{R}$.

Indicheremo le generiche relazioni di equivalenza con ~.
Una generica relazione di equivalenza in $A\times A$ ha la proprietà di indurre su un insieme A una particolare partizione in sottoinsiemi A_1, A_2, A_3, … In effetti presi due elementi qualsiasi di A o essi sono equivalenti e allora appartengono ad uno stesso sottoinsieme oppure non lo sono e allora appartengono a sottoinsiemi diversi.
Si chiama *insieme quoziente* di A rispetto alla relazione ~ l'insieme $A / \sim =\{ A_1, A_2, A_3, \ldots\}$
Poiché tutti gli elementi di A_i sono equivalenti tra loro se ne assume uno come *rappresentante di classe* e si scrive $A_i = [a_i]$
Per esempio
- o l'insieme dei numeri naturali può essere partizionato in pari e dispari e si può assumere $A_1 = [1]$ e $A_2 = [2]$
- o l'insieme degli studenti di una scuola può essere partizionato in classi e uno dei due delegati può essere preso come rappresentante di classe
- o l'insieme delle frazioni può essere suddiviso in insiemi di frazioni tra loro equivalenti
  $A_0 =\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4}, \ldots \}$, $A_1 =\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \ldots \}$, $A_2 =\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots \}$, …
  e si scrive $A_0 =[\frac{0}{1}]$ $A_1 =[\frac{1}{1}]$, $A_2 = [\frac{1}{2}]$, …

Relazioni di ordinamento

Una relazione $\mathscr{R}$ si dice di ordine (largo) se è:
- o Riflessiva $(a,a)\in\mathscr{R}$
- o Antisimmetrica $(a,b)\in\mathscr{R} \wedge (b,a)\in\mathscr{R} \Rightarrow a = b$
- o Transitiva $(a,b)\in\mathscr{R} \wedge (b,c)\in\mathscr{R} \Rightarrow (a,c)\in\mathscr{R}$

Quando non vale la proprietà riflessiva la relazione si dice di ordine stretto e la antisimmetrica diventa $(a,b)\in\mathscr{R} \Rightarrow (b,a)\notin\mathscr{R}$
La relazione si dice di *ordine totale* (si dice anche che l'insieme è totalmente ordinato) quando vale la proprietà di *tricotomia* cioè $\forall(a,b)$ si verifica sempre una sola delle tre seguenti possibilità o $(a,b)\in\mathscr{R}$ oppure $(b,a)\in\mathscr{R}$ oppure $b = a$.
Indichiamo con $a\leq b$ la generica relazione di ordine che leggeremo *a è minore o eguale a b* o anche *a precede b.* La relazione che scambia le coppie è indicata da $\geq$ e si legge *a è maggiore o eguale a b*

definizione Un insieme A totalmente ordinato si dice denso se $\forall(a,b)$ con $a\leq b \Rightarrow \exists c|a \leq c \wedge c \leq b$ (si scrive anche $a\leq c\leq b$ e si legge *c è compreso tra a e b*). Un insieme non denso si dice *discreto*.

Si osservi che se un insieme totalmente ordinato è denso esso ha necessariamente infiniti elementi perché si può applicare a cascata la proprietà di esistenza dell'elemento intermedio.

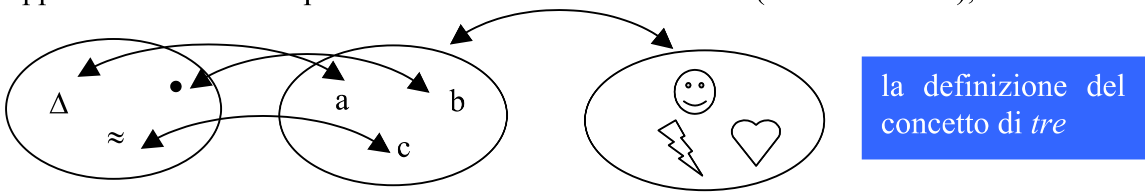
definizione Un insieme A totalmente ordinato si dice limitato superiormente se $\exists c \mid \forall\ a\ ,\ a \leq c$; se la proprietà non vale cioè se $\forall a \Rightarrow \exists\ c \mid c > a$ l'insieme si dice illimitato superiormente.
Valgono le definizioni analoghe per la limitatezza e illimitatezza inferiore.

Insieme dei numeri naturali ℕ tramite la relazione di equipotenza

La relazione di equipotenza

Consideriamo come insieme universale quello degli insiemi finiti e consideriamo in $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ la seguente relazione *detta di equipotenza*: due insiemi si dicono equipotenti se e solo se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dei due insiemi. Si vede immediatamente che si tratta di una relazione di equivalenza e la indicheremo con ≡.
La relazione che abbiamo appena definito è quella che si forma nella mente umana verso i 2 o 3 anni che ci mette in grado di imparare a contare.

Nota Bene : non confondere il numero tre cioè [{a,b,c}] con il simbolo 3, e questo con la sua rappresentazione che dipende dal sistema di numerazione (in binario è 11), con il suo nome (in italiano tre,



in inglese three, in tedesco drei, in francese trois, …).
Il numero è un concetto (classe di equivalenza): 3 = [{a,b,c}].

Definizione *Si chiama numero naturale m la classe di equivalenza di tutti gli insiemi che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con il particolare insieme M di cui diciamo che ha m elementi.*

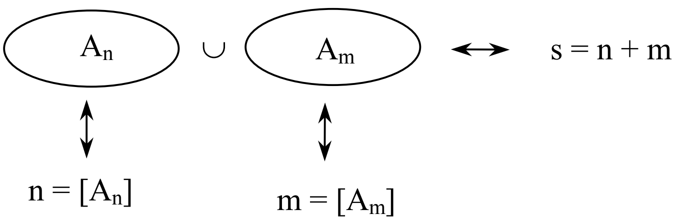
La successione dei naturali

- 0 = [∅] 1 = [A] con A = {a} 2 = [B] con B = {a,b} eccetera
  Quando i numeri naturali vengono definiti in maniera molto astratta si parte dall'insieme vuoto e si procede a crescere utilizzando sempre l'insieme vuoto su livelli linguistici via via più elevati.
  0 = [∅] 1 = [{∅}] 2 = [{∅,{∅}}] eccetera
- concetto di *successore* di un numero naturale: sia n = [A] si passa a n+1 per aggiunta ad A di un singolo elemento che non sia già presente in A. Questo è esattamente il meccanismo con cui, in età infantile, si impara a contare.
  Indicheremo il successore di n con n' e osserviamo che ∀n, ∃!n'. Dato n' il numero n sarà detto *precedente*.
  Si costruisce in questo modo un insieme totalmente ordinato: 0, 1, 2, 3, … nel quale ogni numero naturale è dotato di un successore mentre ciò non è vero per il precedente perché lo 0 non è successore di alcun numero.

Le operazioni in N

Addizione

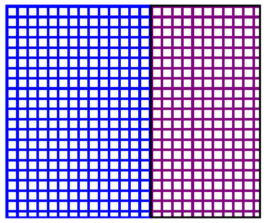
definizione: Siano $n = [A_n]$ e $m = [A_m]$ con $A_n \cap A_m = \varnothing$ si pone allora $s = n + m =_{def} [A_n \cup A_m]$



- **terminologia**: addendi, somma,
- **proprietà**: commutativa e associativa, n + m = (n+1) + (m – 1) (questa è la proprietà con cui i bambini imparano a fare le somme).

- **elemento neutro**: 0 perché $A \cup \varnothing = A$
- **ordinamento:** $n > m \Leftrightarrow \exists!\ p \neq 0 \mid n = m + p$

Moltiplicazione



definizione: Siano $n = [A_n]$ e $m = [A_m]$ si pone allora $n \cdot m =_{def} [A_n \times A_m]$

- **terminologia**: fattori, prodotto, multiplo di n secondo m
- **proprietà**: commutativa, associativa, $n \cdot m = n + n + \dots n$ (m termini), $n \cdot 0 = 0$ perché con l'insieme vuoto non si formano coppie
- **distributiva rispetto alla addizione:** $n \cdot (m+p) = n \cdot m + n \cdot p$ (si dimostra in maniera banale con il prodotto cartesiano: vedi immagine a lato)
- **elemento neutro**: $1 = [\{a\}]$ perché un insieme di n elementi forma n coppie con uno di un solo elemento

Sottrazione

definizione: come operazione inversa della addizione: $m - n = d \Rightarrow m = d + n$. Si vede subito che ciò è possibile solo se $m \geq n$

- **terminologia**: minuendo, sottraendo, differenza
- **proprietà:** dal punto di vista insiemistico rinvia alla differenza tra insiemi con la premessa ulteriore che sia $M \supseteq N$. Da ciò deriva anche la proprietà invariantiva $(m + h) - (n + h) = m - n$

Divisione

definizione: come operazione inversa $m : n = q \Rightarrow m = n \cdot q$. Si vede subito che ciò è possibile solo se m è un multiplo di n.

- **terminologia**: dividendo, divisore, quoziente
- **divisione con resto**: si chiama resto il numero r *più piccolo del divisore* tale che $m = n \cdot q + r$
- **proprietà invariantiva**: $(m:p) = (mn):(pn)$
  Sia $m:p = q \Rightarrow$ (per definizione) $m = pq \Rightarrow$ (proprietà della moltiplicazione) $mn = (pq)n = (pn)q \Rightarrow (mn):(pn) = q$ ☺
- **proprietà scomposizione:** $(mn):p = (m:p)\ n$
  Sia $m:p = q \Rightarrow m = pq \Rightarrow mn = (pq)n=(qn)p \Rightarrow (mn):p = qn =(m:p)n$ ☺

Potenze

definizione: come *moltiplicazione ripetuta* $m^n = mm\dots m$ (con n fattori); la definizione non ha senso per $n= 0 \vee n = 1)$

- **terminologia**: base, esponente, potenza
- **proprietà:** $m^n\ m^p = m^{n+p}$
  si dimostra applicando la definizione
- **estensione della definizione:** se n=p=1 e si vuole conservare la validità della proprietà si ha $m^1\ m^1 = m^{1+1} = m^2 = m\ m$ e pertanto $m^1 = m$
  se p=0 e si vuole conservare la validità della proprietà si ha $m^n\ m^0 = m^{n+0} = m^n = m^n\ 1$ e pertanto $m^0 = 1$
  Non si definisce 0^0 perché in tale caso non si riesce a ripetere il ragionamento precedente
- **proprietà:** $m^n : m^p = m^{n-p}$ per $n \geq p$
  si dimostra applicando la definizione e ripetutamente la proprietà $(mn):(pn) = (m:p)$
- **proprietà:** $(m^n)^p = m^{np}$
  si dimostra applicando la definizione
  attenzione a non confondere $(m^n)^p$ con $m^{(n^p)}$ che richiede il calcolo preventivo di n^p; il risultato è l'esponente di m; esempio $m^{(3^2)} = m^9$ mentre $(m^3)^2 = m^{3 \cdot 2} = m^6$
- **proprietà:** $m^n p^n = (mp)^n$
  si dimostra applicando la definizione e le proprietà associativa e commutativa

Numeri primi

definizione: si dice che m è un divisore di n se si può eseguire la divisione n: m cioè $\exists!q|\ qm = n$

- **proprietà:** 1 è divisore di tutti i numeri; lo 0 ammette come divisori tutti i naturali tranne lo 0; n ammette sempre n come divisore
- **definizione**: *un numero n si dice primo* se non ammette altri divisori oltre a 1 e n
- **definizione**: *due numeri n e m si dicono primi tra loro* se non ammettono altri divisori comuni oltre all'unità
- **terminologia e competenze**: scomposizione in fattori primi, MCD, mcm
- **problemi**: quanti sono i numeri primi? esiste un metodo per generarli tutti? esiste un metodo per generarne alcuni in automatico? esiste un algoritmo per calcolare MCD?

Pregi e difetti di N

- E' totalmente ordinato, è limitato inferiormente, è illimitato superiormente, non è denso.
- Le operazioni di addizione e moltiplicazione sono chiuse; non così le operazioni inverse
- Lo 0 e l'1 sono gli unici numeri naturali dotati di inverso che coincide con il numero stesso ($0 + 0 = 0$ e $1\cdot 1 = 1$).

Insieme delle frazioni

Genesi

Con le frazioni si tenta di riparare ad uno dei difetti dell'insieme N: si costruisce un insieme in cui la divisione è sempre possibile.
Si tenta inoltre di risolvere un problema essenziale per la misurazione e collegato alla divisione: costruire un insieme numerico in cui si possa operare con multipli e sottomultipli di una grandezza eseguendo su di essi le 4 operazioni algebriche (si rifletta sul caso dei segmenti, ma anche sul problema classico delle fette di torta: cosa significa $\frac{2}{3}$ di un segmento? La risposta è 2 volte un terzo. E cos'è un terzo? Un segmento che riportato tre volte dà il segmento originario. Due volte un terzo è la stessa cosa di un terzo di 2 volte? E così via.

Definizione e relazione di equivalenza

Definizione : si chiama frazione una coppia ordinata di numeri naturali di cui il secondo non sia mai lo zero. Si scrive $\mathcal{F} = \{(n,m)|(n,m)\in N\times N_0\}$ e con N_0 si intende $N - \{0\}$. La ragione di questa esclusione dello 0 si vedrà più avanti.

Terminologia e simboli: n è detto *numeratore,* m è detto *denominatore* e si scrive $(n,m) = \frac{n}{m}$. Attenzione, per ora, $\frac{n}{m}$ non ha alcun significato speciale (vuol solo dire coppia ordinata).

Relazione di equivalenza : due frazioni si dicono equivalenti se sono uguali i prodotti incrociati e la equivalenza si scrive ~. Simbolicamente $\frac{n}{m} \sim \frac{p}{q} \Leftrightarrow nq = mp$

Resta da far vedere che la relazione è di equivalenza. Mi limito alla transitività (che è la più difficile)

Transitività

$\frac{n}{m} \sim \frac{p}{q} \wedge \frac{p}{q} \sim \frac{r}{s} \Rightarrow \frac{n}{m} \sim \frac{r}{s}$

dimostrazione

$\frac{n}{m} \sim \frac{p}{q} \Leftrightarrow nq = mp$ $\quad \frac{p}{q} \sim \frac{r}{s} \Leftrightarrow ps = qr$ Sono vere per ipotesi

Devo dimostrare che ns = mr
Per ottenere ns moltiplico tra loro le due relazioni tra numeri naturali e ottengo: (nq)(ps) = (mp)(qr)
Riorganizzo (commutativa e associativa) ed ottengo (ns)(qp) = (mr)(qp)
Divido per qp e ottengo ns = mr ☺

Insieme quoziente : nell'insieme delle frazioni la relazione di equivalenza induce una partizione in classi di equivalenza. L'insieme delle classi di equivalenza è detto insieme dei numeri razionali (un numero razionale è l'insieme di tutte le frazioni equivalenti ad una frazione data).

Così il numero razionale $[\frac{1}{2}]$ è l'insieme di tutte le frazioni equivalenti a $\frac{1}{2}$ e cioè $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\}$

Classi speciali :

- $[\frac{1}{1}] = \{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \ldots, \frac{n}{n}, \ldots\}$ diventerà l'elemento neutro rispetto al prodotto
- $[\frac{0}{1}] = \{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \ldots, \frac{0}{n}, \ldots\}$ diventerà l'elemento neutro rispetto alla somma
- $[\frac{n}{1}] = \{\frac{n}{1}, \frac{2n}{2}, \frac{3n}{3}, \ldots, \frac{mn}{m}, \ldots\}$ è quella che chiamiamo di solito *frazione apparente* e che farà da ponte con l'insieme dei numeri naturali (isomorfismo).

Proprietà invariantiva

$\frac{mn}{mp} \sim \frac{n}{p}$ ☹

dimostrazione

$\frac{mn}{mp} \sim \frac{n}{p} \Leftrightarrow (mn)p = (mp)n$ che è vera (basta applicare la proprietà commutativa e associativa) ☺

Dunque in una frazione si può moltiplicare o dividere numeratore e denominatore per uno stesso numero ottenendo una frazione equivalente (da qui il nome invariantiva che significa *non cambia*; in realtà *la frazione cambia ma quella che si ottiene è equivalente*, cioè se la sostituisco con una equivalente in tutte le operazioni si ottengono risultati equivalenti)

Una frazione si dice *ridotta ai minimi termini* quando applicando la proprietà invariantiva si scrive la frazione equivalente in cui il numeratore e il denominatore sono primi tra loro.

D'ora in poi si suppone sempre di operare con frazioni ridotte ai minimi termini (che sono più semplici da maneggiare).

La moltiplicazione

Definizione : $\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q} = \frac{n \cdot p}{m \cdot q}$

La moltiplicazione tra frazioni si riduce alla moltiplicazione tra numeri naturali

Prima di proseguire sorge un problema: se al posto di $\frac{n}{m}$ e di $\frac{p}{q}$ considero due frazioni ad esse equivalenti cosa ottengo come prodotto?

La risposta, come dimostreremo tra breve, è che si ottiene una frazione equivalente; e se non fosse così la nostra definizione sarebbe da scartare perché porterebbe a contraddizioni nei conti (il risultato di una moltiplicazione cambierebbe a seconda della particolare frazione equivalente che si usa nei calcoli).

Qualunque operazione sugli insiemi numerici deve rispettare l'equivalenza, cioè se gli operandi vengono sostituiti da operandi equivalenti si deve ottenere un risultato equivalente. Questo è il primo criterio che vincola il modo di definire le operazioni.

Teorema sulla equivalenza

$\frac{n}{m} \sim \frac{n'}{m'} \wedge \frac{p}{q} \sim \frac{p'}{q'} \Rightarrow \frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q} \sim \frac{n'}{m'} \cdot \frac{p'}{q'}$ ☹

dimostrazione

per ipotesi è $nm' = mn' \wedge pq' = qp'$ mentre si deve dimostrare che $(np)(m'q') = (mq)(n'p')$

Se si moltiplicano le prime due uguaglianze membro a membro si ha: $(nm')(pq') = (mn')(qp')$

Basta ora usare la proprietà commutativa e associativa e si ha $(np)(m'q') = (mq)(n'p')$ ☺

L'elemento neutro: è $\frac{1}{1}$ infatti $\frac{1}{1} \cdot \frac{p}{q} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot q} = \frac{p}{q}$ ☺

Proprietà: si dimostra che è commutativa e associativa

Inverso ed operazioni inverse

Data una operazione dotata di elemento neutro si chiama *inverso di un numero rispetto alla operazione* quel numero (se esiste) che *composto con il numero di partenza fornisce l'elemento neutro*. Se indichiamo con ⊗ l'operazione dotata di elemento neutro u e con α e $\overline{\alpha}$ un generico numero e il suo inverso dovrà essere $\alpha \otimes \overline{\alpha} = u$

L'inverso rispetto alla addizione viene di solito chiamato opposto (ed esiste solo tra i numeri relativi e tra i vettori); *l'inverso rispetto alla moltiplicazione viene di solito chiamato reciproco* (ed esiste nell'insieme delle frazioni).

La esistenza dell'inverso si collega sempre con la eseguibilità della operazione inversa di una data operazione perché come vedremo, anche se non in modo sistematico, la operazione inversa si esegue attraverso quella diretta applicata all'inverso del secondo operando (la sottrazione nei relativi si esegue come addizione con l'opposto; la divisione nelle frazioni si esegue come moltiplicazione con il reciproco).

La divisione

Definizione: $\frac{n}{m} : \frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q} = \frac{n}{m}$ La divisione viene definita come operazione inversa della moltiplicazione e pertanto diremo che un numero è il quoziente di una divisione se, moltiplicandolo per il divisore, si ottiene il dividendo.

Teorema sull'inverso

Il reciproco di una frazione $\frac{n}{m}$ diversa dallo zero esiste sempre e vale $\frac{m}{n}$

Dimostrazione

$\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n} = \frac{nm}{mn} = \frac{nm}{mn} \sim \frac{1}{1}$ ☺ (si sono usate la definizione, la proprietà commutativa e quella invariantiva)

Dunque *l'inverso o reciproco di una frazione si ottiene scambiando il numeratore con il denominatore*.

Lasciamo al lettore la riflessione su cosa accade quando la frazione è lo zero delle frazioni.

Teorema sulla divisione

$\frac{n}{m} : \frac{p}{q} = \frac{n}{m} \cdot \frac{q}{p}$ ovvero la divisione si esegue moltiplicando per l'inverso ☹

Dimostrazione

Applico la definizione di divisione, vado cioè a vedere se il quoziente moltiplicato per il divisore dà il dividendo:

$\left(\frac{n}{m} \cdot \frac{q}{p}\right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{n}{m} \cdot \left(\frac{q}{p} \cdot \frac{p}{q}\right) = \frac{n}{m} \cdot \frac{qp}{pq} \sim \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{1} = \frac{n}{m}$ ☺

Dunque nell'insieme delle frazioni la divisione si può sempre eseguire e si esegue moltiplicando la frazione dividendo per il reciproco (inverso) del divisore.

Perché pensiamo che $\frac{n}{m}$ = n : m ?

Come sappiamo, in generale n:m non esiste eppure siamo abituati ad identificare la frazione $\frac{n}{m}$ con la divisione n:m. Come mai? La ragione è da ricercare nell'isomorfismo tra l'insieme delle frazioni apparenti e l'insieme dei numeri naturali. Indichiamo la corrispondenza con ⇳

$$\begin{array}{l} n \ : \ m \ = ? \\ \Updownarrow \quad \Updownarrow \\ \frac{n}{1} : \frac{m}{1} = \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{m} = \frac{n \cdot 1}{1 \cdot m} = \frac{n}{m} \end{array}$$

Dunque n : m non si può fare in generale ma, attraverso l'isomorfismo, viene a corrispondere alla frazione $\frac{n}{m}$ che ha invece senso.

Cosa vuol dire e quanto fa $\frac{\frac{n}{m}}{p}$?

Anche questa è una scrittura insensata come la precedente ma la usiamo grazie agli isomorfismi. La scrittura è insensata perché in una frazione il numeratore e il denominatore devono essere dei numeri naturali. Ma se facciamo corrispondere a p la frazione $\frac{p}{1}$ e al simbolo di frazione — quello di divisione avremo che:

$$\frac{\frac{n}{m}}{p} \leftrightarrow \frac{n}{m} : \frac{p}{1} = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{p} = \frac{n}{mp}$$

Analogamente:

$$\frac{n}{\frac{m}{p}} \leftrightarrow \frac{n}{1} : \frac{m}{p} = \frac{n}{1} \cdot \frac{p}{m} = \frac{np}{m}$$

Attenzione, ciò che determina il risultato è la posizione della linea di frazione principale che sarebbe bene abituarsi a scrivere per prima. Quando si incontreranno negli esercizi quelle assurde frazioni su più livelli ricordarsi del significato che abbiamo stabilito qui; così facendo non si sbaglia.

La addizione

Definizione : $\frac{n}{m} + \frac{p}{q} = \frac{n \cdot q + p \cdot m}{m \cdot q}$

Osservazioni: se si addizionano due frazioni apparenti viene il corrispondente della somma tra naturali; se al posto di $\frac{n}{m}$ si considera la frazione equivalente $\frac{n\,k}{m\,k}$, si applica la definizione e poi si applica la proprietà invariantiva si ottiene una frazione equivalente (provare per credere).

Se m e q non sono primi tra loro la somma $\frac{n \cdot q + p \cdot m}{m \cdot q}$ risulta contenere sia al numeratore che al denominatore un fattore comune che, dopo essere stato eliminato (proprietà invariantiva) porta al seguente risultato (più difficile da dire, ma più semplice da eseguire:

$\frac{n}{m} + \frac{p}{q} = \frac{(a{:}m) \cdot n + (a{:}q) \cdot p}{a}$ dove si è posto a = m.c.m.(m,q)

E' abbastanza istruttivo l'esercizio consistente nel verificare che, sostituendo agli addendi frazioni equivalenti, si ottiene una frazione equivalente.

L'ordinamento in $\mathscr{F}$

Definizione: $\frac{n}{m} > \frac{p}{q} \Leftrightarrow nq > mp$

Si rifletta sulla semplicità della definizione che, ovviamente, rimanda a proprietà dei naturali e che ci consente di eseguire confronti attraverso semplici moltiplicazioni.

Si vede subito che la definizione rispetta le richieste delle relazioni di ordine totale stretto (provare).

Proprietà di illimitatezza

Presa una frazione ne esiste sempre una più grande. Lasciamo la dimostrazione al lettore osservando che basta moltiplicare per una frazione apparente ed applicare la definizione di ordinamento.

Proprietà di densità

L'insieme delle frazioni è denso e ce lo garantisce il seguente teorema che afferma che *prese due frazioni qualsiasi esiste sempre una frazione compresa tra le due che si ottiene facendo la semisomma*:

$\forall \left(\frac{m}{n} > \frac{p}{q}\right) \Rightarrow \frac{m}{n} > \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) > \frac{p}{q}$ ☹

Dimostrazione

Per ipotesi è mq > pn

Per dimostrare che $\frac{m}{n} > \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)$ deve essere $\frac{m}{n} > \frac{mq+pn}{2qn} \Leftrightarrow m2qn > n(mq+pn) = nmq + npn \Leftrightarrow nmq > npn$

$\Leftrightarrow$ mq > np (vera per ipotesi). Si è sottratto il termine comune nmq e poi si è diviso per il fattore comune n.

Analogamente si dimostra l'altra metà della disuguaglianza. ☺

Riflettiamo sull'infinito

Abbiamo appena dimostrato che tra due frazioni anche vicinissime ne esistono sempre infinite altre cioè che le frazioni sono tra loro infinitamente ravvicinate. Dunque tra due frazioni anche vicinissime ne esistono infinite altre. Verrebbe da pensare che le frazioni, per via della densità, siano molte di più dei numeri naturali. E invece se ci si mette a contarle, utilizzando la relazione di equipotenza tra insiemi si scopre che le frazioni sono tante quante i numeri naturali. Sembra un paradosso, ma è così. Lo stesso Cantor che ha dato per primo la dimostrazione diceva *non ci credo, ma lo vedo.*

La decomposizione

Se α, β e γ sono numeri naturali o frazioni valgono alcune proprietà di decomposizione che è bene ricordare:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} \qquad \frac{\alpha}{\beta+\gamma} = \frac{1}{\frac{\beta+\gamma}{\alpha}} = \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}}$$

La loro dimostrazione deriva da tutte le proprietà viste fino ad ora.

L'insieme degli interi Z (zahlen = numero)

L'insieme dei numeri interi viene *inventato* per disporre di un insieme numerico chiuso rispetto alla sottrazione. La definizione attraverso una relazione di equivalenza ha il vantaggio di non usare i ben noti simboli di + (più) e – (meno) che combinano molti disastri concettuali (il simbolo – viene ad assumere ben 3 significati diversi, operazione, opposto e segno del numero) ma risulta un po' faticosa da digerire; per questo ne accenneremo solo alla fine per far vedere che *anche i numeri interi, come le frazioni, possono essere pensati come particolari coppie di numeri naturali* e che pertanto *tutto si può costruire dai numeri naturali* e cioè *dagli insiemi* e cioè *dalla logica delle proposizioni* senza scomodare simboli speciali come il + e il – dei numeri relativi.

La definizione

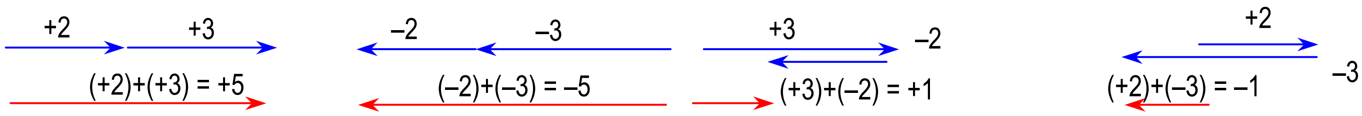
Consideriamo l'insieme S dei segni {+,–} e l'insieme N dei naturali. L'insieme Z è definito come S×N con la precisazione che si considera $(+,0) =_{def} (–,0)$ (la ragione sarà vista nel seguito).
Dunque chiamiamo numeri interi delle coppie aventi come primo elemento un simbolo (non è obbligatorio usare + e –) e come secondo elemento un numero naturale.
Il primo elemento della coppia viene detto *segno*; il secondo viene detto *valore assoluto o modulo* e sarà indicato con | |. Se due numeri hanno lo stesso segno sono detti *concordi* se hanno segno diverso sono detti *discordi*.
Dunque un numero intero z sarà indicato come (±,n) e (+,n) indicherà quello che chiamiamo *numero positivo* mentre (–,n) indicherà quello che chiamiamo *numero negativo.*
Tutti gli ambienti di programmazione contengono due funzioni che restituiscono il segno e il modulo di un intero.
Per esempio un Excel esse si chiamano SEGNO() e ASS()
Esempio: SEGNO(+5) = 1 (per indicare positivo) SEGNO(–5) = –1 (per indicare negativo) e SEGNO(0) = 0 (per indicare l'indifferenza dello zero).
ASS(–4) = 4 e così via.
Nel seguito indicheremo il segno con sign()

La addizione e la sottrazione

La definizione di addizione è stata vista dettagliatamente alle medie e ci limitiamo a sintetizzarla osservando che, come al solito, si cerca di dare una definizione che conservi la corrispondenza tra una parte del nuovo insieme (interi positivi) e quello vecchio (naturali).
Sia dunque $z = z_1 + z_2$; si hanno i seguenti casi:

a) z_1 e z_2 concordi $\Rightarrow$ sign(z) = sign(z_1) e $n = n_1 + n_2$
b) z_1 e z_2 discordi si hanno 3 possibilità:
   b1) $n_1 > n_2 \Rightarrow$ sign(z) = sign(z_1) e $n = n_1 - n_2$
   b2) $n_1 < n_2 \Rightarrow$ sign(z) = sign(z_2) e $n = n_2 - n_1$
   b3) $n_1 = n_2 \Rightarrow$ sign(z) = ± e $n = n_2 - n_1 = n_1 - n_2 = 0$

Come si vede la definizione è piuttosto noiosa e il modo più semplice per ricordarla è quello di associare ai numero interi dei segmenti orientati e tradurre l'operazione tra numeri in operazione tra segmenti in cui al segno si associa il verso. In effetti l'insieme degli interi è stato inventato per descrivere operazioni contabili di entrata e uscita e movimenti



La operazione di addizione risulta *commutativa* e *associativa* e ha come *elemento neutro* sia (+0) che (–0). Per questa ragione, cioè per evitare di avere due elementi neutri e poiché al punto è impossibile associare un verso si pone per definizione (+0) = (–0) e noi indicheremo l'elemento neutro come 0_Z.
La sottrazione (come in tutti i campi numerici) viene definita come operazione inversa della addizione; si ha cioè (per definizione):

$z = z_2 - z_1 \Leftrightarrow z_2 = z + z_1$

L'esistenza dell'inverso (opposto)

Preso un generico z, l'inverso $\overline{z}$ sarà quel numero tale che $z + \overline{z} = 0_Z$

Si vede subito che, in base alla definizione di addizione tale numero esiste sempre e si trova cambiando il segno di z

Teorema

$|\overline{z}| = |z|$ con mentre $\overline{z}$ e z discordi ovvero: *l'opposto si ottiene cambiando il segno del numero senza cambiare il suo valore assoluto.*

Dimostrazione

Poiché $\overline{z}$ e z sono discordi la somma si ottiene come differenza dei valori assoluti, ma poiché essi sono uguali si ottiene come valore assoluto 0. ☺

Si può sempre eseguire la sottrazione

Questa possibilità è garantita dalla esistenza dell'opposto. Si dimostra infatti che la sottrazione si può sempre eseguire come addizione con l'opposto.

Teorema

$z = z_2 - z_1 = z_2 + \overline{z_1}$

Dimostrazione

Si tratta di far vedere che se $z_2 - z_1 = z$ cioè se $z + z_1 = z_2$ anche $(z_2 + \overline{z_1}) + z_1 = z_2$. Ma ciò è immediatamente vero applicando la proprietà associativa e la definizione di inverso:

$(z_2 + \overline{z_1}) + z_1 = z_2 + (\overline{z_1} + z_1) = z_2 + 0_Z = z_2$ ☺

Corollario

Poiché la addizione si può sempre fare, e l'inverso esiste sempre si può sempre fare anche la sottrazione.

La moltiplicazione

Definizione

Posto $z = z_1 \cdot z_2$ si pone $|z| = |z_1|\cdot|z_2|$ per garantire l'isomorfismo con i numeri naturali e pertanto $z\cdot 0_Z = 0_Z$. Ma come definire il segno del prodotto?

Facevo l'Itis e mi chiedevo *ma perché (+)(+) = (–)(–) = (+) e perché (+)(–) = (–)(+) = (-)*; si poteva fare diversamente? Mi sono laureato in Fisica senza avere l'occasione di scoprire la risposta anche se, dagli studi di fisica, mi era ormai chiaro che si poteva fare diversamente.

z_1	z_2	$z_1 \cdot z_2$
+	+	?
+	–	?
–	+	?
–	–	?

Le giustificazioni di questa definizione esterne alla matematica sono numerose: per esempio, in fisica, dove si lavora con numeri relativi, la velocità può essere positiva o negativa e deve seguire le sorti degli spostamenti da cui si genera dividendo per un intervallo di tempo che, a sua volta può essere positivo o negativo. Ma quali sono le ragioni interne alla matematica?

Il segno del prodotto

Osserviamo intanto che le possibilità sono $2^4 = 16$ perché abbiamo 4 casi con 2 possibili risposte ogni volta.

Per la proprietà commutativa deve essere (+)(–) = (–)(+) e dunque siamo scesi a 8 possibilità.

Se deve valere la proprietà distributiva deve essere (+)(+) ≠ (+)(–) e (–)(–) ≠ (+)(–).

Dimostriamo la prima delle due: consideriamo due numeri positivi $z_1 = (+,a)$ e $z_2 = (+,b)$

$z_1 \cdot 0_Z = 0_Z = z_1 \cdot [\, z_2 + (-z_2)] = (+,a)[\,(+,b) + (-,b)] = (++,ab) + (+-,ab)$ dunque (+)(+) è opposto di (+)(–) perché la somma deve fare 0_Z

Allo stesso modo ipotizzando che sia $z_1 = (-,a)$ si dimostra che (–)(–) è opposto di (+)(–) e dunque che (+)(+) e (–)(–) devono avere lo stesso segno.

Ci siamo ridotti a due sole possibilità entrambe funzionanti, nel senso che entrambe ci garantiscono la validità delle proprietà fondamentali: la prima è la ordinaria regola che mette in isomorfismo l'insieme dei naturali con quello degli interi positivi; la seconda funziona anche lei ma stabilisce l'isomorfismo invece che con gli interi positivi con quello degli interi negativi.

+	+	+
+	–	–
–	+	–
–	–	+

+	+	–
+	–	+
–	+	+
–	–	–

L'ordinamento

Si stabilisce il criterio che consente poi di collocare i numeri interi sulla retta

a) numeri positivi $z_1 > z_2 \Leftrightarrow |z_1| > |z_2|$
b) numeri negativi $z_1 > z_2 \Leftrightarrow |z_1| < |z_2|$
c) numeri discordi $z_1 > z_2 \Leftrightarrow \text{sign}(z_1) = +$

L'elevamento a potenza

Siano $z_1=(\pm,a)\in Z$ e $z_2=(\pm,b)\in Z$ se si vuole conservare l'isomorfismo tra interi e positivi e naturali è ovvio porre per definizione

$(\pm,a)^{(+,b)} =_{\text{def}} (\pm,a)^b$

Ma che significato dare a $(\pm,a)^{(-,b)}$? Si dà una definizione che ci consente di estendere e potenziare le proprietà dell'elevamento a potenza. Precisamente:

$(\pm,a)^{(-,b)} =_{\text{def}} \dfrac{1}{(\pm,a)^{(+,b)}}$ *l'elevamento ad esponente negativo corrisponde a prendere il reciproco della potenza ad esponente positivo*.

Si dimostra che, con questa definizione, valgono sempre le 4 proprietà fondamentali dell'elevamento a potenza già viste nell'insieme dei numeri naturali ma ora esse valgono senza più dover fare distinzioni o limitazioni.

Ci limitiamo per esempio al caso della moltiplicazione nel caso di esponente discorde (e faremo un uso disinvolto dei simboli, nel senso che ammetteremo la possibilità di usare in modo esteso i simboli).

$$\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma} = \alpha^{(+,b)}\cdot\alpha^{(-,c)} = (\pm,a)^{(+,b)}\cdot \frac{1}{(\pm,a)^{(+,c)}} = (\pm,a)^{(+,b)} : (\pm,a)^{(+,c)} = (\pm,a)^{(+,b)} : (\pm,a)^{(+,c)}$$

Adesso ci sono due possibilità:

Se $b > c \Rightarrow \alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma} = \dots = (\pm,a)^{(+,b-c)} = \alpha^{\beta+\gamma}$

Se $b < c \Rightarrow \alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma} = \dots = \dfrac{1}{(\pm,a)^{(+,c-b)}} = (\pm,a)^{(-,c-b)} = \alpha^{\gamma+\beta}$

Si consiglia senza pretendere di svolgere le dimostrazioni formali di rendersi almeno conto attraverso esempi numerici di cosa significhino e come si semplifichino espressioni con potenze ad esponente intero in cui si usano le proprietà formali per il calcolo.

Perché $(\alpha^{+2})^{-3} = \alpha^{-6}$?

$$(\alpha^{+2})^{-3} = \frac{1}{(\alpha^{+2})^{+3}} = \frac{1}{(\alpha^{2})^{3}} = \frac{1}{\alpha^{2\cdot 3}} = \frac{1}{\alpha^{6}} = \frac{1}{\alpha^{+6}} = \alpha^{-6}$$

si sono usate nell'ordine: la definizione di potenza ad esponente negativo, la definizione di potenza ad esponente positivo, il teorema sulla potenza di potenza valido per esponente naturale, la definizione di potenza ad esponente positivo, la definizione di potenza ad esponente negativo. Il risultato del tutto è che nell'elevamento a potenza si possono usare per gli esponenti interi le stesse proprietà (senza le restrizioni che si avevano) valide per le potenze ad esponente naturale.

Si osservi anche che ho utilizzato in maniera disinvolta la equivalenza tra divisione e frazione di cui si è già discusso in uno dei paragrafi precedenti.

Cenno all'insieme degli interi senza l'uso dei simboli di segno

Introduzione

Consideriamo le coppie (5,3),(6,4),(4,2),(21,19), … e cerchiamo di scoprire cosa le accomuna; di solito la prima risposta che viene spontanea è che la differenza tra il primo elemento e il secondo fa 2. Ma come è noto la sottrazione ha il difetto di non essere sempre eseguibile. Cosa hanno in comune (1,5),(3,7),(10,14)…? Potremmo anche dire che hanno in comune il fatto che la differenza tra il secondo e il primo fa sempre 4.

Ma c'è un modo più elegante di dire il tutto e che funziona in entrambi i casi:
(5,3) equivale a (6,4) perché 5+4 = 3+6
(1,5) equivale a (3,7) perché 1+7 = 5+3

Una nuova relazione di equivalenza

Per farla breve prese due coppie di numeri naturali (m,n) e (p,q) si dice che $(m,n) \sim (p,q) \Leftrightarrow m+q = n+p$ e si dimostra direttamente che la relazione che abbiamo appena stabilito è una relazione di equivalenza (provare per esercizio).

Si osservi che si tratta *mutatis mutandis* della stessa relazione già usata per le frazione (ma dove là si usava il prodotto qui si usa la somma).

Fatto questo abbiamo un ripartizione delle coppie in classi di equivalenza di tipo diverso: quelle il cui primo elemento è maggiore del secondo e quelle in cui è minore; in mezzo ci sta la classe i cui elementi sono uguali.

(0,3) ~ (1,4) ~ (2,5) ~ …(n,n+3) … questa classe corrisponderà a –3
(1,3) ~ (2,4) ~ (3,5) ~ …(n,n+2) … questa classe corrisponderà a –2
(2,3) ~ (3,4) ~ (3,5) ~ …(n,n+1) … questa classe corrisponderà a –1
(3,3) ~ (4,4) ~ (5,5) ~ …(n,n) … questa classe corrisponderà a ±0
(1,0) ~ (2,1) ~ (3,2) ~ …(n+1,n) … questa classe corrisponderà a +1
(2,0) ~ (3,1) ~ (4,2) ~ …(n+2,n) … questa classe corrisponderà a +2
(3,0) ~ (4,1) ~ (5,2) ~ …(n+3,n) … questa classe corrisponderà a +3

Le operazioni

Ci limitiamo ad esaminare il caso della addizione che risulta definita in maniera molto naturale sommando i termini delle coppie: $(m,n)+(p,q) =_{def} (m+p,n+q)$

Il calcolo si fa sempre allo stesso modo senza *regole strane* sul segno. Esempio:

(0,3) + (9,4) = (0+9,3+4) = (9,7)
⇳ ⇳ ⇳
(–3) + (+5) = +(5–3) = +2

La moltiplicazione viene definita in maniera un po' più macchinosa ma anche questa definizione ha il vantaggio di contenere la *mitica regola dei segni* in modo naturale:

$(m,n)\cdot(p,q) =_{def} (mp+nq,np+mq)$

Provare con qualche esempio numerico come in questo caso:

(1,4) · (9,4) = (9+16,36+4) = (25,40)
⇳ ⇳ ⇳
(–3) · (+5) = –15 = –15

L'insieme dei numeri razionali Q

Viene costruito mettendo insieme i vantaggi di Z e di $\mathscr{F}$ e utilizzando la relazione di equivalenza già utilizzata per le frazioni. Un numero razionale è dunque la classe di tutte le frazioni relative equivalenti ad una frazione data.
In questo insieme le 4 operazioni sono sempre possibili, esistono gli elementi neutri, ogni numero ammette l'inverso rispetto alla addizione (opposto) e moltiplicazione (reciproco).
L'insieme è totalmente ordinato, illimitato (superiormente ed inferiormente) e denso.
Si può definire l'elevamento a potenza con base razionale ed esponente intero con la certezza che valgano le 4 proprietà fondamentali.

Problemi aperti

Cosa significa l'elevamento a potenza con esponente frazionario ?
L'operazione inversa dell'elevamento a potenza (estrazione di radice) non risulta in generale possibile.
Ci servirà un altro insieme numerico.

rappresentazione degli insiemi numerici

Nel calcolo si sfrutta la corrispondenza per isomorfismi tra l'insieme più ristretto e un sottoinsieme dell'insieme più vasto; ciò consente di scrivere espressioni che, a rigore, non hanno significato perché *grammaticalmente illegittime*.
Per esempio $3+\left(-\frac{2}{3}\right)$ per la quale solitamente scriviamo disinvoltamente $\left(\frac{9-2}{3}\right) = +\frac{7}{3}$ in realtà corrisponde alla addizione tra il numero razionale relativo rappresentato dalla classe di equivalenza $\left[+\frac{3}{1}\right]$ con la classe di equivalenza rappresentata dal numero razionale relativo $\left[-\frac{2}{3}\right]$
I naturali N sono in corrispondenza biunivoca con gli interi positivi Z^+, gli interi Z sono in corrispondenza biunivoca con quei razionali che hanno come rappresentante di classe le frazioni apparenti

Riepilogo di scritture *improprie* e proprietà normalmente utilizzate nel calcolo

$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ consente di trattare la sottrazione come una addizione

$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ proprietà distributiva molto utilizzata in entrambi i versi nel calcolo letterale

$-\alpha = -1\cdot\alpha$ consente di interpretare l'opposto come moltiplicazione per -1 e poiché la sottrazione può essere ridotta ad una addizione con l'opposto …

$-(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta$ consente di trasformare l'opposto di una somma in una differenza

$(-1)^{2k} = +1 \qquad (-1)^{2k+1} = -1$