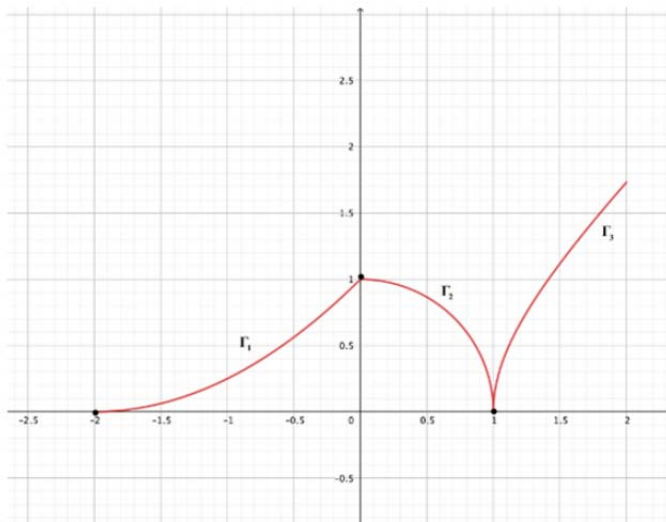


Problema 1

Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua $y=f(x)$, è unione dell'arco di parabola Γ_1 , dell'arco di circonferenza Γ_2 e dell'arco di iperbole Γ_3 .



a) Scrivere un'espressione analitica della funzione f definita a tratti nell'intervallo $[-2; 2]$, utilizzando le equazioni:

$y=a(x+2)^2$ $x^2+y^2+b=0$ $x^2-y^2+c=0$ e individuare i valori opportuni per i parametri reali a, b, c .

Studiare la derivabilità della funzione f e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa

$x=-2$ $x=0$ $x=1$ $x=2$

b) A partire dal grafico della funzione f , dedurre quello della sua derivata f' e

individuare gli intervalli di concavità e convessità di $F(x)=\int_{-2}^x f(t)dt$

c) Si consideri la funzione $y=\frac{1}{4}(x+2)^2$, definita nell'intervallo $[-2; 0]$, di cui Γ_1 è il grafico rappresentativo.

Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h . Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.

d) Sia S la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico Γ_1 e gli assi cartesiani.

Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x=k$ divida S in due regioni equivalenti.

soluzione

Punto a)

Γ_1 passa per $(0,1)$ e dunque $1=4a \Rightarrow a=\frac{1}{4}$

Γ_2 ha raggio unitario e dunque $b=-1$

Γ_3 passa per $(1,0)$ e dunque $1+c=0 \Rightarrow c=-1$

La espressione analitica della funzione è pertanto:

$$y=\frac{1}{4}(x+2)^2 \text{ in } [-2,0] \mid y=\sqrt{1-x^2} \text{ in } [0,1] \mid y=\sqrt{x^2-1} \text{ in } [1,2]$$

La funzione è derivabile ovunque tranne in $x=0$ dove presenta un punto angoloso e in $x=1$ dove presenta una cuspide. Le espressioni delle funzioni derivata sono rispettivamente:

$$y' = \frac{1}{2}(x+2) \mid y' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mid y' = \frac{1}{2}(x^2-1)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

In $x = -2$ si ha tangente orizzontale (vertice della parabola) di equazione $y = 0$

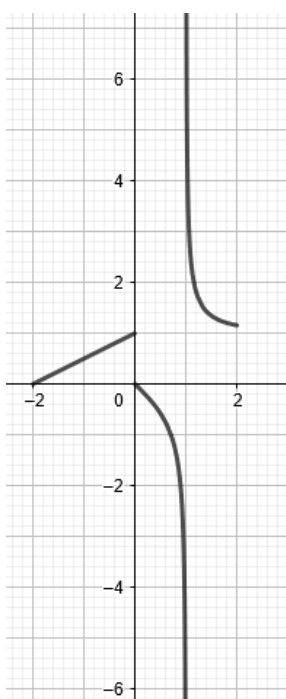
In $x = 0$ esistono la tangente a sinistra e a destra di coefficienti angolari rispettivamente

$f'(0^-) = 1 \mid f'(0^+) = 0$ e dunque le tangenti hanno equazione $y = x + 1$ e $y = 1$

in $x = 1$ le tangenti sono verticali e hanno equazione $x = 1$ come ci confermano i limiti sinistro e destro della derivata prima:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \left(\frac{-1}{0^+} \right) = -\infty \mid \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \left(\frac{1}{0^+} \right) = +\infty$$

Punto b



Nel primo tratto si tratta di una retta; nel secondo tratto la derivata (inclinazione della retta tangente) parte da zero e decresce con un asintoto verticale in $x = 1$; nel terzo tratto si parte con un asintoto verticale $(+\infty)$ e poi la derivata decresce con regolarità sino ad assumere valore $\frac{2}{\sqrt{3}}$ nel punto 2

Per individuare la convessità di $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$ basta osservare che la sua

derivata prima è $f(x)$ e dunque la derivata seconda è $f'(x)$

Ne consegue alla luce del diagramma appena riportato che:

In $[-2, 0]$ essendo $f'(x)$ positiva $F(x)$ è concava verso l'alto

In $[0, 1]$ $f'(x)$ è negativa e dunque $F(x)$ è concava verso il basso

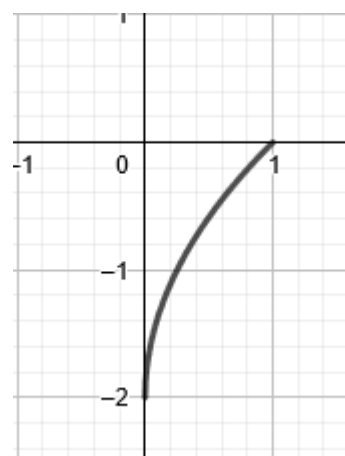
In $[1, 2]$ $f'(x)$ è positiva e dunque $F(x)$ è concava verso l'alto

Punto c

Γ_1 è un arco di parabola, funzione monotona crescente (biunivoca) e dunque invertibile

Da $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$ segue (nell'intervallo dato) $x+2 = \sqrt{4y} \Rightarrow x = 2\sqrt{y} - 2$ e ad assi

invertiti $y = 2\sqrt{x} - 2$ in $[0, 1]$ che presenta tangente verticale in $x = 0$ (diagramma di una funzione potenza con esponente $\frac{1}{2}$ sottoposta ad un cambiamento di scala e traslazione.



Punto d

$$\text{Dovrà essere } \int_k^0 \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 \frac{1}{4}(x+2)^2 dx \quad (1)$$

$$G(x) = \int \frac{1}{4} (x+2)^2 dx = \frac{1}{4} \frac{(x+2)^3}{3} + \text{cost} = \frac{1}{12} (x+2)^3 + \text{cost}$$

E applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale $\Rightarrow$

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{4} (x+2)^2 dx = G(0) - G(-2) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\int_k^0 \frac{1}{4} (x+2)^2 dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{12} (k+2)^3$$

Applicando la relazione (1) si ottiene: $\frac{2}{3} - \frac{1}{12} (k+2)^3 = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \Rightarrow 2 - \frac{1}{4} (k+2)^3 = 1 \Rightarrow (k+2)^3 = 4 \Rightarrow k = \sqrt[3]{4} - 2 \sim -0.41$

Osservazioni

- Assolutamente standard e senza difficoltà di alcun tipo: proprietà di curve ben note, tecniche di derivazione
- Significato geometrico della derivata: in terza liceo, nel corso di fisica facevo tracciare i diagrammi qualitativi velocità-tempo a partire dalla legge oraria e, in qualche anno di PNI lo facevo fare in prima. Concavità e convessità con la derivata seconda, anche senza grandi richiami ai teoremi di analisi, ci si arriva con il significato geometrico della derivata
- Inversione di una funzione e diagramma della funzione inversa: argomento che svolgevo in terza quando si introducono le funzioni.
- Integrale indefinito e definito con integrazione di funzioni potenza. Il minimo sindacale

Problema molto semplice e senza guizzi particolari

Problema 2

Fissato un parametro reale a , con $a \neq 0$, si consideri la funzione f_a così definita: $f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$ il cui grafico sarà indicato con Ω_a .

- Al variare del parametro a , determinare il dominio di f_a , studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.
- Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici Ω_a intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.
- Al variare di $a < 1$, individuare gli intervalli di monotonia della funzione f_a . Studiare la funzione $f_{-1}(x)$ e tracciarne il grafico Ω_{-1} .
- Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico Ω_{-1} , la retta ad esso tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$.

soluzione

Punto a

Si tratta di una funzione razionale fratta e si deve pertanto escludere l'annullamento del denominatore.

$\mathcal{D}: x^2 - a \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq a$ Si presentano due possibilità:

$$a < 0 \quad \forall x \mid a > 0 \quad x \neq \pm\sqrt{a}$$

Si tenga inoltre presente che come per tutte le razionali fratte bisognerà considerare la possibilità che numeratore e denominatore presentino fattori comuni

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \frac{x(x-a)}{x^2 - a} \text{ e ciò può avvenire quando il denominatore è scomponibile in presenza di particolari}$$

$$\text{valori di } a \text{ perché in tal caso } f_a(x) = \frac{x(x-a)}{x^2 - a} = \frac{x(x-a)}{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})} \text{ e quando } a = 1 \text{ si semplifica per } x-1 \text{ e si ottiene } f_1(x)$$

$$= \frac{x}{x+1} \text{ con la ulteriore condizione } x \neq -1 \text{ dove la funzione non è definita ma il limite esiste finito e si tratta pertanto di una discontinuità eliminabile.}$$

Punto a.1

Se $a < 0$ la funzione è ovunque continua e derivabile con derivata continua (visto che è escluso l'annullamento del denominatore).

Inoltre per $x \rightarrow \pm\infty$ $f(x) \sim \frac{x^2}{x^2} = 1$ asintoto orizzontale (questa condizione si verifica per ogni valore di a).

Punto a.2

Se $a > 0$ dovremo studiare separatamente il caso $a = 1$ (vedi caso precedente)

Se $a > 0 \wedge a \neq 1$ la funzione è ovunque continua e derivabile ma, oltre all'asintoto orizzontale presenta due asintoti verticali di equazione $x = \pm\sqrt{a}$

Se $a = 1$, come detto sopra $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$ e $x \neq -1$. Si tratta di una iperbole equilatera traslata con asintoti paralleli agli assi.

Punto b

Per $a \neq 1$ come già visto l'asintoto orizzontale ha equazione $r: y = 1$

$\Omega_a \cap r$ mettiamo a sistema le due equazioni e otteniamo $1 = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} \Leftrightarrow x^2 - a = x^2 - ax \Leftrightarrow ax = a \Leftrightarrow x = 1$ (si ricordi che il caso $a = 0$ è escluso dal testo).

Dunque tutte le curve passano per il punto $(1, 1)$

$$f'_a(x) = \frac{(2x-a)(x^2-a) - (x^2-ax)2x}{(x^2-a)^2} = \frac{2x^3 - 2ax - ax^2 + a^2 - 2x^3 + 2ax^2}{(x^2-a)^2} = \frac{ax^2 - 2ax + a^2}{(x^2-a)^2} = \frac{a(x^2 - 2x + a)}{(x^2-a)^2}$$

Tutte le curve passano per $(0, 0)$ e $f'(0) = \frac{a^2}{a^2} = 1$ e dunque presentano nell'origine la stessa retta tangente di coefficiente angolare 1.

Punto c

Sia $a < 1$ e studiamo la monotonia attraverso il segno della derivata prima.

$$\frac{a(x^2 - 2x + a)}{(x^2 - a)^2} \geq 0 \Rightarrow a(x^2 - 2x + a) \geq 0 \text{ si tratta di un prodotto i cui fattori dovranno essere concordi (casi c1 e c2)}$$

Essendoci di mezzo un trinomio di II grado calcoliamo il discriminante:

$\Delta/4 = 1 - a \geq 0$ sempre vera per $a < 1$ dunque $x^2 - 2x + a$ è positivo per valori esterni all'intervallo delle radici della equazione associata $x = 1 \pm \sqrt{1 - a}$ e negativo per valori interni.

$$\text{c1) } a < 0 \wedge x^2 - 2x + a \leq 0$$

Riassumendo $1 - \sqrt{1 - a} < x < 1 + \sqrt{1 - a}$ la funzione ha derivata positiva e dunque è monotona crescente mentre per valori esterni è negativa e la funzione è monotona decrescente.

Ne consegue che per $x = 1 - \sqrt{1 - a}$ si ha un minimo relativo a tangente orizzontale e per $x = 1 + \sqrt{1 - a}$ si ha un massimo relativo a tangente orizzontale

$$\text{c2) } 0 < a < 1 \wedge x^2 - 2ax + a \geq 0$$

I punti critici sono i medesimi e la disequazione è vera per valori esterni all'intervallo delle radici e si ottengono risultati invertiti

Per $1 - \sqrt{1 - a} < x < 1 + \sqrt{1 - a}$ la funzione ha derivata negativa e dunque è monotona decrescente mentre per valori esterni è positiva e la funzione è monotona crescente.

Ne consegue che per $x = 1 - \sqrt{1 - a}$ si ha un massimo relativo a tangente orizzontale e per $x = 1 + \sqrt{1 - a}$ si ha un minimo relativo a tangente orizzontale

$$f_{-1}(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = \frac{x(x+1)}{x^2 + 1}$$

La funzione è definita sull'intero asse reale, presenta asintoto orizzontale di equazione $y = 1$; possiamo ulteriormente precisare che $x \rightarrow -\infty \rightarrow y \rightarrow 1^-$ mentre per $x \rightarrow +\infty \rightarrow y \rightarrow 1^+$.

Poiché il denominatore è sempre positivo la funzione ha il segno del numeratore (positiva per valori esterni) con zeri in $x = 0$ e $x = -1$

La monotonia è già stata studiata e ci limitiamo a riassumere i risultati

$$f_{-1}'(x) = \frac{-(x^2 - 2x - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{Massimo relativo in } x = 1 - \sqrt{2} \text{ e } x^2 = 3 - 2\sqrt{2} \text{ con } f(1 - \sqrt{2}) = \frac{3 - 2\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2} + 1} = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} \cong 0.21$$

$$\text{Minimo relativo in } x = 1 + \sqrt{2} \text{ e } x^2 = 3 + 2\sqrt{2} \text{ con } f(1 + \sqrt{2}) = \frac{3 + 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2} + 1} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} \cong 1.21$$

Il testo non precisa se occorra o meno lo studio dei flessi e della concavità. Eseguiamolo per completezza:

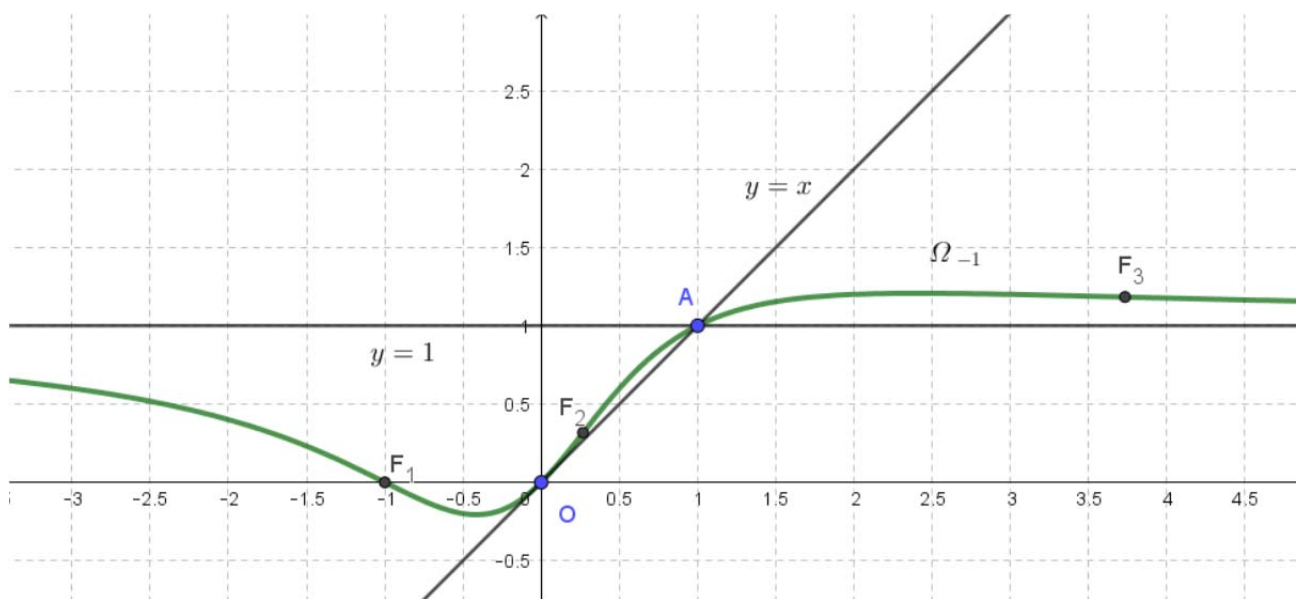
$$f_{-1}''(x) = \frac{(x^2+1)^2(-2x+2) - 2(x^2+1)2x(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)(-2x+2) - 4x(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^3} = 2 \frac{(x^2+1)(-x+1) - 2x(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^3} = 2 \frac{-x^3+x^2-x+1+2x^3-4x^2-2x}{(x^2+1)^3} = 2 \frac{x^3-3x^2-3x+1}{(x^2+1)^3} = 2 \frac{(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

(scomposizione eseguibile o con i prodotti notevoli o con il teorema di Ruffini).

Si hanno dei punti di flesso in $x = -1$ e $x = 2 \pm \sqrt{3}$ e la concavità e convessità sono imposte dalla monotonia e dagli asintoti senza appesantire la trattazione.

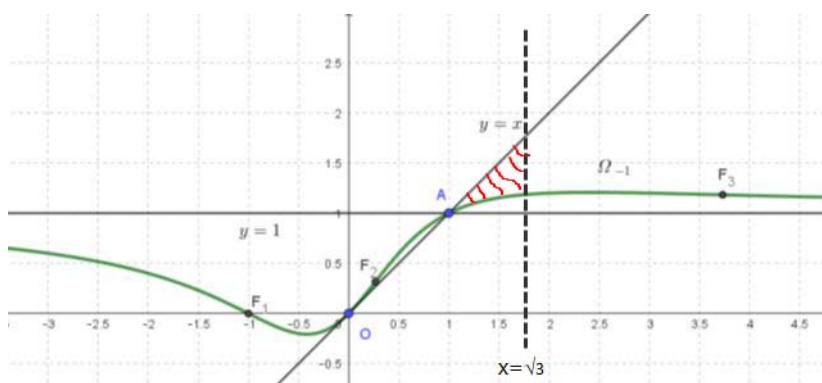
Per esercizio è possibile comunque per via elementare risolvere la disequazione tenendo conto che il denominatore è sempre positivo.

Ne risulta il seguente diagramma nel quale viene riportata anche la tangente nell'origine già determinata nei punti precedenti e l'asintoto orizzontale.



Punto d

Viene richiesta l'area della regione di piano compresa tra il diagramma, la retta tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$.



In realtà viene sottaciuto il fatto che la tangente per l'origine passa per il punto (1,1) della curva e dunque tale regione di piano è ben determinata.

Si tratta di determinare il valore di un integrale definito, quello della funzione differenza tra la curva superiore (la retta) e quella inferiore $f_{-1}(x)$.

L'area richiesta $\sigma = \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x^2+x}{x^2+1} \right) dx$ e dobbiamo pertanto calcolare il relativo integrale indefinito con la

tecnica classica che si usa per le razionali fratte con denominatore sempre positivo.

$$F(x) = \int \left(x - \frac{x^2+x}{x^2+1} \right) dx = \int \left(x - \frac{x^2+1-1+x}{x^2+1} \right) dx = \int \left(x - 1 + \frac{1-x}{x^2+1} \right) dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - x + \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$$

$$\sigma = F(\sqrt{3}) - F(1) = 3/2 - \sqrt{3} + \arctan(\sqrt{3}) - \frac{1}{2} \ln 4 - \left[\frac{1}{2} - 1 + \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln 2 \right] = 2 - \sqrt{3} + \pi/3 - \pi/4 - \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 2) = 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \ln 2 \cong 0.183$$

Osservazioni

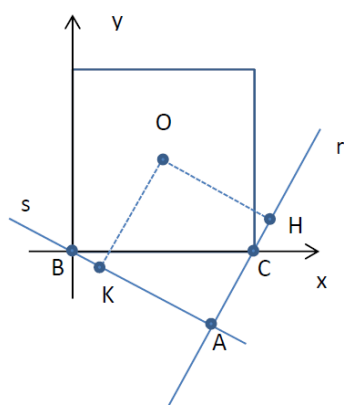
1. Problema di livello decisamente più alto del I e ciò può determinare problematiche in sede di valutazione basata su punteggi uguali per i due problemi
2. Sarebbe stato meglio chiedere in un solo punto di caratterizzare gli elementi essenziali della famiglia di curve senza spezzettare all'interno dei diversi punti
3. Nello studio di funzione richiesto non è precisato se si dovesse fare la determinazione dei flessi o bastasse fare un andamento della concavità in base agli asintoti e agli estremi
4. C'è nel testo una ambiguità circa la caratterizzazione della regione richiesta
5. L'integrale indefinito non è banale a meno che a lezione sia stata espressamente trattata la integrazione delle razionali fratte con denominatore di II grado.

Quesito 1

Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Sia O il centro del quadrato BCDE costruito sull'ipotenusa dalla parte opposta al vertice A. Dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC.

Soluzione

Sono possibili diverse soluzioni, dalla geometria sintetica, dalla geometria analitica, dalla trigonometria. Propongo la soluzione analitica.



Collochiamo un sistema ortonormale xBy con l'origine in B e l'asse x lungo l'ipotenusa BC = 2b

Il centro del quadrato avrà allora coordinate (b,b)

Indichiamo con r la retta su AC di coefficiente angolare m

$$r: y = m(x - 2b) \Leftrightarrow mx - y - 2mb = 0$$

La retta s collocata su BA avrà equazione:

$$s: y = -\frac{1}{m}x \Leftrightarrow x + my = 0$$

Come è noto la distanza tra un punto (x', y') del piano e la retta di

equazione $ax + by + c = 0$ è data dalla relazione $\frac{|ax' + by' + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ e dunque:

$$\overline{OK} = \text{dist}(s,O) = \frac{|b+mb|}{\sqrt{m^2+1}} = b \frac{|1+m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$OH = \text{dist}(r,O) = \frac{|mb - b - 2mb|}{\sqrt{m^2+1}} = b \frac{|1+m|}{\sqrt{m^2+1}} \text{ c.v.d.}$$

Osservazioni

Quesito risolubile con diverse metodologie, molto semplice anche la trattazione trigonometrica

Quesito 2

Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente:

- un numero primo
- un numero almeno pari a 3
- un numero al più pari a 3

Soluzione

Indichiamo con p la probabilità che esca una faccia dispari e con $2p$ quella della faccia pari. Poiché le facce sono 6 avremo che $3p + 3(2p) = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{9}$

- I numeri primi sulle facce sono 2, 3, 5 (un numero naturale ≥ 2 è primo solo se è divisibile per 1 e per sé stesso) e dunque $p(\text{primo}) = p(2) + p(3) + p(5) = 2 \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$
- I numeri pari almeno a 3 sono 3,4,5,6 e dunque $p(\geq 3) = \frac{1}{9} + 2 \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 2 \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$
- I numeri al più pari a 3 sono 1,2,3 e dunque $p(\leq 3) = \frac{1}{9} + 2 \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

Osservazioni

Quesito standard piuttosto semplice; eviterei nella formulazione frasi di dubbia interpretazione come almeno e al più

Quesito 3

Considerata la retta r passante per i due punti $A(1,-2,0)$ e $B(2,3,-1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1,-6,7)$ e tangente a r .

Soluzione

Nello spazio la retta r_{AP} passante per un punto dato $A(x',y',z')$ e parallela ad un vettore $\vec{v} \equiv (\alpha,\beta,\gamma)$ è determinata dalla condizione di proporzionalità tra il vettore $\vec{AP} \equiv (x-x',y-y',z-z')$ e il vettore $\vec{v}$, cioè $\vec{AP} = t \vec{v}$ dove t è un parametro libero.

La retta per due punti A e B si ottiene imponendo che il vettore $\vec{v}$ sia $\vec{AB}$

Nel nostro caso $\vec{AB} \equiv (1,5,-1)$ e dunque per la proporzionalità $r_{AB} : \begin{cases} x-1 = t \\ y+2=5t \\ z=-t \end{cases}$

Per determinare la sfera consideriamo il piano Γ ortogonale alla retta e passante per C. Dopo aver individuata la intersezione D tra il piano e la retta potremo scrivere l'equazione della sfera di raggio CD e centro C.

Il generico piano $\Gamma: ax + by + cz + d = 0$ con il vettore (a,b,c) caratterizza la direzione ortogonale al piano e in questo caso la direzione della retta $(1,5,-1)$ e dunque $\Gamma: x + 5y - z + d = 0$. Ma il punto C appartiene al piano e dunque:

$$1-30-7+d=0 \Rightarrow d=36 \text{ e dunque l'equazione del piano è } x + 5y - z + 36 = 0.$$

Se ora intersechiamo il piano con la retta otteniamo il punto D

$$(t+1) + 5(5t-2) + t + 36 = 0 \Leftrightarrow 27t + 27 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

$$D \equiv \begin{cases} x = t+1 = 0 \\ y = 5t-2 = -7 \\ z = -t = 1 \end{cases} \equiv (0,-7,1) \text{ mentre } C \equiv (1,-6,7)$$

$$\overline{CD}^2 = (1-0)^2 + (-6+7)^2 + (7-1)^2 = 38$$

E dunque l'equazione della sfera di centro C e raggio CD risulta:

$$(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = 38$$

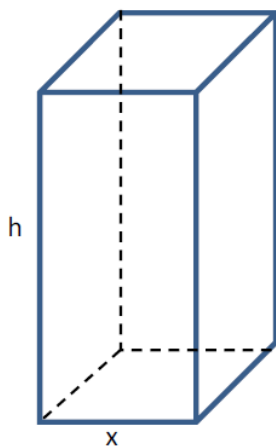
Osservazioni

Quesito per le classi dove si fa un'adeguata trattazione della geometria analitica a 3 dimensioni o meglio ancora degli spazi vettoriali.

Quesito 4

Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V , stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.

Soluzione



Il quesito, dal punto di vista tecnico, risulta più o meno complesso a seconda della scelta della variabile (meglio quelle a una dimensione) e indichiamo dunque con $x > 0$ il lato del quadrato.

L'altezza h del parallelepipedo sarà dunque $\frac{V}{x^2}$ mentre le superfici delle basi

saranno x^2 e delle facce laterali $hx = \frac{V}{x}$

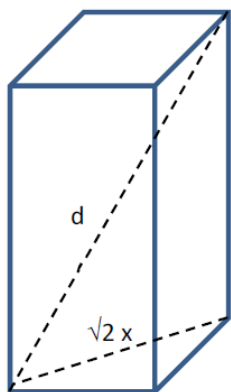
Se indichiamo con y la superficie totale essa sarà pari a:

$$y = 2x^2 + 4 \frac{V}{x} = 2\left(x^2 + 2 \frac{V}{x}\right)$$

$$y' = 2\left(2x - 2 \frac{V}{x^2}\right) = 4\left(x - \frac{V}{x^2}\right)$$

$y' \geq 0 \Leftrightarrow x - \frac{V}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - V}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{V}$ e in base al crescere e decrescere si ha un minimo relativo in $x =$

$\sqrt[3]{V}$ cioè quando il parallelepipedo si trasforma in un cubo. Poiché la funzione è continua decresce e poi cresce il minimo relativo è assoluto.



Per determinare la misura della diagonale osserviamo che si tratta della ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha come cateti la diagonale del quadrato e l'altezza.

Poiché si tratta di una quantità positiva studiamo direttamente d^2

$$y = d^2 = 2x^2 + \left(\frac{V}{x^2}\right)^2 = 2x^2 + \frac{V^2}{x^4} \quad y' = 4x - 4\frac{V^2}{x^5} = 4\frac{x^6 - V^2}{x^5}$$

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow x^6 - V^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{V}$$

dunque anche la diagonale è minima quando il parallelepipedo è un cubo.

Osservazioni

Quesito standard di massimo e minimo

Quesito 5

Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.

Soluzione

$$x_T = 3 \Rightarrow y_T = 4 \text{ e dunque } T \equiv (3, 4)$$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow f'(3) = \frac{-3}{4}$$

$$\text{pertanto la retta tangente } t \text{ ha equazione: } y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 9/4 + 4 = -\frac{3}{4}x + 25/4$$

La dizione secondo metodo è piuttosto ambigua, meglio sarebbe stato affermare “senza uso di strumenti di analisi matematica”.

In effetti la equazione data corrisponde alla porzione positiva di una semicirconferenza centrata nell'origine e di raggio 5.

Il coefficiente angolare del vettore $\vec{OT} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4/3$ e dunque il coefficiente angolare della tangente che è perpendicolare al raggio vale $-\frac{3}{4}$

$$\text{pertanto la retta tangente } t \text{ ha equazione: } y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 9/4 + 4 = -\frac{3}{4}x + 25/4$$

Osservazioni

Quesito assolutamente banale e standard con qualche difetto nella formulazione

Quesito 6

Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$

Soluzione

Si tratta di una forma di indecisione del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ e solitamente ne viene proposta la soluzione attraverso il teorema di De L'Hopital. Nei miei corsi io facevo utilizzare da subito i simboli di Landau di asintotico $\sim$ e di o piccolo o molto più efficaci e che introducevo insieme ai limiti notevoli. Alla occorrenza, come in questo caso si passava, nello sviluppo ai termini di grado superiore

$\frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} \sim \frac{x - x^3/6 + o(x^3) - ax^3 - bx}{x^3}$ Affinché questa espressione tenda a 1 occorre che si elida il termine in x da cui $(b=1)$ e che $-1/6 - a = 1$ da cui $a = -7/6$

Utilizzando il teorema di De L'Hopital si ha

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 3ax^2 - b}{3x^2}$ Affinché il limite sia 1 occorre che $1-b = 0$ e dunque $b=1$

Applichiamo nuovamente il teorema

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 3ax^2 - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 6ax}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x - 6a}{6} = \frac{-1 - 6a}{6} = 1 \Rightarrow -1 - 6a = 6 \Rightarrow a = -7/6$

Osservazioni

Credo che nei corsi liceali sia opportuno, anche per le implicazioni di Fisica sulle approssimazioni e sul loro ordine, introdurre prima possibile gli sviluppi in serie.

Quesito 7

Si consideri la funzione: $f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & \text{per } x < 0 \\ ax + b & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

Determinare per quali valori dei parametri reali a, b la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

Soluzione

Osserviamo in via preliminare che essendo $f(0) = b$ ed essendo $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ per garantire la continuità dovrà essere $b = -1$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{per } x < 0 \\ a & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$ per garantire la derivabilità dovrà essere $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = a$ e dunque $a = 1$

Il teorema di Rolle non è applicabile poiché essendo la derivata prima strettamente positiva la funzione è monotona crescente e dunque non esiste alcun intervallo $[a, b]$ in cui sia $f(a) = f(b)$

Osservazioni

Fare quesiti sul teorema di Rolle quando la cosa merita non quando è immediatamente nota la monotonia.

Quesito 8

Data la funzione $f_a(x)=x^5-5ax+a$, definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro $a>0$ la funzione possiede tre zeri reali distinti.

Si tratta di una funzione polinomiale di 5° grado continua e derivabile ovunque che presenta sicuramente almeno uno zero per effetto del comportamento all'infinito (va da $-\infty$ a $+\infty$).

Studiamone la monotonia attraverso la derivata prima

$$f'_a(x)=5x^4-5a = 5(x^4 - a) = 5(x^2 - \sqrt[4]{a})(x^2 + \sqrt[4]{a})$$

La derivata prima è positiva o nulla per $x^2 - \sqrt[4]{a} \geq 0$ e ciò si verifica per valori esterni all'intervallo delle radici $x = \pm \sqrt[4]{a}$

In $x = -\sqrt[4]{a}$ si ha un massimo con $f(-\sqrt[4]{a}) = -a\sqrt[4]{a} + 5a\sqrt[4]{a} + a = 4a\sqrt[4]{a} + a > 0$ ciò ci garantisce l'esistenza di uno zero della funzione (che viene da $-\infty$)

In $x = \sqrt[4]{a}$ si ha un minimo con $f(\sqrt[4]{a}) = a\sqrt[4]{a} - 5a\sqrt[4]{a} + a = -4a\sqrt[4]{a} + a$ e si avranno altri due zeri solo se la ordinata del minimo è negativa

$$-4a\sqrt[4]{a} + a < 0 \Leftrightarrow -4\sqrt[4]{a} + 1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{a} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow a > \frac{1}{256}$$

Osservazioni

Sicuramente il quesito più interessante per la necessità finale di verificare i valori delle ordinate.