

PROBLEMA 1

Assegnata la funzione: $f(x) = a \times \ln(x) - \frac{3}{2}x$

- determinare il valore del parametro reale a in modo che $f(x)$ abbia un punto di minimo assoluto in $x = \sqrt{e}$. Si studi la funzione ottenuta e se ne disegni il grafico. Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$.
- Si verifichi che esiste una sola retta tangente t alla curva di equazione $y = f(x)$, condotta dal punto $Q \equiv (0, -1)$. Determinare l'equazione di t e le coordinate del corrispondente punto di tangenza.
- Determinare i parametri reali h, k in modo che le curve di equazioni $y = f(x)$ e $y = \frac{x+h}{x+k}$ risultino tangenti nel loro punto comune di ascissa 1.
- Studiare la funzione $g(x) = \int_1^x f(t) dt$ dopo averne scritta l'espressione analitica. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel suo punto di ascissa $x = e$.

Soluzione

Punto a

Il dominio richiede che sia $x > 0$. Per la determinazione della condizione di minimo ci avvaliamo della condizione di annullamento della derivata prima verificando poi che si tratti di un minimo assoluto.

$$f'(x) = a \ln(x) + a \frac{x}{x} - \frac{3}{2} = a \ln(x) + a - \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3}{2a} - 1$$

$$f'(\sqrt{e}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{2a} - 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2a} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = 1$$

Verificheremo dallo studio della funzione che il punto a tangente orizzontale è un minimo assoluto.

La funzione da studiare è $y = x \ln(x) - \frac{3}{2}x$ e la sua derivata prima $y' = \ln(x) - \frac{1}{2}$

- Dominio e limiti agli estremi

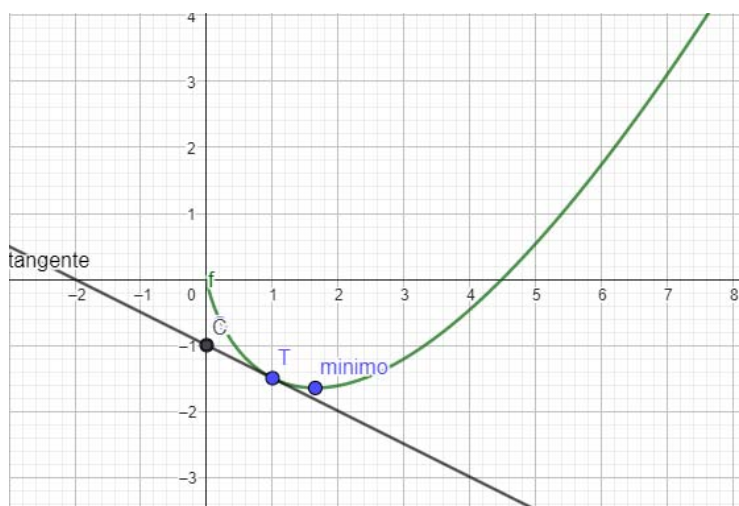
$$D = \{x \mid x > 0\}$$

$x \rightarrow 0^+$ abbiamo la forma di indecisione $(0 \cdot \infty)$ che porta a 0^- tenendo conto delle considerazioni sui gradi di infinito (le potenze prevalgono sul logaritmo). Si arriva al medesimo risultato applicando il teorema di De L'Hospital. Dunque $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow 0^-$

$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$ (prodotto di due infiniti). Possiamo già affermare che non esistono asintoti obliqui perché la funzione va all'infinito più rapidamente della funzione di primo grado.

- Zeri della funzione $y = 0 \Leftrightarrow x(\ln(x) - \frac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow$ (tenuto conto del dominio) $\ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e^3} \approx 4.48$
- Crescere e decrescere

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{e} \approx 1.65 \quad f(\sqrt{e}) = \sqrt{e} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sqrt{e} = -\sqrt{e}$$



La funzione decresce, presenta un punto a tangente orizzontale in $A \equiv (\sqrt{e}, -\sqrt{e})$ poi cresce e va all'infinito. Dunque il punto A è un minimo assoluto.

Quando $x \rightarrow 0^+$ $f'(x) \rightarrow -8$ e dunque in $(0,0)$ abbiamo un punto a tangente verticale

- Concavità a e convessità

$$f''(x) = \frac{1}{x} \text{ sempre positiva concavità verso}$$

l'alto e assenza di punti di flesso

Si ottiene il diagramma in figura su cui sono stati già riportati anche gli elementi relativi

al punto b

Punto b

Indichiamo con $T \equiv (\sim, f(\sim))$ il punto di tangenza a priori ignoto ma del quale possiamo dire che $f'(\sim) = \frac{\Delta y_{QT}}{\Delta x_{QT}}$ e questa condizione ci consente di determinare il punto T e poi la retta tangente t.

La unicità della retta tangente per Q deriva da semplici considerazioni grafiche relative alla posizione del punto Q.

$$T \equiv (\sim, \sim \ln(\sim) - 3/2 \sim)$$

$f'(\sim) = \ln(\sim) - 1/2$ e dunque applicando la relazione otteniamo:

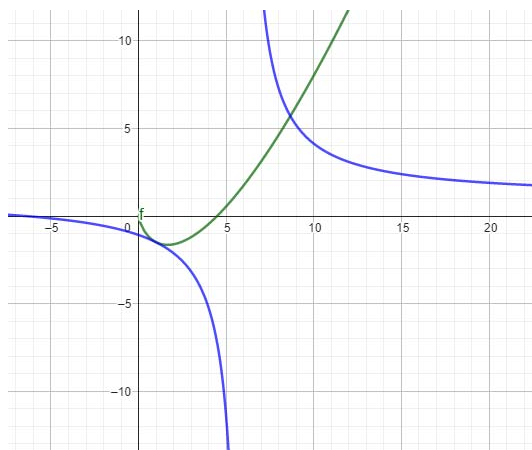
$$\ln(\sim) - 1/2 = \frac{\sim \ln(\sim) - 3/2 \sim + 1}{\sim} \Leftrightarrow \sim \ln(\sim) - 1/2 \sim = \sim \ln(\sim) - 3/2 \sim + 1 \Leftrightarrow \sim = 1$$

Dunque il punto $T \equiv (1, -3/2)$

$f'(1) = -1/2$ e la retta tangente t ha equazione $y = -1/2 x - 1$

Punto c

La funzione $y = fo(x) = \frac{x+h}{x+k}$ rappresenta una famiglia di funzioni omografiche (iperboli equilateri con asintoti paralleli agli assi e con centro di simmetria in $(-h, -k)$)



Il punto di ascissa 1 è il punto $T \equiv (1, -3/2)$ e questa informazione stabilisce una prima relazione sui parametri h e

$$k: -3/2 = \frac{1+h}{1+k} \wedge \Leftrightarrow -3(k+1) = 2(h+1) \wedge k \neq -1$$

La seconda relazione deriva dalla condizione di tangenza $fo'(1) = -1/2$ e per poterla applicare calcoliamo $fo'(x)$.

$$fo'(x) = \frac{1(x+k) - 1(x+h)}{(x+k)^2} = \frac{k-h}{(x+k)^2} \text{ da cui } fo'(1) = \frac{k-h}{(1+k)^2}$$

Dunque la condizione di tangenza corrisponde alla relazione $(k+1)^2 = 2(h-k) \wedge k \neq -1$

Mettiamo a sistema le due relazioni e otteniamo l'equazione di II grado:

$k^2 + 7k + 6 = 0$ che ci porta alle radici -6 e -1. Solo la prima è accettabile e dunque:

$$k = -6 \text{ e } h = 13/2$$

La funzione omografica richiesta ha dunque equazione $f_o(x) = \frac{x+13/2}{x-6}$

Punto d

La funzione $g(x) = \int_1^x f(t) dt$ richiede per la sua determinazione il calcolo dell'integrale indefinito $\int f(t) dt$ che si calcola agevolmente per parti.

$$\int f(t) dt = \int [t \ln t - 3/2 t dt] = \int [\ln t d(t^2/2) - 3/2 t^2/2] = \ln t \cdot \frac{1}{2} t^2 - \int \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{t} dt - \frac{3}{4} t^2 = \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{2} t^2/2 - \frac{3}{4} t^2 = \frac{1}{2} t^2 \ln t - t^2$$

Dunque per il teorema fondamentale del calcolo integrale

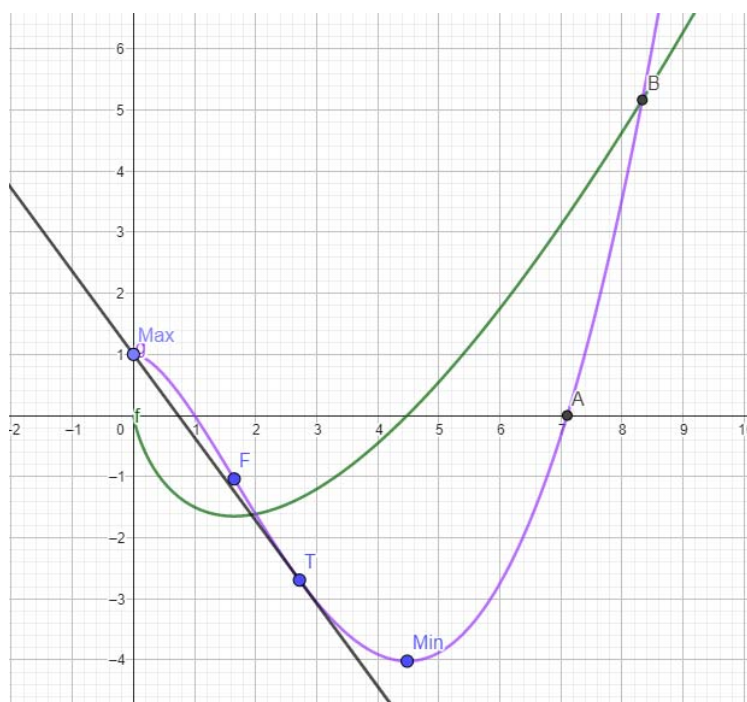
$$g(x) = \int_1^x f(t) dt = \frac{1}{2} x^2 \ln x - x^2 - [0 - 1] = \frac{1}{2} x^2 \ln x - x^2 + 1 = x^2 \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) + 1$$

Si tratta di una funzione continua e derivabile con dominio $x > 0$ e che presenta, per come è stata definita, la caratteristica di avere $g'(x) = f(x)$ e $g''(x) = f'(x)$ non occorre pertanto rifare tutti i conti e ci si può limitare all'essenziale

$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow g(x) \rightarrow 1$ tenuto conto della gerarchia degli infiniti. Trattandosi di una discontinuità eliminabile poniamo per definizione $g(0) = 1$

$x \rightarrow +\infty \Rightarrow g(x) = x^2(\ln x - 1) + 1 \rightarrow +\infty$ senza presentare asintoti obliqui

Inoltre si vede immediatamente che per $x = 1$ si ha $y = 0$



$g'(x) = f(x)$ si hanno pertanto due punti critici nei punti di annullamento della funzione $f(x)$ cioè in $x = \sqrt{e^3}$ e per $x=0$ dove si ha tangente orizzontale. Dunque $g(x)$ decresce tra 0 e $x = \sqrt{e^3}$ e poi cresce.

Si hanno un massimo relativo in $x=0$ e un minimo relativo in $x = \sqrt{e^3}$ con ordinata $g(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - x^2 + 1 = \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}} - e^3 + 1 = 1 - \frac{1}{4} e^3 \approx -4.02$

$\text{Max} \equiv (0, 1)$ e $\text{Min} \equiv (\sqrt{e^3}, 1 - \frac{1}{4} e^3)$

Inoltre poiché $g(x) \rightarrow +\infty$ possiamo affermare in base alla continuità che la funzione $g(x)$ taglia l'asse x in un altro punto A collocato oltre il minimo

$g''(x) = f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}$ si annulla in $x = \sqrt{e}$ con $g(\sqrt{e}) = 1 - \frac{3}{4}e \approx -1.04$. Si ha dunque un solo flesso $F \equiv (\sqrt{e}, 1 - \frac{3}{4}e)$. Per $x < \sqrt{e}$ concavità verso il basso. Il flesso risulta necessario per il passaggio dal massimo al minimo.

Attraverso considerazioni sui gradi di infinito possiamo affermare che g incontra f in un secondo punto B posto oltre A e va all'infinito più rapidamente di f .

Nel punto di ascissa e si ha $g(e) = 1 - \frac{1}{2}e^2 \approx -2.69$ e $g'(e) = -\frac{1}{2}e \approx -1.36$

La retta tangente richiesta ha equazione $y - 1 + \frac{1}{2}e^2 = -\frac{1}{2}e(x - e) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}e x + 1$

Osservazioni

Problema in cui si mescolano conoscenze di analisi di vario tipo e che avrebbe meritato una formulazione delle richieste più precisa (l'annoso problema su cosa sia obbligatorio e cosa sia accessorio in uno studio di funzione).

Problema 2

Sono assegnate due funzioni polinomiali $y = P(x)$ e $y = Q(x) = kP(x)$, con k parametro reale, i cui grafici rappresentativi sono mostrati in figura in fondo al problema.

È noto che:

- $P''(x) = 12x^2 - 24x$
- hanno entrambe nell'origine degli assi un flesso a tangente orizzontale
- il valore massimo assunto dalla funzione Q è uguale a 274.

a) Determinare l'espressione analitica delle funzioni $P(x)$ e $Q(x)$.

b) Determinare dominio, zeri, segno, estremi e flessi delle funzioni $y = P(x) \cdot Q(x)$ e $y = \frac{1}{P(x)}$

D'ora in avanti, si assuma che

$$P(x) = x^4 - 4x^3.$$

c) Calcolare l'area della regione R delimitata dal grafico della funzione P e dall'asse delle ascisse.

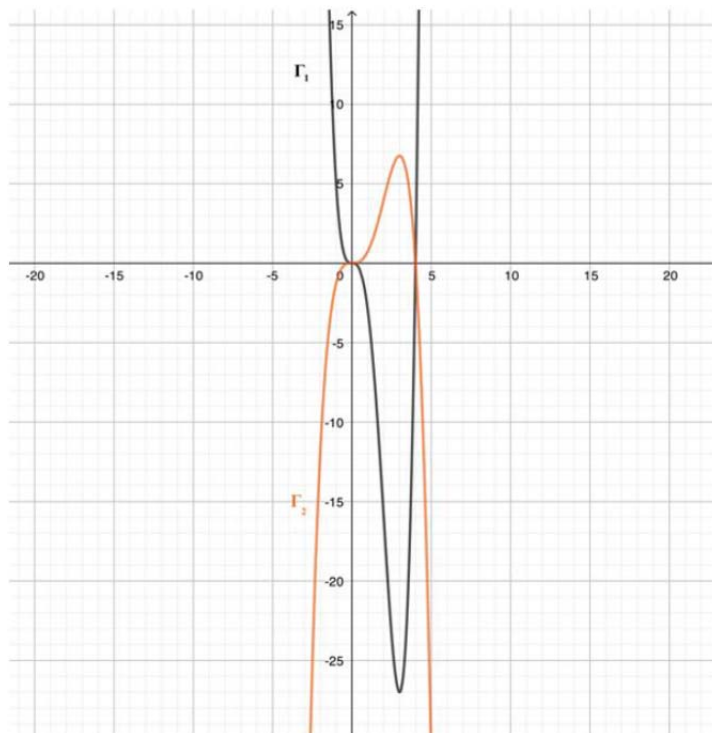
d) Verificare che, per $x > 4$, la funzione

$$F(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{x-4}{x} \text{ è una primitiva di } \frac{x^2}{P(x)}.$$

Esprimere, in funzione di t , con $t \geq 5$,

$$\text{l'integrale } \int_5^t \frac{x^2}{P(x)} dx \text{ e calcolarne il limite}$$

per $t \rightarrow +\infty$ fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.



Punto a

Dal fatto che $P''(x)$ è un polinomio di II grado possiamo formare che $P(x)$ sarà un polinomio di IV grado. Inoltre il passaggio per l'origine e il flesso a tangente orizzontale richiedono che sia:

$$P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$$

$P'(x) = \int (12x^2 - 24x) dx = 4x^3 - 12x^2 + a$ dove a è una costante arbitraria e poiché la derivata prima si deve annullare nell'origine sarà $a=0$

$P(x) = \int (4x^3 - 12x^2) dx = x^4 - 4x^3 + b$ e poiché la funzione passa per l'origine anche $b=0$

Dunque $P(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4)$

Abbiamo una radice tripla nell'origine e una radice singola in $x=4$ in accordo con il diagramma fornito per Γ_1

La funzione Γ_2 multipla secondo k di Γ_1 ha lo stesso andamento della prima a meno del fattore 3 di scala k che ci proponiamo di determinare.

$P'(x) = 4x^2(x-3)$ e $Q'(x) = k 4x^2(x-3)$ la radice di molteplicità 1 (punto di massimo) si ha in $x=3$ e per avere $Q(3) = 27/4$ sarà:

$Q(3) = k 27 (-1) = 27/4 \Rightarrow k = -1/4$ e dunque $Q(x) = -1/4 x^3(x-4)$

Punto b

Punto b1

Sia $y = f(x) = P(x) Q(x) = -1/4 x^6(x-4)^2$

$D =]-\infty, +\infty[$ funzione sempre negativa o nulla

Zeri in $x=0$ con molteplicità 6 e in $x=4$ con molteplicità 4 (punti a tangente orizzontale)

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = -1/4 [6x^5(x-4)^2 + 2(x-4)x^6] = -1/4 x^5(x-4) [6x - 24 + 2x] = -1/4 x^5(x-4)(8x - 24) = -2x^5(x-4)(x-3) = -2x^5(x^2 - 7x + 12)$

punti a tangente orizzontale con cambiamento di segno nell'intorno in $x=0$, $x=3$ e $x=4$

Tenuto conto che la funzione viene da $-\infty$ e che nell'intorno dei punti critici la derivata prima cambia di segno la derivata prima è positiva in $]-\infty, 0[\cup]3, 4[$ e negativa in $]0, 3[\cup]4, +\infty[$

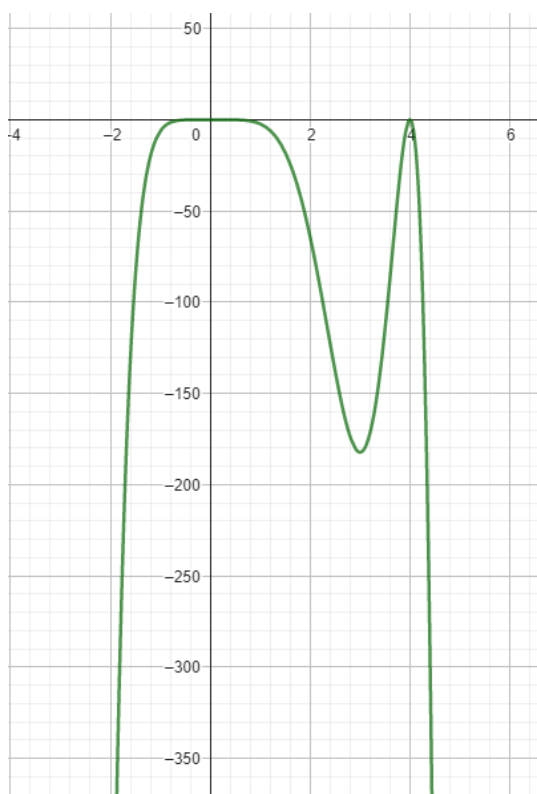
Avremo dunque dei massimi relativi a 0 e 4 e un minimo a

3 con $f(3) = -1/4 3^6 = -\frac{729}{4}$

$\text{Max1} \equiv (0, 0)$, $\text{Min1} \equiv (3, -\frac{729}{4})$, $\text{Max2} \equiv (4, 0)$

Calcoliamo $f''(x) = -2[5x^4(x^2 - 7x + 12) + x^5(2x - 7)] = -2x^4(5x^2 - 35x + 60 + 2x^2 - 7x) = -2x^4(7x^2 - 42x + 60)$

I punti di annullamento sono $x=0$ (radice pari e dunque non c'è cambio di segno nell'intorno, ovvero non c'è un flesso) e le soluzioni della equazione di II grado $7x^2 - 42x + 60 = 0$



$\Delta/4 = 21^2 - 420 = 21 \Rightarrow x = \frac{21 \pm \sqrt{21}}{7}$ nell'intorno delle radici la derivata seconda cambia segno e dunque si tratta di flessi

Punto b2

Sia $y = g(x) = \frac{1}{p(x)} = \frac{1}{x^4 - 4x^3} = \frac{1}{x^3(x-4)}$

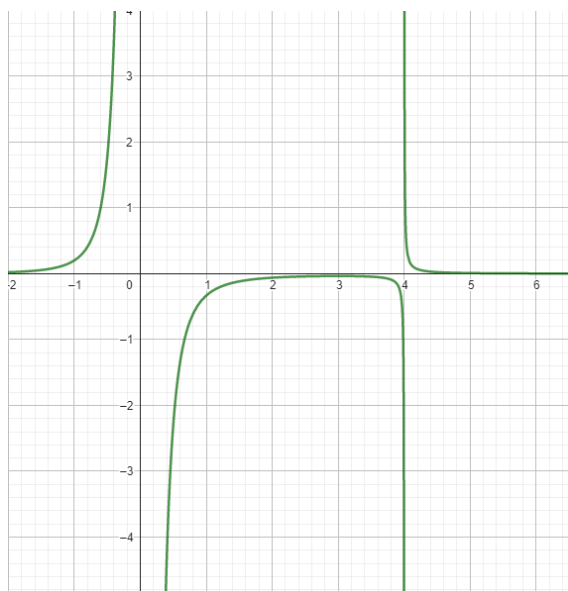
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \wedge x \neq 4\}$

Non ci sono punti di annullamento, la funzione cambia segno in 0 e in 4

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0^+$

Asintoti verticali in $x = 0$ e $x = 4$

$g'(x) = -\frac{1}{x^6(x-4)^2} [3x^2(x-4) + x^3] = -\frac{1}{x^4(x-4)^2} [3x-12+x] = -\frac{4(x-3)}{x^4(x-4)^2}$



$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ si ha un massimo a tangente orizzontale

nel punto $x = 3$; $g(3) = -\frac{1}{27}$

$g''(x) = -4 \frac{x^4(x-4)^2 - (x-3)[4x^3(x-4)^2 + x^4 2(x-4)]}{x^8(x-4)^4} = -$

$4 \frac{x^4(x-4)^2 - (x-3)2x^3(x-4)[2(x-4) + x]}{x^8(x-4)^4} =$

$= -4 \frac{x^3(x-4)}{x^8(x-4)^4} [x(x-4) - 2(x-3)(3x-8)] = -4 \frac{x^2 - 4x - 2(3x^2 + 24 - 17x)}{x^5(x-4)^3}$

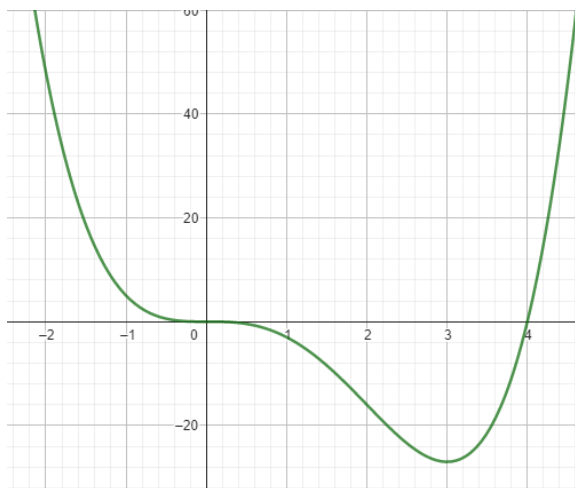
$= 4 \frac{5x^2 - 30x + 48}{x^5(x-4)^3}$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 30x + 48 = 0$

$\Delta/4 = 15^2 - 5 \cdot 48 = 225 - 240 < 0$ il discriminante è sempre negativo e dunque non ci sono flessi mentre la concavità

cambia negli intervalli di 0 e di 4

Punto c



L'area richiesta è data dal modulo dell'integrale definito

$\int_0^4 (x^4 - 4x^3) dx$ e ciò ci porta a alla integrazione indefinita di

$x^4 - 4x^3$ pari a $F(x) = \frac{1}{5} x^5 - x^4 + k$

L'area richiesta è data da $|F(4) - F(0)| = \frac{256}{5}$

Punto d

Per verificare che $F(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{x-4}{x}$ è una primitiva di $G(x) = \frac{x^2}{x^4 - 4x^3}$ Basta calcolare $F'(x)$

$$F'(x) = \frac{1}{4} \frac{x}{x-4} \frac{x-(x-4)}{x^2} = \frac{1}{4} \frac{x}{x-4} \frac{4}{x^2} = \frac{1}{x(x-4)} = \frac{x^2}{x^3(x-4)}$$

Poiché $F(x)$ è una primitiva di $G(x)$

$$f(t) = \int_5^t \frac{x^2}{P(x)} dx = F(t) - F(5) = \frac{1}{4} \left[\ln \frac{t-4}{t} - \ln \frac{1}{5} \right] = \frac{1}{4} \ln \frac{5(t-4)}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{1}{4} \ln 5$$



$f(t)$ rappresenta l'area compresa tra la funzione e l'asse x nell'intervallo $[5, t]$

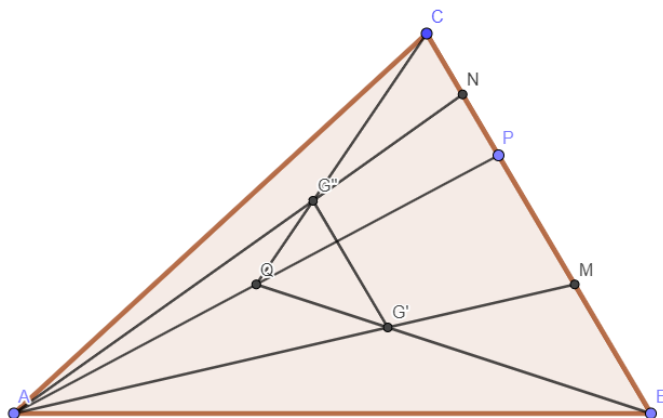
Il limite corrisponde ad un integrale generalizzato e rappresenta l'area finita di una porzione di piano infinitamente estesa in cui la ordinata tende a zero in maniera sufficientemente rapida da garantire un risultato finito nonostante

l'intervallo di integrazione sia infinito.

Quesito 1

Dato un triangolo ABC , sia P un punto del lato BC e siano G' e G'' i baricentri dei triangoli ABP e ACP . Dimostrare che il segmento $G'G''$ è parallelo a BC .

Soluzione



Nel generico triangolo ABC , collochiamo il punto P generico e consideriamo i due triangoli APB e APC

Tracciamo le mediane attraverso i punti medi M , Q e N ; la loro intersezione individua i due baricentri G' e G''

Ricordiamo che il baricentro divide la mediana in due parti l'una doppia dell'altra.

Pertanto $AG'' = 2 G''N$ e $AG' = 2 G'M$ o anche $AG'' : AN = AG' : AM = 2:3$

Consideriamo ora i triangoli AMN e $AG'G''$

Poiché $AG'' : AN = AG' : AM$ ne consegue che i due triangoli sono simili e dunque $G'G'' \parallel MN$ c.v.d.

Osservazione

Si è preferito far riferimento alle similitudini rispetto ai meno noti teoremi diretti e inversi sui fasci di rette parallele tagliate da una trasversale.

Quesito 2

Un dado regolare a 6 facce viene lanciato 8 volte. Qual è la probabilità di ottenere tre volte la faccia “5”? Qual è la probabilità di ottenere la faccia “5” per la terza volta all’ottavo lancio?

Soluzione

Il quesito altro non è che una applicazione della distribuzione binomiale secondo cui se un evento ha probabilità p la probabilità di ottenerlo k volte su n prove è data da $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

La probabilità di ottenere un particolare valore in un dado equo è $1/6$; il numero di prove è 8

La probabilità di ottenere tre volte la faccia 5 è dunque

$$P(3,8) = \binom{8}{3} (1/6)^3 (5/6)^5 = \frac{1050000}{10077696} = 0.10419$$

Per ottenere una particolare faccia (5) la terza volta nell’ottavo lancio bisogna richiedere che nei primi 7 lanci la faccia 5 esca 2 volte e poi imporre che nell’ottavo lancio esca il 5

$$P(\text{esca il 5 per la III volta all’ottavo lancio}) = \binom{7}{2} (1/6)^2 (5/6)^5 \cdot 1/6 = \frac{131250}{3359232} = 0,039071$$

Quesito 3

Determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio $r=5\sqrt{2}$ tangenti nel punto $P(-1,2,3)$ al piano di equazione $3x+4y-5z+10=0$.

Soluzione

Le superfici cercate hanno il centro sulla normale al piano passante per P . Sappiamo inoltre che la direzione della normale ad un piano vettore $\vec{n}$ è individuata dai tre coefficienti della equazione del piano, cioè: $\vec{n} \equiv (3,4,-5)$

Se indichiamo con $Q \equiv (x,y,z)$ un generico punto della retta normale al piano e teniamo presente che essa passa per P avremo individuato un vettore $\vec{PQ} \equiv (x+1,y-2,z-3)$

Basta ora scrivere che il vettore $\vec{PQ}$ è proporzionale a $\vec{n}$, in simboli $\vec{PQ} = t \vec{n}$

Avremo dunque l’equazione della retta in forma parametrica:
$$\begin{cases} x+1=3t \\ y-2=4t \\ z-3=-5t \end{cases}$$

Il centro C della sfera corrisponde al punto Q il cui parametro t è tale che $\overline{CP}^2 = 50$

$$9t^2 + 16t^2 + 25t^2 = 50 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$$

Si ottengono due sfere, da parti opposte rispetto al piano e i cui centri hanno coordinate

$$\begin{cases} x=3t-1 \\ y=4t+2 \\ z=-5t+3 \end{cases} \Rightarrow (2,6,-2) \vee (-4,-2,8)$$

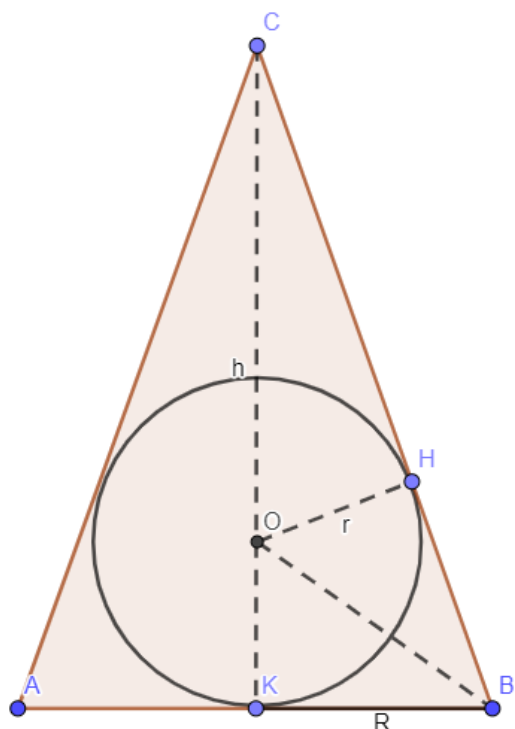
Le equazioni delle due sfere sono pertanto:

$$(x-2)^2+(y-6)^2+(z+2)^2=50 \text{ oppure } (x+4)^2+(y+2)^2+(z-8)^2=50$$

Quesito 4

Una sfera, di raggio r fissato, è inscritta nel cono S di volume minimo. Qual è la distanza del vertice del cono dalla superficie della sfera?

Soluzione



Per la evidente simmetria assiale possiamo rappresentare il problema nel piano.

Indichiamo con r il raggio della sfera, con R il raggio di base del cono e con h la altezza del cono.

Già costruendo la figura si osserva che solo due di questi tre parametri sono liberi (e dunque cercheremo una relazione tra essi), inoltre uno dei tre parametri corrisponde alla scelta della unità di misura e senza perdere di generalità potremmo porlo pari a 1 (cosa che non faremo per non perdere la omogeneità delle equazioni).

Dunque in generale abbiamo un solo parametro libero che sarà fissato imponendo la condizione di massimo o minimo. Questo problema, come molti di questo genere si presta anche ad una agevole soluzione trigonometrica in cui si può scegliere come variabile incognita o l'angolo alla base o la semi ampiezza di quello al vertice.

Osserviamo che per ragioni geometriche le nostre variabili

necessariamente positive sono soggette alla ulteriore restrizione $h > 2r$

Il volume del cono, da sottoporre a condizione di minimo, vale:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Ma, come già detto tra i tre parametri vale una semplice relazione geometrica deducibile dalla similitudine tra CKB e OHC

$$\frac{h-r}{r} = \frac{\sqrt{R^2+h^2}}{R}$$

Visto che nella relazione sul volume compare R^2 conviene eliminare questa variabile (il che consente di non introdurre radicali nei conti).

$(h-r)R = r\sqrt{R^2+h^2}$ da cui elevando a quadrato: $(h-r)^2 R^2 = r^2(R^2+h^2)$. Esplicitiamo R^2

$$R^2(h^2+r^2-2hr-r^2) = r^2 h^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{r^2 h^2}{h^2-2hr} = \frac{r^2 h}{h-2r} \text{ (si presti attenzione alla omogeneità della espressione,$$

strumento di controllo verso banali errori di calcolo). Possiamo ora esprimere il volume rispetto ad h e r .

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \frac{r^2 h}{h-2r} h = \frac{1}{3} \pi \frac{r^2 h^2}{h-2r}$$

Supponiamo che r faccia da unità di misura e deriviamo rispetto ad h

$$V'(h) = \frac{1}{3} \pi \frac{2hr^2(h-2r) - r^2 h^2}{(h-2r)^2} = \frac{1}{3} \pi \frac{h^2 r^2 - 4hr^3}{(h-2r)^2} = \frac{1}{3} \pi r^2 \frac{h(h-4r)}{(h-2r)^2}$$

$V' \geq 0$ per valori esterni all'intervallo delle radici, il che tenuto conto delle limitazioni sulle variabili $\Rightarrow h \geq 4r$

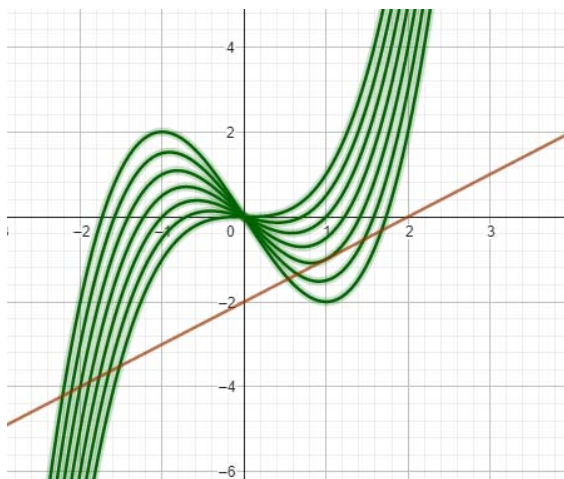
Dunque si ha un minimo per $h = 4r$

Mentre la distanza richiesta pari ad $h - 2r$ vale $2r$ e in quel caso $R^2 = \frac{r^2 h}{h-2r} = \frac{4r^3}{2r} = 2r^2$ e dunque $R = \sqrt{2}r$

Quesito 5

Determinare il valore del parametro reale k in modo che la retta di equazione cartesiana $y = x - 2$ risulti tangente alla curva $y = x^3 + kx$.

Soluzione



La famiglia di cubiche proposta passa sempre per l'origine dove presenta il punto di flesso ed ogni funzione è di tipo dispari. Per opportuni valori di k presenta un massimo ed un minimo mentre negli altri casi è presente solo il flesso.

Nel nostro caso $f'(x) = 3x^2 + k$ che si annulla solo per valori di k negativo

In figura sono rappresentate alcune curve della famiglia oltre alla retta $y = x - 2$

Si vede subito che la tangenza può avvenire solo nel quarto quadrante mentre la ulteriore intersezione si ha nel III. Si vede anche che per certi valori di k la

intersezione è una sola nel III quadrante. In quel caso il polinomio di III grado si scompone in uno di I e uno di II con il Δ negativo.

Indicato con x_T l'ascissa del punto di tangenza dovrà essere : $f'(x_T) = 1 \Leftrightarrow 3x_T^2 + k = 1 \Leftrightarrow x_T = \pm \sqrt{\frac{1-k}{3}}$

Possiamo scartare la soluzione negativa perché l'unico punto di tangenza possibile è nel IV quadrante.

Poiché il punto appartiene simultaneamente alla retta e alla funzione avremo la condizione che ci consente di determinare il valore di k . Precisamente per la appartenenza alla funzione:

$$y_T = x_T^3 + k x_T = \sqrt{\frac{1-k}{3}} \frac{1-k}{3} + k \sqrt{\frac{1-k}{3}} = \sqrt{\frac{1-k}{3}} \left(\frac{1-k}{3} + k \right) = \sqrt{\frac{1-k}{3}} \frac{2k+1}{3}$$

Per la appartenenza alla retta

$$y_T = x_T - 2 = \sqrt{\frac{1-k}{3}} - 2$$

Si ottiene così la equazione in k :

$$\sqrt{\frac{1-k}{3} \frac{2k+1}{3}} = \sqrt{\frac{1-k}{3}} - 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-k}{3} \left(\frac{2k+1}{3} - 1\right)} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-k}{3} \frac{2k-2}{3}} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-k}{3} \frac{1-k}{3}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(1-k)^3} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow (1-k)^3 = 27 \Leftrightarrow 1-k = 3 \Leftrightarrow k = -2$$

La funzione richiesta è $y = x^3 - 2x$

Il punto di tangenza è $T \equiv (1, -1)$

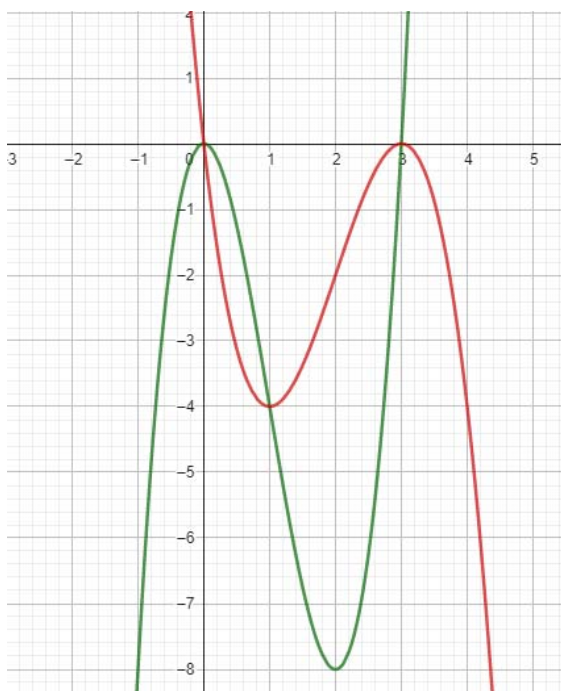
Osservazione

Quesito inusuale abbastanza complesso sul piano tecnico

Quesito 6

Scrivere una funzione polinomiale $y=p(x)$ di terzo grado che si annulli solo per $x=0$ e per $x=3$, il cui grafico sia tangente all'asse x in un punto e passi per $P(1, -4)$. Determinare l'area della regione piana limitata compresa tra l'asse x ed il grafico della funzione polinomiale individuata.

Soluzione



Poiché la funzione è tangente all'asse x uno degli zeri è una radice doppia; si hanno pertanto due possibilità

$f(x) = kx^2(x-3)$ e imponendo il passaggio per P si ha $-4 = -2k$ da cui $k = 2$

$g(x) = kx(x-3)^2$ e imponendo il passaggio per P si ha $-4 = 4k$ da cui $k = -1$

Per comodità del lettore si riportano i diagrammi delle due funzioni.

Sia $F(x) = \int 2x^2(x-3) dx$ allora $S_f = |F(3) - F(0)|$

$$F(x) = 2 \int (x^3 - 3x^2) dx = 2(x^4/4 - 3x^3/3) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$$

$$S_f = |81/2 - 54| = 27/2$$

Il calcolo di S_g è analogo e porta a $27/4$

Quesito 7

Calcolare $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x (t^2-1)e^{2t} dt}{(x-1)^2}$

Soluzione

Quando $x \rightarrow 1$ il numeratore tende a zero (visto che gli estremi di integrazione coincidono) e si può dunque applicare il teorema di De l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x (t^2-1)e^{2t} dt}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)e^{2x}}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)e^{2x}}{2} = e^2$$

Non è assolutamente conveniente rispetto al quesito proposto calcolare l'integrale indefinito perché alla fine si torna da una forma di indecisione più complessa da trattare. Lo propongo solo come esercizio sugli integrali indefiniti

$$\int e^{2t} dt = \frac{1}{2} \int d(e^{2t}) = \frac{1}{2} e^{2t}$$

Integrazione per parti

$$\int t^2 e^{2t} dt = \frac{1}{2} \int t^2 d(e^{2t}) = \frac{1}{2} [t^2 e^{2t} - \int 2t e^{2t} dt] = \frac{1}{2} [t^2 e^{2t} - \int t d(e^{2t})] = \frac{1}{2} [t^2 e^{2t} - (te^{2t} - \int e^{2t} dt)] = \frac{1}{2} [t^2 e^{2t} - (te^{2t} - \frac{1}{2} e^{2t})] = \frac{1}{2} e^{2t} (t^2 - t + \frac{1}{2})$$

E dunque l'integrale indefinito (differenza dei due) vale: $\frac{1}{2} e^{2t} (t^2 - t - \frac{1}{2})$

L'integrale definito al numeratore dà come risultato

$$F(x) - F(1) = \frac{1}{2} e^{2x} (x^2 - x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} e^2 (-\frac{1}{2}) \text{ e quando } x \rightarrow 1 \text{ il numeratore tende a } 0.$$

Osservazione

In un tema d'esame meglio scegliere una formulazione non fuorviante del tipo "senza procedere alla integrazione indefinita, calcolare ..."

Quesito 8

Sia f una funzione reale di variabile reale continua e derivabile in un intervallo (a, b) . Si considerino le seguenti affermazioni

A: " f ha un punto di massimo o di minimo locale in $x_0 \in (a, b)$ "

B: " $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ "

Stabilire quali fra le seguenti affermazioni sono vere per ogni f funzione continua e derivabile in un intervallo (a, b) .

1. $A \Rightarrow B$

2. $B \Rightarrow A$

3. $A \Leftrightarrow B$

4. $B \Leftrightarrow A$

Motivare opportunamente la risposta facendo riferimento a teoremi o controesempi

Soluzione

Ricordo in premessa che la implicazione significa che non può mai accadere che la premessa sia vera e la conseguenza sia falsa

$A \Rightarrow B$ è vera. Infatti se c'è un massimo o minimo relativo in un punto interno e la funzione è ovunque derivabile segue necessariamente la stazionarietà

$B \Rightarrow A$ è falsa perché il punto stazionario potrebbe essere un flesso a tangente orizzontale di una funzione monotona

$A \Leftrightarrow B$ sarebbe vera solo se le due implicazioni fossero entrambe vere o entrambe false e la risposta 2 ci dice che non è così

$B \Leftrightarrow A$ è falsa perché la relazione di coimplicazione è simmetrica e dunque 3 e 4 devono avere lo stesso valore di verità