1. Proposizioni ed operazioni su di esse

In logica si chiama *proposizione* una frase per la quale abbia senso stabilire se sia *vera* oppure *falsa*. Da questo punto di vista sono proposizioni frasi visibilmente false come *Napoleone aveva tre gambe,* mentre non lo sono frasi come *Giovanni, corri!* (frase esortativa) o "$2x + 3 = 9$" (frase che contiene una variabile non assegnata).
Indicheremo le proposizioni con lettere minuscole come *p, q, r,...* e quando vorremo specificarne il contenuto lo rappresenteremo tra parentesi precedute dal simbolo ≡ come nel seguente esempio: $p \equiv \{12>23\}$. Diremo che *p* rappresenta una proposizione elementare falsa perché *non è vero che* "12 sia maggiore di 23". La proposizione è detta *elementare* quando non può essere ulteriormente scomposta in proposizioni più semplici.
Abbrevieremo inoltre i due simboli di *vero* e *falso* con le loro iniziali *v* e *f*.
A partire dalle *proposizioni elementari* (gli atomi della logica) e da alcuni semplici connettivi si possono costruire *proposizioni complesse* (le molecole della logica). Ma se i connettivi devono, a loro volta generare proposizioni, bisogna che siano definiti in modo non ambiguo indipendentemente dalle sfumature di significato che, a volte, il linguaggio comune assegna loro.
Per definire un connettivo sarà sufficiente dare il valore di verità della proposizione risultante quando sono assegnate le proposizioni su cui agisce. Le tabelle in cui si effettua tale operazione sono dette *tabelle di verità.* In una tabella di verità vengono presentati i valori di verità delle proposizioni (o della proposizione) su cui agiscono i connettivi. In corrispondenza di ogni riga una casella deve indicare il risultato prodotto dal connettivo. Le tabelle di verità si presentano dunque come delle griglie (si vedano gli esempi successivi).
Osserviamo che, indipendentemente dalla loro forma grammaticale o sintattica, due espressioni composte saranno equivalenti dal punto di vista logico quando presenteranno la stessa tabella di verità.

1.1. Negazione

E' il connettivo più semplice; agisce su una singola proposizione cambiandone il valore di verità nel suo opposto.

Simbolo: $\neg p$, $\sim p$, $\overline{p}$

p	$\neg p$
v	*f*
f	*v*

Lettura: non *p*, non è vero che *p*, è falso che *p*, non si dà il caso che *p*
Proprietà: doppia negazione $\neg(\neg p) = p$
Osservazioni:
- la legge secondo cui la doppia negazione equivale ad una affermazione viene utilizzata spesso per semplificare espressioni complesse
- per convenzione si è stabilito che, in assenza di parentesi, la negazione abbia il massimo valore di priorità, cioè che debba sempre essere eseguita per prima.
- il connettivo di negazione è l'unico tipo di connettivo *non banale* che opera su una singola proposizione: gli altri 3 connettivi possibili sono quello che genera *v*, quello che genera *f*, e quello che lascia immutata la proposizione

1.2. Congiunzione (prodotto logico)

La congiunzione forma una proposizione vera solo quando sono vere entrambe le proposizioni componenti.

p	q	$p \wedge q$
v	*v*	*v*
v	*f*	*f*
f	*v*	*f*
f	*f*	*f*

Simbolo: $p \wedge q$, $p\&q$, pq, $p.\text{and}.q$
Lettura: *p* e *q*, sia *p* che *q*, sia *p* sia *q*, *p* ma *q*
Proprietà: commutativa $p \wedge q = q \wedge p$
associativa $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$
assorbimento $p \wedge v = p$ $\quad p \wedge f = f$

idempotenza $p \wedge p = p$

Osservazioni:

- il termine congiunzione viene usato in un senso più ristretto di quello grammaticale che solitamente indica connessione di significato; tutti i connettivi logici non hanno altro significato se non quello vero-funzionale definito tramite la tabella di verità
- le proprietà di assorbimento consentono di affermare che il simbolo *v* è l'elemento neutro della operazione di congiunzione. Le proprietà di assorbimento sono spesso usate per semplificare espressioni complesse;
- dal punto di vista del linguaggio comune c'è una differenza di significato tra dire *piove e fa freddo* e dire *piove ma fa freddo*. Il significato *avversativo* di *ma*, non è stato considerato rilevante nello studio dei connettivi e pertanto, dal punto di vista della logica simbolica *e* e *ma* vengono posti sullo stesso piano; [1]
- con riferimento a quanto già detto sulla precedenza delle operazioni si ricordi che $\neg(p\wedge q)$ è diverso da $\neg p\wedge q$. Nel primo caso si nega la congiunzione, nel secondo si congiunge la negazione della prima alla seconda;
- nel linguaggio comune il connettivo *e* viene usato in un senso più ampio di quanto non si faccia in logica. A volte gli si dà un significato causale come in *fai dieci minuti di ginnastica al giorno e ti sentirai meglio*; altre volte non è chiaro se la proprietà sia effettivamente posseduta da entrambi come in *Carlo e Maria hanno il personal computer* (non è chiaro se sia da intendere nel senso che entrambi hanno un personal computer $p\wedge q$, o nel senso che hanno un computer in due, nel qual caso basta *p* nel senso che *Carlo e Maria* sono un indistinto soggetto della proposizione). Ancora, in determinati contesti, la *e* nasconde un nesso temporale tra la proposizione *p* e la proposizione *q* e tale nesso renderebbe non valida la proprietà commutativa (*Pino si è sdraiato sul divano e si è addormentato* è ben diverso da *Pino si è addormentato e si è sdraiato sul divano*)

1.3. Disgiunzione (somma logica)

p	q	$p \vee q$
v	*v*	*v*
v	*f*	*v*
f	*v*	*v*
f	*f*	*f*

La disgiunzione forma una proposizione falsa solo quando sono entrambe false le proposizioni componenti e appare molto più legata all'uso che si fa del connettivo *o* nel linguaggio ordinario.

Simbolo: $p \vee q$, $p + q$, *p* .or. *q*. Il simbolo $\vee$ è la iniziale del termine latino *vel* che significa appunto *o* nel senso usato in logica.

Lettura: *p* o *q*, o *p* o *q* o entrambi, *p* vel *q*

Proprietà: commutativa $p \vee q = q \vee p$

associativa $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

assorbimento $p \vee v = v$ $\quad p \vee f = p$

idempotenza $p \vee p = p$

Osservazioni:

- Per distinguere il connettivo *o* dal caso in cui viene usato in senso *esclusivo* (o l'uno o l'altro ma non entrambi) si parla di *o* in senso *inclusivo* (cioè viene incluso il caso in cui sono vere entrambe le proposizioni)
- Dalle leggi di assorbimento si vede che il simbolo *f* è l'elemento neutro per la operazione di disgiunzione.
- Adattandosi alla convenzione già utilizzata per il prodotto e per la somma tra i numeri si fissa di eseguire prima la congiunzione della disgiunzione. Pertanto $p \vee q \wedge r$ può essere scritto senza

[1] Per una qualche ragione che mi sfugge, nel linguaggio giornalistico televisivo si sta perdendo il significato avversativo di *ma*; la congiunzione *ma* viene ormai usata come semplice congiunzione creando frasi dal significato comico come per esempio "*il presidente della repubblica ha ricevuto il presidente del consiglio, ma il presidente della camera è andato a cena*"

parentesi intendendo che si esegue prima $\wedge$ e successivamente $\vee$. Se invece si vuole eseguire prima la disgiunzione bisogna indicare la parentesi $(p \vee q) \wedge r$

1.4. Proprietà miste di negazione, congiunzione e disgiunzione

1.4.1. Leggi distributive

Vengono chiamate leggi distributive di una operazione rispetto ad un'altra delle proprietà relative ad una coppia di operazioni in cui la prima operazione agisce su entrambi i termini della seconda. Per esempio, dalla aritmetica, conosciamo la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma secondo cui a·(b+c) = a·b + a·c.
In logica valgono le proprietà distributive sia della congiunzione rispetto alla disgiunzione, sia quella della disgiunzione rispetto alla congiunzione

distributiva di $\wedge$ rispetto a $\vee$ $p\wedge(q\vee r) = (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
distributiva di $\vee$ rispetto a $\wedge$ $p\vee(q\wedge r) = (p\vee q)\wedge(p\vee r)$

Come esempio di dimostrazione proponiamo la distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione lasciando al lettore, per esercizio all'uso delle tavole di verità, la dimostrazione delle altre. Si raccomanda nell'eseguire i conti di non procedere riga per riga ma di ricercare le righe in cui si sfrutta la proprietà rilevante della operazione come si è mostrato a lezione.

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge(q\vee r)$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
v	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*
v	*v*	*f*	*v*	*v*	*v*	*f*	*v*
v	*f*	*v*	*v*	*v*	*f*	*v*	*v*
v	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*
f	*v*	*v*	*v*	*f*	*f*	*f*	*f*
f	*v*	*f*	*v*	*f*	*f*	*f*	*f*
f	*f*	*v*	*v*	*f*	*f*	*f*	*f*
f	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*

Un caso particolare di proprietà distributiva si ha quando uno dei termini tra parentesi è lo stesso che apre la proposizione:
$p \wedge (p \vee r) = (p \wedge p) \vee (p \wedge r) = p \vee (p \wedge r)$ [2]
Inoltre poiché $p = p \vee f$ si ha che $p \wedge (p \vee r) = (p \vee f) \wedge (p \vee r) = p \vee (f \wedge r) = p \vee f = p$
Questa proprietà $p \wedge (p \vee r) = p \vee (p \wedge r) = p$ è detta *ridondanza di un termine* ed è utile per la semplificazione di molte espressioni.

1.4.2. Leggi di De Morgan

Le leggi di De Morgan consentono di collegare tra loro la congiunzione e la disgiunzione attraverso la negazione e corrispondono a ben note proprietà applicate anche nel linguaggio ordinario.
La I legge afferma che la negazione dei congiunti equivale alla disgiunzione dei negati, mentre la seconda che la negazione dei disgiunti equivale alla congiunzione dei negati. Esse possono essere dimostrate direttamente con le tabelle di verità.

I legge di De Morgan $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$
II legge di De Morgan $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

Le leggi di De Morgan sono particolarmente importanti dal punto di vista teorico perché dimostrano che la congiunzione e la disgiunzione sono intercambiabili (cioè si può sempre sostituire una congiunzione attraverso negazione e disgiunzione, etc).
In effetti, usando la doppia negazione si ha che $p\vee q = \neg\,[\neg\,(p\vee q)] = \neg\,(\neg p \wedge \neg q)$ e lo stesso si può fare per eliminare la congiunzione.

[2] Sono state usate la proprietà distributiva e la idempotenza

1.5. Implicazione o condizionale materiale →

La implicazione (se *p* allora *q*) è certamente il connettivo logico più importante perché è quello normalmente usato per trarre *conclusioni* (*q*) da determinate *premesse* (*p*).
Diciamo subito che, nella logica delle proposizioni, non bisogna cercare una qualche connessione tra *p* e *q* insita al loro interno; la connessione è creata dal connettivo e deve avere un significato indipendente da *p* e *q* e legato solo ai loro valori di verità come per tutti gli altri connettivi.
Come per tutti gli altri connettivi il significato sta nella tabella di verità e, in questo caso, richiamandosi al fatto che la implicazione significa che *se le premesse sono vere non può accadere che le conseguenze siano false*, si assegna valore falso al caso vero-falso e vero a tutti gli altri casi (vedi tabella)

p	q	p→q
v	*v*	*v*
v	*f*	*f*
f	*v*	*v*
f	*f*	*v*

Simbolo: $p \to q$, $p \Rightarrow q$ (poco preciso perché $\Rightarrow$ ha un significato di tipo diverso anche se associato ad esso come vedremo)
Lettura: se *p* allora *q*, *p* implica *q*
Proprietà:

non è commutativa	$p \to q \neq q \to p$
non è associativa	$(p \to q) \to r \neq p \to (q \to r)$
sostituzione con $\vee$	$p \to q = \neg p \vee q$
sostituzione con $\wedge$	$p \to q = \neg(p \wedge \neg q)$
identità del contronominale	$p \to q = \neg q \to \neg p$

Osservazioni:
- se la premessa è falsa la proposizione composta è sempre vera e pertanto le due proposizioni "se 2 + 2 fa 4 allora gli asini volano" e "se 2 + 2 fa 4 allora gli asini non volano" sono entrambe vere
- la sostituzione con il prodotto e la somma consente di semplificare espressioni con ragionamenti complessi ed arrivare rapidamente alle conclusioni (si vedano gli esempi svolti). Si cerchi di riflettere sul significato della sostituzione con $\wedge$.
- tutte le proprietà citate per il condizionale sono di importanza capitale e devono essere conosciute come sinonimi di esso. La dimostrazione di queste proprietà si esegue con le tabelle di verità tranne la sostituzione con $\wedge$ che si può anche ottenere dalla precedente mediante le leggi di De Morgan.
- Attenzione a non confondere il condizionale con la congiunzione: nella congiunzione la proposizione è vera solo quando sia *p* sia *q* sono veri mentre il condizionale ci dice qualcosa di diverso: è falso solo quando la conclusione è falsa e la premessa è vera.

Esempio:
dimostrare che l'implicazione non è associativa utilizzando le tabelle di verità

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \to q$	$(p \to q) \to r$
v	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*
v	*v*	*f*	*f*	*f*	*v*	*f*
v	*f*	*v*	*v*	*v*	*f*	*v*
v	*f*	*f*	*v*	*v*	*f*	*v*
f	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*
f	*v*	*f*	*f*	*v*	*v*	*f*
f	*f*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*
f	*f*	*f*	*v*	*v*	*v*	*f*

Come si vede c'è una differenza sulla sesta e sull'ottava riga che rende diverse le due proposizioni.

1.6. Doppia implicazione o bicondizionale

La doppia implicazione (*p* se e solo se *q*) è il connettivo costruito pensando alla bidirezionalità della implicazione cioè al fatto che *p* segua da *q* e viceversa. Pertanto si fa in modo che la proposizione composta sia vera quando le due componenti sono contemporaneamente vere o contemporaneamente false.

p	q	p↔q
v	*v*	*v*
v	*f*	*f*
f	*v*	*f*
f	*f*	*v*

Simbolo: $p \to q$, $p \Leftrightarrow q$ (poco preciso perché $\Leftrightarrow$ ha un significato di tipo diverso anche se associato ad esso come vedremo)
Lettura: *p* se e solo se q, se *p* allora *q* e viceversa, *p* soltanto se *q*
Proprietà: commutativa $p \leftrightarrow q = q \leftrightarrow p$
implicazione nei due sensi $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$
transitiva $p \leftrightarrow q = (p \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow q)$
Osservazioni:
- la doppia implicazione è un connettivo particolarmente importante perché su di esso si basa la relazione di equivalenza tra proposizioni: due proposizioni equivalenti hanno la stessa tabella di verità e pertanto la proposizione composta ottenuta mediante $\leftrightarrow$ è sempre vera e viceversa

1.7. Altri connettivi

Poiché definire un connettivo equivale a definire una colonna di quattro posti con simboli scelti tra *v* e *f* le possibilità sono $(2)^4 = 16$ e pertanto, astrattamente si potrebbero costruire 16 connettivi binari (cioè che agiscono su 2 proposizioni).
Come occasione di riflessione li enumeriamo qui di seguito limitandoci a segnalare *xor* (detto anche o*r* esclusivo o *aut aut*: "o mangia sta minestra o salta dalla finestra"). Il lettore si eserciti a scrivere la parentela con i simboli già definiti.

p	*q*		∨			→		↔	∧		xor						
v	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*
v	*f*	*v*	*v*	*v*	*v*	*f*	*f*	*f*	*f*	*v*	*v*	*v*	*v*	*f*	*f*	*f*	*f*
f	*v*	*v*	*v*	*f*	*f*	*v*	*v*	*f*	*f*	*v*	*v*	*f*	*f*	*v*	*v*	*f*	*f*
f	*f*	*v*	*f*	*v*	*f*	*v*	*f*	*v*	*f*	*v*	*f*	*v*	*f*	*v*	*f*	*v*	*f*

Esistono alcuni connettivi che falsano l'analisi vero funzionale per esempio *perché* e i suoi sinonimi *giacché*, *poiché* e *pertanto* (da usare invertendo l'ordine).
Il malato ha bisogno di un antibiotico perché ha la polmonite è equivalente a *Il malato ha la polmonite e pertanto ha bisogno di un antibiotico* ci fa vedere bene che *perché* non è sostituibile con *e* come si fa con *ma* e con *benché*. Infatti esistono dei casi in cui sostituendo pertanto con e la proposizione diviene vera e altri casi in cui diventa falsa.
Consideriamo queste proposizioni: *il sole tramonta e la terra gira*; *il sole tramonta perché la terra gira* e *la terra gira pertanto il sole tramonta*. Data la prima se si sostituisce e con perché si ottiene una proposizione vera, ma se si commuta e si sostituisce pertanto si ottiene una proposizione falsa

1.8. Il teorema di Boole

Pe*r* determinare la tabella di verità di una proposizione composta basta sostituire al posto delle variabili i diversi valori di vero e falso che possono assumere ed applicare le definizioni delle diverse operazioni. Questa operazione di pura e semplice sostituzione è chiamata **analisi** di una proposizione ed è tutto sommato semplice da realizzare.

Pe*r* esempio se $u = p\,\overline{q} \vee \overline{rs}$ e si vuol conoscere il valore di verità quando $p= v,\ q= f,\ r=v,\ s=v$ si ha: $u = p\,\overline{q} \vee \overline{rs} = vv \vee \overline{vv} = v \vee f = v$

Più complesso è il problema di determinare la espressione che corrisponde ad una data tabella di verità. Questa operazione è detta *sintesi di una espressione logica* e può essere risolta utilizzando un metodo che consiste nello scrivere una somma di prodotti che siano veri in un solo caso.

Poichè il prodotto logico è vero solo in un caso (quando tutti i fattori sono veri) qualunque colonna può essere riprodotta come disgiunzione di congiunzioni (somma di prodotti). Basta scrivere tutti i prodotti a cui corrispondono i valori *v* e poi sommarli. Questi prodotti si ottengono usando come fattori la variabile che vale *v* e la sua negazione quando essa vale *f*.

Per esempio il prodotto $pq\overline{r}$ è vero solo quando *p* e *q* sono vere e *r* è falsa.

Supponiamo di voler costruire la proposizione con tre variabili avente la tabella di verità qui di fianco indicata con ?:

Dobbiamo produrre una espressione che vale vero in corrispondenza delle righe 1, 2 e 8 e lo faremo scrivendo 3 monomi (prodotti di variabili) che valgono vero solo in corrispondenza dei valori delle righe 1,2 e 8. Sommando tali monomi otteremo la proposizione richiesta:

$? = pqr \vee pq\overline{r} \vee \overline{p}\ \overline{q}\ \overline{r}$

Osserviamo infine che, ragionando sui falsi, invece che sui veri si possono scrivere i connettivi come prodotto di somme. Per esempio nella tabella dei connettivi binari la sesta colonna si può anche scrivere $(p+\overline{q})(\overline{p}+\overline{q})$. L'espressione trovata può essere semplificata usando le proprietà formali delle operazioni.

1.9. Esercizi

1.9.1.1. Le seguenti frasi rappresentano proposizioni composte. Individuare le proposizioni componenti e scrivere la corrispondente proposizione in forma simbolica.

Ci sarà un futuro migliore, oppure no

p = "ci sarà un futuro migliore" *q* = "non ci sarà un futuro migliore" = $\overline{p}$. La frase composta si scrive $p \vee \overline{p}$ ed è sempre vera.

O non mi hai spedito il libro o si è smarrito alle poste

Se viene Luigi non vado io

Nè Napoleone, né Hitle*r* riuscirono ad invadere l'Inghilterra

Nel caso in cui nè Luigi nè Maria dovessero andare allora verrà Marco

Non vi abbiamo chiesto di aiutarci, e nemmeno lo desideriamo

Il discorso di Berlusconi sarà trasmesso da Retequattro o dalla Rai

Nè Platone nè Aristotile erano degli empiristi

Quando il volume di un gas diminuisce, la pressione aumenta

Solo ascoltando una gran quantità di pareri possiamo formarci una opinione veritiera

1.9.1.2. Esercitarsi a inventare una rappresentazione delle diverse colonne della tabella dei connettivi binari utilizzando o la somma dei prodotti o il prodotto di somme e cercare in particolare una rappresentazione per la prima e per l'ultima.

1.9.1.3. Semplificare le seguenti proposizioni riducendole a somme e prodotti

1) $(a \vee \neg c) \wedge \neg b$ 2) $a \to (b \to c)$ 3) $(a \wedge c) \to b$ 4) $\neg((a \vee b) \to c)$

5) $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c)$ 6) $a \to \neg(b \wedge c)$ 7) $a \leftrightarrow (a \to b)$

8) $\neg(a \to (a \to \neg b))$

1.9.1.4. Trasformare in simboli, semplificare e riformulare la conclusione

Non si può avere la botte piena e la moglie ubriaca

p = "Si può avere la botte piena" *q* = "Si può avere la moglie ubriaca" la frase composta si scrive $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ e si legge "o non hai la botte piena o non hai la moglie ubriaca"

Non è vero che la logica sia arida e non appassionante

Se una persona non ha opinioni preconcette dovrà riconoscere il

p	**q**	**r**	**?**
v	*v*	*v*	*v*
v	*v*	*f*	*v*
v	*f*	*v*	*f*
v	*f*	*f*	*f*
f	*v*	*v*	*f*
f	*v*	*f*	*f*
f	*f*	*v*	*f*
f	*f*	*f*	*v*

vantaggio di una educazione laica
Se non avete contanti, nè potete farvi fare un prestito non potrete acquistare una automobile
O non c'è nulla di nuovo sotto il sole oppure sia Einstein sia Copernico sono stati degli innovatori
Se il silenzio non è d'oro allora la radio è sia un amico dei solitari sia un nemico dei solitari
Non si dà il caso che Cleopatra sia vissuta nel 1938 e che non fosse sposata nè a Mussolini nè ad Hitler
Se Giovanni deve conoscere il Greco per comprendere Platone, allora non comprenderà Platone. Inoltre se Giovanni conosce il Greco allora comprenderà Platone

2. Identità, Tautologie e contraddizioni

Mentre di solito una proposizione composta può essere vera o falsa a seconda dei valori delle proposizioni componenti, esistono delle particolari proposizioni composte sempre vere (dette *tautologie*) e sempre false (dette *contraddizioni*). Le indicheremo pertanto direttamente con *v* e *f*.
La loro importanza sta nel fatto che quando due gruppi di proposizioni sono equivalenti (cioè hanno la stessa tabella di verità) sono sempre contemporaneamente vere o false e pertanto se vengono connesse con un bicondizionale si ottiene una tautologia e viceversa.
Le tautologie sono anche dette (usando la terminologia di Kant) *proposizioni analitiche*, e le proposizioni che possono essere sia vere, sia false *proposizioni sintetiche*
Accanto alle numerose identità già segnalate in corrispondenza della definizione dei diversi connettivi diamo infine una raccolta di altre identità e tautologie particolarmente utili nei processi di deduzione. La dimostrazione può essere data per esercizio sia con le tabelle di verità, sia attraverso l'uso di proprietà precedenti. Per l'importanza pratica segnaliamo in particolare la *ridondanza di un termine* che consente di semplificare espressioni complesse.

2.1. Identità

$a \to \neg a = \neg a$	riduzione all'assurdo
$a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a$	ridondanza di un termine
$a \vee (\neg a \wedge b) = a \vee b$	ridondanza di una negazione
$a \to (b \to c) = b \to (a \to c) = (a \wedge b) \to c$	simmetria delle premesse
$(a \to b) \wedge (a \to c) = a \to (b \wedge c)$	fusione di implicazioni
$(a \to c) \wedge (b \to c) = (a \vee b) \to c$	fusione di implicazioni
$(a \to b) \vee (a \to c) = a \to (b \vee c)$	fusione di implicazioni
$(a \to c) \vee (b \to c) = (a \wedge b) \to c$	fusione di implicazioni

2.2. Tautologie

$a \to (a \vee b)$	addizione di un termine arbitrario
$(a \wedge b) \to a$	implicazione da entrambi *a* qualcuno
$a \to (b \to a)$	aggiunta di una implicazione
$\neg a \to (a \to b)$	aggiunta di una implicazione
$[a \wedge (a \to b)] \to b$	implicazione inferenziale
$[(a \to b) \wedge (c \to \mathrm{d})] \to [(a \wedge c) \to (b \wedge \mathrm{d})]$	fusione di implicazioni
$[(a \to b) \wedge (c \to \mathrm{d})] \to [(a \vee c) \to (b \vee \mathrm{d})]$	fusione di implicazioni

2.3. Esercizi

2.3.1. Uso delle proprietà logiche per trarre conclusioni

2.3.1.1. Esercizio svolto sul prodotto

Si conoscono le due seguenti premesse: la proposizione p≡{se A ha studiato logica allora B ha studiato logica} è vera; la proposizione q≡{se C ha studiato logica allora B ha studiato logica} è falsa. Chi ha studiato logica tra A, B e C?

☹

indichiamo con *a*, *b*, *c* le proposizioni *a* = "A ha studiato logica", ...

In base ai dati $\mathrm{p}\,\overline{\mathrm{q}} = v$ perciò $v = \mathrm{p}\,\overline{\mathrm{q}} = (\mathrm{a}\to\mathrm{b})\,\overline{(\mathrm{c}\to\mathrm{b})} = (\overline{\mathrm{a}}+\mathrm{b})\,\overline{(\overline{\mathrm{c}}+\mathrm{b})} = (\overline{\mathrm{a}}+\mathrm{b})(\mathrm{c}\,\overline{\mathrm{b}}) = \overline{\mathrm{a}}\,\mathrm{c}\,\overline{\mathrm{b}} + \mathrm{b}\mathrm{c}\,\overline{\mathrm{b}} = \overline{\mathrm{a}}\,\mathrm{c}\,\overline{\mathrm{b}} + f = \overline{\mathrm{a}}\,\mathrm{c}\,\overline{\mathrm{b}}$ e pertanto dovrà essere a = *f*, b = *f* e c = *v* cioè la logica è stata studiata dallo studente C

☺

2.3.1.2. Esercizio svolto sul prodotto

Tre rapinatori A, B e C compiono una rapina e poi fuggono con un'auto che li attendeva. All'inchiesta A sostiene di essere fuggito con una Lancia blu; B con una Fiat nera; C con una Ford sicuramente non blu. Si sa che ciascuno di essi ha fatto una affermazione vera ed una falsa. Identificare le caratteristiche dell'automobile.

☹

Incominciamo identificando le proposizioni:

$p \equiv$ {l'auto è una Lancia} $q \equiv$ {l'auto è blu} $r \equiv$ {l'auto è una Fiat}

$s \equiv$ {l'auto è nera} $t \equiv$ {l'auto è una Ford}

In base ai dati si può affermare che $p + q = v$; $r + s = v$; $t + \overline{q} = v$ e che $pr = f$, $qs = f$, $pt = f$,....

Poiché le tre proposizioni sono vere lo è anche il loro prodotto e pertanto:

$v = (p + q)(r + s)(t + \overline{q}) = (pr + ps + qr + qs)(t + \overline{q}) = (f + ps + qr + f)(t + \overline{q}) = (ps + qr)(t + \overline{q}) = pst + ps\overline{q} + qrt + q\overline{q}r = f + ps\overline{q} + f + f = ps\overline{q}$ ne consegue che l'auto usata era una Lancia nera.

Come si vede da questo esempio nelle semplificazioni di proposizioni complesse si usano le proprietà distributive, le associative, le commutative, le identità e le proprietà di assorbimento che bisogna, pertanto, conoscere alla perfezione.

☺

2.3.1.3. Esercizio svolto sul prodotto

Dopo essere tornato a casa l'ispettore Maigret chiama in ufficio:

Sono Maigret, ci sono novità?

Sì capo, gli ispettori hanno preparato i loro rapporti:

Torrence pensa che se François era ubriaco allora o Etienne è l'assassino o François sta mentendo.

Justin è dell'opinione che o Etienne è l'assassino o François non era ubriaco e l'omicidio ha avuto luogo dopo la mezzanotte

Lucas mi ha detto di dirvi che se l'omicidio è avvenuto dopo la mezzanotte allora o Etienne è l'assassino o François sta mentendo

Grazie, mi basta. Il commissario riaggancia, tutto è chiaro perché lui sa che quando François è sobrio non mente.

Si considerino le seguenti proposizioni:

$a \equiv$ {François era ubriaco} $b \equiv$ {Etienne è l'assassino}

$c \equiv$ {François sta dicendo una bugia} $d \equiv$ {l'omicidio è avvenuto dopo la mezzanotte}

Si scrivano le dichiarazioni dei tre ispettori, si esegua il prodotto e lo si semplifichi. Cosa si deduce? Cosa può concludere Maigret?

☹

soluzione: Torrence $t = a \rightarrow (b+c)$ Justin $j = b + \overline{a}d$ Lucas: $l = d \Rightarrow (b+c)$

$P = v = tjl = [a \rightarrow (b+c)][b + \overline{a}d][d \rightarrow (b+c)] = [\overline{a} + b + c][b + \overline{a}d][\overline{d} + b + c] = [b + \overline{a}d][\overline{a}\overline{d} + b + c] = b + \overline{a}d[\overline{a}\overline{d} + c] = b + f + \overline{a}dc = b + \overline{a}dc$

(si è usata due volte la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto)

Sulla base dei rapporti degli ispettori si conclude che *o Etienne è l'assassino o (François non era ubriaco,François mente, l'omicidio è avvenuto dopo la mezzanotte)*

D'altra parte Maigret sa che $v = \overline{a} \rightarrow \overline{c} = \overline{c} + a$ e quindi per negazione $f = c\overline{a}$

Ne consegue che $\overline{a}dc = f$ e quindi $P = b = v$, cioè Etienne è l'assassino

☺

2.3.1.4. Esercizio da svolgere sul prodotto

Nel corso di una inchiesta relativa ad un delitto ci sono 3 imputati A, B e C e ciascuno fa due affermazioni:

io non sono stato; è stato C
C è innocente; è stato A
io non sono stato; B è innocente
Inoltre la corte ha appurato che uno ha sempre mentito, uno ha detto il vero e uno ha fatto una affermazione vera e una falsa. Chi è l'assassino?
soluzione: Il colpevole è C

2.3.1.5. Esercizio da svolgere sul prodotto

Una pubblica amministrazione deve assumere 6 specialisti: un biologo, un idrologo, un metereologo, un radiotecnico, un medico e un meccanico. Presentano la domanda in 8 e li indicheremo con A, B, C, D, E, F, G, H; inoltre i diversi concorrenti presentano alcune compatibilità e incompatibilità che vengono qui enumerate:

E e G sono biologi	B e F sono idrologi	F e G sono metereologi
C e D sono radiotecnici	C e H sono meccanici	A e D sono medici
F lavora sempre con B	D lavora sempre con H e con G	C non lavora con G
A non lavora con B		

Determinare chi viene assunto e in quale ruolo
soluzione: E biologo, B idrologo, C radiotecnico, D medico, F metereologo, H meccanico

2.3.1.6. Esercizio da svolgere sul prodotto

Si considerino le due seguenti definizioni di *semplicità di un test*:
A) Il test è semplice se almeno uno studente ha risolto almeno un test
B) Il test è semplice se almeno uno studente ha risolto tutti i problemi
Si chiede:
Lo stesso test può risultare semplice in base alla definizione A e difficile (non semplice) in base alla definizione B?
Lo stesso test può risultare semplice in base alla definizione B e difficile (non semplice) in base alla definizione A?

2.3.1.7. Determinare attraverso le tabelle di verità se le seguenti proposizioni sono analitiche, sintetiche o contraddittorie; svolgere lo stesso esercizio otilizzando le proprietà formali

$p \to \neg p$	$(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow (\neg p \to q)$	$p \wedge \neg(\neg(p \to q) \vee q)$
$(p \to q) \vee (q \to p)$	$(p \leftrightarrow q) \to (p \wedge \neg q)$	

3. Dalle proposizioni ai predicati

3.1. Funzioni proposizionali e teoria degli insiemi

Il paragrafo che segue e i successivi presuppongono la trattazione della teoria elementare degli insiemi: si considerano note la definizione di insieme in forma estensiva (denotativa) ed intensiva (connotativa), le operazioni insiemistiche e le loro proprietà che vengono dimostrate attraverso le leggi del calcolo delle proposizioni.
Nei ragionamenti matematici si incontrano spesso delle frasi od espressioni aventi la struttura di una proposizione, ma che non si possono chiamare tali a causa della presenza di una o più variabili non specificate che non consentono di stabilire se la frase sia vera oppure falsa.
Esempi: n è un numero primo; n è un numero pari; $x>0$; $2x+3=5$
Chiameremo queste espressioni *funzioni proposizionali* e le indicheremo con una lettera maiuscola seguita dalla variabile, o dalle variabili, messe tra parentesi.
Di solito la variabile considerata ha senso in relazione ad un insieme all'interno del quale prende i suoi valori (insieme universale). Per esempio la frase P(x) = "*x è un gatto*" può essere riferita all'insieme degli animali, oppure a quello dei quadrupedi di Monza, oppure a quello degli studenti di questa scuola.
L'insieme universale $\mathcal{U}$ viene così ad essere diviso in due sottoinsiemi, quello degli elementi per i quali la frase diventa vera e quello degli elementi per i quali la frase non è vera. Dunque una funzione proposizionale definisce implicitamente due insiemi: l'insieme degli elementi *x* per i quali P(x) è vera e il suo complementare.
Si crea così un legame tra le operazioni logiche sulle funzioni proposizionali e le operazioni della teoria degli insiemi

Logica delle funzioni proposizionali	$P(x)\wedge Q(x)$ congiunzione	$P(x)\vee Q(x)$ disgiunzione	$P(x)\rightarrow Q(x)$ implicazione	$\neg P(x)$ negazione
Teoria degli insiemi	$P\cap Q$ intersezione	$P\cup Q$ unione	$P\subseteq Q$ inclusione	$\overline{P}$ complementare

3.2. Quantificatore universale ed esistenziale

3.2.1. La definizione

In matematica ci sono due particolari situazioni in cui una funzione proposizionale si trasforma in una proposizione: il caso in cui l'insieme definito da P(x) coincide con $\mathcal{U}$, cioè quando P(x) è sempre vera, e il caso in cui P(x) è vera in qualche caso, cioè quando si vuole affermare che l'insieme definito da P(x) non è l'insieme vuoto ∅.
Per dire che *P(x) è vera per ogni x* si scrive *∀x, P(x)* e il simbolo ∀ è detto **quantificatore universale**.
Per dire che *P(x) è vera per qualche valore di x* si scrive *∃x, P(x)* e il simbolo ∃ è detto **quantificatore esistenziale**. Quando si vuol dire che esiste uno e un solo x in logica si scrive ∃!x che si legge *esiste ed è unico*.

3.2.2. Esempi e controesempi

Si osservi che c'è una notevole asimmetria tra ∀ e ∃. Per verificare che ∀x, P(x) è vera bisogna dare una dimostrazione che esamini tutti gli elementi dell'insieme universale considerato (e ciò può essere difficile, per esempio nel caso di insiemi infiniti). Per verificare che ¬(∀x, P(x)), basta trovare un valore particolare di x, chiamiamolo x' per il quale P(x') sia falsa. Tale valore è chiamato un *controesempio*.
Se per esempio affermo che *tutti i monzesi hanno la barba* mi basterà trovare un solo monzese senza barba per dire che la proposizione è falsa. Invece non mi basterà averne trovati 10 mila con la

barba per passare da 10 mila a tutti. L'esempio citato, in simboli, si scrive così: M(x)≡{*x è monzese*}; B(x) ≡{*x ha la barba*}; ∀x, M(x)→B(x) e, come si vede, corrisponde ad una proposizione categorica affermativa universale falsa (vedi dispensa sui sillogismi).

3.3. La negazione dei quantificatori

Affermare che *non è vero che "per ogni x, P(x) è vera",* equivale ad affermare che esiste almeno un x, chiamiamolo x' per cui P(x') è falsa.
In simboli si scriverà ¬ [∀x, P(x)] = ∃x, ¬P(x)
Analogamente ¬ [∃x, P(x)] = ∀x, ¬P(x)
Dunque, contrariamente a quanto si pensa di solito la negazione di *sempre* non è *mai*, ma piuttosto *qualche volta non* e la negazione di *qualche volta* è *sempre non*.
Se si nega ∃! può capitare sia che cada la unicità, sia che cada la esistenza (non è vero che esiste ed è unico, significa che l'elemento può non esistere oppure che ne esiste più di uno).
Si osservi che la traduzione logica di concetti anche semplici della matematica e del linguaggio comune utilizzando i quantificatori può portare abbastanza rapidamente a complicazioni. Per questa ragione vengono discussi alcuni esempi tratti da entrambi i campi:

3.4. Esempi di utilizzo dei quantificatori

- *p* ≡ {*Nell'insieme dei numeri naturali non esiste il massimo*}. Poiché il massimo è il numero più grande di qualsiasi altro numero dell'insieme dobbiamo dire che *non è vero che esiste un numero α tale che, preso un numero qualsiasi diverso da esso, tale numero sia sempre più piccolo* di α (attenzione: si nega che sia *sempre* più piccolo). Detto questo *p* diventa: ¬ [∃α, α∈ N | ∀x, x∈N ∧ x≠α ⇒ x > α]. Ricordando poi che la negazione del quantificatore esistenziale porta a quello universale si può anche dire così: *comunque io prenda un numero naturale ne trovo sempre un altro più grande di esso* e cioè: ∀x, x∈N ⇒ [∃x', x'∈N ∧ x'≠x | x'>x]
- Indichiamo rispettivamente con R(x) e C(x) le funzioni proposizionali *x è una ragazza* e *x è carina*. Consideriamo poi le seguenti quattro proposizioni e cerchiamo di capire cosa significano:

∀x, R(x) → C(x) tutte le ragazze sono carine	per tutti gli x se x è una ragazza allora x è carina	esclude che possano esistere ragazze non carine, lo si confronti con la terza riga
∃x, R(x) ∧ C(x) qualche ragazza è carina	esiste almeno un x per cui x è una ragazza e x è carina	esistono le ragazze carine; lo si confronti con la quarta riga per capire la differenza
∀x, R(x) ∧ C(x) l'insieme universale è fatto solo di ragazze carine	per tutti gli x x è una ragazza e x è carina	qualunque cosa è una ragazza ed è carina, anche i numeri
∃x, R(x) → C(x) = $\overline{\text{R(x)}}$ ∨ C(x)	esiste almeno un x tale che se x è una ragazza allora x è carina	basta che esista una non ragazza o qualcosa di carino perchè l'enunciato sia vero

- Indichiamo con R(x,y) una relazione tra due elementi x e y che leggeremo x è in relazione *R* con y (per esempio: x è il padre di y). Ci chiediamo cosa succede quando un quantificatore universale e uno esistenziale agiscono insieme. Sia per esempio A(x,y) la relazione *x ama y* e chiediamoci cosa significhino le due proposizioni seguenti:

∀x ∃y, A(x,y)	per ogni x esiste almeno un y tale che x ama y	ognuno ama qualcuno

$\exists x\ \forall y$, A(x,y)	esiste almeno un x tale che per ogni y, x ama y	qualcuno ama tutti

Come si vede il significato è nettamente differente e pertanto bisogna prestare molta attenzione alla non commutatività dei quantificatori. Nel linguaggio comune la situazione è poi ingarbugliata dall'utilizzo di formulazioni ambigue che vanno prima decodificate e poi formalizzate.

3.5. Teorema diretto, converso, opposto e contronominale

Le proposizioni della matematica, ma non solo della matematica, hanno molto spesso la forma $\forall x$, $A(x) \to B(x)$

- La proposizione *$\forall x$, A(x) è detta premessa o ipotesi*
- La proposizione *$\forall x$, B(x) è detta conclusione o tesi*
- La proposizione *$\forall x$, $A(x) \Rightarrow B(x)$ è detta teorema diretto* e sta a significare, in accordo con la definizione data di $\to$ che il teorema è sempre vero tranne quando le premesse sono vere e le conclusioni false.
- Sempre sul piano terminologico quando $A(x)\to B(x)$ è vera si dice che *A(x) è una condizione sufficiente per B(x)* (si vuol dire che non può accadere che A(x) sia vero e B(x) sia falso) e che *B(x) è una condizione necessaria per A(x)* (si vuol dire che B(x) non può essere falso senza che lo sia anche A(x) perché se A(x) fosse vero lo sarebbe anche B(x)).

Esempi

- *Se un quadrilatero è un rettangolo allora le diagonali del quadrilatero sono congruenti*: il nostro insieme universale è quello dei quadrilateri, $A(x)\equiv$\{il quadrilatero x è un rettangolo\} $B(x) \equiv$\{il quadrilatero x ha le diagonali congruenti\}. Osserviamo che, sia l'ipotesi, sia la tesi possono essere sia vere sia false (esistono sia quadrilateri rettangoli, sia quadrilateri non rettangoli; esistono quadrilateri con le diagonali congruenti e quadrilateri con le diagonali non congruenti). Quello che il teorema afferma è che se un quadrilatero è rettangolo allora sicuramente le sue diagonali sono congruenti o equivalentemente che se un quadrilatero ha le diagonali diverse non può essere un rettangolo perché in tal caso le sue diagonali sarebbero congruenti. In questo caso il teorema è vero e la sua dimostrazione si fa nel corso di geometria.
- *Se un parallelogrammo è un rombo allora il parallelogrammo ha le diagonali perpendicolari*

I due esempi citati sono interessanti perchè differiscono nella scelta dell'insieme universale e, per effetto di questa diversità accade che mentre il primo non si può rovesciare (esistono quadrilateri con le diagonali uguali che non sono rettangoli) il secondo sì (se un parallelogrammo ha le diagonali perpendicolari è sicuramente un rombo: esistono quadrilateri con le diagonali perpendicolari che non sono rombi, ma non sono nemmeno parallelogrammi). Dunque la validità di un teorema dipende fortemente dall'insieme universale nel quale viene enunciato

Occupiamoci ora della negazione e dello scambio di ipotesi e tesi: in totale si possono costruire 4 proposizioni:

teorema diretto $\forall x$, $A(x) \to B(x)$	**teorema converso o inverso** $\forall x$, $B(x) \to A(x)$
teorema opposto $\forall x$, $\neg A(x) \to \neg B(x)$	**teorema contrapposto o contronominale** $\forall x$, $\neg B(x) \to \neg A(x)$

Per quanto riguarda il diretto e il converso può accadere che siano entrambi veri come nel secondo dei due esempi, uno vero e l'altro falso come nel primo, o entrambi falsi (*se un parallelogrammo ha le diagonali uguali allora è un rombo)*

Esiste invece una equivalenza logica tra teorema diretto e teorema contrapposto, così come tra converso e opposto. Tale equivalenza deriva dalla equivalenza esistente nella logica delle

proposizioni ed è molto importante perché, molto spesso nelle diverse teorie matematiche, anche se si enuncia il teorema diretto si dimostra poi il contronominale ad esso equivalente.
Nella *dimostrazione per assurdo* si fa spesso vedere che dalla negazione della tesi segue la negazione della ipotesi (contronominale).

Quando sono veri contemporaneamente il teorema diretto e il converso la relazione tra le due funzioni proposizionali diventa del tipo *se e solo se*, P(x) diviene condizione sia necessaria, sia sufficiente per Q(x) e viceversa e si parla di *condizione necessaria e sufficiente.* In matematica capita di incontrare sia teoremi che hanno la forma di una condizione sufficiente ma non necessaria (si dice solo sufficiente), sia altri che corrispondono a condizioni necessarie e sufficienti.

4. L'inferenza e l'equivalenza

4.1. Come si traggono conclusioni

I ragionamenti non sono proposizioni, ma piuttosto discorsi sulle proposizioni (si dice che appartengono al *metalinguaggio* del linguaggio della logica delle proposizioni) che servono a stabilire quando sia lecito passare da una proposizione ad un'altra o sostituire una proposizione ad un'altra.

Chi abbia provato a risolvere una equazione algebrica o a dimostrare un teorema di geometria o, più banalmente a trarre una conclusione da una serie di affermazioni dovrebbe sapere di cosa si tratta.

Per esempio se si ha l'equazione (funzione proposizionale) $2x+3 = 0$ *e si dice che equivale a* $2x = -3$ si compie un ragionamento (la prima equivale alla seconda) relativo all'algebra e si intende dire che *tutte le volte in cui "2x+3 = 0" è vera lo è anche "2x = -3" e tutte le volte in cui "2x+3 = 0" è falsa lo è anche "2x = -3".*

Nei ragionamenti si procede molto spesso secondo una delle due seguenti modalità:

- **per equivalenza**: quando si può passare indifferentemente da a verso b e da b verso a (il che avviene quando $a \leftrightarrow b = v$
- **per inferenza**: quando con un ragionamento unidirezionale (cioè in un solo verso) si passa da a verso b (*infero* = porto dentro)

Nel primo caso si ragiona così: *se "a ↔ b" è vera e "a" è vera allora "b" è vera.* Nei testi di logica questo ragionamento è schematizzato così: $a \leftrightarrow b$; $a \Rightarrow b$. Il ragionamento può valere indifferentemente per a o per b. Altre volte le premesse vengono scritte una sopra l'altra e la conclusione sotto, separata da una linea orizzontale.

Nel secondo caso si ragiona così: *se "a → b" è vera e "a" è vera allora "b" è vera*. Questo ragionamento è detto *regola fondamentale dell'inferenza* ed è noto dalla logica classica come regola del *modus ponens.* In maniera simbolica si scrive $a \rightarrow b$; $a \Rightarrow b$

Ricordando che $a \rightarrow b = \neg b \rightarrow \neg a$ si può ricavare immediatamente la seconda regola dell'inferenza, detta regola del *modus tollens*: $a\rightarrow b$; $\neg b \Rightarrow \neg a$

I due casi citati non sono però gli unici tipi di ragionamento possibile: in generale per verificare che un ragionamento è corretto basta sostituire il simbolo di conclusione $\Rightarrow$ con la implicazione $\rightarrow$ e verificare se la proposizione che ne risulta sia analitica, cioè sia vera per qualsiasi valore assegnato alle variabili.

4.2. Esempio di deduzione di una conclusione

1 Il topo Tom viene liberato in un labirinto ed è affamato, quindi o Tom impara a cavarsela con il labirinto o impara a trovarsi del cibo.
2 Se Tom ha imparato a cavarsela con il labirinto allora sarà in grado di trovare del cibo
3 Ma Tom è stato messo nel labirinto e non ha trovato cibo

Conclusione: Tom non aveva fame

Dimostrazione della correttezza della conclusione con le regole di inferenza

a = "Tom viene messo in un labirinto" b = "Tom è affamato"
c = "Bill impara a cavarsela con il labirinto" d = "Bill è in grado di trovare del cibo"
1) $(a\wedge b)\rightarrow(c\vee d)$ 2) $c \rightarrow d$ 3.1) a 3.2) $\neg d$

$\neg c$	per la contronominale della 2 e il modus ponens con 3.2
$\neg(a\wedge b)$	per la contronominale della 1 e per il modus ponens
$\neg a \vee \neg b$	per le leggi di DeMorgan
$\neg b$	per sostituzione di $\neg a$

Quindi *Tom non aveva fame*

Soluzione con il metodo del prodotto

Si scrivono le 4 premesse (assunte come vere) considerando vero il loro prodotto, si semplifica la espressione e si dovrebbe arrivare a $a \wedge \neg b = v$. Usiamo, per esigenze di velocità i simboli di somma e prodotto e ricordiamo che useremo la equivalenza della implicazione, le leggi di De Morgan, le proprietà distributive e quelle di assorbimento. Ricordiamo infine che a= v e d= f

$P = v = [ab \Rightarrow (c+d)](c \Rightarrow d)a\overline{d} = [\overline{ab} + (c+d)](\overline{c} + d)a\overline{d} = [\overline{a} + \overline{b} + c + d](\overline{c}\,a\,\overline{d} + da\overline{d}) = [\overline{b} + c]\overline{c} = \overline{b}\,\overline{c}$, ma dalla 2 se d = f anche c = f e perciò $P = \overline{b}\,v = \overline{b}$

4.3. Esercizi

4.3.1.1. Per ciascuno dei teoremi seguenti formulare il converso, l'opposto e il contronominale, indicare inoltre quali teoremi sono veri:

Se un cerchio si può inscrivere in un quadrilatero, allora il quadrilatero è un rombo

Se un parallelogrammo è un rettangolo, allora il parallelogrammo è circoscrivibile

Se un poligono è un quadrilatero, allora la somma degli angoli interni del poligono è 360°

4.3.1.2. Dato il teorema: in ogni quadrilatero, che non sia un rettangolo, le diagonali non sono congruenti, formulare il converso, l'opposto e il contronominale e dire quali sono veri.

4.3.1.3. Inserire al posto dei .... una delle seguenti frasi 1) è necessario e sufficiente 2) è necessario ma non sufficiente 3) è sufficiente ma non necessario in modo di ottenere una proposizione vera

Per vincere un premio alla lotteria .... avere almeno un biglietto

Affinché la mediana di un triangolo sia pari alla metà del lato opposto ... che il triangolo sia rettangolo

4.3.1.4. Trovare una conclusione significativa dalle seguenti premesse:

- Bisogna imporre nuove tasse oppure non si potranno pagare le pensioni 2) Le pensioni sono state pagate
- Se Napoleone non si fosse ammalato durante la battaglia di Leipzig, egli avrebbe vinto la battaglia 2) Se Napoleone avesse vinto la battaglia di Leipzig, l'Europa Centrale sarebbe rimasta sotto il suo controllo 3) Se l'Europa Centrale fosse rimasta sotto il controllo di Napoleone, l'Europa continentale avrebbe stritolato economicamente l'Inghilterra 4) Se l'Inghilterra fosse stata stritolata economicamente non sarebbe riuscita a resistere alle armate napoleoniche 5) Se l'Inghilterra fosse stata conquistata dalle armate napoleoniche sarebbe stata posta sotto governo francese 6) Se l'Inghilterra fosse stata posta sotto governo francese avrebbe attuato il sistema metrico decimale 7) Se il sistema metrico decimale fosse stato introdotto in Inghilterra esso sarebbe ancora in uso.
- La mia macchina non parte 2) Se la mia macchina non parte il guasto può venire dalle candele sporche, dallo spinterogeno o dal carburatore sporco 3) Ho pulito le candele e la mia macchina non è partita
- Quando aumentano prezzi e salari c'è inflazione 2) Se c'è inflazione il governo dovrebbe dimettersi 3) Il governo è solido e quindi non intende dimettersi 4) I salari sono aumentati
- Se si mette del sale in acqua e si riscalda, se il sale si scioglie si tratta del sale A o del sale B 2) Se si tratta del sale A la fiamma si colorerà di rosso 3) Se si tratta del sale B la fiamma si colorerà di giallo 4) Si mette del sale in acqua, si riscalda e il sale si scioglie 5) Il sale fa una fiamma gialla